

GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

Karla Bölling
Jan M. Hagedoorn
Detlef Wolf
Erik W. Grafarend

**Berechnung
eislaminduzierter Vertikalbewegungen und
Geoidänderungen in Südostalaska mit Hilfe
viskoelastischer Erdmodelle**

Scientific Technical Report STR01/08

Karla Bölling, Jan M. Hagedoorn,
Detlef Wolf, Erik W. Grafarend

**Berechnung
eislaminduzierter Vertikalbewegungen und
Geoidänderungen in Südostalaska mit Hilfe
viskoelastischer Erdmodelle**

DOI: <http://doi.org/10.2312/GFZ.b103-01089>
URN: urn:nbn:de:kobv:b103-01089

Impressum

GeoForschungsZentrum Potsdam
Telegrafenberg
14473 Potsdam

e-mail: postmaster@gfz-potsdam.de
www: <http://www.gfz-potsdam.de>
Gedruckt in Potsdam
Juli 2001

Scientific Technical Report STR01/08

Berechnung eislastinduzierter Vertikalbewegungen und
Geoidänderungen in Südostalaska
mit Hilfe viskoelastischer Erdmodelle

Karla Bölling

April 2001

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	v
Abstract	vi
Abbildungsverzeichnis	vii
Tabellenverzeichnis	viii
1 Einleitung	1
1.1 Glazialisostatische Ausgleichsvorgänge	1
1.2 Glazialisostatische Ausgleichsvorgänge in Alaska	2
1.3 Überblick	3
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen	5
2.1.1 Kinematische Formulierung	5
2.1.2 Gleichungen für Totalfelder	6
2.1.3 Materiell-lokale Form der Laplace-transformierten Gleichungen für inkrementielle Felder	7
2.1.4 Ableitung des Differentialgleichungssystems	8
2.2 Lösung des Differentialgleichungssystems	10
2.2.1 Fundamentallösung	10
2.2.2 Lösung für eine Kugel mit K Schichten	10
2.3 Rücktransformation in den Raum-Zeitbereich	12
2.3.1 Lösung im Spektralbereich	12
2.3.2 Lösung im Raumbereich	13
2.3.3 Kugelflächenfunktionsentwicklung der Lastfunktion	14
3 Erdmodelle	15
3.1 Globale Erdmodelle	15
3.2 Regionale Erdmodelle	18

4 Lastmodell	20
4.1 Berücksichtigung des Ozeans als Last	20
4.2 ICE-3G: Globales Modell der pleistozänen Vereisung	22
4.3 AL-1: Regionales Modell der rezenten Vereisung in Alaska	22
5 Ergebnisse der Modellrechnungen	27
5.1 Beobachtungsdaten	28
5.2 Berechnung eislaminduzierter Radialbewegung und Geoidänderung	31
5.2.1 Erdmodelle MF2-1 und MF2-2	31
5.2.2 Erdmodelle VM2-1 und VM2-2	34
5.2.3 Erdmodelle VM3-1 und VM3-2	36
5.3 Vergleich der Berechnungen mit den Beobachtungen	39
5.4 Bewertung der Berechnungen	40
Literaturverzeichnis	42
A Symbolverzeichnis	45
A.1 Verzeichnis der lateinischen Symbole	45
A.2 Verzeichnis der griechischen Symbole	47

Zusammenfassung

In Südostalaska wird eine relative Meeresspiegelabsenkung von bis zu 4 cm/a beobachtet. Da dieses Gebiet während der letzten Kaltperiode durch das Kordillerische Eisschild bedeckt war und noch heute von Vergletscherung geprägt ist, liegt die Vermutung nahe, daß die Meeresspiegeländerungen zumindest teilweise durch isostatische Ausgleichsvorgänge hervorgerufen werden.

Um diese Hypothese zu prüfen, werden für dieses Gebiet eislaminduzierte Vertikalbewegungen und Geoidänderungen mit Hilfe viskoelastischer Erdmodelle berechnet. Insbesondere werden sechs siebenschichtige Erdmodelle verwendet, die unterschiedliche Viskositätsprofile berücksichtigen und die Bandbreite der plausiblen Lithosphärenmächtigkeiten abdecken. Das globale Lastmodell ICE-3G wird erweitert und das regionale Lastmodell AL-1 entwickelt, welches die rezente Vergletscherung Südostalaskas berücksichtigt. Weiterhin werden die Ozeane als Last einbezogen.

Ein Vergleich der berechneten mit den beobachteten Meeresspiegeländerungen zeigt, daß die Beobachtungen nur zu einem geringen Anteil von wenigen Millimetern pro Jahr durch Isostasie erklärt werden können.

Abstract

In Southeast Alaska, a relative sea-level fall of up to 4 cm/a is observed. Since this area was covered by the Cordilleran ice sheet during the last glacial period and is characterized by glaciation even today, it is suggested that the sea-level change is at least partially caused by isostatic-adjustment processes.

In order to test this hypothesis, ice-load induced vertical movements and geoid changes are calculated for this area using viscoelastic earth models. In particular, six seven-layer earth models are used, which take into account different viscosity profiles and cover the range of plausible lithosphere thicknesses. The global load model ICE-3G is extended and the regional load model AL-1 is developed, which allows for the recent glaciation of Southeast Alaska. In addition, the oceans are included as loads.

A comparison of the calculated with the observed sea-level changes shows that the observations can be explained by isostasy only to a small part of a few millimetres per year.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Topographische Karte von Südostalaska	3
2.1	Schematische Darstellung des Lösungswegs	5
3.1	Dichte, Kompressionsmodul und Schermodul nach PREM im Vergleich mit den Parametern der siebenschichtigen Erdmodelle	17
3.2	Viskosität der verwendeten Erdmodelle im Vergleich zu den Viskositätsprofilen nach Mitrovica & Forte (1997) bzw. Peltier (1998)	17
4.1	Eismächtigkeit des Lastmodells ICE-3G auf der Nordhemisphäre	23
4.2	Regionales Lastmodell AL-1 und Gletscher mit bekannten Massenbilanzen	25
5.1	Auswirkungen der Massenänderung eines Gletschers	27
5.2	Pegelstationen in Südostalaska	28
5.3	Isolinien der beobachteten Rate der Meeresspiegelabsenkung	30
5.4	Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} für die Erdmodelle MF2-1 und MF2-2	33
5.5	Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} für die Erdmodelle VM2-1 und VM2-2	35
5.6	Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} für die Erdmodelle VM3-1 und VM3-2	38

Tabellenverzeichnis

3.1	Parameter der globalen Erdmodelle	16
3.2	Parameter der regionalen Erdmodelle	18
4.1	Gletscher und zugehörige Massenbilanzen	26
4.2	Parameter des regionalen Lastmodells AL-1	26
5.1	Beobachtete Raten der relativen Meeresspiegelabsenkung	29
5.2	\dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für Erdmodell MF2-1	32
5.3	\dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für Erdmodell MF2-2	32
5.4	\dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für Erdmodell VM2-1	34
5.5	\dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für Erdmodell VM2-2	34
5.6	\dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für Erdmodell VM3-1	37
5.7	\dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für Erdmodell VM3-2	37
5.8	Vergleich von \dot{h}_{RSL}^{cal} mit \dot{h}_{RSL}^{obs}	39
5.9	Differenz zwischen der aus Volumenmassen und Flächenmassen berechneten Geoidänderung	41

1. Einleitung

1.1 Glazialisostatische Ausgleichsvorgänge

In der Geschichte der Erde ist es aufgrund von Klimaveränderungen zeitweise zu Vereisungen außerhalb der Polarregionen gekommen. Auf der Nordhalbkugel waren davon insbesondere Fennoskandien und Kanada betroffen. Seit dem letzten glazialen Maximum vor ca. 21000 Jahren hat sich das Eis wieder zurückgezogen. Da es sich dabei um große Auflaständerungen handelt und die Erde ein hydrostatisches Gleichgewicht anstrebt, hat dieser Rückgang eine merkliche Auswirkung auf die Form der Erde.

Das erste dokumentierte Zeugnis einer nacheiszeitlichen Landhebung stammt von 1491. Damals baten die Bürger von Östhammar in Schweden um die Erlaubnis, ihre Stadt zu verlegen, da es nicht mehr, wie einige Jahre zuvor, möglich war, die Stadt mit den Fischerbooten zu erreichen. Über mehrere Jahrhunderte gab die Beobachtung der Meeresspiegeländerung Anlaß für Spekulationen; darunter aus heutiger Sicht sehr ungewöhnliche Annahmen wie etwa, daß das Wasser durch ein Loch im Meeresboden verschwinden würde (Celsius, 1743). Ephraim Runneberg (1722–1770) und Bengt Ferner (1724–1702) schlugen 1765 unabhängig voneinander einen neuen Weg vor, das Problem zu betrachten, indem sie den vermeintlichen Rückgang des Meeres als Landhebung interpretierten. Allerdings konnten auch sie noch keine endgültige Erklärung dieses Phänomens liefern. Erst die Entdeckung der Eiszeit durch Agassiz 1837 und die damit verbundene Erkenntnis, daß große Teile der nördlichen Länder vereist waren, trug dazu bei, zuvor nicht erklärbare Phänomene auf der Erdoberfläche zu verstehen. Dennoch vergingen fast 30 weitere Jahre, bis der Geologe Thomas Jamieson (1829–1913) eine Hebung aufgrund der Entlastung durch abschmelzendes Eis (glaziale Isostasie) als Erklärung in Betracht zog. Der Geologe Gerard De Geer (1858–1943) bestätigte Jamiesons Annahme 1888, indem er anhand ehemaliger Strandlinien eine Karte mit Isobasen (Linien gleicher Hebung) zeichnete. Dadurch konnte er nachweisen, daß es sich bei der Landhebung nicht um ein breitenabhängiges Phänomen handelt und somit eine Rotationsänderung der Erde als Ursache ausschließen. De Geer folgerte, daß die von Jamieson vorgeschlagene glaziale Isostasie als einzige Erklärung übrig blieb.

Heute weiß man, daß das Abschmelzen großer Eislasten neben der Landhebung noch weitere Auswirkungen mit sich bringt. Der Meeresspiegel ändert sich, da sich das zuvor als Eis vorliegende Wasser gleichmäßig über den Ozean verteilt. Ebenso wie das Abschmelzen der Eislasten führt dies zu einer isostatischen Ausgleichsbewegung der Erde, die einen hydrostatischen Gleichgewichtszustand anstrebt. Die Umverteilung der Massen ober- und unterhalb der festen Erdoberfläche beeinflußt außerdem das Trägheitsmoment der Erde, und dies wiederum wirkt

sich auf die Polwanderung und die Tageslängenänderung aus. Desweiteren verursacht die Massenverteilung eine Änderung des Geoids.¹

An den Auswirkungen von Eislaständerungen besteht erhebliches wissenschaftliches Interesse. Norman Haskell (1905–1970) nutzte beispielsweise die postglaziale Landhebung, um die Mantelviskosität zu bestimmen. Felix Andries Vening Meinesz (1887–1966) interpretierte dagegen die Schwerefeldänderung und berechnete mit deren Hilfe die verbleibende Landhebung in Fennoskandien. In neuerer Zeit wurde das Zurückweichen der Gletscher in den Anden, Island und Svalbard genutzt, um die Mantelviskosität abzuschätzen (Ivins & James, 1999; Thoma & Wolf, 2000; Hagedoorn et al., 2001).

1.2 Glazialisostatische Ausgleichsvorgänge in Alaska

Frühe Berichte über die Glacier Bay, das Gebiet welches in der vorliegenden Arbeit näher untersucht wird, stammen von Capt. George Vancouver. Er segelte 1794 nach Südostalaska und entdeckte an dem heutigen Eingang zur Bay, nahe der später installierten Station Bartlett Cove, eine etwa 10 km tiefe Einbuchtung, die von riesigen Eiswänden begrenzt war. Wissenschaftliche Expeditionen zur Glacier Bay begannen 1880 mit John Muir. Bei seinem Besuch war die Gletscherzunge im Vergleich zu den Beobachtungen von Capt. George Vancouver bereits 77 km zurückgewichen. In den folgenden Jahren wurde die Position der Gletscherzunge während verschiedener Expeditionen wiederholt bestimmt. 1929 wurden erstmals Luftaufnahmen von der Glacier Bay gemacht, die eine effiziente Erfassung der Topographie ermöglichten. Anhand wiederholter Beobachtungen kann das Vorstoßen bzw. das Zurückweichen der Gletscher verfolgt werden. Mit Ausnahme einer kurzen Akkumulationsperiode 1965/66 geht die Ausdehnung der meisten Gletscher in der Nähe der Glacier Bay zurück.

Parallel zur Beobachtung der Gletscher wurde auch die relative Meeresspiegelhöhe bestimmt. Abbildung 1.1 zeigt die Topographie von Südostalaska, sowie ausgewählte Pegelstationen. An der Station Bartlett Cove in der Glacier Bay wurde eine relative Meeresspiegelabsenkung von 3.96 cm/a beobachtet (Pierce, 1961; Hicks & Shofnos, 1965).

An der Westküste von Alaska grenzen die Pazifische Platte und die Nordamerikanische Platte aneinander. Neben der Glazialisostasie kommen daher auch tektonische Kräfte als Ursache für die relative Meeresspiegelabsenkung in Frage.

¹Der Inhalt dieses Abschnittes basiert auf Ekman (1991), der die Erforschung der Landhebung bis 1950 zusammengefaßt hat.

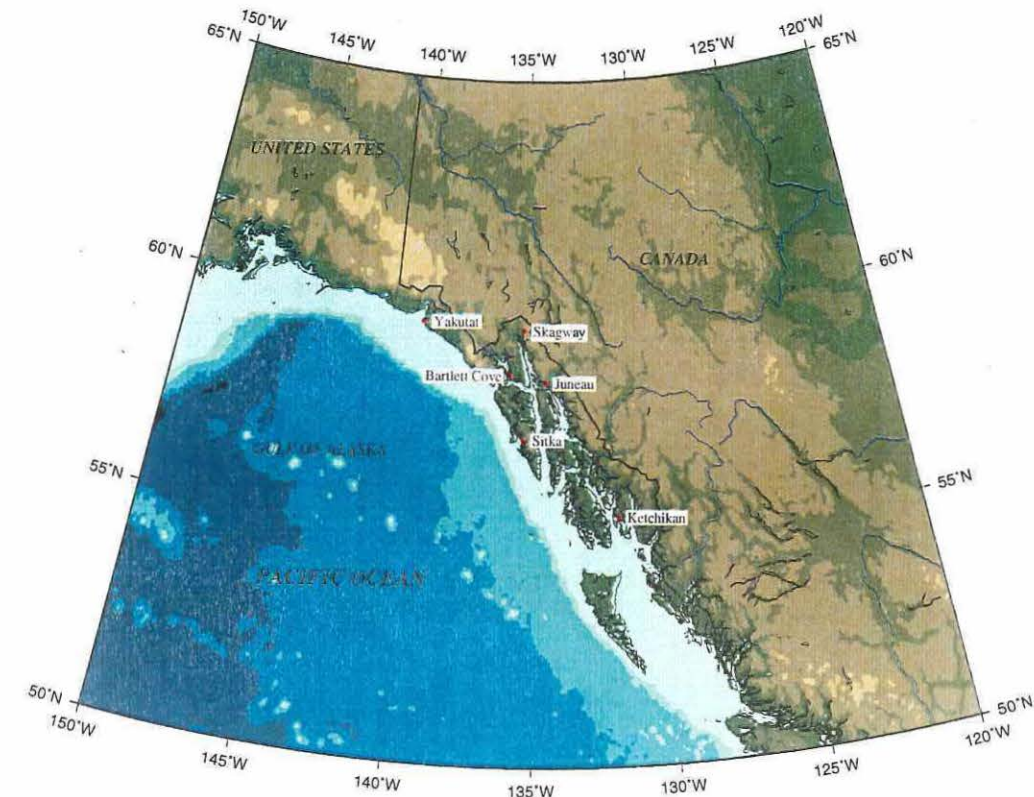


Abb. 1.1: Topographie von Südostalaska sowie ausgewählte Pegelstationen. Die Station Bartlett Cove befindet sich in der Glacier Bay.

1.3 Überblick

Ziel dieser Arbeit ist eine quantitative Abschätzung des Anteils der Landhebung, der durch isostatische Ausgleichsvorgänge aufgrund abschmelzender Eismassen verursacht wird. Die Modellierung der Landhebung erfolgt mit Hilfe verschiedener viskoelastischer Erdmodelle und einem Modell für die Eislasten.

In Kapitel 2 wird zunächst auf die theoretischen Grundlagen zur Behandlung der Problemstellung eingegangen. Dies bedeutet, daß die Feldgleichungen und die Grenzflächenbedingungen zusammengestellt werden und auf deren Lösung eingegangen wird. Im Anschluß daran werden in Kapitel 3 die bei den Berechnungen verwendeten Erdmodelle vorgestellt, die bezüglich ihrer Viskositätsprofile auf den Arbeiten von Mitrovica & Forte (1997) und Peltier (1998) beruhen. Kapitel 4 bietet einen Überblick über die zu berücksichtigenden Auflasten. Hierbei wird unter-

schieden zwischen globalen Auflasten, wie der Ozeanlast und der pleistozänen Vereisung, und regionalen Eislasten. Das Modell der regionalen Eislasten berücksichtigt die im globalen Modell vernachlässigten kleineren Strukturen des Untersuchungsgebietes Südostalaska. In Kapitel 5 wird schließlich die berechnete Meeresspiegelabsenkung mit der beobachteten Meeresspiegelabsenkung verglichen.

2. Theoretische Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen zur mathematischen Behandlung der Problemstellung werden im Rahmen dieser Arbeit lediglich zusammenfassend dargestellt. Eine ausführliche Behandlung der Theorie ist in Thoma & Wolf (1999) zu finden. Abbildung 2.1 zeigt eine schematische Darstellung des Lösungswegs, dessen einzelne Schritte in den folgenden Abschnitten erläutert werden. In Abschnitt 2.1 werden die Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen der Gravito-Viskoelastodynamik vorgestellt. Die Lösung des aus den Feldgleichungen folgenden Differentialgleichungssystems wird in Abschnitt 2.2 beschrieben, und schließlich erfolgt in Abschnitt 2.3 die Rücktransformation in den Raum-Zeitbereich.

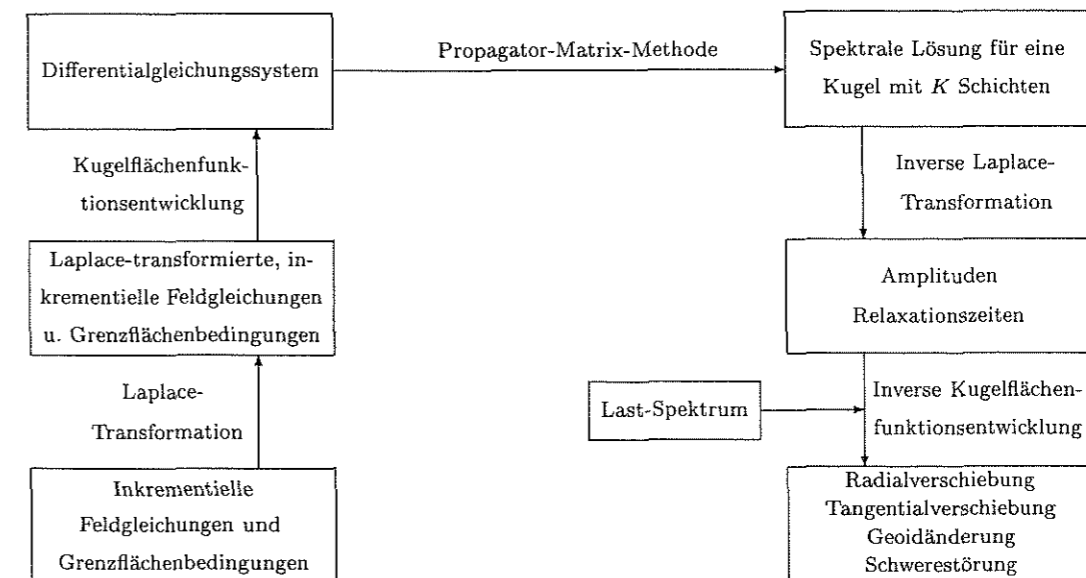


Abb. 2.1: Schematische Darstellung des Lösungswegs.

2.1 Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen der Gravito-Viskoelastodynamik

2.1.1 Kinematische Formulierung

Die in dieser Arbeit verwendete Notation ist Wolf (1997) entnommen. Danach wird die aktuelle Position \tilde{r}_i eines Teilchens im Kontinuum durch seine Anfangsposition X_i und seine Verschiebung

u_i beschrieben:

$$\check{r}_i(\mathbf{X}, t) = X_i + u_i(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Um Störungen bezüglich eines Anfangszustandes berechnen zu können, müssen die Gleichungen für die Störfelder hergeleitet werden. Dies geschieht durch die Zerlegung eines Totalfeldes in ein Anfangs- und ein Störfeld. $f_{ij\dots} = f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$ beschreibt ein Totalfeld in Lagrangescher Formulierung, bei der sich der Wert einer Feldgröße zur aktuellen Zeit t auf ein materielles Teilchen bezieht, dessen Position zur Anfangszeit $t = 0$ der Ort $X_i = \check{r}_i(\mathbf{X}, 0)$ ist. Somit läßt sich das Totalfeld zerlegen in

$$f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X}) + f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t). \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet $f_{ij\dots}^{(0)}(\mathbf{X}) := f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t = 0)$ das Anfangsfeld und $f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t)$ das materielle Inkrement. Das materielle Inkrement beschreibt die Änderung einer Feldgröße an einem Teilchen, welches sich zur Anfangszeit $t = 0$ am Ort X_i und zur aktuellen Zeit t am Ort \check{r}_i befindet. Alternativ können Störungen statt durch das materielle Inkrement durch das lokale Inkrement $f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t)$ beschrieben werden, welches die Änderung der Feldgröße $f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)$ am Ort X_i bezeichnet. Zwischen beiden gilt unter Voraussetzung infinitesimaler Störungen die Beziehung

$$f_{ij\dots}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t) = f_{ij\dots}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) + f_{ij\dots,k}^{(0)}(\mathbf{X}, t)u_k, \quad (2.3)$$

wobei der letzte Term als advektives Inkrement bezeichnet wird. Die Ableitungen eines Feldes $f_{ij\dots}$ bezüglich der Position X_i bzw. bezüglich der Zeit t werden folgendermaßen dargestellt:

$$f_{ij\dots,k}(\mathbf{X}, t) := \partial_k f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)}{\partial X_k}, \quad (2.4)$$

$$\dot{f}_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) := d_t f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t) := \frac{df_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)}{dt}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Gleichungen für Totalfelder

Mit Hilfe der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Notation können nun die Feldgleichungen zusammengestellt werden. Die Gleichungen für Totalfelder beschreiben viskoelastische Störungen eines chemisch und/oder entropisch geschichteten, kompressiblen Kontinuums:

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad \tau_{ij,j} + \rho^{(0)}g_i = \rho^{(0)}d_t^2\check{r}_i, \quad (2.6)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \rho_j = \rho^{(0)}, \quad (2.7)$$

$$\text{Schweregleichung:} \quad g_i := -\phi_{,j}X_{j,i}, \quad (2.8)$$

$$\text{Funktionaldeterminante:} \quad j := \det[\check{r}_{i,j}], \quad (2.9)$$

$$\text{Potentialgleichung:} \quad j(\phi_{,ij}X_{i,k}X_{j,k} + \phi_{,i}X_{i,jj}) = 4\pi\gamma\rho^{(0)}, \quad (2.10)$$

2.1. Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen

$$\text{Materialgleichung:} \quad t_{ij} = t_{ij}^{(0)} + \mathcal{M}_{ij}[\check{r}_{m,k}(t-t')\check{r}_{m,l}(t-t') - \delta_{kl}], \quad (2.11)$$

$$\text{Zustandsgleichung:} \quad \varpi = \xi(\rho). \quad (2.12)$$

Dabei ist τ_{ij} die asymmetrische Piola-Spannung, ρ die Volumenmassendichte, g_i die Schwere, ϕ das Schwerepotential, γ die Gravitationskonstante, t_{ij} die symmetrische Cauchy-Spannung, t' die Anregungszeit, ϖ der thermodynamische Druck, ξ die Zustandfunktion und δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Mit Hilfe des anisotropen Relaxationsfunctionals \mathcal{M}_{ij} verknüpft die Materialgleichung (2.11) die Dehnungsgeschichte, gegeben durch den Term in eckigen Klammern, mit der inkrementiellen Cauchy-Spannung $t_{ij}^{(\delta)} = t_{ij} - t_{ij}^{(0)}$. Der Zusammenhang zwischen der Cauchy- und der Piola-Spannung ist gegeben durch (z.B. Wolf, 1997)

$$\check{r}_{i,k}\tau_{jk} = jt_{ij}. \quad (2.13)$$

Die Feldgleichungen gelten für einen Raum \mathcal{X}^3 , in dem sich die Materialparameter stetig ändern können. An den Grenzflächen \mathcal{X}^2 , wo sich die Materialparameter unstetig ändern, wird folgende abkürzende Schreibweise benutzt:

$$[f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_{\pm}^{\pm} := [f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_{+} - [f_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)]_{-} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f_{ij\dots}(\mathbf{X} + \epsilon\mathbf{n}, t)]_{+} - [f_{ij\dots}(\mathbf{X} - \epsilon\mathbf{n}, t)]_{-}. \quad (2.14)$$

Unter der Voraussetzung, daß im Anfangszustand keine Flächenmassen vorhanden sind, $\sigma^{(0)} = 0$, ergeben sich damit für die **Grenzflächenbedingungen** die Beziehungen

$$[\check{r}_i]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.15)$$

$$[\phi]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad (2.16)$$

$$[n_j t_{ij}]_{\pm}^{\pm} = -g_i \sigma, \quad (2.17)$$

$$[n_i \phi_{,j} X_{j,i}]_{\pm}^{\pm} = 4\pi\gamma\sigma, \quad (2.18)$$

wobei σ die Flächenmassendichte ist, und der Einheitsvektor n_i senkrecht auf den Grenzflächen steht.

Die Feldgleichungen und die Grenzflächenbedingungen bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen, mit dem sich bei bekannten Parametern \mathcal{M}_{ij} , $t_{ij}^{(0)}$ und $\rho^{(0)}$ die Feldgrößen g_i , j , \check{r}_i , X_i , t_{ij} , τ_{ij} und ϕ berechnen lassen.

2.1.3 Materiell-lokale Form der Laplace-transformierten Gleichungen für inkrementielle Felder

Unter Annahme eines hydrostatischen Anfangszustandes, Isotropie und linearer Viskoelastizität, sowie unter Vernachlässigung von Produkten inkrementieller Größen ergeben sich die Feldgleichungen für die Inkrementialfelder. Werden außerdem die materiellen Inkremente für die Schwere und das Schwerepotential durch die entsprechenden lokalen Inkremente ersetzt, erhält man die materiell-lokale Form der inkrementiellen Feldgleichungen. Da in der Materialgleichung zeitliche

Ableitungen und Integrale gleichzeitig auftreten, wird zur Lösung die Laplace-Transformation angewandt. Die transformierten Feldgleichungen ergeben sich zu (Wolf, 1997)

$$\text{Bewegungsgleichung: } \tilde{t}_{ij,j}^{(\delta)} - (\rho^{(0)} g_j^{(0)} \tilde{u}_j)_{,i} + g_i^{(0)} (\rho^{(0)} \tilde{u}_j)_{,j} - \rho^{(0)} \tilde{g}_i^{(\Delta)} = 0, \quad (2.19)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } (\rho^{(0)} \tilde{u}_i)_{,i} = -\tilde{\rho}^{(\Delta)}, \quad (2.20)$$

$$\text{Schwergleichung: } \tilde{g}_i^{(\Delta)} = -\tilde{\phi}_{,i}^{(\Delta)}, \quad (2.21)$$

$$\text{Potentialgleichung: } \tilde{\phi}_{,ii}^{(\Delta)} = -4\pi\gamma(\rho^{(0)} \tilde{u}_i)_{,i}, \quad (2.22)$$

$$\text{Materialgleichung: } \tilde{t}_{ij,j}^{(\delta)} = (\kappa - \frac{2}{3}s\tilde{m})\delta_{ij}\tilde{u}_{k,k} + s\tilde{m}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \quad (2.23)$$

wobei die Tilde Laplace-transformierte Größen kennzeichnet. κ bezeichnet das Kompressionsmodul, s die Laplace-Frequenz und $\tilde{m} = \tilde{m}(s)$ die Scherrelaxationsfunktion. Für die Laplace-transformierten inkrementiellen Grenzflächenbedingungen ergibt sich

$$[\tilde{u}_i]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.24)$$

$$[\tilde{\phi}^{(\Delta)}]_{\pm}^+ = 0, \quad (2.25)$$

$$[n_j^{(0)} \tilde{t}_{ij}^{(\delta)}]_{\pm}^+ = -g_i^{(0)} \tilde{\sigma}, \quad (2.26)$$

$$[n_i^{(0)} (\tilde{\phi}_{,i}^{(\Delta)} + 4\pi\gamma\rho^{(0)} \tilde{u}_i)]_{\pm}^+ = 4\pi\gamma\tilde{\sigma}. \quad (2.27)$$

2.1.4 Ableitung des Differentialgleichungssystems

Um eine analytische Lösung zu ermöglichen, werden die Feldgleichungen vereinfacht. In dieser Arbeit wird von chemisch homogenen Kugelschalen und lokaler Inkompressibilität ausgegangen, was eine Dichtezunahme mit der Tiefe aufgrund von Selbstkompression gestattet. Ein Material ist lokal inkompressibel (Wolf, 1997; Martinec et al., 2001), wenn

$$\rho^{(\Delta)} = 0. \quad (2.28)$$

Mit dieser Bedingung vereinfachen sich die Bewegungsgleichung (2.19) und die Kontinuitätsgleichung (2.20). Die Poisson-Gleichung (2.22) wird zur Laplace-Gleichung und die Materialgleichung (2.23) gilt unverändert. Durch Kugelflächenfunktionsentwicklung kann aus den vereinfachten Gleichungen ein System aus sechs gekoppelten linearen Differentialgleichungen erster Ordnung erzeugt werden, welches sich in Matrixschreibweise wie folgt darstellen läßt:

$$\tilde{Y}_{i,r}^{nm} = A_{ij} \tilde{Y}_j^{nm}, \quad (2.29)$$

wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ den Grad und $m = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ die Ordnung bezeichnet. Der Lösungsvektor hat die Gestalt $\tilde{Y}_i^{nm} = (\tilde{U}^{nm}, \tilde{V}^{nm}, \tilde{T}_{rr}^{nm}, \tilde{T}_{r\theta}^{nm}, \tilde{\Phi}^{nm}, \tilde{Q}^{nm})^T$ und die Koeffizientenmatrix lautet

2.1. Feldgleichungen und Grenzflächenbedingungen

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\beta-2}{r} & \frac{N}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{s\tilde{m}} & 0 & 0 \\ \frac{4s\tilde{m}}{r^2}(3-\beta) - \frac{4\rho^{(0)}g^{(0)}}{r} & -\frac{6s\tilde{m}N}{r^2} - \frac{\rho^{(0)}g^{(0)}N}{r} & 0 & \frac{N}{r} & -\frac{\rho^{(0)}(n+1)}{r} & \rho^{(0)} \\ \frac{\rho^{(0)}g^{(0)}}{r} - \frac{2s\tilde{m}}{r^2}(3-\beta) & \frac{2s\tilde{m}(2N-1)}{r^2} & -\frac{1}{r} & -\frac{3}{r} & \frac{\rho^{(0)}}{r} & 0 \\ -4\pi\gamma\rho^{(0)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{n+1}{r} & 1 \\ -\frac{4\pi\gamma\rho^{(0)}(n+1)}{r} & \frac{4\pi\gamma\rho^{(0)}N}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{r} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

wobei $N = n(n+1)$, r der radiale Abstand, θ die Latitude und φ die Longitude ist. \tilde{U}^{nm} und \tilde{V}^{nm} sind die Amplituden der Radial- bzw. Tangentialverschiebung, \tilde{T}_{rr}^{nm} und $\tilde{T}_{r\theta}^{nm}$ sind die Amplituden des materiellen Inkrements der Cauchy-Spannung in radialer bzw. tangentialer Richtung, $\tilde{\Phi}^{nm}$ ist die Amplitude des lokalen Inkrements des Schwerepotentials und \tilde{Q}^{nm} ist eine Amplitude, in die die Potentialstörung, die Schwerestörung und die Radialverschiebung eingehen, und die so gewählt sind, daß die Grenzflächenbedingungen an den Schichtgrenzen stetig bleiben. Die Anfangsdichte ist gegeben durch das Darwinsche Gesetz (Martinec et al., 2001):

$$\rho^{(0)} = \alpha r^{-\beta}, \quad (2.31)$$

mit α als Anfangswert und β als Abklingkonstante. Für $\beta = 0$ erhält man eine inkompressible Schicht, für $\beta > 3$ ergibt sich eine Dichteinversion (Bullen, 1975). Da für $r = 0$ und $\beta \neq 0$ die Dichte divergiert, ergibt sich eine numerische Einschränkung des Darwinschen Gesetzes. Der Erdkern muß daher inkompressibel sein ($\beta = 0$). Die Anfangschwere $g^{(0)} := -g_r^{(0)}$ ist gegeben durch (Martinec et al., 2001)

$$g^{(0)}(r) = \frac{4\pi\gamma}{r^2} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{3-\beta_i} (r_i^{3-\beta_i} - r_{i-1}^{3-\beta_i}) + \frac{\alpha_k}{3-\beta_k} (r_k^{3-\beta_k} - r_{k-1}^{3-\beta_k}) \right], \quad (2.32)$$

$$r_{k-1} < r < r_k, \quad k = 2, \dots, K.$$

Für $\beta = 3$ wird $g^{(0)}$ singular. Aus geophysikalischer Sicht ist daher nur $0 \leq \beta < 3$ sinnvoll. Die zugehörigen Grenzflächenbedingungen nach Kugelflächenfunktionen entwickelt lauten

$$0 = [\tilde{U}^{nm}]_{\pm}^+, \quad (2.33)$$

$$0 = [\tilde{V}^{nm}]_{\pm}^+, \quad (2.34)$$

$$0 = [\tilde{\Phi}^{nm}]_{\pm}^+, \quad (2.35)$$

$$g^{(0)} \tilde{\Sigma}^{nm} = [\tilde{T}_{rr}^{nm}]_{\pm}^+, \quad (2.36)$$

$$0 = [\tilde{T}_{r\theta}^{nm}]_{\pm}^+, \quad (2.37)$$

$$4\pi\gamma \tilde{\Sigma}^{nm} = [\tilde{Q}^{nm}]_{\pm}^+, \quad (2.38)$$

wobei $\tilde{\Sigma}^{nm}$ die Legendrekoeffizienten der Flächenmassendichte sind.

2.2 Lösung des Differentialgleichungssystems

2.2.1 Fundamentallösung

Das Gleichungssystem (2.29) kann nicht mit dem Standardverfahren für Differentialgleichungssysteme gelöst werden, da in (2.30) r auftritt. Man bedient sich daher einer anderen Methode, um die Fundamentallösung des Gleichungssystems zu erhalten. Unter Verwendung der Bewegungsgleichung (2.19) und der Laplace-Gleichung (2.22) kann nach einigen Vereinfachungen und Substitutionen folgende Differentialgleichung vierter Ordnung erhalten werden:

$$\text{rot rot rot } \frac{1}{\rho^{(0)}} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\beta \rho^{(0)}}{r^2 s \tilde{m}} (Z_3 r^n + Z_6 r^{-n-1}) \mathbf{S}_{nm}^{(0)}, \quad (2.39)$$

wobei $\text{rot } \mathbf{v} = \rho^{(0)} \tilde{\mathbf{u}}$ und Z_3 und Z_6 unbekannte Koeffizienten sind. Die Existenz des zur Verschiebung $\tilde{\mathbf{u}}$ gehörenden Vektorpotentials \mathbf{v} folgt aus (2.20) unter Annahme lokaler Inkompressibilität. $\mathbf{S}_{nm}^{(0)}$ bezeichnet vektorielle Kugelflächenfunktionen. Die Lösung von (2.39) liefert nach Anwendung des Rotationsoperators und anschließendem Einsetzen in die Einzelgleichungen des Differentialgleichungssystems (2.29)–(2.30) die Fundamentallösung. Diese läßt sich als eine Summe von sechs linear unabhängigen Lösungsvektoren in Matrixschreibweise darstellen:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^{nm}(r, s) = M_{ij}(r, s) C_i(s). \quad (2.40)$$

$C_i(s)$ ist dabei ein (6×1) -Spaltenvektor mit beliebigen Konstanten. Die Fundamentalmatrix M_{ij} ist in expliziter Form bei Martinec et al. (2001) zu finden.

2.2.2 Lösung für eine Kugel mit K Schichten

Aus der Fundamentalmatrix M_{ij} des Differentialgleichungssystems (2.29) und (2.30) kann die Lösung für eine Kugel mit K Schichten konstruiert werden. Dazu wird zunächst die Propagatormatrix bestimmt. Nach Gilbert & Backus (1966) ergibt sich diese für die k -te Schicht ($k > 1$) zu

$$P_{ij}(r_k, r_{k-1}, s) = M_{ik}(r_k, s) M_{kj}^{-1}(r_{k-1}, s). \quad (2.41)$$

Die Lösung an der k -ten Schicht ist somit durch

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^{nm}(r_k, s) = P_{ij}(r_k, r_{k-1}, s) \tilde{\mathbf{Y}}_j^{nm}(r_{k-1}, s) \quad (2.42)$$

gegeben. Die Lösung an einer beliebigen Grenzfläche kann, sofern keine Massenbelegung an den Grenzflächen auftritt, $\tilde{\Sigma}^{nm} = 0$, durch

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^{nm}(r_k, s) = P_{ij}^{\Pi}(r_k, r_1, s) \tilde{\mathbf{Y}}_j^{nm}(r_1, s) \quad (2.43)$$

2.2. Lösung des Differentialgleichungssystems

berechnet werden. Dabei gilt die Definition

$$P_{ij}^{\Pi}(r_k, r_1, s) := \prod_{k=2}^K P_{ij}(r_k, r_{k-1}, s), \quad (2.44)$$

wobei K die Anzahl der Schichten bezeichnet.

Die Lösung $\tilde{\mathbf{Y}}_i^{nm}(r_1, s)$ an der Grenzfläche der inneren Sphäre kann direkt aus der Fundamentalmatrix gewonnen werden. Da die Feldgrößen bei $r = 0$ stetig bleiben müssen, wird die (6×3) -Matrix $Z_{ij}(r, s)$ definiert, die aus den ersten drei Spalten der Fundamentalmatrix $M_{ij}(r, s)$ besteht. Somit ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^{nm}(r_1, s) = Z_{ij}(r_1, s) K_j(s), \quad (2.45)$$

wobei $K_j(s)$ ein 3-zeiliger Vektor ist mit Konstanten, die durch drei Randbedingungen an der Oberfläche festgelegt werden. Die Grenzflächenbedingungen (2.36)–(2.38) können mit a als Erdradius geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{rr}^{nm}(a) \\ \tilde{T}_{r\theta}^{nm}(a) \\ \tilde{Q}^{nm}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{4\pi\gamma}{g^{(0)}(a)} \end{pmatrix} \tilde{\Sigma}_g^{nm}(s) = B_i \tilde{\Sigma}_g^{nm} m(s). \quad (2.46)$$

Dabei sind die Definitionen $\tilde{\sigma}_g := -g^{(0)} \tilde{\sigma}$ und $\tilde{\Sigma}_g^{nm} := -g^{(0)} \tilde{\Sigma}^{nm}$ verwendet worden, wobei $\tilde{\sigma}_g$ der Lastdruck ist und $\tilde{\Sigma}_g^{nm}$ die entsprechenden Legendrekoeffizienten bezeichnet. Wird (2.45) in (2.43) substituiert, ergibt sich

$$B_i \tilde{\Sigma}_g^{nm}(s) = T_{ij}(s) K_j(s), \quad (2.47)$$

wobei die Definition

$$T_{ij}(s) := P_{ik}^{\Pi}(a, r_1, s) Z_{kj}(r_1, s) \quad (2.48)$$

eingeführt worden ist. Für die Matrix $P_{ik}^{\Pi}(a, r_1, s)$ werden hier nur die den Feldgrößen \tilde{T}_{rr}^{nm} , $\tilde{T}_{r\theta}^{nm}$ und \tilde{Q}^{nm} entsprechenden Zeilen 3, 4 und 6 verwendet. Die Konstanten des Vektors K_i können durch Inversion der Matrix T_{ij} bestimmt werden, und man erhält

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^{nm}(r_k, s) = P_{ij}^{\Pi}(r_k, r_1, s) Z_{jk}(r_1, s) T_{kl}^{-1}(s) B_l \tilde{\Sigma}_g^{nm}(s). \quad (2.49)$$

Die Inversion der Matrix T_{ij} kann durch die Division der Adjunktierten T_{ij}^* durch die Determinante erreicht werden, so daß man schließlich folgende Formel zur Berechnung der Lösung für die k -te Schicht erhält:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^{nm}(r_k, s) = \frac{W_i(r_k, s)}{\det T_{ij}(s)} \tilde{\Sigma}_g^{nm}(s) = \frac{P_{ij}^{\Pi}(r_k, r_1, s) Z_{jk}(r_1, s) T_{kl}^*(s) B_l}{\det T_{ij}(s)} \tilde{\Sigma}_g^{nm}(s). \quad (2.50)$$

2.3 Rücktransformation in den Raum-Zeitbereich

In (2.50) geht der Laplace-transformierte und nach Kugelflächenfunktionen entwickelte Lastdruck $\tilde{\Sigma}_g^{nm}(s)$ ein. Um eine analytische Rücktransformation in den Zeitbereich durchführen zu können, wird für den Lastdruck folgender Separationsansatz gewählt:

$$\sigma_g(\theta, \varphi, t) = g(a)\rho^L d(\theta, \varphi)h(t). \quad (2.51)$$

Dabei bezeichnet ρ^L die Volumenmassendichte der Last, $d(\theta, \varphi)$ das Lastprofil und $h(t)$ die Lastmächtigkeit. Laplace-Transformation und Kugelflächenfunktionsentwicklung von (2.51) ergeben

$$\tilde{\Sigma}_g^{nm}(s) = g(a)\rho^L D_{nm}\tilde{h}(s), \quad (2.52)$$

wobei D_{nm} die Legendrekoeffizienten des Lastprofils sind. Diese stehen über die skalaren Kugelflächenfunktionen Y_{nm} mit dem Lastprofil $d(\theta, \varphi)$ in folgendem Zusammenhang:

$$d(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.53)$$

Außerdem muß die Laplace-Transformierte der Scherrelaxationsfunktion \tilde{m}_k angegeben werden. In dieser Arbeit wird Maxwell-Viskoelastizität angenommen. Die Scherrelaxationsfunktion hat dann die Form (z.B. Wolf, 1997)

$$\tilde{m}_k = \frac{\mu_k}{s + \frac{\mu_k}{\eta_k}}, \quad (2.54)$$

wobei μ_k der elastische Schermodul und η_k die Viskosität der k -ten Schicht ist.

2.3.1 Lösung im Spektralbereich

Inverse Laplace-Transformation von (2.50) unter Verwendung von (2.52) ergibt

$$Y_i^{nm}(r_k, t) = g(a)\rho^L D_{nm} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{W_i(r_k, s_p)}{\det T_{ij}(s)} \tilde{h}(s) \right), \quad (2.55)$$

wobei \mathcal{L}^{-1} den entsprechenden Operator bezeichnet. Mit Hilfe des Residuensatzes kann dies durch

$$Y_i^{nm}(r_k, t) = \underbrace{\left[A_i^E(r_k)h(t) + \left(\sum_{p=1}^P -s_p A_{ip}^V(r_k) e^{s_p t} \right) * h(t) \right]}_{A_i^n(r_k, t)} g(a)\rho^L D_{nm} \quad (2.56)$$

ausgedrückt werden, wobei s_p die Nullstellen von $\det T_{ij}$ sind und P die Anzahl der Nullstellen von T_{ij} ist. Der elastische und der viskose Amplitudenvektor sind definiert durch

$$A_i^E(r_k) := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{W_i(r_k, s)}{\det T_{ij}(s)}, \quad A_{ip}^V(r_k) := \frac{W_i(r_k, s_p)}{-s_p \det [T_{ij}(s)]_{s=s_p}}. \quad (2.57)$$

2.3. Rücktransformation in den Raum-Zeitbereich

Die Anzahl der Nullstellen bzw. Moden eines Erdmodells mit Maxwellviskoelastizität ergibt sich für $n \geq 2$ durch die folgenden empirische Regeln (z.B. Wu & Ni, 1996; Vermeersen & Sabadini, 1998):

1. Eine Grenze zwischen zwei viskoelastischen Schichten erzeugt eine Mode, wenn ein Dichtesprung vorliegt, und zwei weitere Moden, wenn sich die Viskosität und/oder der Schermodul ändern.
2. Eine Grenze zwischen einer viskoelastischen und einer elastischen Schicht erzeugt unabhängig von einer möglichen Dichteänderung eine Mode.
3. Eine Grenze zwischen einer viskoelastischen und einer fluiden Schicht erzeugt eine Mode, wenn ein Dichtesprung vorliegt.

Im Fall $n = 1$ ist die Anzahl der Moden reduziert: Die vom Dichtesprung getragene Mode verschwindet, und eine Änderung der Viskosität und/oder des Schermoduls zwischen zwei viskoelastischen Schichten erzeugt nur eine Mode (Greff-Lefitz & Legros, 1997).

2.3.2 Lösung im Raumbereich

Die Herleitung folgender Gleichungen ist bei Thoma (2001) zu finden. Mit der Definition

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) := P_{n|m}(\cos \theta) \begin{cases} \cos(m\varphi) & \text{für } m \geq 0 \\ \sin(|m|\varphi) & \text{für } m < 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

und $P_{n|m}$ als Legendrepolynome ergeben sich die Radial- und die Tangentialverschiebung zu

$$u_r(r_k, \theta, \varphi, t) = g(a)\rho^L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_1^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad (2.59)$$

$$u_\theta(r_k, \theta, \varphi, t) = g(a)\rho^L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_2^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D_{nm} Y_{nm,\theta}(\theta, \varphi), \quad (2.60)$$

$$u_\varphi(r_k, \theta, \varphi, t) = g(a)\rho^L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_2^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D_{nm} \frac{Y_{nm,\varphi}(\theta, \varphi)}{\sin \theta}. \quad (2.61)$$

Das lokale Inkrement des Schwerepotentials lautet

$$\phi^{(\Delta)}(r_k, \theta, \varphi, t) = g(a)\rho^L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.62)$$

Die Geoidänderung an der Oberfläche läßt sich aus der Formel von Bruns berechnen (z.B. Heiskanen & Moritz, 1993; Wolf, 1997):

$$e_g = \frac{\phi^{(\Delta)}}{g(a)}. \quad (2.63)$$

Das lokale Inkrement der Schwere an der Oberfläche ist gegeben durch

$$g^{(\Delta)}(a, \theta, \varphi, t) = \frac{g(a)\rho^L}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \mathcal{A}_5^n(a, t) \sum_{m=-n}^n D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad (2.64)$$

wobei $g^{(\Delta)} := -g_r^{(\Delta)}$. Unter Beachtung von $g_r^{(0)} = -2g^{(0)}/a$ ergibt sich für das materielle Inkrement der Schwerestörung an der Erdoberfläche (z.B. Heiskanen & Moritz, 1993)

$$g^{(\delta)}(a, \theta, \varphi, t) = g^{(\Delta)}(a, \theta, \varphi, t) - \frac{2g^{(0)}(a)}{a} u_r(a, \theta, \varphi, t), \quad (2.65)$$

wobei $g^{(\delta)} := -g_r^{(\delta)}$.

2.3.3 Kugelflächenfunktionsentwicklung der Lastfunktion

In (2.59)–(2.65) treten die Kugelflächenfunktionskoeffizienten D_{nm} der Last auf. Um diese zu berechnen, wird (2.53) mit Y_{nm} multipliziert und anschließend über die Kugeloberfläche integriert, so daß sich

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d(\theta, \varphi) Y_{nm}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{nm} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta [Y_{nm}(\theta, \varphi)]^2 d\theta d\varphi \quad (2.66)$$

ergibt. Mit Hilfe der Normierung

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta [Y_{nm}(\theta, \varphi)]^2 d\theta d\varphi = \frac{2\pi(1 + \delta_{m0})}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \quad (2.67)$$

folgt

$$D_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi(1 + \delta_{m0})} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d(\theta, \varphi) Y_{nm}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi. \quad (2.68)$$

Wird die Variablentransformation $y = \cos \theta$ durchgeführt und die Definition (2.58) benutzt, ergibt sich

$$D_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi(1 + \delta_{m0})} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_{-1}^1 P_{n|m|}(y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\arccos y, \varphi) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin |m|\varphi \end{cases} d\varphi dy \begin{cases} \text{für } m \geq 0 \\ \text{für } m < 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Für spezielle Lastprofile $d(\theta, \varphi)$ sind weitere Vereinfachungen möglich. (Thoma, 2001) behandelt radialsymmetrische und elliptische Lasten mit verschiedenen Querschnitten.

3. Erdmodelle

Ziel dieser Arbeit ist die Unterteilung der in Südostalaska beobachteten Landhebung in die beiden Ursachen Tektonik und Glazialisostasie. Die tektonischen Vorgänge können mit den in Kapitel 2 beschriebenen mathematischen Hilfsmitteln nicht modelliert werden. Die Modellierung beschränkt sich demnach auf isostatische Ausgleichsvorgänge. Voraussetzung für eine Modellierung, die eine quantitative Abschätzung der durch abschmelzende Eislasten verursachten Landhebung ermöglicht, ist ein Erdmodell, welches den tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten möglichst gut entspricht.

Bereits in der Vergangenheit ist der Versuch unternommen worden, geeignete mechanische Erdmodelle zu entwickeln. So nutzten Mitrovica & Forte (1997), Peltier (1998) und Thoma & Wolf (1999) die in Fennoskandien oder Nordamerika beobachtete Landhebung, um die Viskositätsstruktur der Erde zu bestimmen. Dziewonski & Anderson (1981) bestimmten anhand seismischer Daten die radiale Verteilung der elastischen Parameter und der Dichte und spezifizierten das Preliminary Reference Earth Model (PREM).

In Abschnitt 3.1 werden zunächst drei globale Erdmodelle vorgestellt, die sich auf die oben genannten Arbeiten beziehen. Auf diese globalen Erdmodelle aufbauend werden in Abschnitt 3.2 die an die Gegebenheiten in Alaska angepaßten Erdmodelle eingeführt.

3.1 Globale Erdmodelle

Im folgenden werden ausschließlich siebenschichtige, sphärische Erdmodelle verwendet. Das Darwinsche Gesetz, welches in Abschnitt 2.1.4 eingeführt worden ist, ermöglicht bei diesen Erdmodellen eine Dichtezunahme mit der Tiefe aufgrund von Selbstkompression.

Bei der Festlegung der Modellparameter wird auf von Thoma (2001) entwickelte Erdmodelle zurückgegriffen. Die Dichte wird dabei so gewählt, daß die Masse der einzelnen Schichten mit der jeweiligen Masse von PREM übereinstimmt und die Schwere an der Erdoberfläche 9.81787 m/s^2 beträgt. Der Schermodul entspricht dem Volumenmittelwert der in PREM angegebenen Werte und die Viskosität den Volumenmittelwerten des Modells MF2 nach Mitrovica & Forte (1997) bzw. den Volumenmittelwerten der Modelle VM2 und VM3 nach Peltier (1998). In Tabelle 3.1 sind die Parameter der verwendeten globalen Erdmodelle zusammengestellt. Sie unterscheiden sich lediglich durch die Viskositätswerte und werden daher auch nach den zugrundegelegten Viskositätsmodellen benannt. Die Dichteschichtung und die Elastizitätsparameter von allen drei Modellen sind an PREM angelehnt und somit identisch.

Abbildung 3.1 zeigt die Dichte, der Kompressionsmodul und der Schermodul der kompres-

Schicht	r (km)	ρ_{top} (kg/m ³)	ρ_{bottom} (kg/m ³)	β	μ (Pa)	η (Pa s)
MF2						
1	3480	10982.5	10982.5	0	0	0
2	4600	5023	5581	0.38	2.62×10^{11}	4.53×10^{21}
3	5701	4410	5024	0.61	1.98×10^{11}	7.20×10^{21}
4	5971	3792	3974	1.01	1.10×10^{11}	1.14×10^{20}
5	6151	3422	3556	1.29	0.77×10^{11}	5.68×10^{20}
6	6291	3261	3380	1.60	0.67×10^{11}	1.73×10^{21}
7	6371	3196	3261	1.60	0.57×10^{11}	∞
VM2						
1	3480	10982.5	10982.5	0	0	0
2	4600	5023	5581	0.38	2.62×10^{11}	3.40×10^{21}
3	5701	4410	5024	0.61	1.98×10^{11}	2.22×10^{21}
4	5971	3792	3974	1.01	1.10×10^{11}	4.86×10^{20}
5	6151	3422	3556	1.29	0.77×10^{11}	3.90×10^{20}
6	6291	3261	3380	1.60	0.67×10^{11}	3.71×10^{20}
7	6371	3196	3261	1.60	0.57×10^{11}	∞
VM3						
1	3480	10982.5	10982.5	0	0	0
2	4600	5023	5581	0.38	2.62×10^{11}	8.18×10^{21}
3	5701	4410	5024	0.61	1.98×10^{11}	2.34×10^{21}
4	5971	3792	3974	1.01	1.10×10^{11}	5.11×10^{20}
5	6151	3422	3556	1.29	0.77×10^{11}	4.07×10^{20}
6	6291	3261	3380	1.60	0.67×10^{11}	4.49×10^{20}
7	6371	3196	3261	1.60	0.57×10^{11}	∞

Tab. 3.1: Parameter der globalen Erdmodelle.

siblen Erdmodelle im Vergleich zu den Werten von PREM. Die Ursache für den funktionalen Verlauf des Kompressionsmoduls ist, daß dieser nicht frei gewählt werden kann, sondern durch die Beziehung $\kappa = r\rho(r)g(r)\beta^{-1}$ vorgegeben ist. In Abbildung 3.2 sind die in den Erdmodellen verwendeten Viskositäten gegenüber den Viskositätsprofilen nach Mitrovica & Forte (1997) bzw. Peltier (1998) gezeigt. Die Viskositäten des Modells MF2 unterscheiden sich dabei deutlich von denen der Modelle VM2 und VM3.

Die hiermit bestimmten globalen Erdmodelle dienen im weiteren Verlauf dieser Arbeit zur Berechnung der in Abschnitt 4.1 näher erläuterten 'sea-level equation', welche die Berücksichtigung der Ozeanlast ermöglicht. Zur Berechnung von Radialbewegungen und Geoidänderungen in Südostalaska sind die globalen Erdmodelle nicht geeignet, da die Lithosphärenmächtigkeit, die der mittleren Lithosphärenmächtigkeit der Erde entspricht, nicht die Gegebenheiten in Alaska repräsentiert. Im folgenden Abschnitt werden daher regionale Erdmodelle eingeführt.

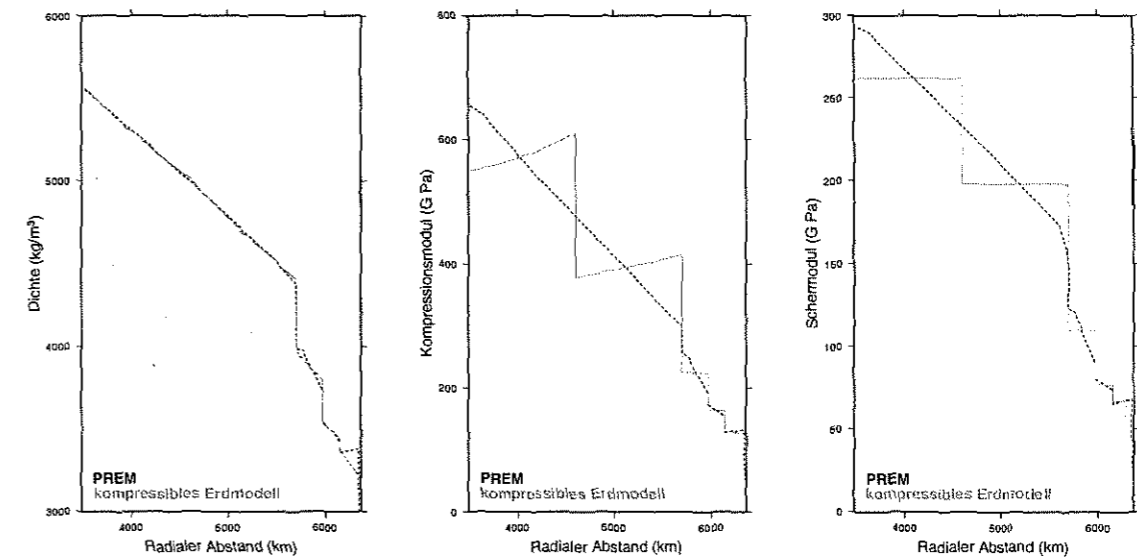


Abb. 3.1: Dichte, Kompressionsmodul und Schermodul nach PREM im Vergleich mit den Parametern der siebenschichtigen Erdmodelle.

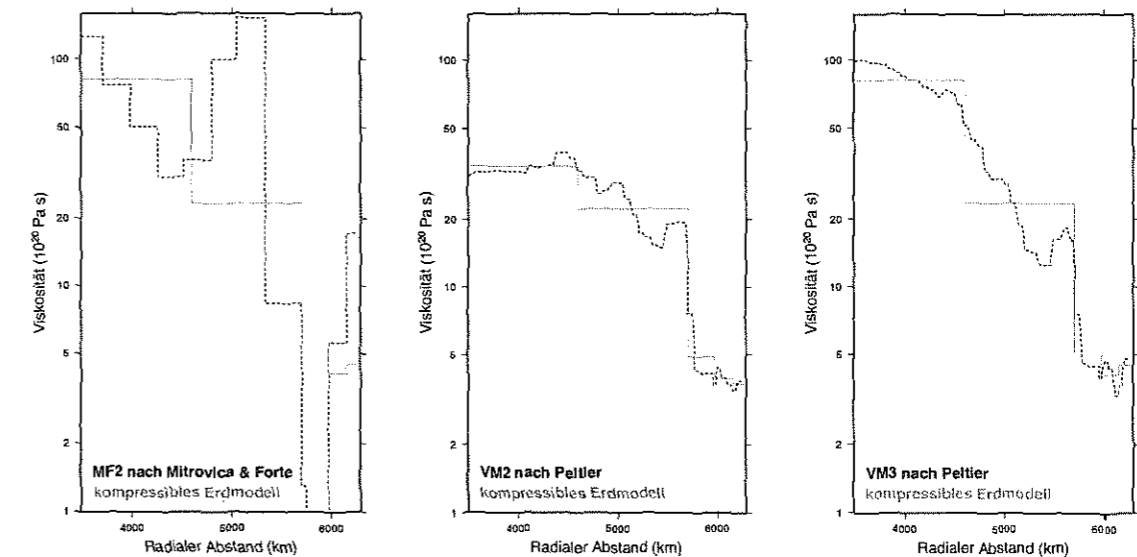


Abb. 3.2: Viskosität der verwendeten Erdmodelle im Vergleich zu den Viskositätsprofilen nach Mitrovica & Forte (1997) bzw. Peltier (1998).

3.2 Regionale Erdmodelle

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die Parameter für die inneren fünf Schichten, das heißt bis zum radialen Abstand von 6151 km, global gültig sind. Daher wird lediglich die Grenze zwischen Lithosphäre und Astenosphäre, und damit verbunden die Parameter für diese beiden Schichten, an die Gegebenheiten in Alaska angepaßt. Die Dicke der Lithosphäre in Südostalaska bestimmten Bechtel et al. (1990) und Pilkington (1991), indem sie den Zusammenhang zwischen Topographie und Schwereanomalien nutzten. Obwohl im folgenden der Effekt kurzzeitiger Auflasten untersucht wird und die effektive Dicke der elastischen Lithosphäre daher von den in den genannten Arbeiten angegebenen Lithosphärenmächtigkeiten abweicht, werden deren Angaben als Richtwerte genutzt.

In Anbetracht der genannten Unsicherheiten werden zwei Extreme angenommen, die eine Abschätzung der Größenordnung der glazialisostatischen Hebung ermöglichen. Die angenommene minimale Lithosphärenmächtigkeit beträgt 16 km und die maximale 64 km. Die Viskositätswerte und die elastischen Parameter werden in den jeweiligen Schichten von dem globalen Modell übernommen. Lediglich die Dichte wird geändert, so daß die Gesamtmasse der Erde unabhängig von der Dicke der Lithosphäre gleich bleibt.

Schicht	r (km)	ρ_{top} (kg/m ³)	ρ_{bottom} (kg/m ³)	β	μ (Pa)	η (Pa s)
MF2-1						
6	6307	3248	3380	1.60	0.67×10^{11}	1.73×10^{21}
7	6371	3196	3248	1.60	0.57×10^{11}	∞
MF2-2						
6	6355	3210	3380	1.60	0.67×10^{11}	1.73×10^{21}
7	6371	3197	3210	1.60	0.57×10^{11}	∞
VM2-1						
6	6307	3248	3380	1.60	0.67×10^{11}	3.71×10^{20}
7	6371	3196	3248	1.60	0.57×10^{11}	∞
VM2-2						
6	6355	3210	3380	1.60	0.67×10^{11}	3.71×10^{20}
7	6371	3197	3210	1.60	0.57×10^{11}	∞
VM3-1						
6	6307	3248	3380	1.60	0.67×10^{11}	4.49×10^{20}
7	6371	3196	3248	1.60	0.57×10^{11}	∞
VM3-2						
6	6355	3210	3380	1.60	0.67×10^{11}	4.49×10^{20}
7	6371	3197	3210	1.60	0.57×10^{11}	∞

Tab. 3.2: Parameter der äußeren beiden Schichten der regionalen Erdmodelle.

In Tabelle 3.2 sind die Parameter der regionalen Erdmodelle gelistet. Da sich die Parametern der inneren fünf Schichten nicht geändert haben, sind diese nicht in die Tabelle aufgenommen. Aufbauend auf die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Modelle ergeben sich nun jeweils zwei regionale Erdmodelle. Diese dienen in Kapitel 5 zur Berechnung der Landhebung in Südostalaska.

4. Lastmodell

Das Lastmodell setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen, die zunächst getrennt betrachtet werden. In den Abschnitten 4.1 und 4.2 wird das globale Lastmodell behandelt, welches in die Anteile Ozeanlast und globale Eislast ICE-3G unterteilt ist. Die globale Eislast läßt die regionalen Besonderheiten unberücksichtigt. Bei der Berechnung der Landhebung haben jedoch auch kleine Eislasten in der Nähe des Berechnungspunktes einen Einfluß auf die Ergebnisse. Daher wird in Abschnitt 4.3 das regionale Lastmodell AL-1 für das Untersuchungsgebiet Südostalaska entwickelt.

4.1 Berücksichtigung des Ozeans als Last

Das Abschmelzen eines Eisschildes bewirkt neben der verzögerten Landhebung auch eine Meeresspiegeländerung. Die Meeresspiegeländerung setzt sich aus verschiedenen Anteilen zusammen. Die gravitative Anziehung in der näheren Umgebung des abschmelzenden Eisschildes läßt wegen der verringerten Eismassen nach, was eine Geoidänderung und damit eine Veränderung der Ozeanoberfläche zur Folge hat. Auf ähnliche Weise hat der mit der Landhebung verbundene Massenzufluß eine Geoidänderung zur Folge. Schließlich wird das Ozeanvolumen durch das hinzukommende Schmelzwasser vergrößert, was wiederum mit Vertikalbewegungen und Geoidänderungen verbunden ist (z.B. Johnston, 1993).

Die Berücksichtigung sich verändernder Eis- und Ozeanlasten wirkt sich auf die Beziehung (2.51) für den Lastdruck aus, derart daß die Auflaständerung in die beiden Anteile Eislaständerung und Ozeanlaständerung zerlegt wird:

$$\begin{aligned}\sigma_g(\theta, \varphi, t) &= \sigma_g^I(\theta, \varphi, t) + \sigma_g^O(\theta, \varphi, t) \\ &= g(a)[\rho^I d^I(\theta, \varphi) h^I(t) + \rho^O d^O(\theta, \varphi) h^O(t)],\end{aligned}\quad (4.1)$$

wobei σ_g^I den Eisdruck, σ_g^O den Ozeandruck, ρ^I die Volumenmassendichte des Eises, ρ^O die Volumenmassendichte des Ozeans, d^I das Eisprofil, d^O das Ozeanprofil und $h^{I/O}$ die entsprechenden Mächtigkeiten bezeichnet.

Für die Radialverschiebung (2.59), das lokale Inkrement des Schwerepotentials (2.62) und das lokale Inkrement der Schwere an der Oberfläche (2.64) gelten die erweiterten Beziehungen

$$u_r(r_k, \theta, \varphi, t) = g(a) \left[\rho^I \sum_{n=0}^{\infty} {}^I\mathcal{A}_1^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^I D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) + \rho^O \sum_{n=0}^{\infty} {}^O\mathcal{A}_1^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^O D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) \right], \quad (4.2)$$

$$\phi^{(\Delta)}(r_k, \theta, \varphi, t) = g(a) \left[\rho^I \sum_{n=0}^{\infty} {}^I\mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^I D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) + \rho^O \sum_{n=0}^{\infty} {}^O\mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^O D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) \right], \quad (4.3)$$

$$g^{(\Delta)}(a, \theta, \varphi, t) = \frac{g(a)}{a} \left[\rho^I \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) {}^I\mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^I D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) + \rho^O \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) {}^O\mathcal{A}_5^n(r_k, t) \sum_{m=-n}^n {}^O D_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) \right], \quad (4.4)$$

wobei ${}^I\mathcal{A}_i^n$ der Amplitude in (2.56) entspricht und D_{nm} durch (2.69) gegeben ist. Die Ozeanlast ergibt sich aus der Differenz von Geoidänderung e_g , eustatischer Meeresspiegeländerung e_{eu} und auflastinduzierter Radialverschiebung u_r des Ozeanbodens, wobei bereits der Separationsansatz vorausgesetzt ist:

$$\begin{aligned}d^O(\theta, \varphi) h^O(t) &= \frac{\sigma_g^O(\theta, \varphi, t)}{\rho^O g(a)} = [e_g(\theta, \varphi, t) + e_{eu}(t) - u_r(a, \theta, \varphi, t)] \mathcal{O}(\theta, \varphi, t) \\ &= \begin{cases} e_g(\theta, \varphi, t) + e_{eu}(t) - u_r(a, \theta, \varphi, t) & , \text{Ozean} \\ 0 & , \text{Land} \end{cases}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Die Geoidänderung e_g wird aus (4.3) mit Hilfe der Formel (2.63) von Bruns berechnet. Die eustatische Meeresspiegeländerung e_{eu} folgt aus der Massenerhaltung:

$$0 = \rho^I V^I(t) + \rho^O \int_{\text{Ozean}} [e_g(\theta, \varphi, t) + e_{eu}(t) - u_r(a, \theta, \varphi, t)] d\theta d\varphi \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow e_{eu}(t) = -\frac{\rho^I V^I(t)}{\rho^O A^O(t)} - \frac{1}{A^O(t)} \int_{\text{Ozean}} [e_g(\theta, \varphi, t) - u_r(a, \theta, \varphi, t)] d\theta d\varphi, \quad (4.7)$$

wobei V^I das Eisvolumen und A^O die Ozeanfläche bezeichnet. (4.5) wird in der Literatur auch als 'sea-level equation' bezeichnet (z.B. Johnston, 1993; Peltier, 1998). Mit Hilfe von (4.2)–(4.7) können sämtliche relevanten Größen berechnet werden.

Bei der Auswertung der 'sea-level equation' können verschiedene Vereinfachungen vorgenommen werden. Im einfachsten Fall wird angenommen, daß sich das Schmelzwasser gleichmäßig auf die Ozeane verteilt und die Küstenlinien sich nicht verändern, was nur eine grobe Näherung ist.

In einem erweiterten Modell wird daher eine Änderung der Küstenlinien zugelassen. Allerdings kann nicht davon ausgegangen werden, daß sich das Schmelzwasser gleichmäßig auf die Ozeane verteilt. Denn durch eine Umverteilung der Massen in den Ozeanen und im Erdinneren ändert sich das Geoid und beeinflusst somit auch die Verteilung des Schmelzwassers. In einem dritten Modell wird daher auch berücksichtigt, daß sich das Wasser dem Geoid und der Radialbewegung des Meeresbodens entsprechend verteilt. In dieser Arbeit wird bei der Berechnung der Meeresspiegeländerung von sich ändernden Küstenlinien und von Schmelzwasser, welches sich dem Geoid und der Radialbewegung des Meeresbodens entsprechend verteilt, ausgegangen.

4.2 ICE-3G: Globales Modell der pleistozänen Vereisung

Das letzte glaziale Maximum (LGM) liegt etwa 21000 Jahre zurück. Das von Tushingham & Peltier (1991) entwickelte Eismodell ICE-3G beschreibt die Enteisungsgeschichte der Erde seit dem LGM bis heute. Dabei wird angenommen, daß vor dem LGM die Eislast konstant war. Die Entwicklung des Modells stützt sich im wesentlichen auf ^{14}C datierte Meeresspiegeländerungen in ehemals eisbedeckten Regionen.

Die zeitliche Diskretisierung wird durch die Angabe der jeweiligen Last zu ausgewählten Zeitpunkten erreicht. Bei ICE-3G liegt zwischen 18 ka BP und heute jeweils nach 1000 Jahren eine neue Lastverteilung vor. Die räumliche Diskretisierung erfolgt in diesem Modell durch die Überdeckung der Ozeane und der eisbedeckten Gebiete mit Kreisscheiben. Tushingham & Peltier (1991) verwendeten 808 Kreisscheiben unterschiedlicher Mächtigkeit und unterschiedlicher Ausdehnung, was insbesondere in den küstennahen Gebieten mit feinen Strukturen eine gute Anpassung ermöglicht. Die Mächtigkeit der Lastscheiben wurde in neunzehn Iterationsschritten soweit geändert, bis die berechneten Meeresspiegeländerungen weitgehend an die weltweit beobachteten Daten angepaßt waren und somit unter der Annahme, daß das angenommene Erdmodell korrekt ist, ein den globalen Beobachtungen entsprechendes Eismodell abgeleitet wurde.

Im folgenden wird nicht das ursprüngliche Modell ICE-3G benutzt, welches sich aus den Angaben von Koordinaten sowie zugehörigen Radien und Lasthöhen zusammensetzt, sondern ein in Kugelflächenfunktionskoeffizienten entwickeltes gleichmäßiges Raster, dessen Höhen durch Interpolation gewonnen werden, nachdem die Lasthöhen von ICE-3G geglättet worden sind. Abbildung 4.1 zeigt die Verteilung der Eismassen von ICE-3G auf der Nordhemisphäre zwischen dem LGM bei 18 ka BP und 5 ka BP, wobei die Zeitangaben in 'radio carbon years' sind.

4.3 AL-1: Regionales Modell der rezenten Vereisung in Alaska

Angaben zu der flächenhaften Ausdehnung der heutigen vereisten Gebiete in Südostalaska sind Field (1975) entnommen. Desweiteren sind die in Anonymous (1982) genannten, auf das Jahr 1980 bezogenen Flächenabschätzungen berücksichtigt.

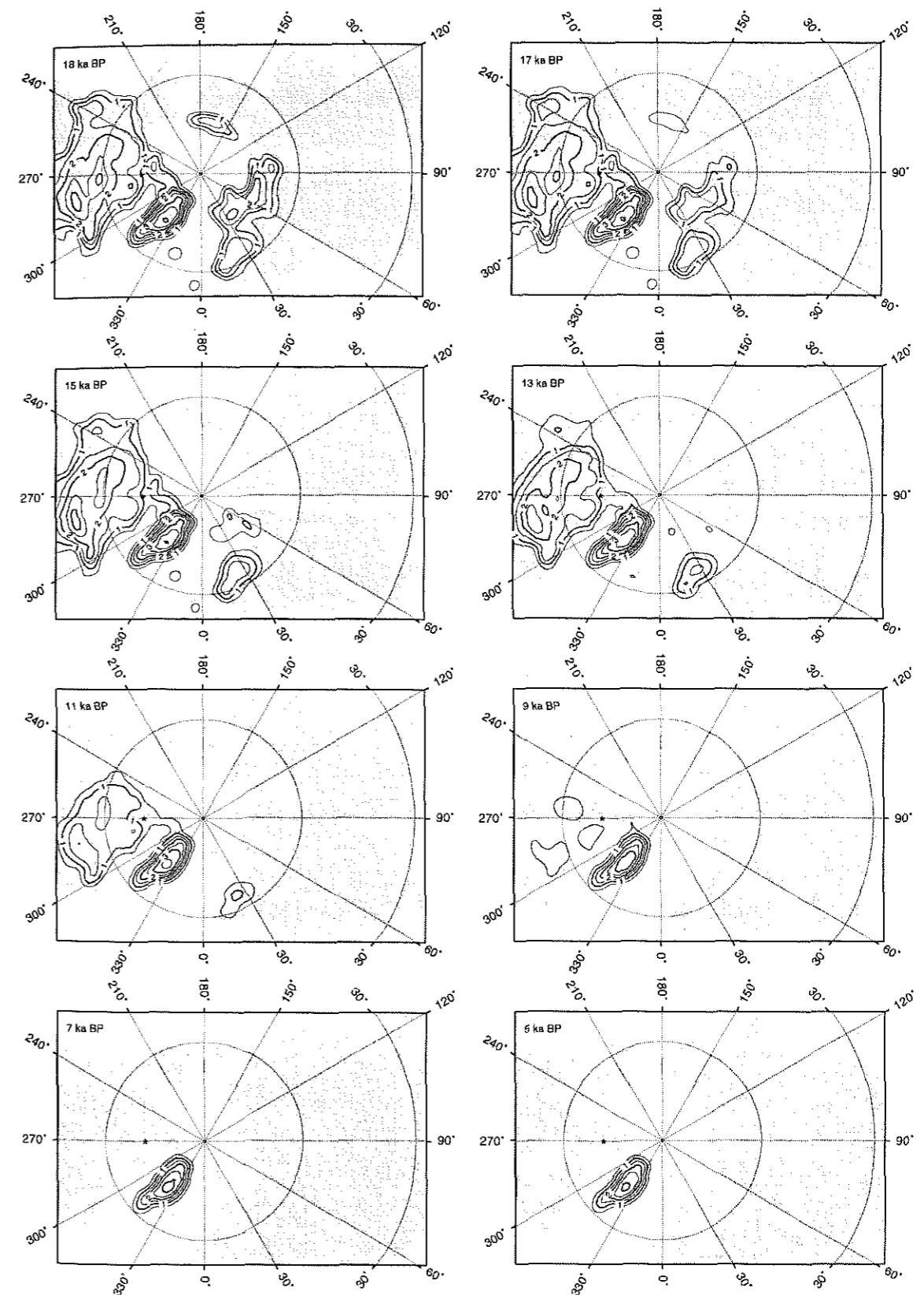


Abb. 4.1: Eismächtigkeit in km des Lastmodells ICE-3G auf der Nordhemisphäre während des Holozäns zwischen 18 ka BP und 5 ka BP in ^{14}C Jahren (aus Thoma, 2001).

Lastmodell AL-1 besteht aus 16 auf der Kugel verteilten geometrischen Körpern mit elliptischer Grundfläche und einem liegend parabolischen Querschnitt, die die reale Vereisung möglichst gut annähern. In Tabelle 4.2 sind die Ellipsen mit ihren kennzeichnenden Daten gelistet. Aufgrund der unvollständigen Informationen ist das Modell jedoch mit Unsicherheiten behaftet. Dies betrifft insbesondere das Volumen der Eismassen, über welches keine genauen Angaben vorliegen. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß es sich in Südostalaska überwiegend um Gebirgsgletscher handelt, und mit Hilfe von Erfahrungswerten ist das Volumen und damit die Mächtigkeit der einzelnen Eislasten in Abhängigkeit von der jeweiligen Fläche geschätzt worden. Sofern nur relative Radialbewegungen und Geoidänderungen betrachtet werden, hat eine fehlerhafte Volumenabschätzung allerdings keine Auswirkungen auf die Berechnungsergebnisse. Denn Relativwerte werden nur durch eine Volumenänderung, nicht jedoch durch das Anfangsvolumen bestimmt. Der Grund für die Angabe eines Anfangsvolumens liegt in dem Bestreben, ein konsistentes Eismodell zu konstruieren. Das globale Eismodell ICE-3G geht ebenfalls von einem bekanntem Anfangsvolumen aus, welches durch das LGM gegeben ist.

Die zeitliche Volumenänderung wird mit Hilfe von Massenbilanzen bestimmt. In Tabelle 4.1 sind sämtliche in Südostalaska liegenden Gletscher aufgelistet, von denen Untersuchungen zu Massenbilanzen vorliegen. Aus diesen Angaben wird eine mittlere Massenbilanz gewonnen, wobei zwischen den Gebieten 'Coast Mountains' und 'St Elias and Wrangell Mountains' differenziert wird. Bei den Berechnungen wird von einem linearen Verlauf des Abschmelzens ausgegangen. Die Grundflächen der einzelnen Eiskörper werden über den Zeitraum, für den ein Abschmelzen angenommen wird, als konstant betrachtet. Der Abschmelzvorgang beginnt für alle Ellipsen mit Ausnahme der Ellipse 16 im Jahr 1900 und dauert bis heute an. Die frühere Lastgeschichte ist nicht berücksichtigt, da einerseits keine Informationen vorliegen und andererseits wegen der geringen Massen und der teilweise erheblichen Entfernung zu den Pegelstationen als vernachlässigbar angenommen werden kann.

In der Glacier Bay sind seit Mitte des 18. Jahrhunderts die Gletscherränder in unregelmäßigen Abständen kartiert worden. Die Enteisungsgeschichte der letzten 250 Jahre ist daher weitgehend bekannt. Einige Pegelstationen liegen nahe oder in der Glacier Bay, so daß es sinnvoll ist, über diesem Gebiet eine weitere Ellipse 16 anzuordnen, die eine bessere Berücksichtigung der tatsächlichen Enteisungsgeschichte ermöglicht. Abbildung 4.2 zeigt die Lage der einzelnen Elemente des Lastmodells, sowie die Lage der Gletscher, deren Massenbilanzen bei der Modellierung der regionalen Enteisung verwendet werden.

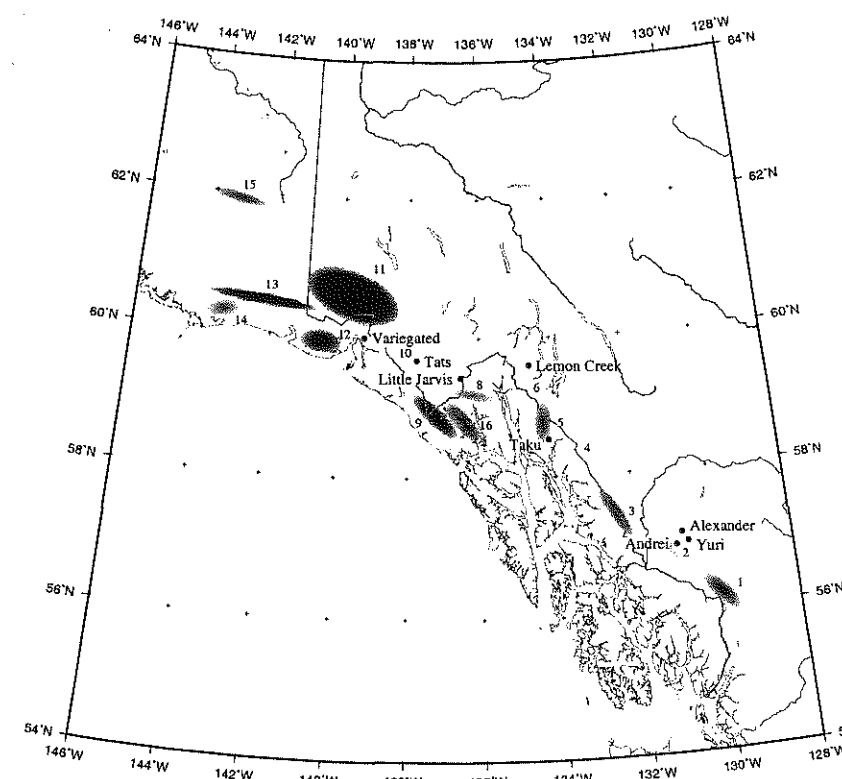


Abb. 4.2: Regionales Lastmodell AL-1 und Gletscher mit bekannten Massenbilanzen.

Gletscher	Beobachtungszeitraum	Massenbilanz (mm/a)	Quelle
Coast Mountains			
Alexander	1979-84, 1989-90	-715	Dyurgerov & Meier (1997)
Andrei	1978-84, 1989-90	-453	Dyurgerov & Meier (1997)
Yuri	1978-84, 1989-90	-629	Dyurgerov & Meier (1997)
Taku	1946-86	370	Pelto & Miller (1990)
Lemon Creek	1966-93	-221	Dyurgerov & Meier (1997)
	1957-95	-360	Sapiano et al. (1998)
		Mittel: -360	
St. Elias and Wrangell Mountains			
Tats	1989	-178	Dyurgerov & Meier (1997)
Little Jarvis	1957-95	-40	Sapiano et al. (1998)
Variegated	1950	-500	Dyurgerov & Meier (1997)
		Mittel: -240	

Tab. 4.1: Gletscher und zugehörige Massenbilanzen.

Nr.	Halbachsen a (km) b (km)	Fläche (km ²)	Volumen 1900 (km ³)	Höhe 1900 (km)	Volumen 1980 (km ³)	Höhe 1980 (km)
Coast Mountains						
1	40 15	1885	1025	1.020	531	0.528
2	35 8	880	346	0.736	115	0.246
3	50 12	1885	1025	1.020	531	0.528
4	10 8	251	75	0.559	9	0.070
5	35 15	1649	838	0.953	406	0.462
6	15 10	471	156	0.623	33	0.132
7	15 8	377	120	0.596	21	0.105
St. Elias und Wrangell Mountains						
8	40 10	1257	456	0.680	236	0.352
9	50 15	2356	1241	0.987	829	0.660
10	25 8	629	168	0.500	58	0.176
11	82 40	10304	7295	1.327	5495	1.000
12	35 20	2199	1106	0.943	722	0.616
13	90 10	2827	1688	1.119	1194	0.792
14	30 15	1414	546	0.724	299	0.396
15	50 10	1571	643	0.768	369	0.440
16	45 15	2121	Volumen 1750 1714	Höhe 1750 1.515	Volumen 1900 672	Höhe 1900 0.594

Tab. 4.2: Parameter des regionalen Lastmodells AL-1.

5. Ergebnisse der Modellrechnungen

In diesem Kapitel werden die gemessenen und die berechneten (relativen) Meeresspiegeländerungen verglichen. Abbildung 5.1 soll dazu den Zusammenhang zwischen den einzelnen Größen verdeutlichen.

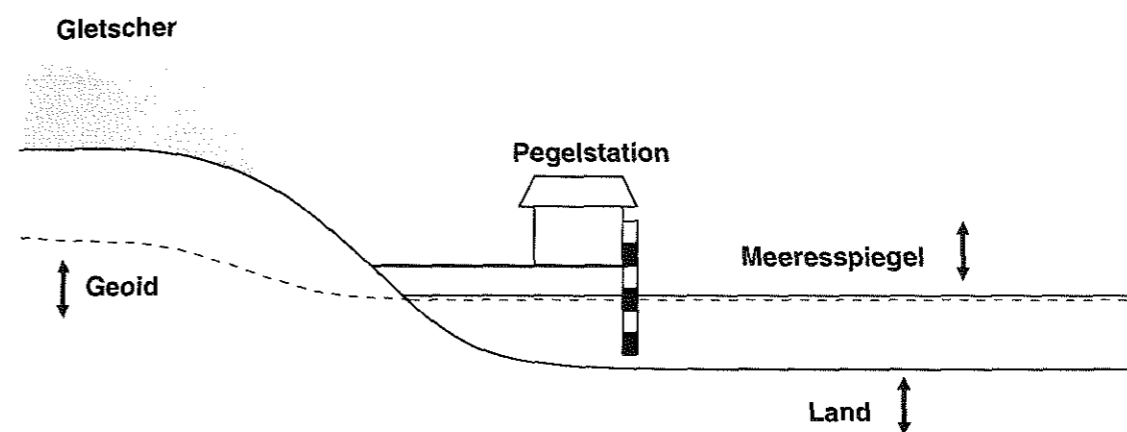


Abb. 5.1: Auswirkungen der Massenänderung eines Gletschers.

Schematisch dargestellt ist eine Pegelstation in entsprechender Umgebung. Ein Zurückweichen des Gletschers hat neben der Hebung des Landes auch eine Meeresspiegeländerung und wegen der erhöhten Ozeanlast eine Senkung des Ozeanbodens zur Folge. Diese Massenverlagerungen implizieren gleichzeitig eine Änderung des Geoids. Bei einer Pegelmessung kann lediglich die Meeresspiegelhöhe relativ zu einem mit dem Land verbundenen Meßpunkt bestimmt werden. Es wird daher nicht die Radialverschiebung des Landes gemessen, sondern die Differenz zwischen Radialverschiebung und Geoidänderung. Um beobachtete und berechnete Werte vergleichen zu können, muß demnach die berechnete Radialverschiebung um die Geoidänderung reduziert werden.

Im folgenden werden zunächst in Abschnitt 5.1 die beobachteten relativen Meeresspiegelabsenkungen besprochen, anschließend werden in Abschnitt 5.2 die für die verschiedenen Erdmodelle berechneten Werte gelistet. In Abschnitt 5.3 erfolgt ein Vergleich mit den Beobachtungsdaten, in Abschnitt 5.4 werden die Ergebnisse bewertet.

5.1 Beobachtungsdaten

Bei der Ermittlung von langfristigen relativen Meeresspiegeländerungen wird unterschieden zwischen Werten, die aus kontinuierlichen Meßreihen abgeleitet werden und solchen, die aus zwei unabhängigen Meßkampagnen ermittelt werden. Bei kontinuierlichen Meßreihen werden die Pegelstände mehrmals pro Tag aufgezeichnet und daraus Monats- bzw. Jahresmittel berechnet. Bei der Bestimmung von langfristigen Meeresspiegeländerungen aus zwei getrennten Meßkampagnen werden die Pegelstationen im Abstand von mehreren Jahren jeweils für eine Zeit von etwa zwei Monaten betrieben. Abbildung 5.2 zeigt Stationen in Südostalaska, an denen Pegelmessungen vorgenommen worden sind. In Tabelle 5.1 sind die beobachteten Raten der relativen Meeresspiegelabsenkung h_{RSL}^{obs} für die einzelnen Stationen verzeichnet. Die aus unterschiedlichen Meßanordnungen und -kampagnen stammenden Werte sind dabei unter Angabe der jeweiligen Quelle getrennt gelistet. Der National Ocean Service (NOS) und der Permanent Service for Mean Sea Level (PSMSL) stellen in einer Datenbank die aus kontinuierlichen Messungen bestimmten Jahresmittel des Pegelstands für den in der Tabelle angegebenen Zeitraum zur Verfügung. Mit Hilfe einer Ausgleichsrechnung und unter Annahme eines linearen Trends kann aus den Jahresmitteln h_{RSL}^{obs} berechnet werden. Mit Ausnahme der Werte, die mit einem Stern gekennzeichnet sind, stammen die Angaben von h_{RSL}^{obs} bei Pierce (1961) und Hicks & Shofnos (1965) aus zwei unabhängigen Meßkampagnen, die in den angegebenen Jahren durchgeführt wurden. In diesen Jahren wurden die Stationen jeweils für etwa 60 Tage betrieben und die mittleren Pegelstände ermittelt. Diese Mittelwerte wurden dann um einen Betrag korrigiert, der für eine Pegelstation mit ähnlichen Witterungsverhältnissen, jedoch vernachlässigbarer Radialbewegung des Untergrundes gültig war. Diese Korrektur berücksichtigt in erster Näherung die meteorologischen und ozeanographischen Einflüsse. Aus den korrigierten Mittelwerten wurde dann h_{RSL}^{obs} unter Annahme eines linearen Trends bestimmt. Hicks & Shofnos (1965) bezogen sich bei der Auswertung der Pegelmessungen unter anderem auf Pierce (1961). Es kann daher davon ausgegangen werden,

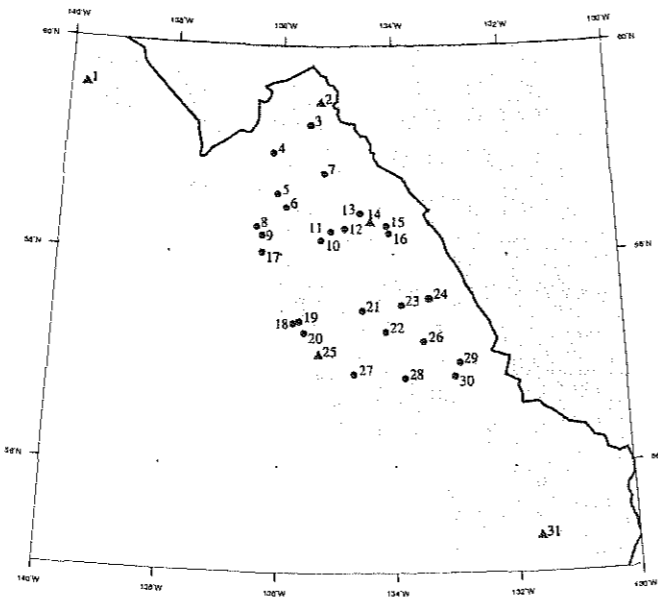


Abb. 5.2: Pegelstationen in Südostalaska mit Meßkampagnen (Punkte) bzw. kontinuierlichen Messungen (Dreiecke).

Es kann daher davon ausgegangen werden,

5.1. Beobachtungsdaten

Nr.	Station	NOS		PSMSL		Pierce (1961)		Hicks & Shofnos (1965)		Mittel
		Beobachtungs- zeitraum	h_{RSL}^{obs}	Beobachtungs- zeitraum	h_{RSL}^{obs}	Beobachtungs- zeitraum	h_{RSL}^{obs}	Beobachtungs- zeitraum	h_{RSL}^{obs}	
1	Yakutat	1961-99	7	1940-99	6	1909, 1959	18	1944, 1962	*6	6
2	Skagway			1945-99	16			1909, 1959	18	16
3	Haines					1922, 1959	21	1945, 1962	*18	18
4	Muir Inlet					1940, 1959	34	1922, 1959	23	22
5	Willoughby Island					1939, 1959	27	1940, 1959	35	34
6	Bartlett Cove					1939, 1959	40	1939, 1959	27	27
7	Endicott Raver							1938, 1959	40	40
8	Inian Cove					1902, 1959	24	1922, 1959	23	23
9	Elfin Cove					1938, 1959	18	1902, 1959	23	23
10	Hoonah					1923, 1959	15	1938, 1959	20	19
11	Swanson Harbour					1901, 1959	18	1923, 1959	16	15
12	Funter Bay					1922, 1959	15	1901, 1959	16	17
13	Anke Bay					1937, 1959	18	1922, 1959	14	14
14	Juneau					1911, 1959	12	1901, 1959	14	14
15	Annex Creek			1936-99	13			1911, 1959	13	13
16	Sunny Side					1937, 1959	15	1944, 1962	*13	13
17								1937, 1959	14	14
18								1937, 1959	14	14
19								1917, 1959	14	14
20								1928, 1960	3	3
21	Killisnoo							1896, 1960	4	4
22								1929, 1960	4	4
23								1895, 1960	7	7
24	Windham							1925, 1960	5	5
25	Sitka	1950-99	6	1938-99	2			1920, 1960	7	7
26	Cape Fanshaw							1944, 1962	*2	3
27								1920, 1960	7	7
28								1944, 1962	7	7
29	Twin Peaks							1920, 1960	2	2
30	Petersburg							1926, 1960	2	2
31	Ketchikan	1949-99	0	1919-99	0			1927, 1960	2	2
								1887, 1960	8	8
								1910, 1960	4	4
								1944, 1962	*0	10

Tab. 5.1: Beobachtete Raten der relativen Meeresspiegelabsenkung h_{RSL}^{obs} in mm/a aus verschiedenen Quellen, bei NOS und PSMSL aus kontinuierlichen Meßreihen, bei Pierce (1961) und Hicks & Shofnos (1965) aus zwei unabhängigen Meßkampagnen. Die mit einem Stern gekennzeichneten Größen sind Ausnahmen und stammen ebenfalls aus kontinuierlichen Meßreihen.

daß Hicks & Shofnos die gleiche Datengrundlage verwendeten wie Pierce, was die Übereinstimmung in den Jahresangaben erklärt. Die geringen Unterschiede in den Werten von \dot{h}_{RSL}^{obs} sind vermutlich auf unterschiedliche Auswertungsmethoden zurückzuführen.

In der letzten Spalte von Tabelle 5.1 sind die Mittelwerte von \dot{h}_{RSL}^{obs} eingetragen, die im folgenden zum Vergleich mit den berechneten Werten dienen. Abbildung 5.3 zeigt Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{obs} .

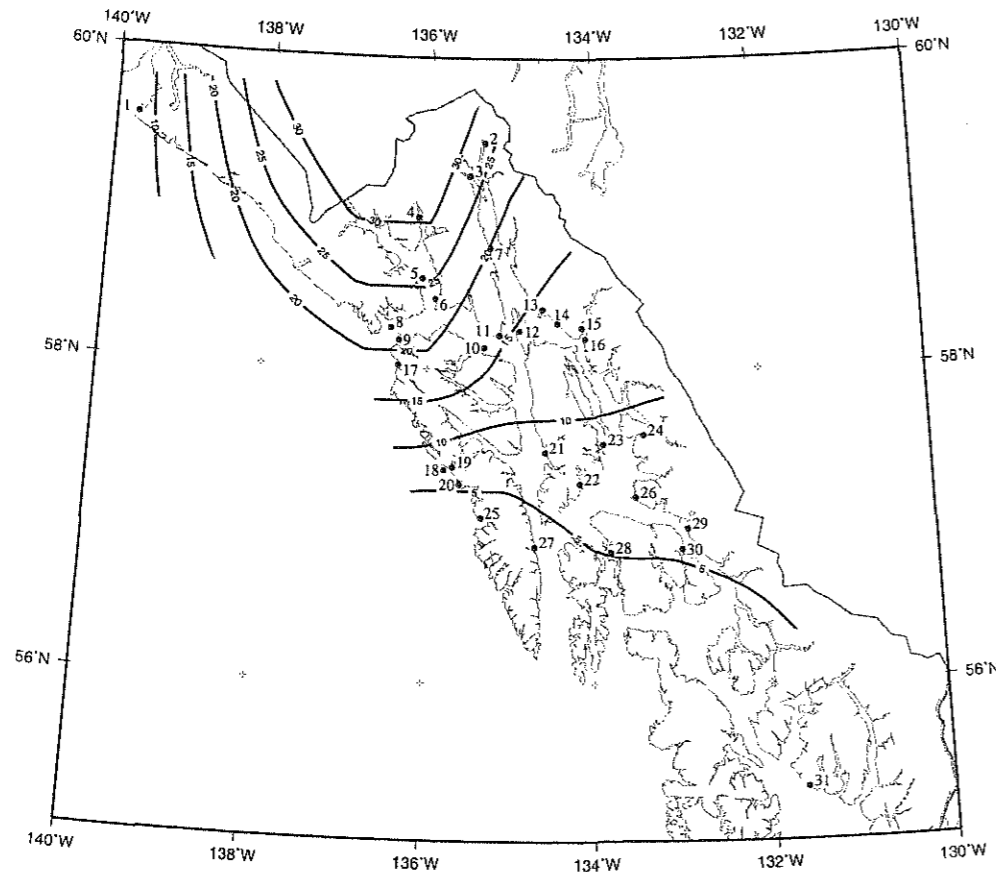


Abb. 5.3: Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{obs} in mm/a, die Nummern kennzeichnen die in Tabelle 5.1 gelisteten Stationen.

5.2 Berechnung eislastinduzierter Radialbewegung und Geoidänderung

Zu einem Vergleich von \dot{h}_{RSL}^{obs} mit den berechneten Werten muß zunächst die Differenz

$$\dot{h}_{RSL}^{cal} = \dot{u}_r - \dot{e}_g - \dot{e}_{eu} \quad (5.1)$$

zwischen den Änderungsraten der Radialverschiebung, \dot{u}_r , der Geoidänderung, \dot{e}_g , und der eustatischen Meeresspiegeländerung, \dot{e}_{eu} , gebildet werden. Das verwendete globale Eismodell ICE-3G trägt für den gegenwärtigen Zeitpunkt nicht zur eustatischen Meeresspiegeländerung bei. Da in dem regionalen Eismodell AL-1 nur das heutige Abschmelzen der Gletscher in Südostalaska berücksichtigt wird, ist die dadurch hervorgerufene eustatische Meeresspiegeländerung vernachlässigbar gering. Im weiteren Verlauf wird daher $\dot{e}_{eu} = 0$ angenommen. Für die folgenden Berechnungen werden die in Kapitel 3 eingeführten regionalen Erdmodelle verwendet. Es handelt sich dabei um sechs Modelle, die durch Kombination von drei Viskositätsprofilen mit zwei Lithosphärenmächtigkeiten hervorgegangen sind.

Als Auflasten werden die in Kapitel 4 behandelten globalen und regionalen Lasten verwendet. Um den Einfluß der pleistozänen Vereisung auf \dot{u}_r und \dot{e}_g zu ermitteln, wird zunächst das regionale Modell vernachlässigt und lediglich ICE-3G als Auflast angenommen. Anschließend werden die Berechnungen mit der Kombination aus ICE-3G und AL-1 durchgeführt. Die Ozeanlast wird in beiden Fällen in einer weiteren Modellrechnung berücksichtigt.

Zur Verdeutlichung der Berechnungsergebnisse dienen Tabellen, in denen \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für ausgewählte Stationen verzeichnet sind. Zusätzlich sind die Berechnungsergebnisse für sämtliche Auflasten in Form von Isolinienkarten gezeigt.

5.2.1 Erdmodelle MF2-1 und MF2-2

In den Tabellen 5.2 und 5.3 sind \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} für die Erdmodelle MF2-1 und MF2-2 jeweils für die Stationen Yakutat, Skagway, Bartlett Cove, Juneau und Sitka verzeichnet. Bei den Berechnungen sind die in der ersten Zeile vermerkten Auflasten berücksichtigt.

Unabhängig von Erd- und Lastmodell werden für die Station Skagway die größten Radialverschiebungsraten berechnet. Die geringsten Werte sind für die Station Sitka berechnet. Mit Erdmodell MF2-1 und ICE-3G als Auflast liegt \dot{u}_r zwischen -0.09 mm/a und 0.76 mm/a. Wird außerdem das regionale Lastmodell AL-1 berücksichtigt, steigen die Werte geringfügig um maximal 0.05 mm/a. Die Berücksichtigung der Ozeanlast bewirkt ein bis zu 0.46 mm/a größeren Wert von \dot{u}_r . An allen Stationen und in allen Berechnungen ist \dot{h}_{RSL}^{cal} kleiner als \dot{u}_r . Der mittlere Wert von \dot{e}_g beträgt 0.20 mm/a für ICE-3G als Auflast und 0.30 mm/a für ICE-3G und AL-1 als Auflast. Eine zusätzliche Berücksichtigung der Ozeanlast hat nur einen geringen Anstieg von \dot{e}_g zur Folge. Die für Erdmodell MF2-2 berechneten Werte von \dot{u}_r sind mit Ausnahme der Station Sitka höher als die für Erdmodell MF2-1. ICE-3G ergibt für \dot{u}_r an den ausgewählten Stationen

Werte zwischen -0.17 mm/a und 1.06 mm/a. Bei Einbeziehung des regionalen Lastmodells ist eine zusätzliche Hebungsrates von maximal 0.05 mm/a zu verzeichnen. Die Berücksichtigung der Ozeanlast wirkt sich mit maximal 0.48 mm/a auf \dot{u}_r aus. Die Werte von \dot{e}_g sind im Vergleich zu Erdmodell MF2-1 geringfügig höher und betragen durchschnittlich 0.25 mm/a für ICE-3G und durchschnittlich 0.35 mm/a für ICE-3G und AL-1 bzw. etwas mehr bei Einbeziehung des Ozeans.

Nr.	Station	ICE-3G		ICE-3G + Ozean		ICE-3G + AL-1		ICE-3G + AL-1 + Ozean	
		\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}
1	Yakutat	0.57	0.42	1.03	0.86	0.62	0.39	1.08	0.82
2	Skagway	0.76	0.54	1.15	0.90	0.80	0.50	1.18	0.85
6	Bartlett Cove	0.35	0.20	0.79	0.57	0.39	0.10	0.79	0.47
14	Juneau	0.42	0.21	0.79	0.54	0.42	0.10	0.78	0.43
25	Sitka	-0.09	-0.26	0.27	0.07	-0.09	-0.36	0.27	-0.03

Tab. 5.2: \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für Erdmodell MF2-1.

Nr.	Station	ICE-3G		ICE-3G + Ozean		ICE-3G + AL-1		ICE-3G + AL-1 + Ozean	
		\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}
1	Yakutat	1.06	0.87	1.49	1.28	1.10	0.84	1.53	1.25
2	Skagway	1.17	0.92	1.53	1.25	1.20	0.87	1.56	1.20
6	Bartlett Cove	0.57	0.35	0.92	0.68	0.57	0.25	0.92	0.58
14	Juneau	0.53	0.30	0.85	0.59	0.52	0.18	0.84	0.48
25	Sitka	-0.17	-0.36	0.14	-0.07	-0.17	-0.46	0.14	-0.17

Tab. 5.3: \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für Erdmodell MF2-2.

Abbildung 5.4 zeigt Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} für Südostalaska. Bei dem oberen Bild dient Erdmodell MF2-1 mit einer Lithosphärenmächtigkeit von 64 km als Berechnungsgrundlage. Das untere Bild zeigt die Ergebnisse für Erdmodell MF2-2 mit einer 16 km dicken Lithosphäre. Als Auflast sind jeweils das globale Modell ICE-3G, das regionale Modell AL-1 und der Ozean angenommen. Beiden Abbildungen ist gemeinsam, daß die Isolinien tendenziell in West-Ost Richtung verlaufen. Die höchsten Werte werden im nördlichen Teil des abgebildeten Gebietes erreicht. Nach Süden sinken die Werte kontinuierlich. Ein Unterschied zwischen den beiden Erdmodellen liegt in der Dichte der Isolinien. Bei Annahme einer 16 km dicken Lithosphäre ist der Gradient der Isolinien deutlich größer als bei einer Lithosphärenmächtigkeit von 64 km.

Der Vergleich zwischen den beiden Erdmodellen MF2-1 und MF2-2 zeigt, daß das regionale

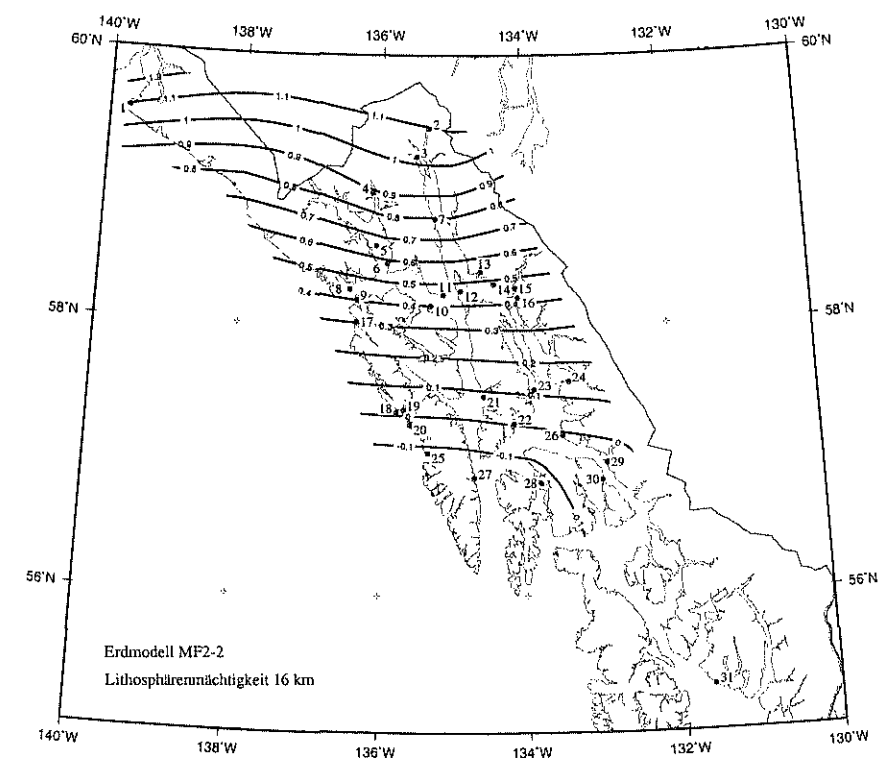
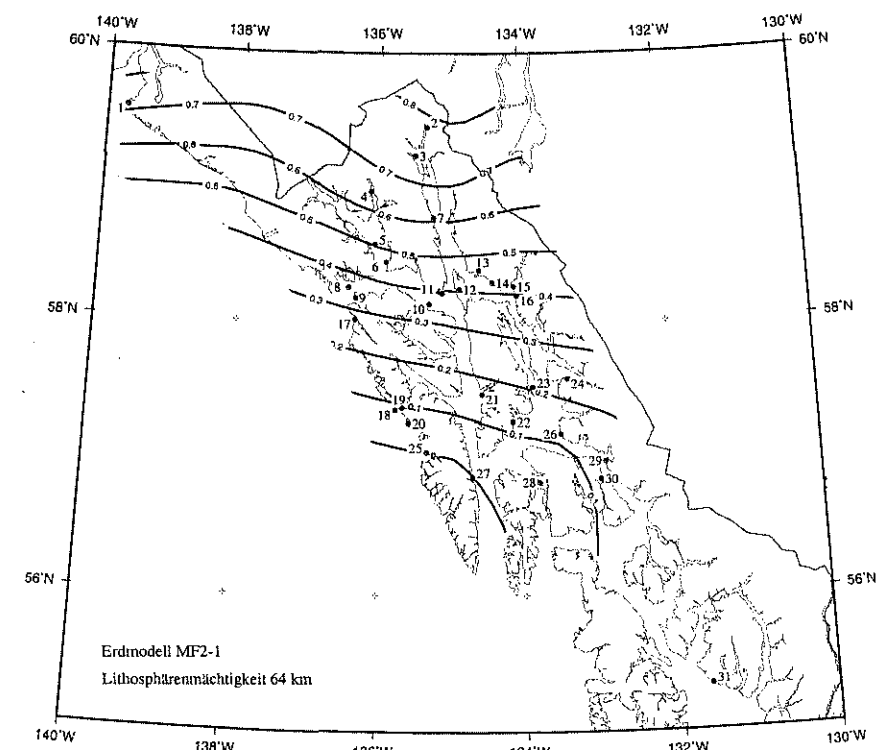


Abb. 5.4: Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für die Erdmodelle MF2-1 und MF2-2 unter Berücksichtigung der Auflast ICE-3G + AL-1 + Ozean.

Lastmodell AL-1 unabhängig von der Lithosphärenmächtigkeit nur einen sehr geringen Einfluß auf die Radialbewegung hat. Die Reaktion der Erde auf die pleistozäne Vereisung hängt dagegen, wie auch in Abbildung 5.4 erkennbar, von der Dicke der Lithosphäre ab.

5.2.2 Erdmodelle VM2-1 und VM2-2

Die Rate der Radialverschiebung und der relativen Meeresspiegelabsenkung, die auf Grundlage der Erdmodelle VM2-1 und VM2-2 an den Stationen Yakutat, Skagway, Bartlett Cove, Juneau und Sitka berechnet werden, sind in den Tabellen 5.4 und 5.5 zusammengefaßt. Wie schon bei den zuvor behandelten Erdmodellen werden die Berechnungen für verschiedene Auflasten durchgeführt.

Nr.	Station	ICE-3G		ICE-3G + Ozean		ICE-3G + AL-1		ICE-3G + AL-1 + Ozean	
		\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}
1	Yakutat	0.03	-0.09	0.35	0.22	0.08	-0.11	0.40	0.20
2	Skagway	0.23	0.07	0.52	0.33	0.28	0.04	0.56	0.29
6	Bartlett Cove	0.17	0.02	0.45	0.29	0.18	-0.07	0.46	0.19
14	Juneau	0.27	0.11	0.54	0.35	0.27	0.01	0.54	0.24
25	Sitka	0.16	0.02	0.37	0.21	0.17	-0.07	0.38	0.12

Tab. 5.4: \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für Erdmodell VM2-1.

Nr.	Station	ICE-3G		ICE-3G + Ozean		ICE-3G + AL-1		ICE-3G + AL-1 + Ozean	
		\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}
1	Yakutat	0.59	0.44	0.89	0.73	0.65	0.42	0.95	0.71
2	Skagway	0.72	0.53	1.03	0.83	0.77	0.49	1.08	0.79
6	Bartlett Cove	0.37	0.20	0.65	0.47	0.37	0.10	0.66	0.37
14	Juneau	0.40	0.21	0.67	0.47	0.39	0.10	0.66	0.36
25	Sitka	0.11	-0.05	0.33	0.16	0.12	-0.14	0.34	0.07

Tab. 5.5: \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für Erdmodell VM2-2.

Mit ICE-3G als Auflast wird für Erdmodell VM2-1 an der Pegelstation Skagway mit 0.27 mm/a der größte Wert von \dot{u}_r berechnet. Wird neben ICE-3G auch das regionale Lastmodell AL-1 berücksichtigt, steigen die Werte von \dot{u}_r an den Stationen Yakutat und Skagway um 0.05 mm/a; an den anderen Stationen hat AL-1 nahezu keinen Einfluß. Die Berücksichtigung der Ozeanlast hat unabhängig von AL-1 ein Ansteigen von \dot{u}_r um durchschnittlich 0.25 mm/a zur Folge. \dot{e}_g liegt bei durchschnittlich 0.15 mm/a, wenn ICE-3G als Auflast verwendet wird, und

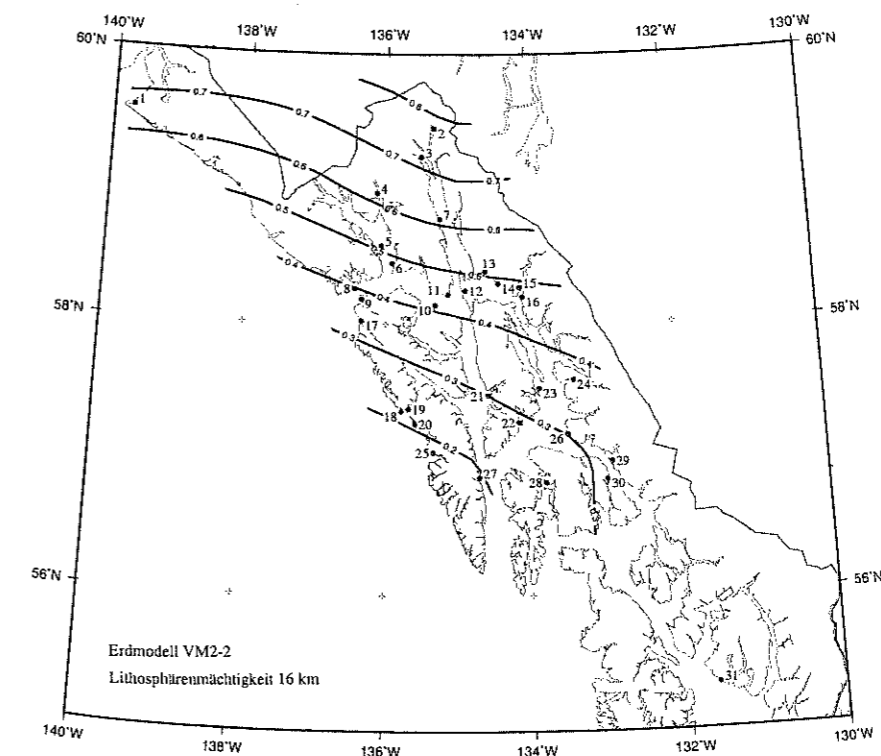
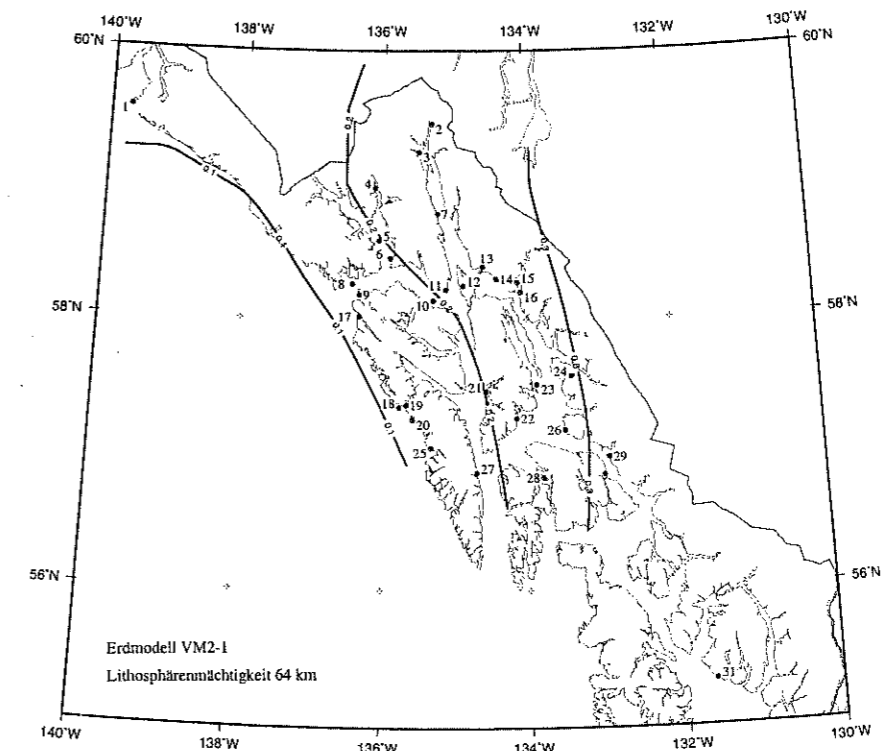


Abb. 5.5: Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für die Erdmodelle VM2-1 und VM2-2 unter Berücksichtigung der Auflast ICE-3G + AL-1 + Ozean.

bei 0.25 mm/a, wenn ICE-3G und AL-1 als Auflast berücksichtigt werden. Bei Einbeziehung der Ozeanlast steigt \dot{e}_g in beiden Fällen geringfügig. Mit Erdmodell VM2-2 als Berechnungsgrundlage werden unabhängig von der Auflast an der Station Skagway die größten Werte berechnet. Wird ICE-3G als Auflast angenommen, ergibt sich für Skagway eine Radialverschiebungsrates von 0.72 mm/a. Die Berücksichtigung des regionalen Lastmodells AL-1 macht sich lediglich an den Stationen Yakutat und Skagway mit einer Änderung von 0.05 mm/a bemerkbar. Die Ozeanlast wirkt sich mit einer Zunahme von maximal 0.31 mm/a auf \dot{u}_r aus. Die Zunahme von \dot{e}_g beträgt durchschnittlich 0.17 mm/a mit ICE-3G als Auflast und 0.27 mm/a mit ICE-3G und AL-1 als Auflast bzw. geringfügig höher bei Berücksichtigung der Ozeanlast.

Abbildung 5.5 zeigt wiederum Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} . Für das obere Bild wird Erdmodell VM2-1 mit einer 64 km dicken Lithosphäre als Berechnungsgrundlage verwendet, für das untere Erdmodell VM2-2 mit einer Lithosphärendicke von 16 km. Als Auflast werden jeweils ICE-3G, AL-1 und der Ozean verwendet. Der Verlauf der Isolinien unterscheidet sich für die beiden Erdmodelle stark. Im oberen Bild verlaufen die Isolinien etwa parallel zu den Küstenlinien, während im unteren Bild der Verlauf quer zu den Küstenlinien stärker ausgeprägt ist. Desweiteren ist der Gradient der Isolinien unter Annahme einer 64 km dicken Lithosphäre etwas kleiner als bei der dünnen Lithosphäre.

Aus den Tabellen geht hervor, daß das regionale Lastmodell AL-1 bei beiden Erdmodellen nur einen sehr geringen Einfluß auf die Hebungsraten hat. Die pleistozäne Vereisung ruft jedoch, wie auch in Abbildung 5.5 erkennbar, je nach Lithosphärendicke sehr unterschiedliche Radialbewegungen hervor.

5.2.3 Erdmodelle VM3-1 und VM3-2

In den Tabellen 5.6 und 5.7 sind \dot{h}_{RSL}^{cal} und \dot{u}_r für die Erdmodelle VM3-1 und VM3-2 aufgelistet. Wie zuvor sind bei den Berechnungen verschiedene Auflasten berücksichtigt.

Unabhängig von der Auflast werden bei Erdmodell VM3-1 an den Stationen Juneau und Skagway die höchsten Radialverschiebungsraten berechnet. Mit ICE-3G als Auflast beträgt \dot{u}_r 0.57 mm/a. Unter zusätzlicher Berücksichtigung des regionalen Lastmodells AL-1 ist \dot{u}_r an den genannten Pegelstationen um etwa 0.05 mm/a größer. An den Stationen Bartlett Cove, Juneau und Sitka erfährt \dot{u}_r dagegen nur eine sehr geringe Zunahme. Die Berücksichtigung der Ozeanlast führt an der Station Yakutat mit 0.34 mm/a zur größten Veränderung von \dot{u}_r . Die Werte von \dot{h}_{RSL}^{cal} sind um durchschnittlich 0.30 mm/a niedriger als die von \dot{u}_r , wobei ICE-3G allein einen geringeren Einfluß auf das Geoid hat als die Kombination aus ICE-3G und AL-1. Mit Erdmodell VM3-2 als Berechnungsgrundlage wird unabhängig von der Auflast an der Station Skagway die größte Radialverschiebungsrates berechnet. Wird ICE-3G als Auflast angenommen, beträgt \dot{u}_r maximal 1.11 mm/a. Die Berücksichtigung des regionalen Lastmodells AL-1 wirkt sich lediglich auf die Werte an den Stationen Yakutat und Skagway aus; \dot{u}_r nimmt um vernachlässigbare 0.05 mm/a zu. Die Ozeanlast wirkt sich mit maximal 0.31 mm/a auf die Berechnungsergebnisse

aus. Der Wert von \dot{e}_g beträgt durchschnittlich 0.40 mm/a, wobei die Werte für ICE-3G geringer sind als für die Kombination ICE-3G und AL-1.

Nr.	Station	ICE-3G		ICE-3G + Ozean		ICE-3G + AL-1		ICE-3G + AL-1 + Ozean	
		\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}
1	Yakutat	0.23	0.06	0.57	0.38	0.29	0.04	0.63	0.36
2	Skagway	0.55	0.31	0.86	0.59	0.60	0.27	0.91	0.55
6	Bartlett Cove	0.43	0.21	0.72	0.48	0.44	0.12	0.73	0.39
14	Juneau	0.57	0.32	0.85	0.57	0.57	0.22	0.85	0.47
25	Sitka	0.36	0.15	0.58	0.35	0.37	0.06	0.59	0.26

Tab. 5.6: \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für Erdmodell VM3-1.

Nr.	Station	ICE-3G		ICE-3G + Ozean		ICE-3G + AL-1		ICE-3G + AL-1 + Ozean	
		\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}	\dot{u}_r	\dot{h}_{RSL}^{cal}
1	Yakutat	0.91	0.68	1.21	0.98	0.96	0.66	1.27	0.96
2	Skagway	1.11	0.83	1.36	1.06	1.15	0.79	1.41	1.02
6	Bartlett Cove	0.67	0.41	0.90	0.63	0.67	0.33	0.91	0.53
14	Juneau	0.71	0.44	0.91	0.62	0.70	0.33	0.91	0.51
25	Sitka	0.31	0.07	0.50	0.24	0.33	-0.01	0.51	0.15

Tab. 5.7: \dot{u}_r und \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für Erdmodell VM3-2.

Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} sind in Abbildung 5.6 gezeigt. Als Auflast sind bei den Berechnungen das globale Modell ICE-3G, das regionale Modell AL-1 und der Ozean verwendet. Das obere Bild zeigt Isolinien für Erdmodell VM3-1, das untere Isolinien für Erdmodell VM3-2. Im oberen Bild verlaufen die Isolinien nahezu parallel zu den Küstenlinien, während im unteren Bild die Verlaufsrichtung quer zu den Küstenlinien stärker ausgeprägt ist. Der Gradient der Isolinien ist bei einer Lithosphärenmächtigkeit von 64 km geringer als bei der 16 km dicken Lithosphäre. Das gleiche Verhalten der Isolinien hat sich schon bei den Erdmodellen VM2-1 bzw. VM2-2 gezeigt.

Wie aus den Tabellen hervorgeht, hat die Berücksichtigung des regionalen Lastmodells AL-1 bei beiden Erdmodellen kaum Einfluß auf die berechneten Ergebnisse. Die Reaktion auf ICE-3G steht dagegen wieder in einem deutlich erkennbaren Zusammenhang mit der Lithosphärenmächtigkeit. Eine dicke Lithosphäre verhindert kurzweilige Verformungen, so daß bei einer Entlastung der Gradient der Radialbewegung am Lastrand geringer ist als bei einer dünnen Lithosphäre.

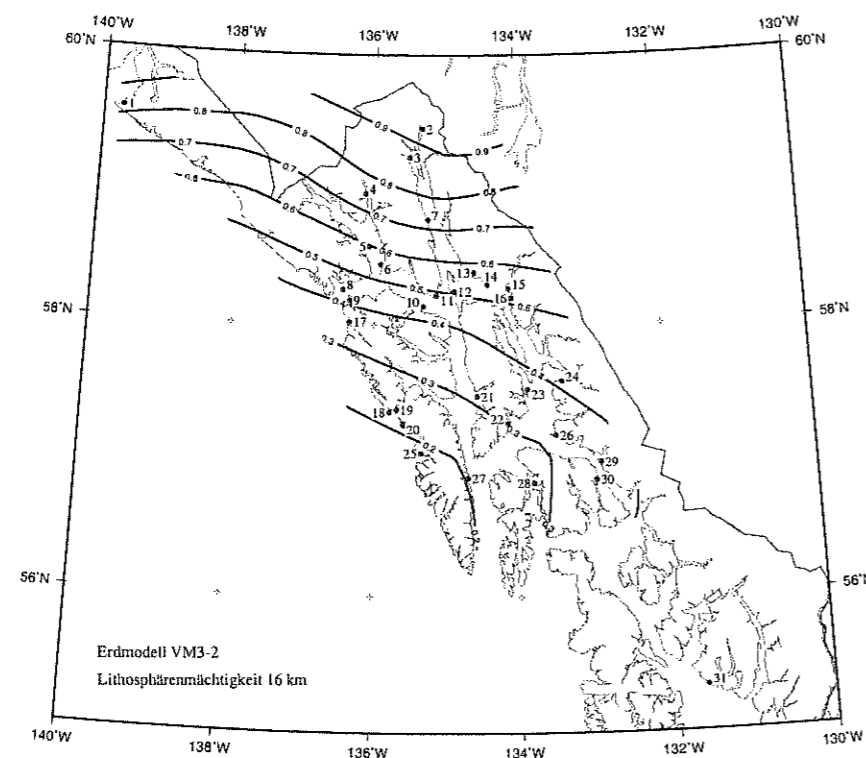
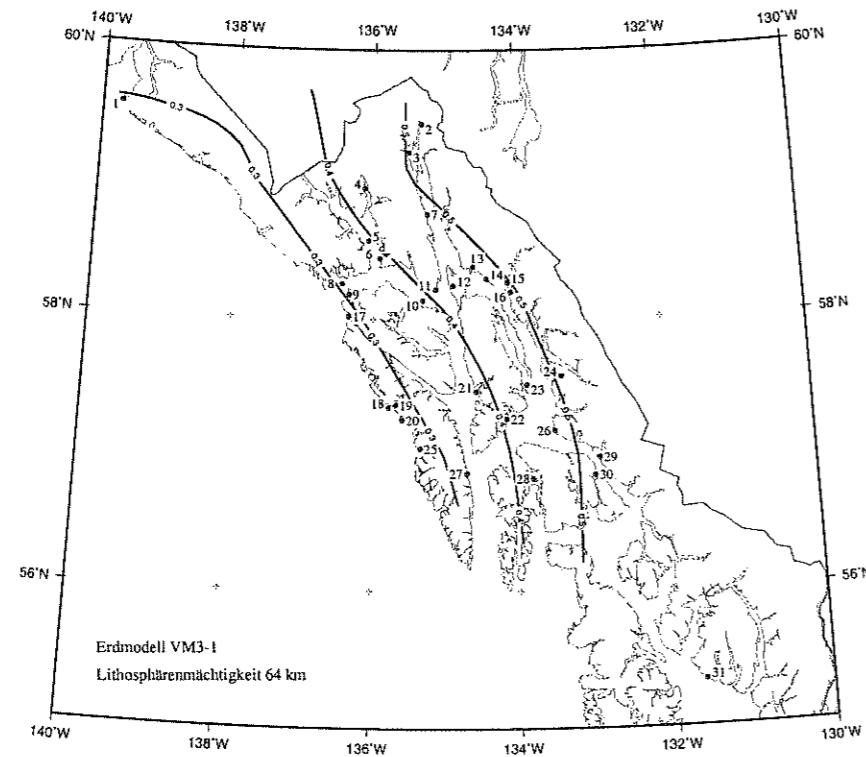


Abb. 5.6: Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für die Erdmodelle VM3-1 und VM3-2 unter Berücksichtigung der Auflast ICE-3G + AL-1 + Ozean.

5.3 Vergleich der Berechnungen mit den Beobachtungen

In diesem Abschnitt werden die Berechnungen mit den Beobachtungen verglichen. In Tabelle 5.8 sind dazu die Raten der relativen Meeresspiegelabsenkung \dot{h}_{RSL}^{cal} für sämtliche Erdmodelle und die Stationen Yakutat, Skagway, Bartlett Cove, Juneau und Sitka zusammengestellt. Die Werte sind unter Annahme der Auflast ICE-3G, AL-1 und Ozean berechnet. In der letzten Spalte stehen die Vergleichswerte \dot{h}_{RSL}^{obs} aus den Pegelbeobachtungen.

Nr.	Station	\dot{h}_{RSL}^{cal}						\dot{h}_{RSL}^{obs}
		MF2-1	VM2-1	VM3-1	MF2-2	VM2-2	VM3-2	
1	Yakutat	0.82	0.20	0.36	1.25	0.71	0.96	6
2	Skagway	0.85	0.29	0.55	1.20	0.79	1.02	17
6	Bartlett Cove	0.47	0.19	0.39	0.58	0.37	0.53	40
14	Juneau	0.43	0.24	0.47	0.48	0.36	0.51	13
25	Sitka	-0.03	0.12	0.26	-0.17	0.07	0.15	3

Tab. 5.8: \dot{h}_{RSL}^{cal} in mm/a für die berücksichtigten Erdmodelle und die kombinierte Auflast ICE-3G + AL-1 + Ozean im Vergleich zu \dot{h}_{RSL}^{obs} in mm/a.

Die berechneten Werte sind um ein Vielfaches kleiner als die beobachteten. Desweiteren stimmen die Verhältnisse der Stationen untereinander nicht überein. Die Berechnungen liefern für Skagway und mit einer Ausnahme für Yakutat den größten Wert, beobachtet wird jedoch in Bartlett Cove die mit Abstand größte Meeresspiegelabsenkung. Bei den Berechnungen rangiert Bartlett Cove lediglich an dritter bzw. vierter Stelle. An der Station Sitka sind sowohl die berechneten als auch die beobachteten Werte am geringsten. Allerdings sind auch hier die berechneten Werte um ein Vielfaches kleiner als die beobachteten.

In den vorangehenden Abschnitten gehört zu jedem Erdmodell eine Abbildung, in der die Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{cal} unter Annahme der Auflast ICE-3G, AL-1 und Ozean eingetragen sind. Vergleicht man diese Abbildungen mit Abbildung 5.3, in welche die Isolinien von \dot{h}_{RSL}^{obs} eingetragen sind, stellt man fest, daß die berechneten Isolinien für keines der Erdmodelle mit den Isolinien der Beobachtungen übereinstimmen. Dies betrifft nicht nur die Größenordnung, sondern auch den Verlauf der Isolinien. Insbesondere für die Erdmodelle VM2-1 und VM3-1, die jeweils eine 64 km dicke Lithosphäre haben, unterscheiden sich die Isolinien deutlich von denen in Abbildung 5.3. Die Isolinien für die übrigen vier Erdmodelle ähneln im südlichen Teil des Gebietes in ihrer Richtungstendenz den Isolinien der Beobachtungen.

Wird davon ausgegangen, daß die verwendeten Erd- und Lastmodelle nicht unrealistisch sind, wird anhand dieser Arbeit deutlich, daß die beobachtete Meeresspiegelabsenkung nur zu einem sehr geringen Anteil durch isostatische Ausgleichsvorgänge als Reaktion auf die abnehmende Auflast hervorgerufen wird. Insbesondere die für das regionale Lastmodell AL-1 be-

rechneten Auflaständerungen sind bei der Berechnung isostatischer Ausgleichsvorgänge nahezu vernachlässigbar.

5.4 Bewertung der Berechnungen

Bei der Berechnung von Radialverschiebungen und Geoidänderungen sind verschiedenen Annahmen gemacht worden. Im vorangehenden Abschnitt ist deutlich geworden, daß die mit diesen Annahmen berechneten Werte eine isostatische Ausgleichsbewegung als Ursache für die gemessenen Meeresspiegelabsenkungen ausschließen. Um diese Vermutung zu bestätigen, sind weiterführende Rechnungen mit verbesserten Erdmodellen und an die Realität besser angepaßten Lastmodellen erforderlich. Für das regionale Lastmodell bedeutet dies, daß eine topographische Vermessung der vereisten Gebiete durchgeführt und an mehr als den bisher acht Gletschern Massenbilanzen bestimmt werden, um eine verbesserte Eisverteilung und Abschmelzgeschichte zu erhalten.

Die Theorie zur Berechnung von Radialverschiebungen und Geoidänderungen enthält einige Vereinfachungen, die neben den modellbedingten Abweichungen von der Realität einen verfälschenden Einfluß auf die berechneten Werte haben können. In der Theorie werden die tatsächlich vorliegenden Volumenmassen als Flächenmassen behandelt. Auf die Berechnung der Radialverschiebungen wirkt sich dies nur geringfügig aus. Größere Fehler können bei der Berechnung der Geoidänderung auftreten, wo der durch Annahme von Flächenmassen entstehende Fehler direkt eingeht. Je weiter entfernt der Berechnungspunkt von den Massen liegt, desto geringer wird allerdings der Fehler.

Die Berücksichtigung der 3D-Verteilung einer Masse ist in der verwendeten Theorie derzeit nicht implementiert. Allerdings ist es möglich das Potential einer beliebigen Masse und die dadurch hervorgerufenen Geoidänderung nach potentialtheoretischen Ansätzen zu berechnen. Wird das regionale Lastmodell als Volumenmasse angesehen, so ergeben sich die in Tabelle 5.9 zusammengestellten Differenzen zu der Geoidänderung, die bei Annahme einer Flächenmasse ermittelt wird. Die Differenzen sind signifikant und übersteigen sogar die Radialverschiebung an den entsprechenden Stationen. ICE-3G und der Ozean gehen in die Theorie weiterhin als Flächenmassen ein. Für diese globalen Modelle ist von einer nachträglichen Berücksichtigung als Volumenmassen abgesehen worden, da die numerische Implementierung zeitlich sehr aufwendig ist. Bei der Ozeanlast kommt außerdem hinzu, daß zu jedem Zeitschritt eine Korrektur der Geoidänderung angebracht werden muß, was noch mehr Rechenzeit in Anspruch nehmen würde.

Da die in ICE-3G für den gegenwärtigen Zeitpunkt angenommenen Eismassen zeitlich konstant sind, verschwindet der Fehler, den man durch Annahme von Flächenmassen macht. Das regionale Lastmodell und der Ozean liegen dagegen in wenigen Kilometern Entfernung zu den Berechnungspunkten. In diesem Fall kann die Vereinfachung der Theorie daher zu größeren Fehlern führen. Trotz der Kenntnis dieses Sachverhaltes ist bei der Berechnung der

Geoidänderungen in Abschnitt 5.2 von einer Korrektur abgesehen worden, da zum einen die Berücksichtigung nur eines Teiles der Last als Volumenmasse wenig aussagekräftig ist und zum anderen einer konsistenten Theorie der Vorzug zu geben ist.

Sämtliche hier angesprochenen Ungenauigkeiten in der Modellierung und Vereinfachungen in der Theorie ändern die Kernaussage dieser Arbeit nicht. Die in Südostalaska beobachteten relative Meeresspiegelabsenkungen von mehreren Zentimetern pro Jahr an einigen Stationen kann nicht ausschließlich durch glazial-isostatische Ausgleichsbewegungen hervorgerufen werden. Die berechneten Werte bewegen sich unabhängig vom Erdmodell und auch bei Berücksichtigung von Volumenmassen maximal im Millimeter-Bereich.

Nr.	Station	$\dot{e}_g^V - \dot{e}_g^F$ (mm/a)
1	Yakutat	-2.410
2	Skagway	-2.334
6	Bartlett Cove	-2.293
14	Juneau	-2.479
25	Sitka	-1.372

Tab. 5.9: Differenz zwischen der aus Volumenmassen und Flächenmassen berechneten Geoidänderung.

Literaturverzeichnis

- Anonymous, 1982. Present distribution of Alaska's glaciers. In *Alaska's Glaciers*, Alaska Geographic Society, Anchorage, Vol. 9, pp. 46–49
- Bechtel T.D., Forsyth D.W., Sharpton V.L. & Grieve R.A., 1990. Variations in effective elastic thickness of the North American lithosphere. *Nature* **343**, 636–668
- Bullen K.E., 1975. *The Earth's Density*. Chapman and Hall, London
- Dyrugerov M.B. & Meier M.F., 1997. Mass balance of mountain and subpolar glaciers: a new global assessment for 1961–1990. *Arctic and Alpine Research* **29**, 379–391
- Dziewonski A. & Anderson D., 1981. Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **25**, 297–356
- Ekman M., 1991. A concise history of postglacial land uplift research (from its beginning to 1950). *Terra Nova* **3**, 358–365
- Field W.O., ed., 1975. *Mountain Glaciers of the Northern Hemisphere*. Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire
- Gilbert F. & Backus G.E., 1966. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics* **31**, 326–332
- Greff-Lefftz M. & Legros H., 1997. Some remarks about the degree-one deformation of the earth. *Geophysical Journal International* **131**, 699–723
- Hagedoorn J., Wolf D. & Braun A., 2001. Pleistocene and Recent changes of glaciation in Svalbard: implications for tide-gauge measurements. *Geophysical Research Abstracts of the 26th General Assembly of the EGS, Nice*, Vol. 3, Session G3.02
- Heiskanen W.A. & Moritz H., 1993. *Physical Geodesy*. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz
- Hicks S.D. & Shofnos W., 1965. The determination of land emergence from sea level observations in Southeast Alaska. *Journal of Geophysical Research* **70**, 3315–3320
- Ivins E.R. & James T.S., 1999. Simple models for late Holocene and present-day Patagonian glacier fluctuations and predictions of a geodetically detectable isostatic response. *Geophysical Journal International* **138**, 601–624

- James T.S., Clague J.J., Wang K. & Hutchinson I., 2000. Postglacial rebound at the northern Cascadia subduction zone. *Quaternary Science Reviews* **19**, 1527–1541
- Johnston P., 1993. The effect of spatially non-uniform water loads on prediction of sea-level change. *Geophysical Journal International* **114**, 615–634
- Martinec Z., Thoma M. & Wolf D., 2001. Material versus local incompressibility and its influence on glacial-isostatic adjustment. *Geophysical Journal International* **144**, 136–156
- Mitrovica J.X. & Forte A.M., 1997. Radial profile of mantle viscosity: results from the joint inversion of convection and postglacial rebound observables. *Journal of Geophysical Research* **102**, 2751–2769
- Peltier W.R. 1998 Postglacial variations in the level of the sea: implications for climate dynamics and solid-earth geophysics. *Reviews of Geophysics* **36**, 603–689.
- Pelto M. & Miller M. 1990. Mass balance of the Taku Glacier, Alaska from 1946 to 1986. *Northwest Science* **64**, 121–130,
- Pierce R.A.C., 1961. Is sea level falling or the land rising in S.E. Alaska? In *Surveying and Mapping*, American Congress on Surveying and Mapping, Washington, D.C., Vol. 21, pp. 51–56
- Pilkington M., 1991 Mapping elastic lithospheric thickness variations in Canada. *Tectonophysics* **190**, 283–297.
- Sapiano J., Harrison W. & Echelmeyer K., 1998. Elevation, volume and terminus change of nine glaciers in North America. *Journal of Glaciology* **44**, 119–135
- Thoma M., 2001. Materiell und lokal inkompressible viskoelastische Erdmodelle: Theorie und Anwendungen in der glazialen Isostasie. *Dissertation*, Universität Stuttgart, in Vorbereitung
- Thoma M. & Wolf D., 1999. Bestimmung der Mantelviskosität aus Beobachtungen der Landhebung und Schwere in Fennoskandien. Tech. Rep. STR99/02, GeoForschungsZentrum Potsdam
- Thoma M. & Wolf D., 2001. Inverting land uplift near Vatnajökull, Iceland, in terms of lithosphere thickness and viscosity stratification. In *Gravity, Geoid and Geodynamics*, Springer, Berlin, in press.
- Tushingham A.M. & Peltier W.R., 1991. ICE-3G: A new global model of late Pleistocene deglaciation based upon geophysical predictions of postglacial sea level change. *Journal of Geophysical Research* **96**, 4497–4523

- Tushingham A.M. & Peltier W.R., 1992. Validation of the ICE-3G model of Wurm-Wisconsin deglaciation using a global data base of relativ sea-level histories. *Journal of Geophysical Research* **97**, 3285–3304
- Vermeersen L.L.A. & Sabadini R., 1998. Effects of compressibility and stratification on visco-elastic relaxation: the analytical perspectiv. In Wu P., ed., *Dynamics of the Ice Age Earth: a Modern Perspective*, Trans Tech Publications, Uetikon, pp. 123–134
- Wolf D., 1997. *Gravitational Viscoelastodynamics for a Hydrostatic Planet*. Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission, München, Reihe C, Nr. 452
- Wu P. & Ni Z., 1996. Some analytical solutions for the viscoelastic gravitational relaxation of a two-layer non-self-gravitating incompressible spherical earth. *Geophysical Journal International* **126**, 413–436

A. Symbolverzeichnis

A.1 Verzeichnis der lateinischen Symbole

a	Erdradius	2.2.2
A^O	Ozeanfläche	4.1
A_i^E	elastischer Amplitudenvektor	2.3.1
A_{ip}^V	viskoser Amplitudenvektor	2.3.1
A_i^p	Konvolution der Amplitudenvektoren mit der Lastgeschichte	2.3.1
A_{ij}	Differential-Koeffizientenmatrix	2.1.4
B_i	Grenzflächenvektor	2.2.2
C_i	Vektor der Integrationskonstanten	2.2.1
d	Lastprofil	2.3
d^{IO}	Eis- bzw. Ozeanprofil	4.1
d_t	Operator der materiellen Ableitung bezüglich der Zeit t	2.1.1
∂_k	Operator der materiellen Ableitung bezüglich der Position X_i	2.1.1
D_{nm}	Legendrekoeffizienten des Lastprofils	2.3
e	Eulersche Zahl	
e_{eu}	eustatische Meeresspiegeländerung	4.1
e_g	Geoidänderung	4.1
$f_{ij\dots}$	Totalfeld in Lagrangscher Formulierung	2.1.1
$\hat{f}_{ij\dots}$	Laplace-Transformierte von $f_{ij\dots}$	2.1.3
$f_{ij\dots,k}$	Ableitung von $f_{ij\dots}$ bezüglich X_k	2.1.1
$\dot{f}_{ij\dots}$	Ableitung von $f_{ij\dots}$ bezüglich t	2.1.1
$f_{ij\dots}^{(0)}$	Anfangsfeld von $f_{ij\dots}$	2.1.1
$f_{ij\dots}^{(\delta)}$	materielles Inkrement von $f_{ij\dots}$	2.1.1
$f_{ij\dots}^{(\Delta)}$	lokales Inkrement von $f_{ij\dots}$	2.1.1
$[f_{ij\dots}]_{-}^{+}$	Grenzflächenbedingungen für $f_{ij\dots}$	2.1.2
g_i	Schwere	2.1.2
g	$:= -g_r$	2.1.4
h	Lastmächtigkeit	2.3
h^{IO}	Eis- bzw. Ozeanmächtigkeit	4.1
h_{RSL}^{cal}	berechnete relative Meeresspiegelabsenkung	5.2
h_{RSL}^{obs}	beobachtete relative Meeresspiegelabsenkung	5.1
j	Funktionaldeterminante	2.1.2
k	Schichtindex	2.2.2
K	Anzahl der Schichten	2.2.2

K_i	spezieller Vektor	2.2.2
\mathcal{L}^{-1}	Operator der inversen Laplace-Transformation	2.3.1
m	Legendre-Ordnung	2.1.4
\tilde{m}	Laplace-transformierte Scherrelaxationsfunktion	2.1.3
M_{ij}	Fundamentalmatrix	2.2.1
\mathcal{M}_{ij}	anisotropes Relaxationsfunktional	2.1.2
n	Legendre-Grad	2.1.4
n_i	Einheitsvektor senkrecht zu \mathcal{X}^2	2.1.2
N	$n(n+1)$	2.1.4
p	Nullstellenindex	2.3.1
P	Anzahl der Nullstellen von $\det T_{ij}$	2.3.1
$P_{n m}$	Legendre Polynome	2.3.2
P_{ij}	Propagatormatrix für k -te Schicht	2.2.2
P_{ij}^{Π}	Produkt von Propagatormatrizen	2.2.2
Q^{nm}	spezielle Amplituden	2.1.4
r	radialer Abstand	2.1.4
\tilde{r}_i	aktuelle Position eines Teilchens	2.1.1
s	Laplace-Frequenz	2.1.3
s_p	Eigenwert (= Nullstelle von $\det T_{ij}$)	2.3.1
S_{nm}	vektorielle Kugelflächenfunktionen	2.2.1
t	aktuelle Zeit	2.1.1
t'	Anregungszeit	2.1.2
t_{ij}	Cauchy-Spannung	2.1.2
T_{ij}	spezielle Matrix	2.2.2
T_{rr}^{nm}	Amplituden des materiellen Inkrements der radialen Cauchy-Spannung	2.1.4
$T_{r\theta}^{nm}$	Amplituden des materiellen Inkrements der tangentialen Cauchy-Spannung in Richtung θ	2.1.4
u_i	Verschiebung	2.1.1
u_r	Radialverschiebung	2.3.2
u_φ	Tangentialverschiebung in Richtung φ	2.3.2
u_θ	Tangentialverschiebung in Richtung θ	2.3.2
U^{nm}	Amplituden der Radialverschiebung	2.1.4
V^{nm}	Amplituden der Tangentialverschiebung in Richtung θ	2.1.4
V^1	Eisvolumen	4.1
W_i	Koeffizient des Lösungsvektors	2.2.2
X_i	Anfangsposition eines Teilchens	2.1.1
\mathcal{X}^2	Grenzfläche in \mathcal{X}^3	2.1.2
\mathcal{X}^3	dreidimensionale Region von X_i	2.1.2
Y_{nm}	skalare Kugelflächenfunktionen	2.3
Y_i^{nm}	Lösungsvektor	2.1.4
Z_3, Z_6	Lösungskoeffizienten	2.2.1

Z_{ij}	Lösungsmatrix für die Grenzfläche der inneren Sphäre	2.2.2
----------	------------------------------------------------------	-------

A.2 Verzeichnis der griechischen Symbole

α	Anfangswert im Darwinschen Gesetz	2.1.4
β	Abklingkonstante im Darwinschen Gesetz	2.1.4
γ	Gravitationskonstante	2.1.2
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	2.1.2
ϵ	Anpassungsparameter	2.1.2
η	Viskosität	2.3
θ	Latitude	2.1.4
κ	Kompressionsmodul	2.1.3
μ	elastisches Schermodul	2.3
ξ	Zustandsfunktion	2.1.2
π	3.14159...	
ϖ	thermodynamischer Druck	2.1.2
ρ	Volumenmassendichte	2.1.2
ρ^L	Volumenmassendichte der Last	2.3
$\rho^{I/O}$	Volumenmassendichte des Eises bzw. Ozeans	4.1
σ	Flächenmassendichte	2.1.2
σ_g	Lastdruck	2.2.2
$\sigma_g^{I/O}$	Eis- bzw. Ozeandruck	4.1
Σ^{nm}	Legendrekoeffizienten der Flächenmassendichte	2.1.4
Σ_g^{nm}	Legendrekoeffizienten des Lastdrucks	2.2.2
τ_{ij}	Piola-Spannung	2.1.2
v_i	Vektorpotential von $\rho^{(0)}\tilde{u}_i$	2.2.1
ϕ	Schwerepotential	2.1.2
φ	Longitude	2.1.4
Φ^{nm}	Amplituden des lokalen Inkrements des Schwerepotentials	2.1.4