

Von der Punkt- zur Flächenlösung:

Simulation eines vertikalen magnetischen Dipols mittels einer analytischen Punktlösung unter Verwendung eines Quadraturverfahrens

S.Malecki, R.-U. Börner und K. Spitzer
Institut für Geophysik und Geoinformatik, TU Bergakademie Freiberg

1 Zusammenfassung

In der Geoelektromagnetik werden oft großflächige Quellen, beispielsweise Leiterschleifen, näherungsweise als Punktquellen aufgefasst. Diese Annahme ist jedoch nur für hinreichend große Entfernungen zwischen Quelle und Messpunkt zulässig.

Da die Messung mit relativ kleinen Spulen durchgeführt werden, die Sendespulen aber bis zu $10\,000\text{ m}^2$ Spulenfläche aufweisen, liegt es nahe, das Reziprozitätsprinzip auszunutzen, um Sender und Empfänger zu vertauschen. So wird das Feld eines Sendedipols am Ort des eigentlichen Empfängers genutzt, um über die Lösung dieses Dipols am Ort des eigentlichen Senders zu integrieren. Die Integrationsfläche entspricht dabei der Fläche der eigentlichen Sendeschleife. Dabei kann die Lösung des Dipols entweder analytisch über homogenen oder geschichteten Leitfähigkeitsmodellen oder numerisch über beliebigen Leitfähigkeitsverteilungen berechnet werden.

Um den Einfluss der Spulengeometrie abzuschätzen, genügt meist die Auswertung der analytischen Lösung. Die numerische Integration geschieht dabei durch eine zweidimensionale Gaußquadratur. Eine Konvergenzstudie zeigt die Abhängigkeit der Genauigkeit dieses Ansatzes von der Knotenzahl der Gaußquadratur in Verbindung mit ausgewählten Entfernungen zwischen Senderzentrum und Messpunkt.

Schlagwörter: Gauß-Legendre-Quadratur, magnetischer Dipol, analytische Punktlösung, Konvergenz

2 Einleitung

Das Institut für Geophysik und Geoinformatik der TU Bergakademie Freiberg verfügt über einen schnellen analytischen 1-D Code zur Berechnung transienter elektromagnetischer Felder in horizontal geschichteten Medien für einen punktförmigen, vertikalen magnetischen Dipol.

In der Praxis sind diese magnetischen Quellen nicht punktförmig, sondern großflächige, auf der Erdoberfläche ausliegende Leiterschleifen. Es sollen die Grenzen der häufig getroffenen Annahme einer Punktquelle gezeigt werden. Weiterhin wird das Konvergenzverhalten einer 2-D Gauß-Legendre-Quadratur dieser Punktlösung in Abhängigkeit von Knotenzahl und Abstand zum VMD-Zentrum vorgestellt.

Auf Grundlage der Konvergenzstudie können Empfehlungen für eine hinreichende Anzahl an Quadraturpunkten gegeben werden.

3 Modellbeschreibung

Grundlage der Simulationsrechnungen ist ein analytischer 1-D Vorwärtsoperator für die Berechnung der Felder eines punktförmigen, vertikalen magnetischen Dipols (VMD). Eine quadratische Drahtschleife ($100\text{ m} \times 100\text{ m}$) auf einem homogenen Halbraum ($\rho = 100\ \Omega\text{ m}$) bilden den zu approximierenden VMD und das zugehörige Leitfähigkeitsmodell. Die Anzahl n der Quadraturpunkte (Knoten) ist variabel. Die Punktaufteilung innerhalb der Fläche des VMD (vgl. Abbildung 1) erfolgt durch eine Gauß-Legendre-Quadratur.

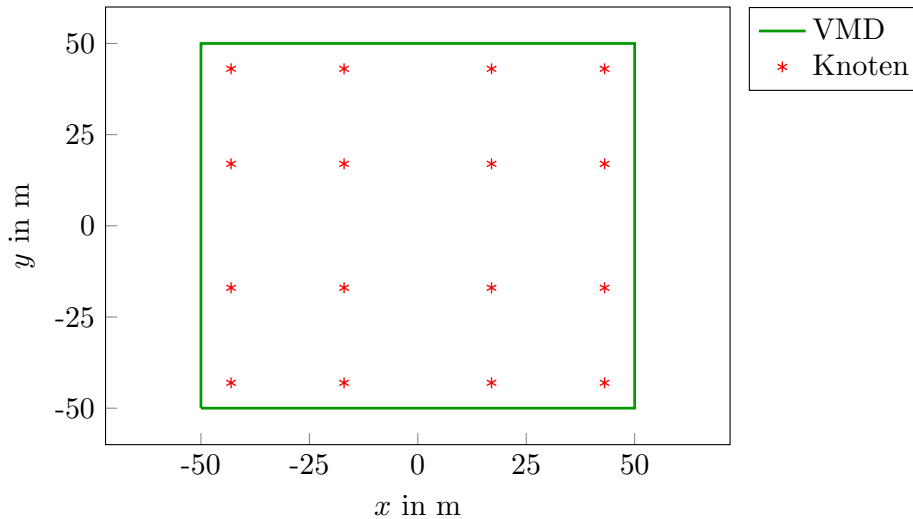


Abbildung 1: Beispiel zur Verteilung der Knoten innerhalb der Fläche des VMD: Die Anordnung der Knoten wird durch eine 2-D Gauß-Legendre-Quadratur festgelegt. Im Beispiel hat diese Quadratur den Polynomgrad $n = 4$. Dies entspricht 4×4 Knoten innerhalb der Fläche des VMD.

In der Konvergenzstudie wird die Anzahl der Knotenpunkte von $n = 1$ bis auf $n = 35$ erhöht und mit einer Quadratlösung für $n = 100$ verglichen. Diese Referenzlösung umfasst 10 000 Punkte innerhalb einer Fläche von $10\,000\text{ m}^2$. Die verschiedenen Quadratlösungen werden für steigende Abstände zwischen VMD-Zentrum und Messpunkt berechnet (vgl. Abbildung 2).

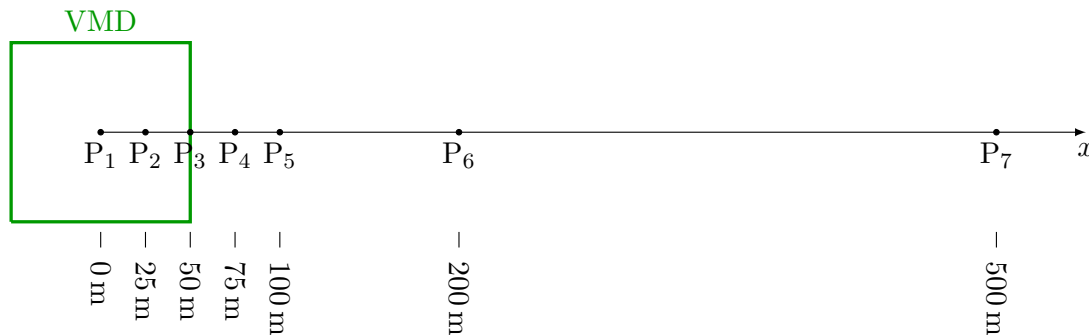


Abbildung 2: Draufsicht: Die Quadratur des quadratischen VMD (grün, $100\text{ m} \times 100\text{ m}$) wird an den Beobachtungspunkte P_i ausgewertet. Sie liegen sowohl innerhalb als auch außerhalb der Fläche des VMD und sind in wachsenden Abständen entlang der x -Achse verteilt.

4 Theorie

Die Gauß-Quadratur ist ein Verfahren zur numerischen Integration. Die Stammfunktionen sind meist unbekannt oder nur mit großem Aufwand berechenbar. Das Ziel der Gauß-Quadratur ist eine möglichst gute Näherung für das Integral I einer Funktion $g(x)$ zu finden.

In einem ersten Schritt wird das Integral der Ausgangsfunktion $g(x)$ durch das Integral

$$I = \int_a^b f(x) \rho(x) dx = \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

ersetzt und numerisch gelöst. Die stetige Gewichtsfunktion $\rho(x)$ ist dabei stets positiv.

Im zweiten Schritt erfolgt die Approximation der Funktion $f(x)$ durch ein Polynom n -ten Grades

$$I = \int_a^b f(x) \rho(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) \rho(x) dx = I_n, \quad (2)$$

wobei der Grad n des Polynoms die Genauigkeit der Approximation direkt beeinflusst. Das Polynom $p_n(x)$ lässt sich innerhalb bestimmter Grenzen durch

$$\int_{-1}^1 p_n(x) \rho(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \omega_i \quad (3)$$

exakt numerisch integrieren. Werden als Polynomfunktion $p_n(x)$ Legendre-Polynome verwendet, kann die Gewichtsfunktion im normierten Intervall $[-1, 1]$ durch $\rho(x) \equiv 1$ definiert werden. Das Gleichungssystem (3) ist dann eindeutig lösbar und dessen Gewichte ω_i sind stets positiv (vgl. Bärwolff [2007]).

Aus der eindimensionalen Quadraturformel (3) lässt sich eine Gauß-Quadratur für einen Rechteckbereich konstruieren. Die Gewichte ω_i werden nun als Vektoren entlang der x - bzw. y -Achse

$$\boldsymbol{\omega}_x = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^\top \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_y = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m]^\top \quad (4)$$

aufgefasst. Die Matrix

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_x \cdot \boldsymbol{\omega}_y^\top \quad (5)$$

beinhaltet alle Gewichte im Integrationsgebiet (vgl. [Engeln-Müllges et al., 2011]). Gleichzeitig sind mit den Vektoren

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^\top \quad (6)$$

die Koordinaten der Knotenpunkte innerhalb des Integrationsgebietes gegeben. Ein bestimmtes Zweifachintegral kann durch die Näherung

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Omega_{i,j} h(x_i, y_j) \quad (7)$$

numerisch berechnet werden. Die Berechnung erfolgt zunächst im normierten Intervall $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Es lassen sich jedoch auch Flächenintegrale mit den Integrationsgrenzen $[a, b] \times [c, d]$

$$\int_a^b \int_c^d h(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Omega_{i,j} h\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}, \frac{d-c}{2}y_j + \frac{c+d}{2}\right) \quad (8)$$

auf dieses normierte Intervall abbilden.

5 Konvergenzstudie

Die Konvergenzstudie zeigt das Fehlerverhalten verschieden genauer Approximationen des VMD bezüglich eines Referenzdipols. Der Referenzdipol ist durch eine Gaußquadratur mit $n \times n = 100 \times 100$ Knoten approximiert. In der Fläche des quadratischen VMD ($10\,000\text{ m}^2$) sind somit $10\,000$ Knotenpunkte eingetragen.

Beginnend mit $n = 1$ Knoten, wird für jeden Punkt P_i (vgl. Abbildung 2) die Quadratlösung berechnet und mit der Referenzlösung verglichen. Die Norm der Differenz

$$\Delta \dot{B} = \left\| \dot{B}_{100} - \dot{B}_n \right\|_2 \quad (9)$$

ist in Abbildung 3 dargestellt.

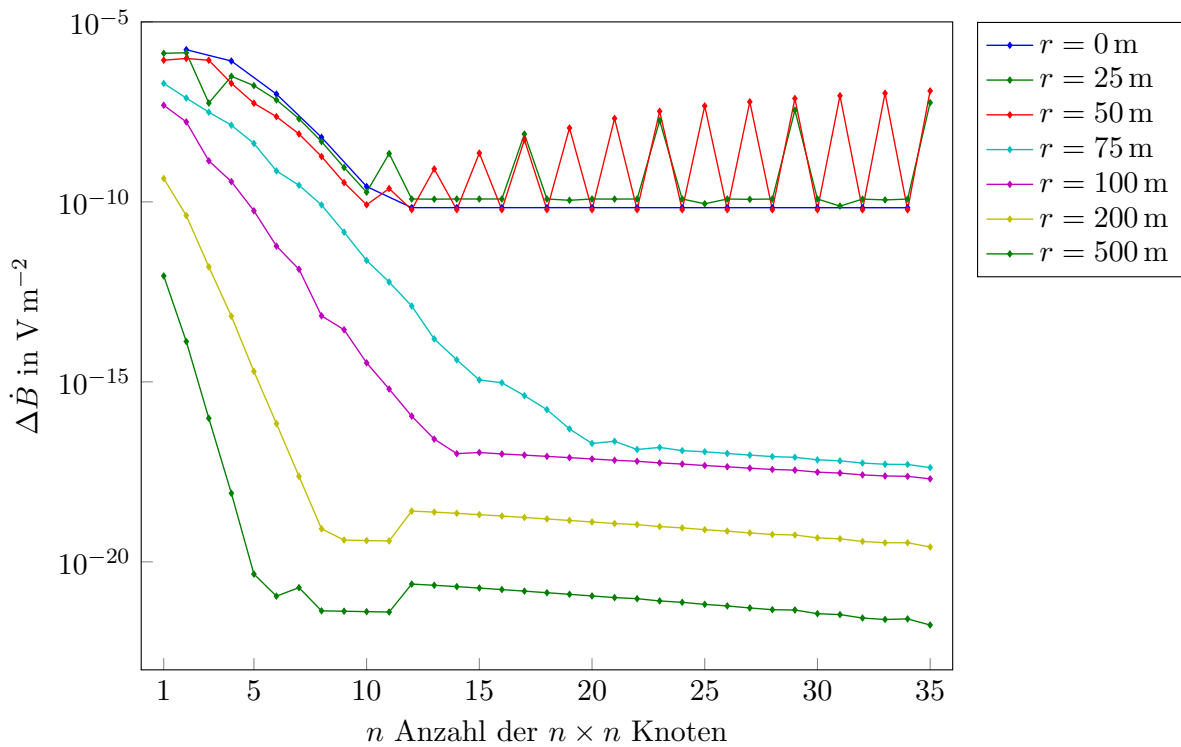


Abbildung 3: Die Abweichungen des Quadraturergebnisses von der Referenzdipollösung wurden für die Abstände $0\text{ m} \leq r \leq 500\text{ m}$ bei $z = 0\text{ m}$ berechnet. Als Referenz dient ein Dipol, der mit 100×100 Gaußpunkten approximiert wurde. Das Hintergrundmodell ist ein homogener Halbraum mit $\rho = 100\ \Omega\text{ m}$.

In Abbildung 3 beginnt der Fehler der Lösungen für $r = 25\text{ m}$ und $r = 50\text{ m}$ ab einer Knotenanzahl von $n = 10$ zu oszillieren. Dies ist im zufälligen Zusammentreffen der Punkte P_2 bzw. P_3 mit Quadraturpunkten begründet. (vgl. Abbildung 4 und Abbildung 5)

Diese Punkte liegen nicht exakt aufeinander, jedoch dicht genug um einen großen, die Quadratlösung verfälschenden, Einfluss zu haben.

Sollten sie sich zufällig an gleicher Stelle befinden, so würde an dieser Stelle eine Singularität entstehen. Sie macht die Quadratlösung für diesen speziellen Fall unbrauchbar.

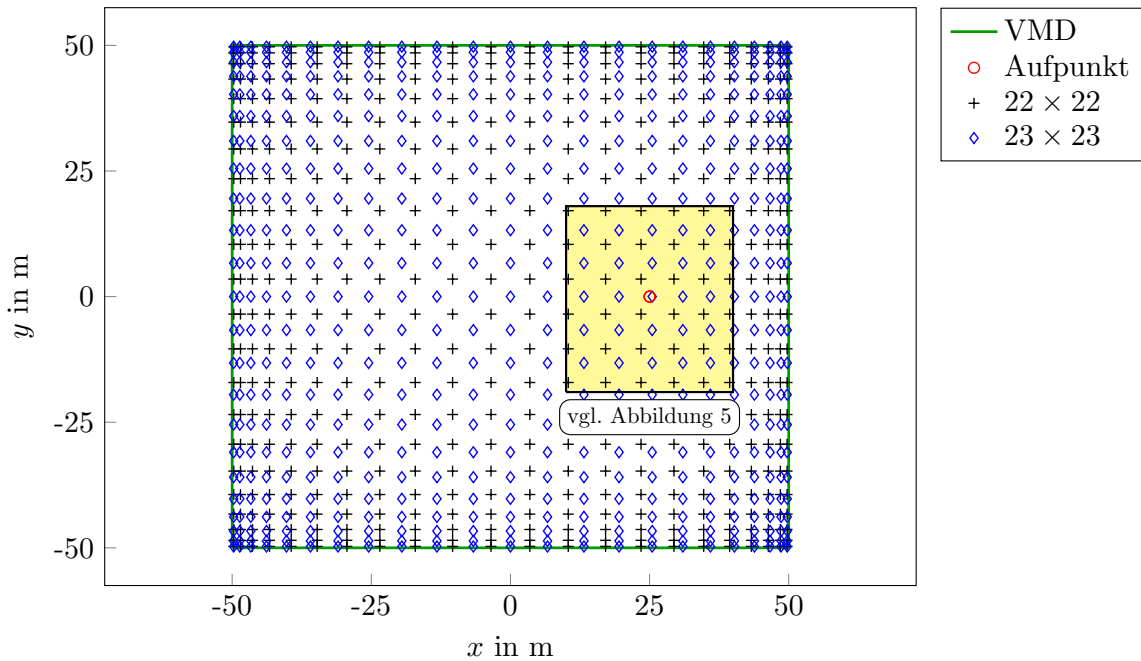


Abbildung 4: Innerhalb des VMD sind die Quadraturpunkte sowohl für $n = 22$ als auch für $n = 23$ eingetragen. Der Aufpunkt P_2 ist in Rot markiert. Die unmittelbare Nähe zu einem Punkt der Quadratur vom Grad $n = 23$ ist in dem gelb markierten Bereich zu sehen. Der sehr geringe Abstand ist in der vergrößerten Ansicht in Abbildung 5 deutlicher zu erkennen.

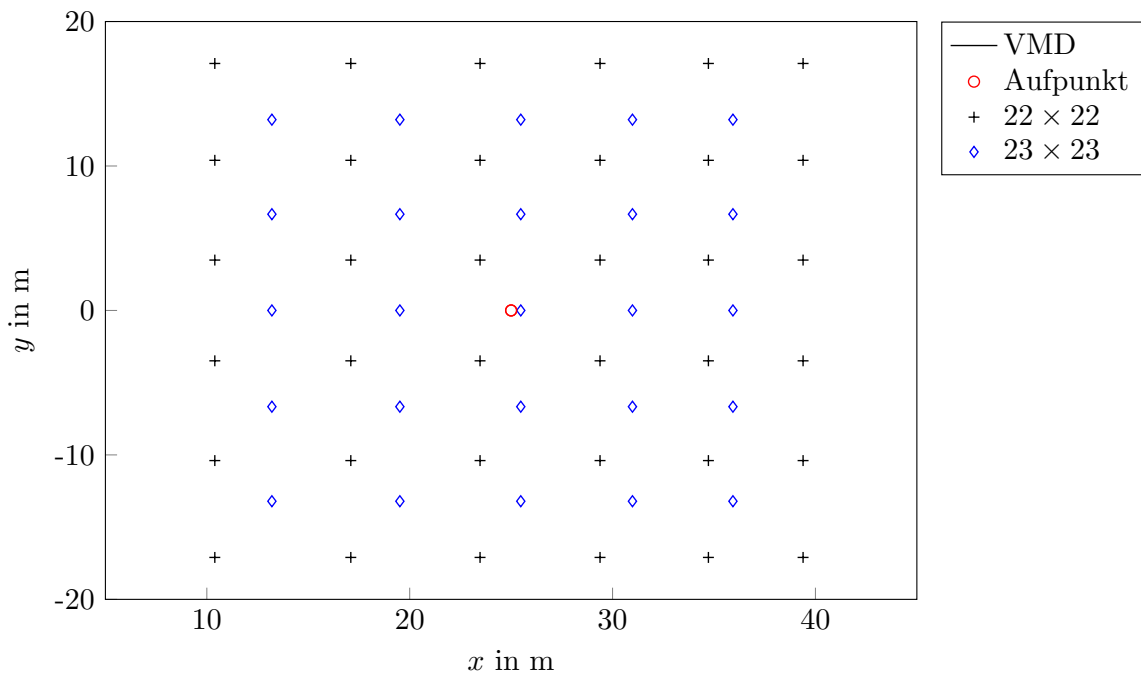


Abbildung 5: Ausschnitt aus Abbildung 4: Der Abstand zwischen Aufpunkt und Quadraturpunkt beträgt 0,48 m.

6 Zusammenfassung

Es konnte am Beispiel eines $100\text{ m} \times 100\text{ m}$ großen VMD gezeigt werden, dass die Verwendung einer Punktlösung zur Approximation einer Flächenlösung mittels einer Gauß-Legendre-Quadratur möglich ist.

Die Anzahl notwendiger Knoten kann dabei in Abhängigkeit vom Abstand r auf $5 \leq n \leq 10$ beschränkt bleiben. Eine Erhöhung der Knotenzahl darüber hinaus ergibt keine signifikanten Genauigkeitssteigerungen.

Bei der Quadratur ist darauf zu achten, dass der Aufpunkt nicht mit einem Quadraturpunkt zusammenfällt.

Literatur

G. Bärwolff. *Numerik für Ingenieure*. Spektrum Akademischer Verlag, 2007.

G. Engeln-Müllges, K. Niederdrenk, and R. Wodicka. *Numerik-Algorithmen*. 10. Auflage. Springer-Verlag, 2011.