

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Forschungsbereich Kosmische Physik

**ZENTRALINSTITUT PHYSIK DER ERDE**

---

Veröffentlichungen des Zentralinstituts Physik der Erde

Nr. 7

Das Geoid aus Beobachtungen  
der Satellitenaltimetrie

von

K. Arnold

---

Als Manuskript gedruckt

Potsdam 1972



Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	5
2. Die Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie in Abhängigkeit von den Geoidundulationen	12
3. Die Auflösung des Normalgleichungssystems zur Bestimmung der Geoidundulationen	25
4. Die Darstellung der Geoidundulationen durch einen analytischen Ausdruck	39
5. Kombination der aus der Satellitenaltimetrie erhaltenen Geoidundulationen mit den terrestrischen Schwereanomalien	41
6. Die Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie in Abhängigkeit von den Schwereanomalien	44
Literatur	46

## Zusammenfassung

Es wird eine Theorie für die Störungen der Satellitenbahnen durch das Schwerepotential der Erde entwickelt; als Parameter des Potentials erscheinen dabei die Geoidundulationen. Im Anschluß daran werden die Fehlergleichungen für die Satellitenaltimetrie aufgestellt, wobei die Höhe des Satelliten über dem Meere direkt beobachtet wird. Zur Darstellung der Details der Geoidundulationen werden Mittelwerte von  $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ -Kompartimenten eingeführt. Die Auflösung des etwa 40 000 Unbekannte umfassenden Normalgleichungssystems wird zurückgeführt auf die Auflösung von 200 Systemen mit jeweils 200 Unbekannten. Gegebenenfalls müssen die Rechnungen iterativ durchgeführt werden. Ferner wird gezeigt, wie man für die Geoidundulationen abschnittsweise analytische Ausdrücke einführen kann, deren Parameter durch die Ausgleichung zu bestimmen wären, und wie man die Geoidundulationen durch die Schwereanomalien als Parameter ersetzen kann.

## Summary

A theory for the perturbations of satellite orbits by the Earth's gravity potential has been developed; geoid undulations prove to be the parameters of the potential. The error equations of satellite altimetry are established, using direct observations of satellite altitude above the sea. For representation of the details of geoid undulations, mean values taken over  $1^{\circ} \times 1^{\circ}$  compartments are introduced. The solution of the system of normal equations comprising about 40,000 unknowns is reduced to that of 200 systems each comprising 200 unknowns. If necessary, the solutions must be found by iterative calculations. Furthermore, it is shown how the geoid undulations can be represented by sectionally analytical terms, the parameters of which should be determined by an adjustment, and how the gravity anomalies can be substituted for the geoid undulations in terms of parameters.

## Résumé

On a développé une théorie sur les anomalies des orbites de satellites causées par le potentiel de gravitation; les paramètres de ce potentiel sont les ondulations du géoïde. On ajoute à cela les équations d'erreur pour l'altimétrie des satellites, en observant directement la hauteur des satellites au-dessus du niveau de la mer. Les détails des ondulations du géoïde sont représentés par des valeurs moyennes de compartiments de  $1^{\circ}$  sur  $1^{\circ}$ . La solution d'environ 40 000 inconnues du système d'équations normal est réduite à la solution de 200 systèmes, chacun ayant 200 inconnues. Le cas échéant, les calculs devront être réitérés. On signale ensuite que l'on peut introduire progressivement dans les ondulations du géoïde des formules analytiques dont il faudrait déterminer les paramètres par compensation et qu'on peut remplacer les ondulations du géoïde par les anomalies de gravitation en qualité de paramètres.

## Резюме

Разрабатывается теория для нарушения орбит спутников из-за потенциала силы тяжести земли; параметрами потенциала являются при этом геодундуляции. Затем составляются уравнения ошибок для геометрии спутников, при этом производится непосредственное наблюдение высоты спутников над морем. Для изображения подробностей геодундуляций вводятся сравнительные средние величины  $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ . Решение нормальной системы уравнений, содержащей примерно 40 000 неизвестных отнесено к решению 200 систем, каждая с 200 неизвестными. При известных условиях расчёты можно осуществлять итерационно. Помимо того показано, как для геодундуляции по разделам можно вводить аналитические выражения, параметры которых можно определять выравниванием, и как в качестве параметра геодундуляции можно заменить аномалиями силы тяжести.



## 1. Einleitung

Bei der Bahnmethode der Satellitengeodäsie werden die Satellitenbeobachtungen den Unbekannten des Problems, also den Stationskoordinaten, den KEPLERSchen Bahnelementen im Anfangspunkt des Bahn Bogens und den Parametern des Gravitationsfeldes oder des Potentialfeldes der Erde gegenübergestellt. Aus einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate folgen die Werte der Unbekannten.

Die Lage der Beobachtungsstation wird in einem mit dem Erdkörper verbundenen rechtwinkligen kartesischen X-,Y-,Z-Koordinatensystem eingeführt. Die Z-Achse zeigt zum mittleren Nordpol. Die X-,Z-Ebene ist die Meridianebene von Greenwich. Die X-,Y-Ebene ist die Äquatorebene, die Y-Achse liegt im Meridian mit dem Längenunterschied von  $90^\circ$  östlich von Greenwich. Die Bahn des Satelliten wird durch die 6 KEPLERSchen Bahnelemente beschrieben: durch die große Halbachse  $a$ , die Exzentrizität  $e$ , das Argument des Perigäums  $\omega$ , die Bahnneigung  $i$ , die Länge des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  und die mittlere Anomalie  $M$ . Sieht man bei den Bahnelementen vom Einfluß des Gravitationsfeldes ab und nimmt an, daß die Einflüsse der Reibung an der Atmosphäre, des Strahlungsdrucks der Sonne sowie der Gravitationswirkung der Sonne und des Mondes durch Subtraktion der betreffenden Reduktionsgrößen eliminiert worden sind, dann kann man die Bahnelemente wie folgt darstellen [2]:

$$(1) \quad a = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2,$$

$$(2) \quad e = e_0 + e_1(t - t_0) + e_2(t - t_0)^2,$$

$$(3) \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega^0 + \omega_1(t - t_0) + \omega_2(t - t_0)^2,$$

$$(4) \quad i = i_0 + \Delta i^0 + i_1(t - t_0) + i_2(t - t_0)^2,$$

$$(5) \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega^0 + \Omega_1(t - t_0) + \Omega_2(t - t_0)^2,$$

$$(6) \quad M = M_0 + \Delta M^0 + M_1(t - t_0) + M_2(t - t_0)^2.$$

Diese Bahnelemente verstehen sich im momentanen astronomischen Koordinatensystem, das auf dem momentanen Äquator und dem momentanen Frühlingspunkt aufbaut. Es unterliegt der Präzession und Nutation. Weil es kein Inertialsystem ist, treten die Glieder  $\Delta\omega^0$ ,  $\Delta i^0$ ,  $\Delta\Omega^0$ ,  $\Delta M^0$  hinzu. Die Symbole  $a_i$ ,  $e_i$ , ...,  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) bezeichnen Konstante. Die konstanten Werte  $a_0$ ,  $e_0$ , ...,  $M_0$  sind die Bahnelemente am Anfangspunkt des Bahn Bogens ( $t = t_0$ ); sie können mit Integrationskonstanten verglichen werden. Die in der Zeit  $t$  linearen und quadratischen Glieder in den Gleichungen (1) bis (6) stellen die Restglieder dar, die bei der Reduktion der Störeffekte nicht erfaßt werden.

Das Potential der Gravitationskraft der Erde werde durch eine Kugelfunktionsentwicklung dargestellt. Subtrahiert man den kugelsymmetrischen Anteil am Potential, dann

verbleibt das Störpotential  $T$

$$(7) \quad T = k \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{R_E^l}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm} \cos m \lambda + S_{lm} \sin m \lambda);$$

$k$  ist die Gravitationskonstante,  $\mu$  ist hier die Masse der Erde,  $R_E$  ist die große Halbachse des Erdellipsoids,  $r$  der geozentrische Radius.  $P_{lm}$  sind die zugeordneten Kugelfunktionen,  $C_{lm}$  und  $S_{lm}$  sind die STOKESschen Konstanten.  $\varphi$  und  $\lambda$  sind die geozentrische Breite und die geographische Länge.

Berücksichtigt man auch das Störpotential  $T$ , dann treten in den Gleichungen (1) bis (6) auf der rechten Seite additiv noch Zusatzglieder  $a_{gr}$ ,  $e_{gr}$ ,  $\omega_{gr}$ , ...,  $M_{gr}$  auf, die den Einfluß des Störpotentials auf die Störungen der 6 Bahnelemente beschreiben. Man hat

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a_{gr} = \int_{t_0}^t a' dt, & e_{gr} = \int_{t_0}^t e' dt, & \omega_{gr} = \int_{t_0}^t \omega' dt, \\ i_{gr} = \int_{t_0}^t (i)' dt, & \Omega_{gr} = \int_{t_0}^t \Omega' dt, & M_{gr} = \int_{t_0}^t M' dt. \end{array} \right.$$

Entsprechend den LAGRANGESchen Störungsgleichungen [2] gelten für die in den Gleichungen (8) zu findenden Ableitungen der Bahnelemente nach der Zeit die folgenden Ausdrücke:

$$(9) \quad a' = \frac{2}{n a} \frac{\partial T}{\partial M},$$

$$(10) \quad e' = \frac{1 - e^2}{n a^2 e} \frac{\partial T}{\partial M} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{n a^2 e} \frac{\partial T}{\partial \omega},$$

$$(11) \quad \omega' = -\frac{\cos i}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial i} + \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{n a^2 e} \frac{\partial T}{\partial e},$$

$$(12) \quad (i)' = \frac{\cos i}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial \omega} - \frac{1}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial \Omega},$$

$$(13) \quad \Omega' = \frac{1}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial i},$$

$$(14) \quad M' = n - \frac{1 - e^2}{n a^2 e} \frac{\partial T}{\partial e} - \frac{2}{n a} \frac{\partial T}{\partial a}.$$

$n$  ist die Winkelgeschwindigkeit des Satelliten.

Um die in den Gleichungen (9) bis (14) benötigten Ableitungen des Störpotentials nach den Bahnelementen zu erhalten, müssen in Gleichung (7) die räumlichen Polarkoordinaten  $r, \varphi, \lambda$  durch die 6 Bahnelemente ersetzt werden. Man erhält also schließlich jedes der 6 Bahnelemente als Funktion von dem jeweiligen konstanten, linearen und quadratischen Glied in der betreffenden Gleichung (1) bis (6) und als Funktion von den STOKESschen Konstanten:

$$(15) \quad a = a(a_0, a_1, a_2; C_{1m}, S_{1m}),$$

$$(16) \quad e = e(e_0, e_1, e_2; C_{1m}, S_{1m}),$$

$$(17) \quad \omega = \omega(\omega_0, \omega_1, \omega_2; C_{1m}, S_{1m}),$$

$$(18) \quad i = i(i_0, i_1, i_2; C_{1m}, S_{1m}),$$

$$(19) \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2; C_{1m}, S_{1m}),$$

$$(20) \quad M = M(M_0, M_1, M_2; C_{1m}, S_{1m}).$$

Aus diesen 6 Oskulationsbahnelementen ergeben sich die räumlichen kartesischen Koordinaten des Satelliten im momentanen astronomischen Koordinatensystem:

$$(21) \quad \begin{pmatrix} x_S^N \\ y_S^N \\ z_S^N \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(v + \omega) \cos \mathcal{N} - \sin(v + \omega) \sin \mathcal{N} \cos i \\ \cos(v + \omega) \sin \mathcal{N} + \sin(v + \omega) \cos \mathcal{N} \cos i \\ \sin(v + \omega) \sin i \end{pmatrix};$$

$$(22) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v},$$

$$(23) \quad \tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2},$$

$$(24) \quad n(t-t_0) = M = E - e \sin E.$$

Symbolisch kann man schreiben

$$(25) \quad x_S^N = x_S^N(a, e, \omega, i, \mathcal{N}, M),$$

$$(26) \quad y_S^N = y_S^N(a, e, \omega, i, \mathcal{N}, M),$$

$$(27) \quad z_S^N = z_S^N(a, e, \omega, i, \mathcal{N}, M).$$

Mit den Gleichungen (15) bis (20) erhält man anstelle von (25) auch die folgende Beziehung:

$$(28) \quad x_S^N = x_S^N(a_0, a_1, a_2; e_0, e_1, e_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2; i_0, i_1, i_2; \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2; M_0, M_1, M_2; C_{1m}, S_{1m}).$$

Analoge Gleichungen gelten mit (26) und (27) auch für  $y_S^N$  und  $z_S^N$ .

Damit ist der Satellit im momentanen astronomischen System koordiniert. Die Position der Beobachtungsstation in diesem System ergibt sich, wenn man den Spaltenvektor der Stationskoordinaten im X-,Y-,Z-System multipliziert mit der inversen Polbewegungsmatrix und mit der Rotationsmatrix für Drehungen um die z-Achse im Uhrzeigersinn um den Betrag der Sternzeit. Man erhält nach [2]

$$(29) \quad \begin{pmatrix} x_Q^N \\ y_Q^N \\ z_Q^N \end{pmatrix} = R_Z(-\theta) S^{-1} \underline{u}$$

mit

$$(30) \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & -\eta \\ -\xi & \eta & 1 \end{pmatrix},$$

$$(31) \quad R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\xi$  und  $\eta$  sind die vom Polbewegungsdienst bestimmten Koordinaten des momentanen Pols relativ zum mittleren Pol. Aus den Koordinaten  $x_S^N, y_S^N, z_S^N$  des Satelliten und aus den Koordinaten  $x_Q^N, y_Q^N, z_Q^N$  der Beobachtungsstation errechnen sich die beobachteten Größen.

Bei Richtungsbeobachtungen zum Satelliten, bei denen die topozentrische Rektaszension  $\alpha$  und Deklination  $\delta$  erhalten werden, ergibt sich der beobachtete Einheitsvektor im momentanen astronomischen System wie folgt:

$$(32) \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \cos \alpha \\ \cos \delta & \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Man hat als Beziehung zwischen dem beobachteten Vektor  $\underline{a}$  und den unbekanntem Parametern der Beobachtungsstation und der Position des Satelliten die folgende Beziehung (siehe [2]):

$$(33) \quad \underline{a} = \frac{\underline{x}_S^N - R_Z(-\theta) S^{-1} \underline{u}}{|\underline{x}_S^N - R_Z(-\theta) S^{-1} \underline{u}|}.$$

Mit Laser und mit SECOR bestimmt man dagegen die Entfernung  $s$  zum Satelliten, und man hat hier

$$(34) \quad s = \sqrt{(\underline{x}_S^N - R_Z(-\theta) S^{-1} \underline{u})^2}.$$

Bei Dopplerbeobachtungen wird über eine halbe Sekunde oder über 1 Minute integriert, und man erhält als Beobachtungselement die Differenz  $s_2 - s_1$  zweier Entfernungen zum Satelliten, von denen jede einzelne nach Gleichung (34) aus den jeweiligen räumlichen Positionen des Satelliten und der Beobachtungsstation zu berechnen ist.

Durch eine Linearisierung der Gleichungen (33) und (34) erhält man die Fehlergleichungen im Sinne der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die nach der Durchführung der Ausgleichung die a priori unbekanntes Koordinaten der Beobachtungsstationen  $X, Y, Z$  und die Parameter des Gravitationsfeldes  $C_{1m}, S_{1m}$  ergeben.

Die lineare Form der Fehlergleichungen hat folgende Struktur (siehe [2]):

$$(35) \quad \bar{v} = -\bar{I} + \sum_{j=0}^2 x_{1j} \delta a_j + \sum_{j=0}^2 x_{2j} \delta e_j + \sum_{j=0}^2 x_{3j} \delta \omega_j + \\ + \sum_{j=0}^2 x_{4j} \delta i_j + \sum_{j=0}^2 x_{5j} \delta \Omega_j + \sum_{j=0}^2 x_{6j} \delta M_j + \\ + \sum_1 \sum_m (x_{1m}^0 C_{1m} + x_{1m}^s S_{1m}) + \bar{\xi} \Delta X + \bar{\eta} \Delta Y + \bar{\zeta} \Delta Z .$$

$\bar{v}$  ist die zufällige Verbesserung,  $\bar{I}$  das freie Glied; die Werte  $\delta a_j, \delta e_j, \dots, \delta M_j$  sind die durch die Ausgleichung zu bestimmenden Korrekturen der Koeffizienten  $a_j, e_j, \dots, M_j$  in den Potenzreihenansätzen (1) bis (6) für die Bahnelemente;  $j=0, 1, 2$ . In bestimmten Fällen wird man bei  $j=0$  abbrechen können.  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  sind die Korrekturen bei den Stationskoordinaten. Die Ausdrücke  $x_{kj}, x_{1m}^0, x_{1m}^s, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  sind die aus der Linearisierung sich ergebenden Koeffizienten bei den Unbekannten in der Fehlergleichung (35).

Das Störpotential  $T$  kann man nicht nur wie in Gleichung (7) durch eine Kugelfunktionsentwicklung darstellen, es kann auch ausgedrückt werden als Funktion von den terrestrischen Schwereanomalien. Ist  $\Delta g_F$  die Freiluftanomalie,  $d\sigma$  das Flächenelement auf der Einheitskugel, so gilt nach [1, 2]

$$(36) \quad T = \frac{r}{4r} \iint_{\sigma} \Delta g_F \phi_1(S, Q) d\sigma .$$

$\phi_1(S, Q)$  ist die für den Außenraum verallgemeinerte STOKESsche Funktion. Das Symbol  $S$  bezeichnet die Position des Satelliten im Raum, für die mit (36) die Funktion  $T$  berechnet werden soll,  $Q$  den beim Integrieren variablen Punkt auf der sphärischen Erdoberfläche, auf den die Freiluftanomalie und das Flächenelement sich beziehen. Die STOKESsche Funktion  $\phi_1$  hat folgende Gestalt (vgl. [1, 2]):

$$(37) \quad \phi_1(S, Q) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{l-1} r^{l+2} P_l(\cos \psi)$$

oder

$$(38) \quad \phi_1(S, Q) = \tau^2 \left[ \frac{2}{D} + 1 - 3D - \tau \cos \psi (5 + 3 \ln \frac{1 + D - \tau \cos \psi}{2}) \right],$$

$$(39) \quad \tau = \frac{R_E}{r}, \quad D^2 = 1 - 2\tau \cos \psi + \tau^2,$$

$$(40) \quad \cos \psi = \sin \varphi_S \sin \varphi_Q + \cos \varphi_S \cos \varphi_Q \cos (\lambda_Q - \lambda_S).$$

$\psi$  ist der sphärische Abstand der beiden Punkte S und Q mit der geozentrischen Breite  $\varphi_S$  bzw.  $\varphi_Q$  und der geographischen Länge  $\lambda_S$  bzw.  $\lambda_Q$ .

Stellt man das Störpotential T durch die Beziehung (36) dar, dann werden die Mittelwerte der Freiluftanomalien für bestimmte Flächenelemente als die Parameter des Potentialfeldes oder des Schwerfeldes eingeführt, und es gilt, diese Parameter aus der Ausgleichung zu bestimmen. In diesem Falle empfiehlt es sich nicht, das durch die Form (36) dargestellte Störpotential T durch die 6 Bahnelemente auszudrücken und dann die Ableitung von T nach diesen Bahnelementen in die LAGRANGESchen Störungsgleichungen (9) bis (14) einzusetzen. Man geht dann besser von der GAUSSschen Form der Störungsgleichungen aus [2] und findet mit  $p = a(1 - e^2)$  die folgenden Gleichungen:

$$(41) \quad a^* = \frac{2}{n \sqrt{1 - e^2}} (e \sin v \cdot K_3 + \frac{p}{r} \cdot K_2),$$

$$(42) \quad e^* = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a} [\sin v \cdot K_3 + (\cos E + \cos v) \cdot K_2],$$

$$(43) \quad \omega^* = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a e} [-\cos v \cdot K_3 + (\frac{r}{p} + 1) \sin v \cdot K_2] - \cos i \cdot \frac{d\Omega}{dt},$$

$$(44) \quad (i)^* = \frac{1}{n a \sqrt{1 - e^2}} \frac{r}{a} \cos (\omega + v) \cdot K_1,$$

$$(45) \quad \Omega^* = \frac{1}{n a \sqrt{1 - e^2}} \frac{r}{a} \frac{\sin(\omega + v)}{\sin i} \cdot K_1,$$

$$(46) \quad M^* = n - \frac{1}{n a} \left[ 2 \frac{r}{a} - \frac{1 - e^2}{e} \cos v \right] \cdot K_3 - \frac{1 - e^2}{n a e} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \cdot K_2.$$

$n$  ist hier wieder die Winkelgeschwindigkeit des Satelliten. Ferner ist

$$(47) \quad K_1 = B \sin \alpha - L \cos \alpha,$$

$$(48) \quad K_2 = B \cos \alpha + L \sin \alpha,$$

$$(49) \quad K_3 = -\frac{1}{4\pi} \iint \Delta g (2\phi_1 + \phi_4) d\sigma$$

mit

$$(50) \quad B = -\frac{1}{4\pi} \iint \Delta g \, \phi_2(S, Q) \, d\sigma ,$$

$$(51) \quad L = -\frac{1}{4\pi} \iint \Delta g \, \phi_3(S, Q) \, d\sigma ,$$

$$(52) \quad \left. \begin{matrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\} = -\tau^3 \left\{ \begin{matrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{matrix} \right\} \left[ \frac{2}{D^3} + \frac{6}{D} + 3 \frac{D-1+\tau \cos \psi}{D \sin^2 \psi} - 8 - 3 \ln \frac{D+1-\tau \cos \psi}{2} \right] ,$$

$$(53) \quad \phi_4 = \tau^2 \left[ \frac{1-\tau^2}{D^3} - 1 - 3\tau \cos \psi \right] ,$$

$$(54) \quad \psi_2 = \sin \varphi_Q \cos \varphi_S - \cos \varphi_Q \sin \varphi_S \cos (\lambda_Q - \lambda_S) ,$$

$$(55) \quad \psi_3 = \cos \varphi_Q \sin (\lambda_Q - \lambda_S) ,$$

$$(56) \quad \cot \alpha = \cos (\omega + \nu) \tan i ,$$

$$(57) \quad \Delta g = \Delta g_F - 9,4 P_2 (\sin \varphi) + 7,1 P_4 (\sin \varphi) \quad [\text{mgal}] ,$$

wenn  $\Delta g_F$  nach der CASSINISchen Schwereformel, und

$$(58) \quad \Delta g = \Delta g_F - 1,0 P_2 (\sin \varphi) + 8,1 P_4 (\sin \varphi) \quad [\text{mgal}] ,$$

wenn  $\Delta g_F$  nach der HELMERTSchen Schwereformel berechnet worden ist.

Werden die Bahnstörungen mit den Gleichungen (37) bis (58) durch die Mittelwerte der Schwereanomalien für bestimmte Flächenelemente, die die Erdoberfläche überdecken, ausgedrückt, dann erhält man analog zur Gleichung (35) Fehlergleichungen der folgenden Struktur:

$$(59) \quad \bar{v} = -\bar{l} + \sum_{j=0}^2 \alpha_{1j} \delta a_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{2j} \delta e_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{3j} \delta \omega_j + \\ + \sum_{j=0}^2 \alpha_{4j} \delta i_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{5j} \delta \Omega_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{6j} \delta M_j + \\ + \sum_q \gamma_q \left[ \Delta g/q + \bar{\xi} \Delta X + \bar{\eta} \Delta Y + \bar{\zeta} \Delta Z \right] .$$

Der Wert  $\left[ \Delta g/q \right]$  ist der Mittelwert der Schwereanomalie für das Flächenelement  $\Delta F_q$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$ . Die Werte  $\gamma_q$  sind die zu den Unbekannten  $\left[ \Delta g/q \right]$  gehörigen Koeffizienten.

## 2. Die Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie in Abhängigkeit von den Geoidundulationen

Der Einfluß, den eine Schwereanomalie  $[\Delta g]_q$  auf die Bahn des Satelliten und damit auch auf die Satellitenbeobachtungen ausübt, ist naturgemäß um so kleiner, je kleiner das zugehörige Flächenelement  $\Delta F_q$  ist, sofern natürlich der Wert  $[\Delta g]_q$  unverändert bleibt. Der Einfluß nimmt proportional zur Größe des Flächenelements, also mit dem Quadrat der Seitenlänge dieses Flächenelements, ab. Der Koeffizient  $\gamma_q$  in der Gleichung (59) nimmt daher auch mit dem Quadrat der Seitenlänge des Flächenelements  $\Delta F_q$  ab. Bei einem Satelliten, der in etwa 1000 km Höhe die Erde umfliegt, und bei einer Einteilung der Erdoberfläche in  $20^\circ \times 20^\circ$  große Flächenkompartimente  $\Delta F_q$  kann eine Schwereanomalie  $[\Delta g]_q$  von dem Betrag 15 mgal die Bahn des Satelliten um etwa 40 m verändern, wenn über einen Umlauf des Satelliten um die Erde integriert wird. Hat dagegen das Flächenelement nur eine Größe von  $1^\circ \times 1^\circ$ , dann ist der Störungseinfluß auf die Satellitenbahn um den Faktor  $1/400$  vermindert, wenn man wieder eine Schwereanomalie von 15 mgal und einen Satellitenumlauf zugrunde legt. Die Störung beträgt dann also nur 0,1 m. Sie liegt weit unterhalb der gegenwärtigen Meßgenauigkeit. Die Richtung zum Satelliten kann man heute im Mittel auf etwa  $\pm 1,75$  genau bestimmen, dem entspricht ein Fehler in der Position des Satelliten von etwa  $\pm 8$  m. Geht man wieder von einer Schwereanomalie von 15 mgal aus und untersucht, wie groß das Flächenelement  $\Delta F_q$  sein muß, damit die Schwereanomalie von 15 mgal bei dieser bestimmten Größe des Flächenelements eine Störung in der Satellitenbahn verursacht, die der Meßgenauigkeit von  $\pm 8$  m entspricht, dann wird man zu einer Seitenlänge des Flächenelements von etwa  $10^\circ$  geführt. Dieser Flächeneinteilung für die Schwerewerte entspricht eine Kugelfunktionsentwicklung für die Schwere etwa von der Ordnung  $n = 36$ . Legt man dagegen für die Genauigkeit der Satellitenbeobachtungen den Wert  $\pm 2,75$  zugrunde, so hat man eine Unsicherheit in der Position des Satelliten von  $\pm 12$  m, und man kommt zu einem Flächenelement mit der Seitenlänge von  $14^\circ \times 14^\circ$  bei einer Schwereanomalie von 15 mgal; dem entspricht eine Kugelfunktionsentwicklung etwa bis zur 25. Ordnung.

Bei der gegenwärtigen Beobachtungsgenauigkeit und bei den gegenwärtigen Beobachtungsverfahren wird man also grundsätzlich die Mittelwerte der Schwereanomalien der  $14^\circ \times 14^\circ$  - oder  $10^\circ \times 10^\circ$  -Kompartimente nicht wesentlich genauer als auf etwa  $\pm 15$  mgal genau bestimmen können. Der mittlere Fehler der auf diesem Wege erhaltenen Schwereanomalien erreicht also nahezu den Betrag dieser Schwereanomalien selbst.

Wesentlich detailliertere Angaben über das Schwerfeld, also in bezug auf erheblich kleinere Flächenelemente, die etwa um eine Größenordnung kleiner sind und die Größe von  $1^\circ \times 1^\circ$  -Kompartimenten haben, wird man bei der gegenwärtigen Beobachtungsmethodik erst erreichen können, wenn die Position des Satelliten auf etwa 0,1 m genau beobachtet werden kann. In diesem Falle müßte die Richtung zum Satelliten auf etwa  $\pm 0,02$  genau durch die Beobachtung zu erhalten sein, eine Möglichkeit, mit der in absehbarer Zeit nicht zu rechnen ist.



Die Satellitenaltimetrie eröffnet nun die Möglichkeit, die Höhe des Satelliten über dem Meere und damit über dem Geoid direkt mit einer Genauigkeit von etwa  $\pm 2$  m und gegebenenfalls noch präziser (Laser) für den einzelnen Punkt bestimmen zu können. Ändern sich die Mittelwerte der Geoidundulationen zwischen den  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimenten, also über Distanzen von etwa hundert Kilometern, um mehr als 2 m, so wird man diese Detailstrukturen im Geoid mit der Satellitenaltimetrie noch bestimmen können. Ändern sich aber über Distanzen von etwa hundert Kilometern die Geoidundulationen um einige Meter, dann werden sich die Schwereanomalien in diesen Bereichen und über diese Distanzen um 20 bis 40 mgal ändern. Durch diese Strukturen im Schwerfeld ändern sich aber nach den obigen Ausführungen die Bahnelemente nur um wenige Dezimeter, ein Betrag, der wesentlich innerhalb der Genauigkeit der Richtungsbeobachtungen zum Satelliten bleibt.

Nachdem also bei der Satellitenaltimetrie [3, 7, 8] die gemessenen Höhen des Satelliten über dem Meere in direkter Beziehung zu den Geoidundulationen stehen, sollen die Geoidundulationen  $N$  direkt als Unbekannte in das Problem eingeführt werden. Aus den Bahnelementen des Satelliten kann man seinen geozentrischen Radius  $r$  berechnen. Dieser setzt sich zusammen aus dem geozentrischen Radius des mittleren Erdellipsoids, der Geoidundulation  $N$  und der gemessenen Höhe  $\eta$  des Satelliten über dem Meere (Abb.1).

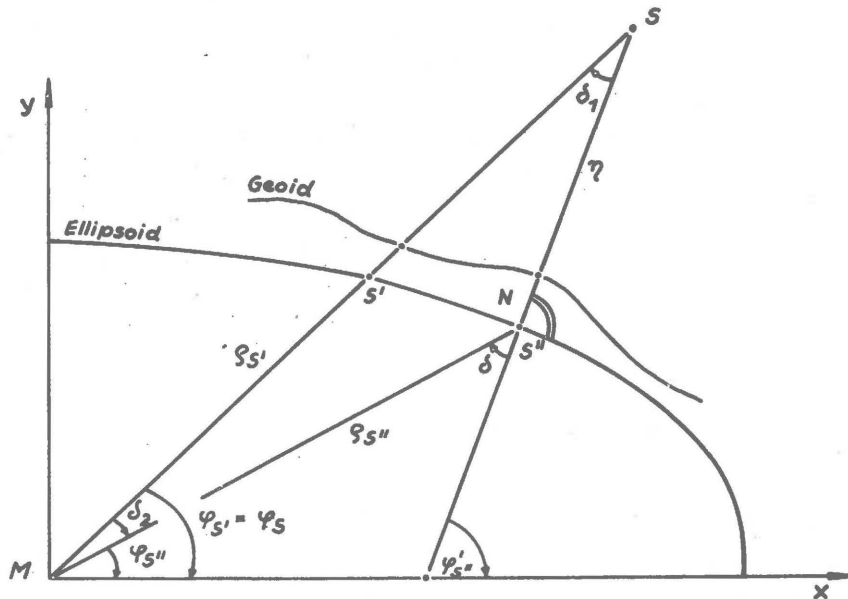


Abb. 1. Die Beobachtungen der Satellitenaltimetrie  $\eta$  in ihrer Beziehung zu den Geoidundulationen  $N$ , dem geozentrischen Radius des mittleren Erdellipsoids  $\rho_{S'}$  bzw.  $\rho_{S''}$  und dem geozentrischen Radius des Satelliten  $\overline{MS} = r$

Der geozentrische Radius  $\varrho$  des mittleren Erdellipsoids errechnet sich aus dessen großer Halbachse  $a_E$ , seiner Exzentrizität  $e_E$  und aus der geographischen Breite  $\varphi'$  nach folgender Formel:

$$(60) \quad \varrho = a_E \left[ 1 - \frac{1}{2} e_E^2 \sin^2 \varphi' + \frac{1}{2} e_E^4 \sin^2 \varphi' - \frac{5}{8} e_E^4 \sin^4 \varphi' + \dots \right].$$

Infolge der Unsicherheit in der Kenntnis des Wertes von  $a_E$  hat  $\varrho_E$  einen konstanten Fehler von einigen Metern.  $e_E$  und  $\varphi'$  kann man in (60) als fehlerfrei betrachten.

Die geozentrische Entfernung  $r$  des Satelliten ergibt sich mit Gleichung (22) aus der großen Halbachse  $a$ , der Exzentrizität  $e$  und der wahren Anomalie  $v$ . Diese folgt dabei nach (23) und (24) aus der mittleren Anomalie  $M$  und der Exzentrizität  $e$ . Zur Ermittlung von  $r$  benötigt man also die 3 Bahnelemente  $a$ ,  $e$ ,  $M$ . Mit (1), (2), (6) und (8) ist

$$(61) \quad a = \sum_{j=0}^2 a_j (t - t_0)^j + a_{gr},$$

$$(62) \quad e = \sum_{j=0}^2 e_j (t - t_0)^j + e_{gr},$$

$$(63) \quad M = \sum_{j=0}^2 M_j (t - t_0)^j + \Delta M^0 + M_{gr}.$$

Die Koeffizienten  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $M_0$  und gegebenenfalls auch  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  ergeben sich als Unbekannte aus der Ausgleichung der Beobachtungen, die Beträge  $a_{gr}$ ,  $e_{gr}$ ,  $M_{gr}$  dagegen müssen zunächst nach den Störungsgleichungen entwickelt werden. Die Störungsrechnung soll hier mit den GAUSSschen Störungsgleichungen (41) bis (46) durchgeführt werden, nur mit dem Unterschied, daß die Störkräfte  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  nicht wie in den Gleichungen (47) bis (58) durch die Schwereanomalien auf der Erdoberfläche dargestellt werden sollen, sondern durch die Geoidundulationen, weil diese in direkter Beziehung zu den Messungen der Satellitenaltimetrie stehen. Statt (36) gilt für das Störpotential im Außenraum (vgl. [3, 4, 9]):

$$(64) \quad T = \frac{R}{4\pi} \iint \left[ \frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos \psi \right] T(R, \varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda.$$

Hier sind relative Fehler von der Größenordnung der Abplattung der Erde vernachlässigt worden.  $R$  ist der Radius der mittleren Erdkugel.  $l$  ist hier der geradlinige Abstand zwischen der räumlichen Position des Satelliten  $S$  und dem laufenden Punkt  $Q$  auf der Erdkugel,

$$(65) \quad l^2 = r^2 + R^2 - 2 r R \cos \psi.$$

Der Winkel  $\psi$  ist mit (40) der sphärische Abstand zwischen den Punkten  $S$  und  $Q$ . Ist  $\bar{G}$  ein globaler Mittelwert der Schwere, so folgt mit

$$(66) \quad T = G N$$

aus (64) die folgende Beziehung

$$(67) \quad T = \frac{R G}{4 \pi} \iint \left[ \frac{r^2 - R^2}{1^3} - \frac{1}{r} - \frac{3 R}{r^2} \cos \psi \right] N \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda .$$

Es gilt nun, die Ableitung des Störpotentials  $T$  in radialer Richtung ( $\partial T / \partial r$ ), in horizontaler Richtung nach Norden ( $\partial T / \partial x$ ) und in horizontaler Richtung nach Osten ( $\partial T / \partial y$ ) aus der Gleichung (67) zu ermitteln. In (47), (48), (49) ist dann zu setzen

$$(68) \quad K_3 = \frac{\partial T}{\partial r} ,$$

$$(69) \quad B = \frac{\partial T}{\partial x} ,$$

$$(70) \quad L = \frac{\partial T}{\partial y} .$$

Die Differentiation von (67) nach  $r$  ergibt

$$(71) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R G}{4 \pi} \iint \left[ \frac{1}{1^3} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + (r^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{1^3} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) - \right. \\ \left. - 3 R \cos \psi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \right) \right] N \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

mit

$$(72) \quad \frac{\partial}{\partial r} r^2 = 2 r ,$$

$$(73) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} ,$$

$$(74) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \right) = - 2 \frac{1}{r^3} ,$$

$$(75) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{1^3} \right) = - 3 \frac{1}{1^5} (r - R \cos \psi) .$$

Setzt man (72) bis (75) in (71) ein und führt einige Umformungen durch, dann erhält man

$$(76) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R G}{4 \pi} \iint \left[ \frac{1}{2r} \frac{1}{1^3} (r^2 + 3 R^2) - \frac{3}{2r} \frac{1}{1^5} (r^2 - R^2)^2 + \frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + 6 R \frac{1}{r^3} \cos \psi \right] N \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda .$$

Im letzten Glied kann man in der im Integranden stehenden Klammer setzen

$$(77) \quad 2 R \cos \psi = -\frac{1^2}{r} + r + \frac{R^2}{r} ;$$

also

$$(78) \quad 6 R \frac{1}{r^3} \cos \psi = -3 \frac{1^2}{r^4} + 3 \frac{1}{r^2} + 3 \frac{R^2}{r^4} .$$

Aus der Gleichung (76) wird damit

$$(79) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R G}{4 \pi} \iint \left[ \frac{1}{2r} \frac{1}{l^3} (r^2 + 3 R^2) - \frac{3}{2r} \frac{1}{l^5} (r^2 - R^2)^2 - 3 \frac{1}{r^4} l^2 + \right. \\ \left. + \frac{4 r^2 + 3 R^2}{r^4} \right] N \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda .$$

Bei der Integration über die Erdkugel sind die Größen  $r$  und  $R$  konstant, lediglich die Werte von  $l$  und  $N$  sind neben  $\varphi$  und  $\lambda$  variabel. Man kann daher setzen

$$(80) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R G}{4 \pi} \left[ \frac{1}{2r} (r^2 + 3 R^2) \iint \frac{1}{l^3} N \, d\omega - \frac{3}{2r} (r^2 - R^2)^2 \iint \frac{1}{l^5} N \, d\omega - \right. \\ \left. - 3 \frac{1}{r^4} \iint l^2 N \, d\omega + \frac{4 r^2 + 3 R^2}{r^4} \iint N \, d\omega \right] .$$

$d\omega$  ist das Flächenelement auf der Einheitskugel.

Es sind noch die Ableitungen  $B$  und  $L$  entsprechend den Gleichungen (69) und (70) zu bilden. Dazu wird die horizontale Ableitung in einem beliebigen Azimut  $A$  gebildet; für  $A = 0^\circ$  folgt der Differentialquotient  $B$ , und für  $A = 90^\circ$  ergibt sich der Differentialquotient  $L$ . Das Linienelement im Azimut  $A$  sei  $ds$  (Abb.2). Es ergibt sich also aus (67)

$$(81) \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{R G}{4 \pi} \iint \left[ (r^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{l^3} \right) - \frac{3 R}{r^2} \frac{\partial}{\partial s} \cos \psi \right] N \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda .$$

Ist  $\alpha$  das vom Subsattellitenpunkt aus abgetragene Azimut des laufenden Punktes  $Q$  und  $ds$  das Bogenelement in dem Azimut  $A$ , dann gilt für die Veränderung von  $\psi$  auf Grund einer Verschiebung des Subsattellitenpunktes um den Betrag  $ds$  entlang dem Azimut  $A$  die folgende Formel (Abb.2):

$$(82) \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{R} \cos (A - \alpha) ,$$

und es ist ferner

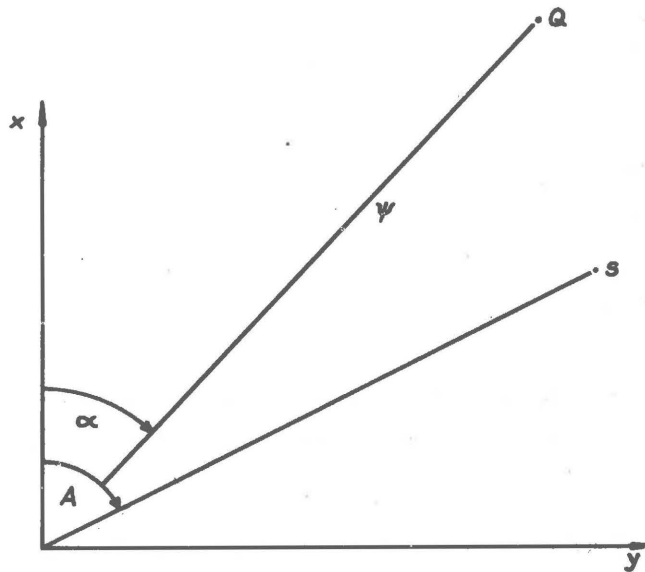


Abb.2. Das x-, y-, das A-, s- und das  $\alpha$ -,  $\psi$ -Koordinatensystem im Subsattelitenpunkt

$$(83) \quad \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{l^3} \right] = -3 \frac{1}{l^4} \frac{\partial l}{\partial s} ,$$

$$(84) \quad \frac{\partial}{\partial s} l = \frac{1}{l} R r \sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial s} .$$

Somit folgt für (81)

$$(85) \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{3}{4\pi} R G \iiint \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{r^2 - R^2}{1^5} r \right] \sin \psi \cos (A - \alpha) N d\omega .$$

Setzt man  $A = 0^\circ$  oder  $A = 90^\circ$ , so findet man schließlich

$$(86) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{3}{4\pi} R G \iiint \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{r^2 - R^2}{1^5} r \right] \sin \psi \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} N d\omega .$$

Mit den Gleichungen (80) und (86) sind die drei Größen  $K_3$ ,  $B$ ,  $L$  nach (68), (69), (70) als Funktion von den Geoidundulationen gegeben. Mit den Beziehungen (47), (48) erhält man aus den Werten  $B$  und  $L$  schließlich auch die Größen  $K_1$  und  $K_2$ . Damit sind die Störbeschleunigungen  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  als Funktionen von den Geoidundulationen bekannt. Sie können in die Störungsgleichungen (41) bis (46) eingesetzt werden, und man findet dann durch Integration nach (8) die Bahnstörungen  $a_{gr}$ ,  $e_{gr}$ ,  $M_{gr}$  für die Gleichungen (61), (62), (63).

Führt man also die Geoidundulationen als die Parameter des Gravitationsfeldes ein, dann erhält die allgemeine Fehlergleichung (59) folgende Form:

$$\begin{aligned}
 (87) \quad \bar{v} = & -\bar{I} + \sum_{j=0}^2 \alpha_{1j} \delta a_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{2j} \delta e_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{3j} \delta \omega_j + \\
 & + \sum_{j=0}^2 \alpha_{4j} \delta i_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{5j} \delta \Omega_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{6j} \delta M_j + \\
 & + \sum_q \bar{\gamma}_q \overline{N}/_q + \bar{\xi} \Delta X + \bar{\eta} \Delta Y + \bar{\zeta} \Delta Z .
 \end{aligned}$$

Die Werte  $\overline{N}/_q$  sind die Mittelwerte der Geoidundulationen  $N$  für die Flächenelemente  $\Delta F_q$ , die die ganze Erde überdecken. Die Werte  $\bar{\gamma}_q$  sind die zugehörigen Koeffizienten.

Es soll jetzt die spezielle Fehlergleichung der Satellitenaltimetrie abgeleitet werden. Wäre die Erde kugelförmig, dann würde die folgende Fehlergleichung (88) gelten (Abb.1):

$$(88) \quad r = \eta + v^* + N + R .$$

$v^*$  ist hier die zufällige Verbesserung bei der mittels der Satellitenaltimetrie gemessenen Höhe  $\eta$  des Satelliten über dem Meere.

Die strenge Form der Fehlergleichung ergibt sich durch Erweiterungen um Größen, die die Exzentrizität  $e_E$  der Meridianellipse oder die Abplattung des Rotationsellipsoids enthalten. Diese Erweiterungen der Fehlergleichung (88) ändern aber, wie im folgenden gezeigt wird, im wesentlichen nur deren freies Glied; für die Fehlerbetrachtungen in diesem und in den nächsten Kapiteln sind dagegen vor allem die Koeffizienten bei den Unbekannten  $N$  wichtig, und diese werden durch die genannten Erweiterungen praktisch nicht beeinflusst, wie sich im folgenden ergibt.

Es gilt also, eine Beziehung zwischen dem geozentrischen Radius  $r$  in seiner Abhängigkeit von der geozentrischen Breite  $\varphi_{S^*} = \varphi_S$  und der geographischen Länge  $\lambda_S$  des Satelliten, der Beobachtung der Satellitenaltimetrie  $\eta$ , der gesuchten Geoidundulation  $N$  für den Lotfußpunkt  $S^*$  des Satelliten und den Parametern des mittleren Erdellipsoids  $a_E, e_E$  abzuleiten (Abb.1). Für die Differenz zwischen der geographischen und der geozentrischen Breite  $\varphi_{S^*}$  und  $\varphi_{S^*}$  des Lotfußpunktes  $S^*$  des Satelliten  $S$  gilt die bekannte Beziehung (siehe [6])

$$(89) \quad \delta = \varphi_{S^*}^i - \varphi_{S^*} = \frac{1}{2} e_E^2 \sin 2 \varphi_{S^*}^i .$$

Weil in dieser Gleichung die Glieder höherer Ordnung mit  $e_E^4$  vernachlässigt worden sind, kann man in der Sinusfunktion auf der rechten Seite von (89) in genügender Annäherung setzen  $\varphi_{S^*}^i \cong \varphi_{S^*} \cong \varphi_{S^*}^i \cong \varphi_S$  .

Aus Abb.1 liest man ferner ab

$$(90) \quad \sin \delta_1 = \frac{\varrho_{S''}}{r} \sin \delta$$

und

$$(91) \quad \delta_2 = \delta - \delta_1 .$$

Es folgt mit dem gleichen Approximationsgrad wie bei Gleichung (89)

$$(92) \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \frac{a_E}{r} e_E^2 \sin 2 \varphi_{S''}^i , \quad \delta \cong \delta_1 \cong 0 ,$$

und

$$(93) \quad \delta_2 = \frac{1}{2} e_E^2 \frac{r - a_E}{r} \sin 2 \varphi_{S''}^i \cong \frac{1}{2} e_E^2 \frac{\eta}{r} \sin 2 \varphi_{S''}^i , \quad 0 \cong \delta_2 \cong \delta .$$

Für den geozentrischen Radius in Abhängigkeit von der geographischen Breite gilt nach [ 6 ]

$$(94) \quad \varrho_{S''} = a_E \left( 1 - \frac{1}{2} e_E^2 \sin^2 \varphi_{S''}^i + \frac{1}{2} e_E^4 \sin^2 \varphi_{S''}^i - \frac{5}{8} e_E^4 \sin^4 \varphi_{S''}^i \right) .$$

Substituiert man die geographische Breite  $\varphi_{S''}^i$  mit

$$(95) \quad \varphi_{S''}^i = \varphi_{S''} + \delta$$

durch die geozentrische Breite  $\varphi_{S''}$ , so wird aus (94)

$$(96) \quad \varrho_{S''} = a_E \left[ 1 - \frac{1}{2} e_E^2 \sin^2 \varphi_{S''} + \frac{1}{2} e_E^4 \left( -\sin^2 \varphi_{S''} + \frac{3}{4} \sin^4 \varphi_{S''} \right) \right] .$$

Diese Gleichung drückt den geozentrischen Radius des Ellipsoids durch die zugehörige geozentrische Breite aus.

Nach dem Cosinussatz gilt mit Abb.1

$$(97) \quad \eta^2 = r^2 + \varrho_{S''}^2 - 2 r \varrho_{S''} \cos \delta_2 .$$

Mit (93) und einigen Umformungen folgt

$$(98) \quad \eta = r - \varrho_{S''} + \frac{1}{8} e_E^4 \frac{a_E}{r} \eta \sin^2 2 \varphi_S .$$

Drückt man den geozentrischen Radius  $\varrho_{S''}$  nicht durch die geozentrische Breite  $\varphi_{S''}$  des Lotfußpunktes  $S''$ , sondern durch die geozentrische Breite  $\varphi_{S'} = \varphi_S$  des Satelliten  $S$  aus, dann findet man

$$(99) \quad \varrho_{S^*} = a_E \left[ 1 - \frac{1}{2} e_E^2 \sin^2 \varphi_S + e_E^4 \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_S - \frac{5}{8} \sin^4 \varphi_S - \frac{1}{4} \frac{a_E}{r} \sin^2 2 \varphi_S \right) \right].$$

Substituiert man (99) in (98) und fügt zu  $\gamma$  die zufällige Verbesserung  $v^*$  und die Geoidundulation  $N$  hinzu, dann ergibt sich als Fehlergleichung

$$(100) \quad v^* = -\gamma + r - a_E + \frac{1}{2} a_E e_E^2 \sin^2 \varphi_S + \frac{1}{8} a_E e_E^4 \sin^4 \varphi_S + \\ + \frac{1}{8} a_E e_E^4 \frac{a_E}{r} \sin^2 2 \varphi_S - N.$$

Führt man schließlich den geozentrischen Radius  $\varrho_{S^*} = \overline{MS^*}$  des Subsattellitenpunktes  $S^*$  als Funktion von der geozentrischen Breite  $\varphi_{S^*} = \varphi_S$  des Satelliten ein, also mit (96)

$$(101) \quad \varrho_{S^*} = a_E \left[ 1 - \frac{1}{2} e_E^2 \sin^2 \varphi_S + \frac{1}{2} e_E^4 \left( -\sin^2 \varphi_S + \frac{3}{4} \sin^4 \varphi_S \right) \right],$$

dann folgt aus (100)

$$(102) \quad v^* = -\gamma - \varrho_{S^*} - \frac{1}{8} a_E e_E^4 \frac{\gamma}{r} \sin^2 2 \varphi_S + r - N; \quad \text{wenn } N=0: r - \varrho_{S^*} \stackrel{!}{=} \gamma.$$

Mit den Gleichungen (101) und (102) wird eine Genauigkeit von etwa 1 m erreicht. Gegebenenfalls müssen noch die Glieder mit  $e_E^6$  hinzugenommen werden.

Der geozentrische Radius  $r$  in (102) ergibt sich aus den Oskulationsbahnelementen des Satelliten. Diese folgen aus der Störungsrechnung. Dabei erhält man zunächst mit (86) und (69), (70) die Komponenten  $B$  und  $L$ . Setzt man diese in (47), (48) ein und nimmt die Gleichungen (76) und (68) hinzu, so ergeben sich die drei Störbeschleunigungen  $K_1, K_2, K_3$  in Abhängigkeit von den Mittelwerten  $\sqrt{N}/q$  für die Geoidundulationen der Flächenelemente  $\Delta F_q$ . Setzt man diese Störbeschleunigungen in die Störungsgleichungen der GAUSSschen Form (41) bis (46) ein, dann erhält man die Störungsgleichungen für die 6 Bahnelemente und damit den geozentrischen Radius  $r$  in Abhängigkeit von den Geoidundulationen  $N$  zu

$$(103) \quad r = r(N) = r(\sqrt{N}/_1, \sqrt{N}/_2, \dots, \sqrt{N}/_q, \dots); \quad q=1, 2, 3, \dots$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (102) steht als fünftes Glied ebenfalls die Geoidundulation  $N$ . Sie erscheint dort direkt und beeinflusst die rechte Seite der Gleichung (102) um ihren vollen Betrag, während die Funktion  $r$  dort eine komplizierte Funktion der  $N$ -Werte auf der ganzen Erdoberfläche ist. Die beobachtete Größe  $\gamma$  mit der zufälligen Verbesserung  $v^*$  hofft man mittels der Satellitenaltimetrie auf etwa 2 bis 3 m genau bestimmen zu können.  $a_E$ , das konstante Glied auf der rechten Seite der Gleichung (102), folgt mit Gleichung (101). Die Unbekannten in der Fehlergleichung (102) sind die Geoidundulationen  $N$  und die große Halbachse des mittleren Erdellipsoids  $a_E$ . Der Fehlergleichung (102) kann man damit formell die folgende allgemeine Gestalt geben:



$$\begin{aligned}
 (104) \quad v^* = & -l^* + \sum_{j=0}^2 \alpha_{1j}^* \delta a_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{2j}^* \delta e_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{3j}^* \delta \omega_j + \\
 & + \sum_{j=0}^2 \alpha_{4j}^* \delta i_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{5j}^* \delta \Omega_j + \sum_{j=0}^2 \alpha_{6j}^* \delta M_j + \\
 & + \sum_q \bar{f}_q^* \sqrt{N}_q - \delta a_E ; \\
 & q = 1, 2, 3, \dots .
 \end{aligned}$$

$l^*$  ist das freie Glied, das sich aus den Näherungswerten für  $N$  und  $a_E$  und der Beobachtung  $\eta$  berechnet. Für die Näherungswerte von  $N$  kann gesetzt werden  $N = N_0 = 0$ .

$$\begin{aligned}
 (105) \quad -l^* = & r(\sqrt{N}_0/1, \sqrt{N}_0/2, \dots, \sqrt{N}_0/q, \dots) - \eta - \sqrt{N}_0/p - \\
 & - \left[ \epsilon_S + \frac{1}{8} a_E e_E^4 \frac{\eta}{r} \sin^2 2 \varphi_S \right]_0 .
 \end{aligned}$$

Weil hier die Störungen im geozentrischen Radius  $r$  interessieren, sind in (104) vor allem die Störungen der drei Bahnelemente  $a, e, M$  von Bedeutung. Für die Koeffizienten  $\bar{f}_q^*$  im vorletzten Glied auf der rechten Seite der Gleichung (104) kann man folgende Substitution einführen:

$$(106) \quad \sum_q \bar{f}_q^* \sqrt{N}_q = \sum_q \bar{f}_{1,q}^* \sqrt{N}_q - \sqrt{N}_p .$$

Im Moment der Beobachtung befindet sich der Subsatellitenpunkt in einem bestimmten Flächenelement  $\Delta F_p$  mit der Geoidundulation  $\sqrt{N}_p$ . Die Koeffizienten  $\bar{f}_{1,q}^*$  ( $q=1, 2, 3, \dots$ ) drücken den Einfluß aus, den die Geoidundulationen  $\sqrt{N}_q$  auf der ganzen Erde auf die Bahnstörungen und dann weiter auf die Größe  $r$  nehmen. Die Summe

$$(107) \quad \sum_q \bar{f}_{1,q}^* \sqrt{N}_q , \quad q = 1, 2, 3, \dots ,$$

ist die Linearisierung des Ausdrucks für den geozentrischen Radius

$$r = r(N) = r(\sqrt{N}_1, \sqrt{N}_2, \dots, \sqrt{N}_q, \dots) ,$$

wie er sich durch die Störungsrechnung ergibt.

Die Erdoberfläche sei beispielsweise zunächst in  $15^\circ \times 15^\circ$  große Flächenelemente eingeteilt. Die Mittelwerte der Geoidundulationen für diese Flächenelemente seien in erster Näherung bekannt aus den seither erschienenen Arbeiten zur dynamischen Satellitengeodäsie, bei denen vor allem Richtungsbeobachtungen nach den Satelliten ausgewertet wurden. Diese Näherungswerte werden mit  $\sqrt{N}_0/q$  bezeichnet. Es gilt nun, durch Auswertung der mittels der Satellitenaltimetrie erhaltenen  $\eta$ -Werte sowohl diese  $\sqrt{N}_0/q$ -Werte für die  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente zu verbessern als auch die Detailstrukturen im

Feld der  $N$ -Werte innerhalb dieser  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente zu bestimmen, bis schließlich die  $N$ -Werte beispielsweise für die  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimente bestimmt worden sind.

In diesem Zusammenhang wird an die Fehlergleichung (104) folgende Betrachtung angeschlossen. Sind  $\overline{N}_{q.k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) die Mittelwerte der Geoidundulationen für die  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimente, die innerhalb eines  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiments gelegen sind, und ist  $\overline{N}_q$  der Mittelwert der Geoidundulationen für das betreffende  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiment, so ist  $\overline{N}_{q.k} - \overline{N}_q$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) die Abweichung vom Mittelwert  $\overline{N}_q$ . Der quadratische Mittelwert der Differenzen  $\overline{N}_{q.k} - \overline{N}_q$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) sei mit  $\sigma_{\delta N}$  bezeichnet. Er kennzeichnet die Streuung der Werte  $\overline{N}_{q.k} - \overline{N}_q$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) innerhalb eines  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiments:

$$(108) \quad \sigma_{\delta N}^2 = \sigma_{\delta N.q}^2 = \frac{1}{225} \sum_{k=1}^{225} (\overline{N}_{q.k} - \overline{N}_q)^2; \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, 3, \dots; \\ q = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

Betrachtet man ferner den aus den Bahnstörungen erhaltenen geozentrischen Radiusvektor  $r$  des Satelliten, so ist  $r$  eine Funktion der  $N$ -Werte. In erster Näherung wird  $r$  durch die a priori gegebenen Mittelwerte  $\overline{N}_{0.q}$  für die  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente berechnet. Will man dann aber die Störungen im geozentrischen Radius nicht aus den Mittelwerten der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente, sondern aus denen der  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimente nach der Störungstheorie berechnen, so wird man auf diesem Wege für  $r$  veränderte Werte erhalten. Die auf diese Weise gefundenen Veränderungen der  $r$ -Werte für Subsatellitenpunkte, die alle in demselben  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiment gelegen sind, sollen nunmehr betrachtet werden. Dazu unterteilt man dieses  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiment in 225  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimente und berechnet für sie aus den terrestrischen  $\overline{N}_{q.k}$ -Werten ( $q = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots$ ) die Veränderung des  $r$ -Wertes. Dieser läßt sich zerlegen in einen zwischen den  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimenten des betreffenden  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiments konstanten und einen variablen Teil, nämlich  $\delta N_{0.q}$  und  $\delta N_{0.q.k}$ . Die gesamte Änderung beträgt daher  $\delta N_{0.q} + \delta N_{0.q.k}$  und es ist  $\sum_{k=1}^{225} \delta N_{0.q.k} = 0$ . Betrachtet man also die Abweichung des  $r$ -Wertes vom mittleren Niveau  $\delta N_{0.q}$  des betreffenden  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiments, so wird man zu den Werten  $\delta N_{0.q.k}$  geführt. Ihr quadratischer Mittelwert ist

$$(109) \quad \sigma_{\delta N'} = \sigma_{\delta N'.q} = \sqrt{\frac{1}{225} \sum_{k=1}^{225} (\delta N_{0.q.k})^2}.$$

Hat man also zunächst durch eine erste Ausgleichung die Mittelwerte der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente ermittelt und dann eine zweite Ausgleichung angeschlossen, bei der die Mittelwerte der  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimente nach der Satellitenaltimetrie bestimmt werden sollen, dann erhält man durch diese zweite Ausgleichung Verfeinerungen für die  $N$ -Werte. Die Varianz dieser Verfeinerungen innerhalb eines  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiments auf der Erdoberfläche ist gleich  $\sigma_{\delta N'}$ . Die durch die Verfeinerungen auf dem Umweg über die Störungstheorie verursachten Veränderungen in  $r$  haben innerhalb eines  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartiments, nach Subtraktion ihres Mittelwertes in diesem Kompartiment, im Mittel

die Varianz  $\sigma_{\delta N'}$ , die somit die relative Veränderung oder die Varianz gegenüber dem mittleren Niveau charakterisiert.

Es soll nun gezeigt werden, daß

$$(110) \quad \sigma_{\delta N'} < \sigma_{\delta N} .$$

Dies geschieht durch folgende Überlegung: Die Unregelmäßigkeiten im Schwerfeld der Erde, also die Geoidundulationen, verursachen im Mittel eine Störung in der Position des Satelliten um etwa 50 m (entsprechend  $\pm 10''$  im topozentrischen Richtungsvektor). Diese Störung werde verursacht durch die Mittelwerte der Geoidundulationen  $N$  der über die ganze Erdoberfläche verteilten  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompimente. Diese  $N$ -Werte haben im Mittel den Betrag von etwa 25 m. Unterteilt man diese  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompimente weiter in  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompimente, so werden die Mittelwerte der Geoidundulationen dieser  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompimente innerhalb eines  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompiments von dessen Mittelwert im Durchschnitt um etwa 6 m abweichen:  $\sigma_{\delta N} = 6$  m. Wenn die etwa 25 m betragenden Mittel der  $N$ -Werte der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompimente beim Satelliten Bahnstörungen von etwa 50 m ergeben, dann ergeben  $N$ -Werte vom Betrage 6 m bei  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompimenten nur solche von  $(\frac{6 \cdot 50}{25} \frac{1}{15})$  m = 0,8 m. Dies sind absolute Bahnstörungen. Es interessieren hier aber nur deren Abweichungen vom mittleren Niveau im Bereich eines  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompiments. Die Änderungen der Bahnelemente ergeben sich aus den Störungsgleichungen (41) bis (46), bei denen über die Zeit integriert werden muß. Nimmt man vereinfachend an, daß die gesamte Störung sich durch Integration über einen Bahnbogen von 3000 km Länge ergibt, so resultieren bei einem  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompiment mit  $1500 \times 1500$  km Seitenlänge die Änderungen der Bahnelemente beim Überfliegen dieses Gebietes im Mittel durch Integration über etwa 600 km. Man kommt also von den absoluten Bahnstörungen zu deren gesuchten relativen Änderungen innerhalb eines  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompiments nach Multiplikation mit einem Faktor, der etwa  $1/5$  beträgt. Bei  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompimenten gilt also

$$\sigma_{\delta N'} = 0,16 \text{ m} .$$

Das Verhältnis nach (110) beträgt

$$(111) \quad \frac{\sigma_{\delta N'}}{\sigma_{\delta N}} = 0,03 .$$

Im Vorstehenden wurde angenommen, daß die Abweichungen der Mittel der  $N$ -Werte der  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompimente vom Mittelwert des betreffenden  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompiments sich als zufällige Variable verhalten. Es werden aber darüber hinaus auch systematische Einflüsse wirksam sein. Zerteilt man daher das  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompiment in 4 Kompimente der Größe  $7,5^\circ \times 7,5^\circ$ , deren  $N$ -Werte wieder um etwa 6 m voneinander differieren, dann hat diese Varianz der  $N$ -Werte der  $7,5^\circ \times 7,5^\circ$ -Kompimente auf die Bahnelemente eine Wirkung, die sich aus der Wirkung der  $N$ -Werte der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompimente mit Mittelwerten für  $N$  von 25 m durch Multiplikation mit dem Faktor  $\frac{6}{25} \frac{1}{2} = 0,12$  ergibt. Betragen die gesamten Bahnstörungen wieder etwa 50 m, dann folgen etwa 6 m als absolute

zusätzliche Bahnstörungen. Geht man wieder von den absoluten Bahnstörungen zu deren Änderungen beim Überfliegen eines  $15^{\circ} \times 15^{\circ}$ -Kompartmentes über, indem man auch hier mit dem Faktor  $1/5$  multipliziert, dann folgt für die Varianz  $\sigma_{\delta N'}$  der Betrag  $1,2$  m. Das Verhältnis der beiden Varianzen beträgt in diesem Falle also

$$(112) \quad \frac{\sigma_{\delta N'}}{\sigma_{\delta N}} = \frac{1,2}{6} = 0,2 .$$

Ein plausibler Wert für dieses Verhältnis dürfte etwa in der Mitte zwischen den beiden Zahlen nach (111) und (112) liegen und daher etwa  $0,1$  betragen. Er ist damit wesentlich kleiner als  $1$ , wie es mit der Ungleichung (110) gefordert wurde.

### 3. Die Auflösung des Normalgleichungssystems zur Bestimmung der Geoidundulationen

Aus den Fehlergleichungen (102) und (104) ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Normalgleichungen. Es sollen nun Besonderheiten dieses Normalgleichungssystems besprochen werden, aus denen sich ein Iterationsverfahren zur Auflösung dieser Normalgleichungen entwickeln läßt. Es wird zunächst angenommen, daß die Unbekannten  $\delta a_j$ ,  $\delta e_j$ ,  $\delta \omega_j$ ,  $\delta i_j$ ,  $\delta \Omega_j$ ,  $\delta M_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) und  $\delta a_E$ , die in der Fehlergleichung (104) auftreten, eliminiert worden sind. Die Unbekannten  $\delta a_0$  und  $\delta a_E$  haben dabei etwa gleichartige Wirkung auf die Beobachtungen  $\eta$ , indem sie diese auf der ganzen Erde um konstante Beträge verändern. Daher werden sich diese beiden Unbekannten nur schwer voneinander trennen lassen, und man wird nur die Differenz  $\delta a_0 - \delta a_E$  bestimmen können. Es bleiben also nur die im Rahmen dieser Problemstellung besonders interessierenden Mittelwerte der Geoidundulationen  $\sqrt{N}_q$  für bestimmte, die ganze Erde bedeckende Flächenelemente  $\Delta F_q$  übrig.

Dabei soll zunächst vorausgesetzt werden, daß durch eine erste Ausgleichung, die keine Beobachtungen der Satellitenaltimetrie zu beinhalten, sondern nur solche des topozentrischen Einheitsvektors oder (und) Laserentfernungsmessungen zum Satelliten zu umfassen braucht, erste Näherungswerte für die Mittelwerte der Geoidundulationen der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente vorliegen, wie sie aus den bereits veröffentlichten Karten für das Geoid entnommen werden können.

Abb.3 zeigt eine Einteilung der Erdoberfläche in  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente. Das laufende Flächenelement werde mit  $\Delta F_{0,p}$  bezeichnet. Der Index  $p$  durchläuft die Reihe  $p = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  ist bei  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimenten ein Wert um 200:  $n = 200$ . Im Zusammenhang mit den vorliegenden Untersuchungen ist es nicht notwendig, genaue Vorschriften über die Einteilung der Erde in die  $15^\circ \times 15^\circ$  großen Flächenelemente  $\Delta F_{0,p}$  aufzustellen. Es soll aber angenommen werden, daß diese Flächenelemente genähert quadratisch sind und daß die sphärischen Längen der Seiten, also die geozentrischen Winkel, die durch diese Seiten aufgespannt werden, immer etwa  $15^\circ$  betragen.

Aus anderen Ausgleichungen habe man also zunächst Näherungswerte für die Geoidundulationen erhalten. Die Mittelwerte dieser Geoidundulationen für die Flächenelemente  $\Delta F_{0,p}$  werden mit  $N_{0,p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) bezeichnet. Sie bilden den Vektor

$$(113) \quad \psi_0 = \begin{pmatrix} N_{0.1} \\ N_{0.2} \\ \dots \\ N_{0.p} \\ \dots \\ N_{0.n} \end{pmatrix} .$$

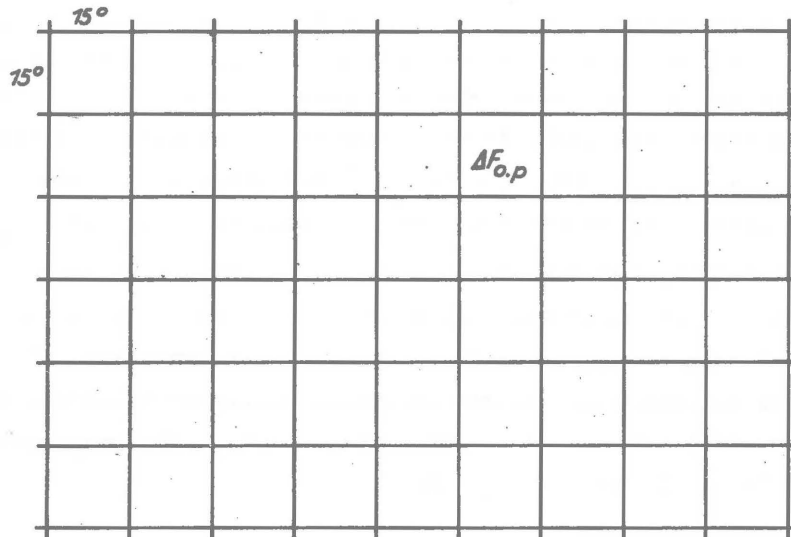


Abb. 3. Einteilung der Erdoberfläche in  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente  $\Delta F_{o,p}$  ;  
 $p = 1, 2, \dots, n$  .

Für die Ausgleichung der Fehlergleichungen (102) und (104) der Satellitenaltimetrie soll nun eine weitere Einteilung der Erdoberfläche in ein engmaschigeres Netz als das der Elemente  $\Delta F_{o,p}$  vorgenommen werden, damit das Detail, das in den  $\eta$ -Werten steckt, voll zur Geltung kommen kann. Die Flächenelemente  $\Delta F_{o,p}$  mit der Seitenlänge  $15^\circ \times 15^\circ$  werden jeweils zerteilt in 225 Flächenelemente der Größe  $1^\circ \times 1^\circ$ . Man kommt so zu den Flächenelementen  $\Delta F_{o,p,i}$  ;  $p = 1, 2, \dots, n$  ;  $i = 1, 2, \dots, m$  ;  $m = 225$ . Abb.4 zeigt die Unterteilung der Flächen  $\Delta F_{o,p}$  in die Elemente  $\Delta F_{o,p,i}$  ; zu denen die Mittelwerte der Geoidundulationen  $N_{o,p,i}$  gehören.

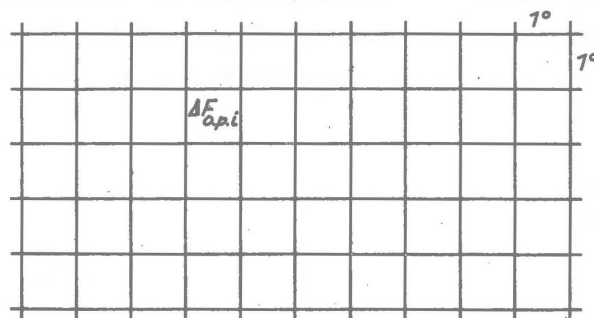


Abb. 4. Einteilung der Erdoberfläche in  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimente  $\Delta F_{o,p,i}$  ;  
 $p = 1, 2, \dots, n$  ;  $i = 1, 2, \dots, m$  .

Würde man mit den Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie (102), (104) die Normalgleichungen für die Werte  $N_{0,p}$  aufstellen, dann erhielte man Gleichungen der folgenden Form:

$$(114) \quad \kappa_0 \varphi_0 - \kappa_{0,1} = 0 .$$

Hierbei wird wieder angenommen, daß die Unbekannten  $\delta a_j$ ,  $\delta e_j$ , ...,  $\delta M_j$  und  $\delta a_E$  ( $j = 0, 1, 2$ ) vorher eliminiert worden sind.  $\kappa_0$  ist die Koeffizientenmatrix und  $\kappa_{0,1}$  der Spaltenvektor der freien Glieder.

Unterteilt man aber die Erdoberfläche weiter in  $1^0 \times 1^0$ -Kompartimente  $\Delta F_{0,p,i}$ , dann ergeben sich zur Bestimmung der  $N_{0,p,i}$  die Normalgleichungen

$$(115) \quad \kappa_1 \delta \varphi - \kappa_1 = 0$$

$\delta \varphi$  ist der Spaltenvektor der  $N_{0,p,i}$ ;

$$(116) \quad \delta \varphi = \begin{pmatrix} \delta \varphi_1 \\ \delta \varphi_2 \\ \dots \\ \delta \varphi_p \\ \dots \\ \delta \varphi_n \end{pmatrix} ;$$

$$(117) \quad \delta \varphi_p = \begin{pmatrix} \delta N_{0,p,1} \\ \delta N_{0,p,2} \\ \dots \\ \delta N_{0,p,i} \\ \dots \\ \delta N_{0,p,m} \end{pmatrix} , \quad p = 1, 2, \dots, n .$$

$\delta N_{0,p,i}$  ist die Differenz zwischen dem endgültigen Wert  $N_{0,p,i}$  und dem ersten Näherungswert für  $N_{0,p,i}$ ; dieser ist hier nach (113) gleich  $N_{0,p}$ . Der Vektor der freien Glieder  $\kappa_1$  läßt sich analog wie  $\delta \varphi$  und  $\delta \varphi_p$  zerlegen:

$$(118) \quad \kappa_1 = \begin{pmatrix} \kappa_{1,1} \\ \kappa_{1,2} \\ \dots \\ \kappa_{1,p} \\ \dots \\ \kappa_{1,n} \end{pmatrix}$$

mit

$$(119) \quad \mathcal{R}_{1.p} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{1.p.1} \\ \mathcal{R}_{1.p.2} \\ \dots \\ \mathcal{R}_{1.p.i} \\ \dots \\ \mathcal{R}_{1.p.m} \end{pmatrix} ; \quad p = 1, 2, 3, \dots, n .$$

Die Koeffizientenmatrix  $\mathcal{K}_1$  in der Gleichung (115) zerfällt in  $n^2$  Untermatrizen entsprechend der Unterteilung in die Flächenelemente  $\Delta F_{0.p}$ ;  $p = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$$(120) \quad \mathcal{K}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{1.1.1} & \mathcal{K}_{1.1.2} & \dots & \mathcal{K}_{1.1.\bar{p}} & \dots & \mathcal{K}_{1.1.n} \\ \mathcal{K}_{1.2.1} & \mathcal{K}_{1.2.2} & \dots & \mathcal{K}_{1.2.\bar{p}} & \dots & \mathcal{K}_{1.2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{K}_{1.p.1} & \mathcal{K}_{1.p.2} & \dots & \mathcal{K}_{1.p.\bar{p}} & \dots & \mathcal{K}_{1.p.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{K}_{1.n.1} & \mathcal{K}_{1.n.2} & \dots & \mathcal{K}_{1.n.\bar{p}} & \dots & \mathcal{K}_{1.n.n} \end{pmatrix} .$$

Die Untermatrizen  $\mathcal{K}_{1.p.\bar{p}}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ;  $\bar{p} = 1, 2, \dots, n$ ) auf der rechten Seite der Gleichung (120) haben  $m$  Spalten und  $m$  Zeilen entsprechend der Unterteilung der  $\Delta F_{0.p}$  in die Elemente  $\Delta F_{0.p.i}$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Es gilt also

$$(121) \quad \mathcal{K}_{1.p.\bar{p}} = \begin{pmatrix} N_{1.1}^{1.p.\bar{p}} & N_{1.2}^{1.p.\bar{p}} & \dots & N_{1.m}^{1.p.\bar{p}} \\ N_{2.1}^{1.p.\bar{p}} & N_{2.2}^{1.p.\bar{p}} & \dots & N_{2.m}^{1.p.\bar{p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{m.1}^{1.p.\bar{p}} & N_{m.2}^{1.p.\bar{p}} & \dots & N_{m.m}^{1.p.\bar{p}} \end{pmatrix} ;$$

$$p = 1, 2, \dots, n; \quad \bar{p} = 1, 2, \dots, n .$$

Die Vektorgleichung (115) steht für das Normalgleichungssystem, das die gesamten Unbekannten  $\delta N_{0.p.i}$  nach Gleichung (117) bestimmt. Weil der Index  $p$  die Werte  $1, 2, \dots, n$  durchläuft und weil der Index  $i$  alle Werte  $i = 1, 2, \dots, m$  annimmt, liegt also ein System mit  $n \times m$  Unbekannten vor. Die Anzahl der Zeilen und Spalten der Matrix  $\mathcal{K}_1$  beträgt daher mit (115), (120), (121) ebenfalls  $n \times m$ . Mit (116), (118), (120) kann man somit die Gleichung (115) auch ausführlicher schreiben:



$$(122) \begin{pmatrix} \kappa_{1.1.1} & \kappa_{1.1.2} & \dots & \kappa_{1.1.n} \\ \kappa_{1.2.1} & \kappa_{1.2.2} & \dots & \kappa_{1.2.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{1.n.1} & \kappa_{1.n.2} & \dots & \kappa_{1.n.n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_2 \\ \dots \\ \delta\psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{1.1} \\ \kappa_{1.2} \\ \dots \\ \kappa_{1.n} \end{pmatrix} .$$

Die Untermatrizen  $\kappa_{1.1.1}$ ,  $\kappa_{1.2.2}$ , ...,  $\kappa_{1.n.n}$  stehen in der Hauptdiagonalen der Matrix  $\kappa_1$ . Zerlegt man diese Untermatrizen weiter mit (121) in ihre skalaren Elemente  $N_{1.k}^{1.p.p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ), dann erkennt man, daß in der ausführlichen skalaren Form der Normalgleichungen (115) mit den  $n \times m$  Unbekannten  $\delta N_{0.p.i}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ) die skalaren Elemente  $N_{1.i}^{1.p.p}$  in der Hauptdiagonalen stehen, und zwar jeweils multipliziert mit der Unbekannten  $\delta N_{0.p.i}$ .

Aus (122) folgt beispielsweise die folgende Vektorgleichung:

$$(123) \quad \kappa_{1.1.1} \delta\psi_1 + \kappa_{1.1.2} \delta\psi_2 + \dots + \kappa_{1.1.n} \delta\psi_n - \kappa_{1.1} = 0 .$$

In der Fehlergleichung (102) ist auf der rechten Seite der geozentrische Abstand des Satelliten  $r$  eine Funktion von allen  $N$ -Werten auf der Erdoberfläche bzw. von den Werten  $N_{0.p}$  oder  $\delta N_{0.p.i}$ . Auf der rechten Seite der Gleichung (102) kommt der Wert  $N$  aber auch direkt vor; ist die Erdoberfläche in die  $1^\circ \times 1^\circ$ -Elemente  $\Delta F_{0.p.i}$  eingeteilt, so tritt hier der Wert  $\delta N_{0.p.i}$  auf, in dessen zugehörigem Flächenelement  $\Delta F_{0.p.i}$  der Subsatellitenpunkt gelegen ist. Die Tatsache, daß der zum Subsatellitenpunkt gehörige Wert  $\delta N_{0.p.i}$  direkt auf der rechten Seite der Gleichung (102) erscheint, reflektiert sich auch in der Struktur der Untermatrizen der Systeme (120) und (122) und in den Elementen  $N_{1.k}^{1.p.p}$  der Untermatrizen  $\kappa_{1.p.p}$  nach Gleichung (121). Wäre in der Fehlergleichung (102) der geozentrische Abstand des Satelliten  $r$  nicht von den Geoidundulationen  $N$  abhängig, dann würden im System (122) die außerhalb der Hauptdiagonalen auftretenden Untermatrizen  $\kappa_{1.2.1}$ ,  $\kappa_{1.1.2}$ , ... verschwinden, und die Matrix  $\kappa_1$  hätte die Form einer Diagonalmatrix:

$$(124) \begin{pmatrix} \kappa_{1.1.1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_{1.2.2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_{1.n.n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_2 \\ \dots \\ \delta\psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{1.1} \\ \kappa_{1.2} \\ \dots \\ \kappa_{1.n} \end{pmatrix} .$$

Auch die Untermatrizen  $\kappa_{1.p.p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) würden mit (121) in Diagonalmatrizen entarten:

$$(125) \quad \mathcal{N}_{1.p.p} \cong \begin{pmatrix} N_{1.1}^{1.p.p} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{2.2}^{1.p.p} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_{m.m}^{1.p.p} \end{pmatrix} .$$

Vernachlässigt man nämlich im geozentrischen Abstand  $r$  des Satelliten die Abhängigkeit von den Geoidundulationen, dann nehmen die Fehlergleichungen (102) im Prinzip die folgende Form an, wenn man von den konstanten und säkularen Einflüssen der Unbekannten  $\delta a_j$ ,  $\delta e_j$ , ...,  $\delta M_j$  und  $\delta a_E$  ( $j = 0, 1, 2$ ), die wegen ihrer Struktur auf die "kurzperiodischen" Effekte  $\delta N_{0.p.i}$  keinen Einfluß nehmen können, absieht; diese Größen können ohnehin a priori aus der Ausgleichung nach (114) bestimmt worden sein:

$$(126) \quad v_{0.p.i}^* \cong -\delta N_{0.p.i} - l_{0.p.i}^* ; \quad p = 1, 2, \dots, n ; \quad i = 1, 2, \dots, m .$$

$v_{0.p.i}^*$  ist die Verbesserung der Beobachtung der Satellitenaltimetrie, die erfolgt, wenn der Subsatellitenpunkt sich im Flächenelement  $\Delta F_{0.p.i}$  befindet.  $\delta N_{0.p.i}$  ist die unbekannte Änderung der mittleren Geoidundulation in diesem Gebiet und  $l_{0.p.i}^*$  das zugehörige freie Glied. Es liegt der Fall der direkten Beobachtungen vor. Die nach der GAUSSSchen Transformation aus (126) zu ermittelnde Normalgleichungsmatrix besteht bei der Struktur der Gleichung (126) nur aus den Elementen in der Hauptdiagonalen.

Bei der allgemeinen strengen Anwendung der Fehlergleichung (102) ist natürlich der geozentrische Abstand  $r$  auf Grund der Störungsrechnung von den  $N$ -Werten abhängig. Daher liegen bei den Normalgleichungsmatrizen in Strenge keine Diagonalmatrizen vor, wie sie in den Gleichungen (124) und (125) dargestellt sind. In der Gleichung (122) sind in Strenge alle Untermatrizen vorhanden, und  $\mathcal{N}_1$  ist keine Diagonalmatrix. Berücksichtigt man in der Fehlergleichung (102), daß der geozentrische Abstand  $r$  auf Grund der Störungsrechnung von allen Werten  $\delta N_{0.p.i}$  abhängig ist, so hat die lineare Form dieser Fehlergleichung an Stelle von (126) die folgende Gestalt:

$$(127) \quad v_{0.p^0.i^0}^* = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{0.p.i.p^0.i^0} \delta N_{0.p.i} - \delta N_{0.p^0.i^0} - l_{0.p^0.i^0}^* .$$

Die Beobachtung erfolgte also in der Zeit, während der der Subsatellitenpunkt sich in dem Flächenelement  $\Delta F_{0.p^0.i^0}$  ( $p = p^0, i = i^0$ ) befand. Die Werte  $\alpha_{0.p.i.p^0.i^0}$  sind die aus der Linearisierung der Fehlergleichung sich ergebenden Koeffizienten. Auf Grund von (111) und (112) ist die Varianz des Ausdrucks

$$\sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{0.p.i.p^0.i^0} \delta N_{0.p.i} - \frac{1}{m} \sum_{i^0=1}^m \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{0.p.i.p^0.i^0} \delta N_{0.p.i}$$

kleiner als die des Wertes  $\delta N_{o.p^0.i^0}$ . Daher dominiert in (121) und (122) die Hauptdiagonale. Die Koeffizienten  $\alpha_{o.p.i.p^0.i^0}$  sind notwendigerweise wesentlich kleiner als Eins. Wenn die in (122) außerhalb der Hauptdiagonalen erscheinenden Untermatrizen nicht gleich der Nullmatrix sind, so ergibt sich dieser Sachverhalt lediglich aus der Störungsrechnung, also weil  $r$  von den  $\delta N_{o.p.i}$  abhängig ist. Die Elemente  $N_{1.i}^{1.p.p}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $p=1,2,\dots,n$ ) in der Hauptdiagonalen dagegen ergeben sich aus dem direkten Einfluß der Werte  $\delta N_{o.p.i}$  und dem durch die Störungsrechnung hineingetragenen Einfluß aller  $\delta N_{o.p.i}$ .

Weil die Hauptdiagonale mit (111) und (112) genähert dominiert, setzt man für die Auflösung der Normalgleichungen (122) zunächst approximativ

$$(128) \quad \delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = \dots = \delta \varphi_n = 0$$

und findet einen Näherungswert für  $\delta \varphi_1$  mit (122), (123) aus

$$(129) \quad \kappa_{1.1.1} \delta \varphi_1^* - \kappa_{1.1} = 0.$$

Den Näherungswert für  $\delta \varphi_2$ , nämlich  $\delta \varphi_2^*$ , erhält man mit

$$(130) \quad \kappa_{1.2.2} \delta \varphi_2^* - \kappa_{1.2} + \kappa_{1.2.1} \delta \varphi_1^* = 0.$$

Analog ergeben sich die Näherungswerte  $\delta \varphi_p^*$  der Vektoren

$$(131) \quad \delta \varphi_p; \quad p = 3, 4, \dots, n.$$

Diese so erhaltenen Vektoren sollen näher betrachtet werden.

Aus den Elementen  $\delta N_{o.p.i}$  des Vektors  $\delta \varphi_p$  nach (117) leitet man durch Mittelbildung eine Veränderung des mittleren Niveaus der N-Werte im Flächenelement  $\Delta F_{o.p}$  um den Betrag

$$(132) \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta N_{o.p.i}$$

ab. Dieser Vektor  $\delta \varphi_p$  enthält ferner die Unterschiede der  $\delta N_{o.p.i}$ -Werte ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) innerhalb des Flächenelements  $\Delta F_{o.p}$ , also die Differenz dieser Werte  $\delta N_{o.p.i}$  gegenüber ihrem Mittelwert

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta N_{o.p.i}$$

nach Gleichung (132).

Wir betrachten nun diese innere Varianz und die mit den Gleichungen (129), (130) begangenen Vernachlässigungen. Die dort vernachlässigten Glieder ergeben sich mit (123) bis (127) aus der Varianz des  $r$ -Wertes innerhalb des Flächenelements  $\Delta F_{0,p}$ , wie sie aus den Werten  $\delta N_{0,p,i}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ) auf Grund der Störungsrechnung resultiert. Nun war mit den Gleichungen (111) und (112) die Varianz des  $r$ -Wertes auf Grund der Störungsrechnung wesentlich kleiner als die der Werte  $\delta N_{0,p,i}$  innerhalb eines Flächenelements  $\Delta F_{0,p}$ . Den  $r$ -Wert kann man also genähert aus den a priori gegebenen Werten  $N_{0,p}$  berechnen, und im Rahmen der Ausgleichung der Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie erhält man die Werte  $\delta N_{0,p,i}$ . Dieser Tatbestand ist sehr wesentlich für das Ausgleichungsverfahren.

Dieses genähert gültige Verfahren, die  $r$ -Werte als fehlerfrei zu betrachten, führt die Gleichungen (122) in die Gleichungen (124) über. Für die letzteren ergibt sich aber die Gültigkeit des Näherungsverfahrens im Sinne von (129), (130) als selbstverständlich. In der Gleichung (130) geht man nur insofern einen Schritt weiter, als man bereits bekannte erste Näherungen für  $\delta \psi_1$ , nämlich  $\delta \psi_1^*$ , mitberücksichtigt, wodurch die Konvergenz des Iterationsverfahrens beschleunigt wird.

Weil die Varianz  $\sigma_{\delta N}$  wesentlich größer ist als die Varianz  $\sigma_{\delta N^*}$ , enthalten die nach dem Näherungsverfahren mit (129), (130) erhaltenen Vektoren

$$(133) \quad \delta \psi_p^* ; \quad p = 1, 2, \dots, n$$

wesentliche Aussagen über die Unterschiede der Elemente

$$(134) \quad \delta N_{0,p,i} ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

innerhalb des jeweiligen Flächenelements  $\Delta F_{0,p}$ . Die mit (129), (130) gemachten Vernachlässigungen verändern wegen (110), (111), (112) die Unterschiede der Elemente  $\delta N_{0,p,i}$  innerhalb der Flächen  $\Delta F_{0,p}$  relativ wenig.

Die Veränderung des Niveaus (132) der  $N$ -Werte im Flächenelement  $\Delta F_{0,p}$  brauchte im Zusammenhang mit den vorstehenden Erörterungen zunächst nicht diskutiert zu werden; diese Werte ergeben sich anschließend aus einer besonderen Ausgleichung, die jetzt behandelt werden soll. Dabei wird von der Gleichung (115) ausgegangen. Die Unbekannten werden ersetzt durch die Summe zweier Vektoren:

$$(135) \quad \delta \psi \rightarrow \delta \psi^* + \delta \psi^0 .$$

$\delta \psi^*$  ist der Näherungswert des Vektors  $\delta \psi$ , der entsprechend (129), (130) durch die Näherungsausgleichung von (122) erhalten worden ist:

$$(136) \quad \delta\varphi^* = \begin{pmatrix} \delta\varphi_1^* \\ \delta\varphi_2^* \\ \dots \\ \delta\varphi_p^* \\ \dots \\ \delta\varphi_n^* \end{pmatrix} .$$

Die durch eine besondere weitere Ausgleichung noch extra zu bestimmende Niveaushiftung  $\delta\varphi^0$  hat folgenden Vektor:

$$(137) \quad \delta\varphi^0 = \begin{pmatrix} \delta\varphi_1^0 \\ \delta\varphi_2^0 \\ \dots \\ \delta\varphi_p^0 \\ \dots \\ \delta\varphi_n^0 \end{pmatrix} ,$$

$$(138) \quad \delta\varphi_p^0 = \delta N_{0,p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Der Spaltenvektor auf der rechten Seite der Gleichung (138) hat  $m$  Elemente. Die Niveaushiftung  $\delta\varphi^0$  ist also innerhalb eines jeden  $15^0 \times 15^0$ -Flächenelements  $\Delta F_{0,p}$  konstant. Aus (115) ergibt sich damit die folgende Gleichung:

$$(139) \quad \kappa_1 (\delta\varphi^* + \delta\varphi^0) - \kappa_1 = 0 .$$

Nachdem  $\delta\varphi^*$  bekannt ist, kann das Produkt

$$\kappa_1 \delta\varphi^*$$

mit zu dem freien Glied hinzugenommen werden. Es folgt

$$(140) \quad \kappa_1 \delta\varphi^0 - \kappa_1 + \kappa_1 \delta\varphi^* = 0 .$$

Der Ausdruck

$$- \kappa_1 + \kappa_1 \delta\varphi^*$$

ist das neue freie Glied. Gleichung (140) bestimmt die  $n$  Komponenten des Vektors  $\delta\varphi^0$ . Man findet so die Werte  $\delta N_{0,p}$ .

Die Gleichung (140) besteht aus  $n \times m$  Gleichungen. Von ihnen beziehen sich jeweils  $m$  Gleichungen auf die  $m$  Flächenelemente  $\Delta F_{0,p,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) innerhalb der einzelnen Flächenelemente  $\Delta F_{0,p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ). Diese Systeme von jeweils  $m$  Gleichungen, die sich jeweils auf das gleiche Flächenelement  $\Delta F_{0,p}$  beziehen, werden jeweils zu einer Summengleichung zusammengefaßt, so daß man  $n$  solcher Summengleichungen zur Bestimmung der  $n$  Unbekannten  $\delta N_{0,p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) des Vektors  $\delta\varphi^0$  erhält, die innerhalb der Flächenelemente  $\Delta F_{0,p}$  konstant sind. Man wird dann zu einem Normalgleichungssystem der folgenden Gestalt geführt:

$$(141) \quad \mathcal{K}_* \cdot \delta\varphi_* - k_* = 0$$

mit

$$(142) \quad \delta\varphi_* = \begin{pmatrix} \delta N_{0,1} \\ \delta N_{0,2} \\ \dots \\ \delta N_{0,p} \\ \dots \\ \delta N_{0,n} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $\mathcal{K}_*$  besteht aus  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten.  $k_*$  ist der aus  $n$  Elementen bestehende Spaltenvektor des freien Gliedes.

Man kann natürlich die Werte  $\delta N_{0,p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) auch aus der Auflösung des Gleichungssystems (114) erhalten, das von Anfang an für die Berechnung von Mittelwerten  $N_{0,p}$  für die  $15^\circ \times 15^\circ$ -Flächenelemente  $\Delta F_{0,p}$  konzipiert wurde:

$$(143) \quad \mathcal{K}_0 \delta\varphi_* - k_{0,1} = 0.$$

Nachdem man hier die Teilmatrizen  $\mathcal{K}_{1,p,\bar{p}}$  ( $p = 1, 2, \dots, n; \bar{p} = 1, 2, \dots, n$ ) kennt, dürfte der Weg über die Gleichungen (122) mit der Einführung der Summengleichung für ein Flächenelement  $\Delta F_{0,p}$ , stellvertretend für alle Gleichungen, die innerhalb dieses Flächenelements anfallen, und mit der Auflösung von Gleichung (141) genauer sein.

Das Normalgleichungssystem (141) würde man auch erhalten, wenn man aus den Beobachtungen der Satellitenaltimetrie die Geoidundulationen bestimmen wollte, als Unbekannte die Mittelwerte der Geoidundulationen der Flächenelemente  $\Delta F_{0,p}$  einführen und dabei a priori als Näherungswerte für die Geoidundulationen, auch bei der Störungsrechnung

und bei der Berechnung des freien Gliedes, die Werte der aus den vorangegangenen Ausgleichungen nach (114), (115) erhaltenen Geoidundulationen für die Flächenelemente  $\Delta F_{O.p.i}$ , also die Werte  $N_{O.p} + \delta N_{O.p.i}$ , einführen würde. Die schließlich erhaltenen Geoidundulationen lauten dann

$$(144) \quad N_{O.p.i} = N_{O.p} + \delta N_{O.p.i} + \delta N_{O.p} .$$

Gegebenenfalls kann man das Verfahren iterativ wiederholen.

Zu dem Gleichungssystem (141) kann man auch ein anderes Normalgleichungssystem zur Bestimmung der Elemente von  $\delta \varphi_*$  addieren, das man erhält, wenn man diese Werte aus Richtungs- und Entfernungsbeobachtungen zum Satelliten ermitteln will. Lautet dieses System

$$(145) \quad \kappa_{**} \delta \varphi_* - \kappa_{**} = 0 ,$$

so hat man für die Gesamtausgleichung beider Systeme nach dem Additionstheorem für die Normalgleichungen unabhängiger Systeme die folgende Gleichung:

$$(146) \quad (\kappa_* + \kappa_{**}) \delta \varphi_* - (\kappa_* + \kappa_{**}) = 0 .$$

Die Genauigkeit, mit der man das mittlere Niveau der Geoidundulationen in den  $\Delta F_{O.p}$ -Kompartimenten mit der Satellitenaltimetrie nach (102), (141), (142) bestimmen kann, läßt sich leicht abschätzen. In der Fehlergleichung (102) ist der geozentrische Radius  $r$  auf Grund der Störungsrechnung eine Funktion der Geoidundulationen. Vernachlässigt man die zufällige Verbesserung, so ist

$$(147) \quad 0 = \eta + N - r(N) + \zeta_S + \frac{1}{8} a_E e_E^4 \frac{\eta}{r} \sin^2 2 \varphi_S .$$

Geht man von den Änderungen der Mittelwerte  $\delta N_{O.p}$  der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Kompartimente  $\Delta F_{O.p}$  nach (142) aus, so hat man für eine einzelne Fehlergleichung nach (147)

$$(148) \quad 0 = \eta + \delta N_{O.p} - r(\delta N_{O.1} , \delta N_{O.2} , \dots , \delta N_{O.p} , \dots , \delta N_{O.n}) + \zeta_S + \\ + \frac{1}{8} a_E e_E^4 \frac{\eta}{r} \sin^2 2 \varphi_S .$$

Es wird zur Vereinfachung der Vorstellungen angenommen, daß jeweils eine einzige solche Fehlergleichung für jeweils einen Subsatellitenpunkt in den einzelnen Teilstücken  $\Delta F_{O.p.i}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) des Flächenelements  $\Delta F_{O.p}$  anfällt. In jedem Flächenelement  $\Delta F_{O.p.i}$  werde also einmal und nur einmal die Höhe  $\eta$  des Satelliten über dem Meere nach der Satellitenaltimetrie erhalten. Bei der Berechnung des mittleren Niveaus der Geoidundulationen im Flächenstück  $\Delta F_{O.p}$  ist das arithmetische Mittel aller Fehlergleichungen in diesem Flächenstück zu bilden (Anzahl =  $m$ ). Für die Fehlerbetrachtung kann man vereinfachend setzen

$$(149) \quad 0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_i + \delta N_{0,p} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r(\delta N_{0,1}, \delta N_{0,2}, \dots, \delta N_{0,p}, \dots, \delta N_{0,n})_i + \\ + \varphi_S + \frac{1}{8} a_E \frac{e^4}{R} \frac{\eta}{R} \sin^2 2\varphi_S .$$

Substituiert man für die Mittelung über ein Flächenstück  $\Delta F_{0,p}$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_i = \bar{\eta} ,$$

und vernachlässigt man die Fehler im 4. und 5. Glied von (149), weil diese Größen nur als Fehler der Differenz  $a_E - a$  eingehen, wobei  $a$  die große Halbachse der Satellitenbahn ist, und linearisiert man die Gleichung (149), dann folgt

$$(150) \quad 0 = \bar{\eta} + \delta N_{0,p} - \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \delta N_{0,i} + \varkappa ,$$

wo  $\bar{\alpha}_i$  wieder wie  $\bar{\eta}$  einen entsprechenden Mittelwert bedeutet. Aus (150) leitet man ab

$$(151) \quad 0 = \bar{\eta} + (1 - \bar{\alpha}_p) \delta N_{0,p} - \sum_{i=1}^{p-1} \bar{\alpha}_i \delta N_{0,i} - \sum_{i=p+1}^n \bar{\alpha}_i \delta N_{0,i} + \varkappa .$$

$\varkappa$  wurde wegen des Einflusses von  $a_E - a$  eingeführt und ist eine für alle Flächenelemente  $\Delta F_{0,p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) und damit für die ganze Erdoberfläche in gleicher Weise gültige Konstante. Geht man zu dem mittleren Fehler  $\sigma_{\bar{\eta}}$  von  $\bar{\eta}$  und dem quadratischen Mittelwert  $\sigma_N$  von  $\delta N_{0,p}$  über, dann folgt

$$(152) \quad \sigma_{\bar{\eta}}^2 = \left[ \sum_{i=1}^{p-1} \bar{\alpha}_i^2 + \sum_{i=p+1}^n \bar{\alpha}_i^2 + (1 - \bar{\alpha}_p)^2 \right] \sigma_N^2 .$$

Damit ist der gesuchte mittlere Fehler im Niveau von  $\delta N_{0,p}$  gleich

$$(153) \quad \sigma_N = \frac{1}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^{p-1} \bar{\alpha}_i^2 + \sum_{i=p+1}^n \bar{\alpha}_i^2 + (1 - \bar{\alpha}_p)^2 \right]}} \sigma_{\bar{\eta}} .$$

Der mittlere Fehler einer einzelnen Messung  $\eta$  sei  $\pm 3$  m. Bei  $m = 225$  hat man mit  $1/\sqrt{225}$  zu multiplizieren, um  $\sigma_{\bar{\eta}}$  zu erhalten. Es folgt

$$(154) \quad \sigma_{\bar{\eta}} = \pm 0,2 \text{ m} .$$



Die Größenordnung der Koeffizienten  $\alpha_1$  läßt sich abschätzen. Die Undulationen  $N_{o,p}$  sind im Mittel etwa gleich 25 m. Die Gesamtzahl aller  $N_{o,p}$ -Werte ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) nimmt beim Radius  $r$  etwa einen Einfluß von  $\pm 50$  m, wie aus den Erfahrungen mit der Bahnmethode der Satellitengeodäsie bekannt ist. Setzt man voraus, daß die  $N_{o,p}$ -Werte zufällig verteilt sind, so ist bei  $n = 200$  der Einfluß eines einzelnen Wertes  $N_{o,p}$  auf  $r$  im Mittel gleich  $\pm 50/\sqrt{200}$  m =  $\pm 3,5$  m. Es wurde für  $N_{o,p}$  ein mittlerer Wert von 25 m gesetzt. Legt man 1 m als Maßeinheit zugrunde, dann ist der Betrag der Koeffizienten  $\alpha_1$  im Mittel etwa mit  $\pm 0,14$  abzuschätzen. Damit folgt aus der Gleichung (153)

$$(155) \quad \sigma_N = 0,45 \cdot \sigma_{\bar{r}} = \pm 0,1 \text{ m}.$$

Das mittlere Niveau der Geoidundulationen innerhalb der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Flächenelemente wird man also auf etwa  $\pm 0,1$  m genau bestimmen können.

Der Vorteil des vorstehend beschriebenen Iterationsverfahrens zur Bestimmung von Detailstrukturen im Feld der Geoidundulationen bis herab zu Mittelwerten  $N_{o,p,i}$  für  $1^\circ \times 1^\circ$  große Flächenelemente besteht darin, daß man nur relativ kleine Normalgleichungssysteme auflösen muß. Das gesamte Normalgleichungssystem (115) zur Bestimmung der Unbekannten  $N_{o,p,i}$  ist nämlich sehr umfangreich. Ist die gesamte Erdoberfläche in  $15^\circ \times 15^\circ$  große Elemente  $\Delta F_{o,p}$  eingeteilt, dann wird man etwa  $n = 200$  solcher Flächenelemente haben ( $p = 1, 2, \dots, n$ ). Zwei Drittel dieser Kompartimente überdecken Wasserflächen. Diese sind weiter unterteilt in  $1^\circ \times 1^\circ$ -Kompartimente  $\Delta F_{o,p,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 225$ ). Insgesamt hat man also

$$200 \cdot \frac{1}{3} + 200 \cdot \frac{2}{3} \cdot 225 \approx 30\,000$$

Unbekannte.

Man umgeht die Auflösung dieses Systems von 30 000 Unbekannten in einem Guß, indem man nach dem vorstehend beschriebenen Iterationsverfahren zunächst a priori bekannte Näherungswerte für die  $N_{o,p}$  einführt und daraus auch die Bahnstörungen errechnet, dann mit diesen Bahnstörungen die Unterschiede der Geoidundulationen  $\delta N_{o,p,i}$  in den die Meere bedeckenden Flächenelementen  $\Delta F_{o,p}$  (Anzahl =  $200 \cdot 2/3 = 133$ ) durch Reduktion von Systemen, die jeweils nur 225 Unbekannte enthalten, ermittelt und indem man schließlich die mittleren Niveaus der Geoidundulationen in den Flächenelementen  $\Delta F_{o,p}$  durch Auflösung eines Systemes von 200 Unbekannten erhält.

Versucht man das System (115) in einem Guß aufzulösen, so kann man diese Aufgabe mit Hilfe des GAUSSschen Reduktionsverfahrens erledigen. Man wird dabei zunächst die inverse Matrix  $(\alpha_{1,1,1})^{-1}$  ermitteln (s.(120)) und erhält dann das folgende System, in dem die Unbekannten  $\delta \alpha_1$  (s.(116)) wegreduziert sind:

$$\begin{aligned}
 (156) \quad & [\kappa_{1.2.2} - \kappa_{1.2.1} (\kappa_{1.1.1})^{-1} \kappa_{1.1.2}] \delta \varepsilon_2 + \\
 & + [\kappa_{1.2.3} - \kappa_{1.2.1} (\kappa_{1.1.1})^{-1} \kappa_{1.1.3}] \delta \varepsilon_3 + \dots \\
 & \\
 & [\kappa_{1.3.2} - \kappa_{1.3.1} (\kappa_{1.1.1})^{-1} \kappa_{1.1.2}] \delta \varepsilon_2 + \\
 & + [\kappa_{1.3.3} - \kappa_{1.3.1} (\kappa_{1.1.1})^{-1} \kappa_{1.1.3}] \delta \varepsilon_3 + \dots \\
 & \dots \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \dots
 \end{aligned}$$

Ebenso, wie man durch den Übergang vom System (115) bzw. (120) zum System (156) die Unbekannte  $\delta \varepsilon_1$  eliminieren konnte, kann man analog im System (156) die Unbekannte  $\delta \varepsilon_2$  eliminieren, bis man nur noch ein System für  $\delta \varepsilon_n$  hat. Aus diesem System kann man  $\delta \varepsilon_n$  bestimmen und dann rücklaufend die Unbekannten  $\delta \varepsilon_{n-1}$ ,  $\delta \varepsilon_{n-2}$ , ...,  $\delta \varepsilon_1$  aus den reduzierten Systemen errechnen. Wie weit dieses Verfahren bei einem System von 30 000 Unbekannten möglich ist, sei dahingestellt.

#### 4. Die Darstellung der Geoidundulationen durch einen analytischen Ausdruck

Mit der Gleichung (115) werden die Mittelwerte  $\delta N_{O.p.i}$  für die einzelnen Flächenelemente  $\Delta F_{O.p.i}$  ermittelt. Mittels der Satellitenaltimetrie wird man allerdings bei praktischen Messungen die  $\eta$ -Werte entlang von Profilen erhalten. Diese Profile sind die Subsatellitenkurven. Es bietet sich daher an, die  $N$ -Werte entlang diesen Profilen durch analytische Ausdrücke, beispielsweise durch Potenzreihenentwicklungen, darzustellen und deren Unbekannte durch die Ausgleichung der  $\eta$ -Werte zu bestimmen. Ein Flächenelement  $\Delta F_{O.p}$  wird von zahlreichen solchen Profilen durchzogen sein. Daher soll ein zweidimensionaler analytischer Ausdruck eingeführt werden, der den Verlauf der  $\delta N_{O.p.i}$ -Werte ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) innerhalb eines Flächenelements  $\Delta F_{O.p}$  durch eine stetige Funktion darstellt. Dieser Ausdruck kann verschiedene Formen haben. Es soll hier von einer Potenzreihenentwicklung ausgegangen werden:

$$(157) \quad \phi_{O.p}(x, y) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{p,\mu,\nu} x^{\mu} y^{\nu} .$$

Ist ein Flächenelement  $\Delta F_{O.p}$  in 225 Flächenstücke  $\Delta F_{O.p.i}$  unterteilt, so wird man in (157) die Potenzen bis etwa zur 15. Ordnung mitnehmen, so daß insgesamt 225 Parameter  $a_{p,\mu,\nu}$  vorliegen. Dann kann man die Elemente der Vektoren  $\delta \varphi_p$  in den Gleichungen (115), (116), (122), (129), (130) ausdrücken durch die Parameter  $a_{p,\mu,\nu}$  der Entwicklung (157). Die Substitutionsgleichungen lauten

$$(158) \quad \delta N_{O.p.i} = \phi_{O.p}(x_1, y_1) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{p,\mu,\nu} x_1^{\mu} y_1^{\nu} ,$$

wenn  $x_1, y_1$  die bekannten Koordinaten der Mittelpunkte der Flächenelemente  $\Delta F_{O.p.i}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) innerhalb der Fläche  $\Delta F_{O.p}$  sind. Es sind also nunmehr die Unbekannten  $a_{p,\mu,\nu}$  für jedes Flächenelement  $\Delta F_{O.p}$  anstelle der  $\delta N_{O.p.i}$  zu berechnen. Man kann diese Substitution in den Normalgleichungen (115), (129), (130) vornehmen, man kann sie auch schon früher, bei der Störungsrechnung in den Gleichungen (85) und (86), durchführen. Die Störbeschleunigungen  $K_1, K_2, K_3$  werden dann dargestellt als Funktionen der für jedes Flächenelement  $\Delta F_{O.p}$  anfallenden Parameter  $a_{p,\mu,\nu}$  sowie als Funktionen vom Ort des Satelliten und vom Ort auf der Erdoberfläche. Auch in den Fehlergleichungen (102) ist dann  $r$  sowohl eine Funktion von den Parametern  $a_{p,\mu,\nu}$ , wobei die Parameter  $p, \mu, \nu$  alle ihre Werte durchlaufen, als auch vom Ort des Satelliten. Auch  $N$  ist dort eine Funktion von den Parametern  $a_{p,\mu,\nu}$ , wobei  $p$  fest ist und die Parameter  $\mu$  und  $\nu$  alle ihre Werte annehmen.  $N$  ist dort auch eine Funktion vom Ort des Subsatellitenpunktes.

In den auf diesem Wege erhaltenen Normalgleichungen, die sich analog wie (115) ergeben, tauchen dann die Parameter  $a_{p,\mu,\nu}$  als Unbekannte auf, deren Werte durch ein Iterationsverfahren bestimmt werden können, das analog ist dem mit den Gleichungen (128), (129), (130) beschriebenen.

Wenn man analytische Ausdrücke der Form (157) für die einzelnen Flächenelemente  $\Delta F_{o,p}$  entwickelt, können entlang den Grenzlinien benachbarter Flächenelemente Klaffungen entstehen. Man kann diese Klaffungen an den Nähten beseitigen und dort ein angemessenes Maß an Stetigkeit z.B. für die Funktion und ihre erste Ableitung erhalten, wenn man geeignete zusätzliche Bedingungen einführt (Spline-Funktionen).

## 5. Kombination der aus der Satellitenaltimetrie erhaltenen Geoidundulationen mit den terrestrischen Schwereanomalien

Die mittels der Methoden der Satellitenaltimetrie gefundenen Geoidundulationen  $N$  lassen sich nach der STOKESschen Theorie darstellen als Funktionen der Schwereanomalien (vgl. [2, 4, 9]):

$$(159) \quad N = \frac{R_E}{4\pi G} \iint \Delta g_F S_T(\psi) d\omega .$$

$G$  ist ein globaler Mittelwert der Schwere,  $S_T(\psi)$  ist die STOKESsche Funktion,  $d\omega$  ist das Flächenelement auf der Einheitskugel. Die  $\Delta g_F$ -Werte sind auf einem großen Teil der Erdoberfläche aus terrestrischen Schweremessungen bekannt. Auf weiten Teilen der Erdoberfläche fehlen aber noch die Schwereanomalien, so daß man nur mit gewissen Einschränkungen die  $N$ -Werte nach (159) aus den terrestrischen  $\Delta g_F$ -Werten ermitteln kann, um sie dann den mit den Methoden der Satellitenaltimetrie erhaltenen  $N$ -Werten gegenüberzustellen. Weil aber die mit den Methoden der dynamischen Satellitengeodäsie erhaltenen  $N$ -Werte auf der ganzen Erde bekannt und auf den Ozeanen nach der Satellitenaltimetrie besonders gut zu bestimmen sind, ist die Umkehrung der Gleichung (159) von Bedeutung (s. [3, 4, 7, 9]):

$$(160) \quad \Delta g_F = -\frac{G}{R_E} N - \frac{G R_E^2}{2\pi} \iint \frac{N - N_0}{l^3} d\omega ;$$

$$l = 2 R_E \sin \frac{\psi}{2} .$$

Mit den Methoden der Satellitengeodäsie werden also die  $N$ -Werte für die Gleichung (160) gefunden. Die nach Gleichung (160) aus diesen  $N$ -Werten erhaltenen Schwereanomalien sollen mit  $(\Delta g_F)_S$  bezeichnet werden, die direkt aus terrestrischen Messungen gefundenen dagegen mit  $(\Delta g_F)_T$ . Die korrespondierenden Werte beider Systeme lassen sich zu Mittelwerten vereinigen unter Berücksichtigung der Genauigkeiten der  $(\Delta g_F)_S$ - und  $(\Delta g_F)_T$ -Werte. Der ausgeglichene Mittelwert sei  $(\Delta g_F)_{ST}$ . Dann kann man die aus Satellitenbeobachtungen gefundenen  $N$ -Werte verbessern, indem man folgende Korrektur anbringt:

$$(161) \quad N^* = \frac{R_E}{4\pi G} \iint [(\Delta g_F)_{ST} - (\Delta g_F)_S] S_T(\psi) d\omega .$$

Das Integral in Gleichung (161) ist nur über den Teil der Erdoberfläche zu erstrecken, für den terrestrische Schwereanomalien  $(\Delta g_F)_T$  vorliegen.

Die Adaption der mittels Satelliten erhaltenen  $N$ -Werte an die terrestrischen  $\Delta g_F$ -Werte gemäß den Formeln (160), (161) geschah approximativ im Vergleich mit den strengen Verfahren der Methode der kleinsten Quadrate. Man kann die Ausgleichung strenger durchführen, indem man bei der Anfelderung der  $(\Delta g_F)_S$ -Werte an die  $(\Delta g_F)_T$ -Werte die aus der vorhergegangenen Ausgleichung nach (114), (115), (120) sich ergebende Kovarianzmatrix der  $N$ -Werte berücksichtigt. Diese Kovarianzmatrix ist gleich der inversen Matrix

$(\mathcal{N}_1)^{-1}$ . Es wird dann aber zweckmäßiger sein, die  $(\Delta g_F)_T$ -Werte in Strenge in die Bestimmung der N-Werte nach (114), (115), (145), (146) entsprechend den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate zu integrieren.

Bei der Bestimmung der Werte  $\delta\varphi_p$  nach (115), (117) wird man dann bei einer komplexen Ausgleichung zu den Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie (102), (104) nicht nur die Fehlergleichungen hinzunehmen, die die Beziehung zwischen der beobachteten topozentrischen Rektaszension und Deklination des Satelliten und den Parametern des Gravitationsfeldes herstellen, also die Beziehung zwischen den Richtungsbeobachtungen und den Geoidundulationen, und man wird auch nicht nur die Laserbeobachtungen zum Satelliten mit zu den Fehlergleichungen hinzunehmen, sondern man wird vielmehr auch mit besonderem Gewinn die Fehlergleichungen integrieren, die die Geoidundulationen  $\delta\varphi_p$  als Unbekannte und die terrestrischen Schwereanomalien  $(\Delta g_F)_T$  als zufällige Variable zueinander in Beziehung setzen. Diese Fehlergleichungen ergeben sich aus der Gleichung (160), die man auch symbolisch in folgender Form schreiben kann:

$$(162) \quad (\Delta g_F)_{S,\mu} = \sqrt{\mu,\nu} N_\nu = \sum_\nu \sqrt{\mu,\nu} N_\nu .$$

Der Index  $\mu$  ist die laufende Nummer der Schwereanomalie und  $\nu$  ein Summationsindex.

Setzt man auf der rechten Seite als erste Näherung für die Geoidundulation  $N_\nu$  die Werte  $N_{0,p}$  nach (113) ein, dann folgt eine Beziehung der folgenden Form:

$$(163) \quad (\Delta g_F)_{S,0,p^*i^*}^0 = \sum_p N_{0,p} \sum_i \sqrt{0,p^*i^*0,p,i} ;$$

$$p = 1, 2, \dots, n ; \quad p^* = 1, 2, \dots, n ; \quad i^* = 1, 2, \dots, m ;$$

$$i = 1, 2, \dots, m .$$

Hier ist  $(\Delta g_F)_{S,0,p^*i^*}^0$  der aus den Mittelwerten  $N_{0,p}$  der  $15^\circ \times 15^\circ$ -Flächenstücke  $\Delta F_{0,p}$  berechnete Mittelwert der Freiluftanomalie im  $1^\circ \times 1^\circ$ -Flächenstück  $\Delta F_{0,p^*i^*}$ . Unterteilt man weiterhin in die Flächenstücke  $\Delta F_{0,p,i}$  und fügt zu den Werten  $N_{0,p}$  noch die Werte  $\delta N_{0,p,i}$  nach (117) hinzu, dann erhält man die Mittelwerte der Freiluftanomalien für die Flächenstücke  $\Delta F_{0,p^*i^*}$  aus den Geoidundulationen  $N_{0,p}$  und  $\delta N_{0,p,i}$  wie folgt:

$$(164) \quad (\Delta g_F)_{S,0,p^*i^*} = \sum_p \sum_i \sqrt{0,p^*i^*0,p,i} \delta N_{0,p,i} + (\Delta g_F)_{S,0,p^*i^*}^0 ;$$

$$p = 1, 2, \dots, n ; \quad p^* = 1, 2, \dots, n ;$$

$$i = 1, 2, \dots, m ; \quad i^* = 1, 2, \dots, m .$$

Die Freiluftanomalie  $(\Delta g_F)_{S,0,p,i}$  wurde aus den nach Satellitenmethoden gefundenen N-Werten ermittelt, sie muß innerhalb der Fehlergrenzen gleich sein dem aus terrestrischen Schwereanomalien  $(\Delta g_F)_T$  abgeleiteten Mittelwert der Freiluftanomalien

für das Flächenelement  $\Delta F_{O.p.i}$ . Dieser Mittelwert werde mit  $(\Delta g_F)_{T.o.p.i}$  bezeichnet. Er wurde durch Messungen bestimmt und ist daher noch mit der zufälligen Variablen  $v_{T.o.p.i}$  zu versehen. Die verschiedenen Werte  $v_{T.o.p.i}$  mit  $p=1, 2, \dots, n$  und  $i = 1, 2, \dots, m$  können als voneinander stochastisch unabhängig angesehen werden. Zu den Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie und denen der Richtungs- und Entfernungsbeobachtungen sind also noch die gravimetrischen Fehlergleichungen hinzuzunehmen:

$$(165) \quad v_{T.o.p.i} = -(\Delta g_F)_{T.o.p.i} + (\Delta g_F)_{S.o.p.i}^0 + \sum_{p^*} \sum_{i^*} \sqrt{O.p.i.o.p^*.i^*} \delta N_{O.p^*.i^*}.$$

Führt man das freie Glied  $-l_{O.p.i}$  ein:

$$(166) \quad -l_{O.p.i} = -(\Delta g_F)_{T.o.p.i} + (\Delta g_F)_{S.o.p.i}^0,$$

so folgt schließlich für die zu den Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie hinzuzunehmenden gravimetrischen Fehlergleichungen die folgende Form:

$$(167) \quad v_{T.o.p.i} = -l_{O.p.i} + \sum_{p^*} \sum_{i^*} \sqrt{O.p.i.o.p^*.i^*} \delta N_{O.p^*.i^*};$$

$$p = 1, 2, \dots, n; \quad p^* = 1, 2, \dots, n;$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad i^* = 1, 2, \dots, m.$$

Die Vereinigung der aus (167) allein gravimetrisch gewonnenen und der allein aus der Satellitenaltimetrie erhaltenen Normalgleichungen (115) erfolgt nach dem Additionstheorem der Normalgleichungen (146).

## 6. Die Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie in Abhängigkeit von den Schwereanomalien

Im 2. Kapitel wurde mit der Gleichung (102) die Fehlergleichung der Satellitenaltimetrie formuliert. Die Geoidundulationen gehen dort auf der rechten Seite direkt ein. Der auf der rechten Seite erscheinende geozentrische Radius  $r$  des Satelliten wird entsprechend der Störungsrechnung als Funktion von den Geoidundulationen  $N$  dargestellt, so daß die  $N$ -Werte die Unbekannten des Problems sind. Die Einbeziehung der terrestrischen Schwereanomalien in die Ausgleichung geschah im 5. Kapitel durch die Aufnahme zusätzlicher Fehlergleichungen. Es ist prinzipiell natürlich auch möglich, die Schwereanomalien auf der Erdoberfläche als die Unbekannten des Problems zu betrachten, dann auf dieser Basis die Fehlergleichungen zu entwickeln, daraus die Normalgleichungen aufzustellen, diese aufzulösen und so die Schwereanomalien zu ermitteln. Aus dem STOKESschen Integral (159) folgen dann nach der Ausgleichung die Geoidundulationen als Funktion der Freiluftanomalien.

Wenn man in den Fehlergleichungen der Satellitenaltimetrie nicht die Geoidundulationen, sondern die Schwereanomalien als Unbekannte einführen will, dann wird man die mit den Gleichungen (47), (48), (49) dargestellten Störbeschleunigungen  $K_1, K_2, K_3$  mittels der Gleichungen (36) bis (40) und (50) bis (58) nach den Schwereanomalien entwickeln [1, 2]. Die Entwicklungen werden dann linear in den Schwereanomalien gemacht. Als erste Näherungen werden die Mittelwerte der Schwereanomalien in den Flächenelementen  $\Delta F_{o,p}$  aus den seither erfolgten Bestimmungen dieser Werte aus terrestrischen und Satellitenbeobachtungen eingeführt. Für die Ausgleichung der Beobachtungen der Satellitenaltimetrie werden dann die Mittelwerte der Schwereanomalien der Flächenkompartimente  $\Delta F_{o,p,i}$  als Unbekannte substituiert, und es gilt, diese Werte zu bestimmen. Diese Unbekannten erscheinen dann in den Fehlergleichungen der Form (59), die jetzt für die Fehlergleichungen der Form (104) zu setzen sind. Analog wie bei der Einführung der Geoidundulationen als Unbekannte nach (115) erhält man jetzt ein Normalgleichungssystem, das die Mittelwerte der Schwereanomalien der Kompartimente  $\Delta F_{o,p,i}$  als Unbekannte enthält. Die Auflösung dieses Systems ergibt die gesuchten Schwereanomalien. Man wird hier ähnlich wie bei der Bestimmung der Geoidundulationen nach den Gleichungen (115), (129), (130) eine iterative Auflösung des Systems versuchen. Allerdings wird die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens bei der Einführung der Schwereanomalien als Unbekannte weniger günstig sein, als wenn die Geoidundulationen die Unbekannten des Problems wären. Substituiert man nämlich die Werte  $\delta N_{o,p,i}$  in den Normalgleichungen (115) mittels des STOKESschen Integrals durch die Schwereanomalien, dann findet man, daß die  $\delta N_{o,p,i}$ -Werte innerhalb eines Flächenelementes  $\Delta F_{o,p}$ , d.h., wenn  $p$  fest ist und  $i$  die Werte 1, 2, ...,  $m$  durchläuft, nicht nur von den Schwereanomalien innerhalb des Flächenelementes  $\Delta F_{o,p}$  abhängen, sondern in erheblichem Maße auch von den Schwereanomalien der benachbarten Flächenelemente außerhalb des Kompartiments  $\Delta F_{o,p}$ . Während nämlich in dem Fall, daß die Geoidundulationen als Unbekannte dienen, die Korrelation der  $N$ -Werte zwischen den verschiedenen Flächenelementen  $\Delta F_{o,p}$ , ( $p = 1, 2, \dots, n$ ), wie sie



durch das Normalgleichungssystem (115) besteht, lediglich auf dem Wege über die Bahnstörungen hineingetragen wird, nicht aber dadurch, daß auf der rechten Seite der Fehlergleichung (102) alle Geoidundulationen  $N_{o.p}$  und  $\delta N_{o.p.i}$  erscheinen, hat man dagegen in dem Falle, daß die Schwereanomalien die Rolle der Unbekannten übernehmen, bereits durch den  $N$ -Wert auf der rechten Seite von (102) und seine Entwicklung nach den Schwereanomalien ein Normalgleichungssystem zur Bestimmung der Schwereanomalien, dessen Koeffizientenmatrix keine Diagonalmatrix ist, sondern bei dem auch die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen besetzt sind. Also selbst wenn die linke Seite der Gleichung (102) nicht von  $r$  abhängig wäre, würden die aus dem Normalgleichungssystem erhaltenen Schwereanomalien zwischen den Flächenelementen  $\Delta F_{o.p}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) miteinander korreliert sein.

Will man die nach (129), (130) durchzuführende iterative Auflösung des Normalgleichungssystems der Mittelwerte der Schwereanomalien der Flächenelemente  $\Delta F_{o.p.i}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ) vermeiden, so hat man natürlich immer die Möglichkeit, dieses Normalgleichungssystem schrittweise zu reduzieren, wie es mit Gleichung (156) für den Fall, daß die Geoidundulationen die Unbekannten sind, dargestellt wurde.

Hat man die Schwereanomalien als Unbekannte eingeführt, so macht es keine Schwierigkeiten, zu den Fehlergleichungen der Satellitenbeobachtungen, seien es nun die der Satellitenaltimetrie, der Richtungsbeobachtungen zum Satelliten, der Entfernungsmessungen oder der Dopplerbeobachtungen, die Fehlergleichungen hinzuzunehmen, die von den terrestrischen Schweremessungen mit Gravimetern herrühren. Man hat dann für diese terrestrischen Bedingungen Fehlergleichungen der folgenden Form in das System der Fehlergleichungen mit aufzunehmen:

$$(168) \quad v_{T.o.p.i} + (\Delta g_F)_{T.o.p.i} = (\Delta g_F)_{S.o.p.i} ;$$

$$p = 1, 2, \dots, n ; \quad i = 1, 2, \dots, m .$$

$(\Delta g_F)_{S.o.p.i}$  steht für die Unbekannten des Problems.  $(\Delta g_F)_{T.o.p.i}$  ist der Mittelwert der aus Gravimetermessungen gewonnenen Freiluftanomalien für dieses Gebiet,  $v_{T.o.p.i}$  ist die zu diesem Mittelwert gehörige zufällige Verbesserung. Die Fehlergleichung lautet somit

$$(169) \quad v_{T.o.p.i} = -l_{o.p.i} + (\Delta g_F)_{S.o.p.i}$$

mit dem freien Glied

$$(170) \quad l_{o.p.i} = (\Delta g_F)_{T.o.p.i} .$$

Literatur

- [1] ARNOLD, K. Die Bahnen der künstlichen Erdsatelliten in ihrer Abhängigkeit von den Schwereanomalien.  
Veröff. Geod. Inst. Potsdam Nr. 27, Berlin 1965, 53 S.
- [2] ARNOLD, K. Methoden der Satellitengeodäsie.  
Berlin: Akademie-Verlag 1970, 231 S.
- [3] GROTEN, E. Outline of alternative combination solutions in satellite orbit analysis.  
Boll. Geofis. teor. ed appl. 12 (1970) 47, S. 250-255.
- [4] HEISKANEN, W.A.; MORITZ, H. Physical Geodesy.  
San Francisco: W.H. Freeman and Comp., 1967, 364 S.
- [5] HIRVONEN, R.A. New theory of the gravimetric geodesy.  
Ann. Acad. Sci. fenn., Ser.A, III, No. 56, Helsinki 1960, 50 S.
- [6] JORDAN, EGGERT, KNEISSL Handbuch der Vermessungskunde, Bd. IV.  
Stuttgart: J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, 1958, 674 S.
- [7] KOCH, K.-R. Gravity anomalies for ocean areas from satellite altimetry.  
Proc. Second Marine Geodesy Symposium, Washington 1970, 7 S.
- [8] LUNDQUIST, C.A. Satellite altimetry and orbit determination.  
Smithsonian Astrophys. Obs., Special Report 248,  
Cambridge Mass. 1967, 14 S.
- [9] MOLODENSKI, M.S.; BREMEEV, V.F.; JURKINA, M.I. Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth.  
(Übers. aus d. Russ.)  
Moskau 1960, 248 S.