

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Forschungsbereich Kosmische Physik

ZENTRALINSTITUT PHYSIK DER ERDE

Veröffentlichungen des Zentralinstituts Physik der Erde

Nr. 13

Zur geodätischen Nutzung der Entfernungs- und
Radiointerferenzmessungen nach entfernten
kosmischen Objekten

von

K. Arnold

Als Manuskript gedruckt

Potsdam 1972

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	9
2. Die Beobachtungen des Mondes	11
2.1. Entfernungsmessungen zum Mond	11
2.2. Der astronomische Anschluß des Mondes	12
3. Die Beobachtungen der Radiosterne	13
3.1. Interferometrische Beobachtungen eines Quasars	13
3.2. Der astronomische Anschluß eines Quasars	18
4. Koordinatensysteme	20
5. Die Fehlergleichungen für Entfernungsmessungen zum Mond an einer Station	26
5.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und den Mond	29
5.2. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Mond	30
5.3. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und ekliptikale Länge und Breite als Koordinaten für den Mond	31
5.4. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf die Ekliptik für den Mond	32
5.5. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf den Äquator für den Mond	34
6. Die Fehlergleichungen für simultane Entfernungsmessungen zum Mond an zwei Stationen	36
6.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und den Mond	36
6.2. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Mond	40
6.3. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und ekliptikale Länge und Breite als Koordinaten für den Mond	42
6.4. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf die Ekliptik für den Mond	43
7. Die Fehlergleichungen für simultane Entfernungsmessungen zum Mond an zwei Stationen bei astronomischem Anschluß des Mondes	46
7.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Mond	48
7.2. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und ekliptikale Länge und Breite als Koordinaten für den Mond	49
7.3. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf die Ekliptik für den Mond	50

	Seite
8. Die Fehlergleichungen für radiointerferometrische Beobachtungen der Laufzeitdifferenz	52
8.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Quasar	52
9. Die Fehlergleichungen für radiointerferometrische Beobachtungen der Streifenfrequenz	54
9.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Quasar	54
10. Interferometrische Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten und künstlicher Radioquellen auf dem Mond	56
Literatur	62

Zusammenfassung

Aus der Laufzeit von Laserblitzen zwischen einer Beobachtungsstation auf der Erde und einem Laserreflektor auf dem Mond kann man die zeitlich veränderlichen Entfernungen zwischen diesen beiden Punkten ermitteln. Es werden die mathematischen Beziehungen aufgestellt, die es gestatten, diese gemessenen Entfernungen auszudrücken durch die Parameter der geozentrischen Position der Beobachtungsstation auf der Erdoberfläche, die geozentrischen Koordinaten des Mondes, die Elemente der Polbewegungsmatrix, die Lichtgeschwindigkeit und die Sternzeit. Anschließend werden die Fehlergleichungen für die Ausgleichung der auf einer Station erhaltenen Entfernungsmessungen zum Mond für verschiedene Koordinatensysteme aufgestellt. Ferner werden an zwei Stationen simultan gewonnene Entfernungsmessungen zum Mond betrachtet. In der Differenz simultaner Fehlergleichungen beider Stationen sind die Koordinaten des Mondes eliminiert, und man kann dann den Verbindungsvektor der beiden Stationen besonders genau erhalten. Auch hier werden die Fehlergleichungen in mehreren verschiedenen Koordinatensystemen angegeben. Ferner kann man aus der Beobachtung eines Quasars mit einem Radiointerferometer mit extrem langer Basis den Unterschied der beiden Entfernungen ableiten, die jeweils zwischen einem der beiden Endpunkte des Interferometers und dem Quasar bestehen. Es ist auch möglich, die zeitliche Änderung dieses Entfernungsunterschiedes unabhängig zu ermitteln. Auch diese Beobachtungen werden in Beziehung gesetzt zu den geozentrischen Positionen der Interferometerantennen auf der Erde, zur Position des Quasars, zu den Elementen der Polbewegungsmatrix, zur Lichtgeschwindigkeit und zur Sternzeit. Aus den gewonnenen Beziehungen werden die betreffenden Fehlergleichungen für eine Ausgleichung abgeleitet.

Summary

It is possible to determine the distance between a station on the Earth and a laser reflector on the Moon observing the travel time of laser flashes running to and fro between both these points. The mathematical equations are derived which relate the observed distances on the one hand and the geocentric station coordinates on the Earth, the geocentric coordinates of the Moon, the elements of the polar motion matrix, the light velocity and the sidereal time on the other hand. The error equations for the adjustment of such distance measurements to the Moon are added, specified for different coordinate systems. Further, simultaneous distance measurements to the Moon executed at two terrestrial stations are considered too. The difference of such simultaneous observations is free of the lunar coordinates. Therefore, the vector connecting both these stations can be obtained especially precise in this way. The concerned error equations are derived for different coordinate systems. Likewise the observation of a quasar by a long base line interferometer yields the possibility to determine the difference between both the distances antenna-Moon for both the antennas. The derivative of this distance difference with respect to time can also be measured independently. These radio interferometer measurements are related mathematically to the geocentric coordinates of both the endpoints of the interferometer, the spatial position of the quasar, the elements of the polar motion matrix, the light velocity and the sidereal time. These relations are developed and the concerned error equations are formulated for an adjustment.

Résumé

C'est à partir du temps que nécessitent des éclairs laser pour parcourir le trajet entre un centre d'observation terrestre et un réflecteur laser sur la lune qu'on est en mesure de déterminer les distances, variables dans le temps, entre ces deux points. On a établi des relations mathématiques qui permettent d'exprimer ces distances relevées par les paramètres de la position géocentrique du centre d'observation terrestre, des coordonnées géocentriques de la lune, des éléments de la matrice du mouvement du pôle, de la vitesse de la lumière et du temps sidéral. Ensuite, on établit les équations d'erreur destinées à compenser les mesures de distance à la lune, obtenues dans un centre donné pour différents systèmes de coordonnées. En outre, on compare les mesures de la distance à la lune, effectuées simultanément par deux centres. Dans la différence obtenue d'équations d'erreur simultanées, les coordonnées lunaires sont éliminées, et on parvient à obtenir le vecteur de liaison des deux centres avec une remarquable précision. C'est dans ce cas également qu'on indique les équations d'erreur dans plusieurs systèmes de coordonnées différentes. De plus, de l'observation d'un quasar à l'aide d'un interféromètre radioastronomique à base extrêmement longue, on peut déduire l'écart des deux distances qui existent entre chacun des deux points d'extrémité de l'interféromètre et le quasar. Il est également possible de déterminer individuellement la variation dans le temps de cet écart des distances. Ces observations, elles aussi, sont mises en relation avec les positions géocentriques des antennes de l'interféromètre terrestre, avec la position du quasar, avec les éléments de la matrice du mouvement du pôle, avec la vitesse de la lumière et avec le temps sidéral. Les relations obtenues permettent d'en déduire les équations d'erreur respectives pour une compensation.

Резюме

Из времени распространения лазерных импульсов между наземной станцией наблюдения и лазерного рефлектора на поверхности Луны можно определить расстояние между обеими пунктами, которое меняется со временем. В работе выведены соответствующие закономерности, позволяющие выразить измеренное расстояние через параметры геоцентрического положения наблюдательной станции, геоцентрические координаты Луны, элементы матрицы движения полюсов, скорость света и звездное время.

После этого получены уравнения ошибок для уравнивания полученных на одной станции измерений расстояний до Луны в разных координатных системах. Рассмотрен случай получения синхронных измерений расстояний до Луны из двух станций. Разность синхронных уравнений ошибок обеих станций не содержит координаты Луны, так что в этом случае вектор, соединяющий обе станции, можно получить особо точно. Для этого случая уравнения ошибок даны в нескольких различных координатных системах.

Из наблюдения квазара с помощью радиointерферометра с очень длинным базисом можно получить разность обеих расстояний между наблюдательными пунктами интерферометра и квазаром. Оказывается также возможным независимое определение изменения этой разности в расстояниях с течением времени. Эти наблюдения сопоставлены с геоцентрическими положениями антенн интерферометра, с положением квазара, с элементами матрицы движения полюсов, со скоростью света и со звездным временем. Из полученных закономерностей выведены соответствующие уравнения ошибок для уравнивания.

Abkürzungen

X, Y, Z	: Koordinaten in einem mit dem Erdkörper fest verbundenen Koordinatensystem. Die Z-Achse zeigt zum mittleren Pol. Die X-, Y-Ebene ist die Meridianebene von Greenwich
X_S, Y_S, Z_S	: Koordinaten des kosmischen Objekts im X, Y, Z-System
$X_Q, Y_Q, Z_Q; X_1, Y_1, Z_1$: Koordinaten der Beobachtungsstation im X, Y, Z-System
$x, y, z; x_S, y_S, z_S$: Koordinaten des kosmischen Objekts im momentanen astronomischen Koordinatensystem
$e_Q, e_{Q.i}$ bzw. e_S	: Ortsvektor der Beobachtungsstation bzw. des kosmischen Objekts im X, Y, Z-System
\bar{e}_S	: Ortsvektor des kosmischen Objekts im x, y, z-System
φ	: Geozentrischer Radiusvektor der Beobachtungsstation
φ	: Geozentrische Breite
λ	: Geographische Länge
r	: Geozentrischer Radiusvektor des kosmischen Objekts
α	: Rektaszension
δ	: Deklination
b	: Ekliptikale Breite
l	: Ekliptikale Länge
s	: Entfernung von der Beobachtungsstation auf der Erde bis zum kosmischen Objekt
c	: Lichtgeschwindigkeit
ξ, η	: Parameter der Polbewegungsmatrix
$\alpha_M, \alpha_1, \alpha_2$: Einheitsvektoren für die Richtung vom Erdmittelpunkt bzw. von den Beobachtungsstationen Q_1 oder Q_2 zum kosmischen Objekt im X, Y, Z-System
θ	: Sternzeit

1. Einleitung

Nachdem der Mond in den Mittelpunkt der kosmischen Forschung getreten ist, durch ein Raumfahrzeug wie APOLLO 11 ein Reflektor für Laserlicht auf dem Mond installiert wurde und nachdem das erste Mondfahrzeug LUNOCHOD 1 ebenfalls mit einem Laserreflektor versehen ist, sind Entfernungsmessungen zum Mond auch in den Vordergrund des geodätischen Interesses gerückt.

Durch Entfernungsmessungen von Stationen auf der Erdoberfläche zum Mond kann man natürlich zunächst die Bahn des Mondes um die Erde genauer bestimmen. Diese gemessenen Mondentfernungen hängen aber auch ab von der Position der Beobachtungsstation auf der Erdoberfläche, so daß die Analyse dieser Streckenmessungen auch zu Aussagen über die räumliche Lage der irdischen Beobachtungsstation führt. Infolge der 24stündigen Rotation der Erde um ihre eigene Achse werden die Entfernungen von der Beobachtungsstation zum Reflektor auf dem Mond eine tägliche Periode aufweisen. Insbesondere durch die Untersuchung dieser täglichen Periode in den gemessenen Entfernungen wird man die Parameter der räumlichen Position der irdischen Beobachtungsstation von denen der Bahn des Mondes trennen können. Weil die räumliche dreidimensionale Lage der Beobachtungsstation zu betrachten ist, werden die Entfernungen zum Mond auch durch die Polbewegung beeinflusst. Daher wird man bei der Analyse der Entfernungsmessungen zum Mond auch über die Polbewegung der Erde eine Aussage machen können. Die räumliche Position der Beobachtungsstation hängt wegen der Rotationsbewegung der Erde auch von der Zeit ab. Bei der Zeitregistrierung verwendet man meistens die Atomzeit, während die Rotationsbewegung der Erde durch die Sternzeit beschrieben wird. Die Transformation zwischen beiden Zeitsystemen kann gewisse Unsicherheiten enthalten, so daß für die Zeit eine konstante und eine linear mit der Zeit veränderliche Korrektur eingeführt werden, die im Rahmen der Ausgleichung der Lasermessungen zum Mond zu bestimmen sind. Schließlich ist auch die Lichtgeschwindigkeit zu betrachten. Man mißt ja nicht primär die Entfernung zum Mond, vielmehr ermittelt man primär die Laufzeit eines Laserimpulses. Die Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit ergibt die Entfernung. Ein konstanter Fehler in der Lichtgeschwindigkeit führt zu einem entsprechenden Fehler in der Entfernung zum Mond, eine Tatsache, die vor allem bei der Bestimmung der Bahn des Mondes zu beachten ist. Wegen der Rotation der Erde ändert sich aber auch die Entfernung der Beobachtungsstation vom Mond in einer täglichen Periode um mehrere tausend Kilometer. Die Analyse dieser Periode ist gerade im geodätischen Interesse, und weil ihre Amplitude von der Lichtgeschwindigkeit abhängt, wird man auch zu einer Aussage über diesen Wert geführt.

Sehr genaue Entfernungsmessungen zum Mond sind auch von Wichtigkeit für die experimentelle Klärung der grundlegenden Hypothesen der allgemeinen Relativitätstheorie, nach denen eine jährliche Zunahme der Entfernung zwischen der Erde und dem Mond um 2 bis 4 cm erwartet wird.

In letzter Zeit haben auch die Radiointerferenzmessungen nach Quasaren, die einen sehr kleinen Winkeldurchmesser besitzen, geodätisches Interesse gewonnen. Die Entfernung zwischen den beiden Radioteleskopen der Interferometereinrichtung auf der Erde kann

mehrere tausend Kilometer betragen, es muß nur gewährleistet sein, daß das Objekt an beiden Stationen gleichzeitig verfolgt werden kann. Man betrachtet hier nicht die Entfernung von der Beobachtungsstation zum Objekt, sondern u.a. den zeitlichen Unterschied, mit dem eine Radiowelle von dem betreffenden Objekt an den beiden Stationen ankommt [2, 3, 8, 9].

Eine konstante Änderung der Rektaszension der Quasare wird sich in gleicher Weise auswirken wie eine konstante Änderung der Sternzeit, so daß beide Größen sich nicht voneinander trennen lassen. Man wird dann die konstante Verbesserung der Sternzeit nach dem klassischen astrometrischen Verfahren erhalten, wobei aber die Werte für die Polbewegung mit Vorteil aus den radiointerferometrischen Beobachtungen entnommen werden können, so daß beide Verfahren sich ergänzen.

2. Die Beobachtungen des Mondes

2.1. Entfernungsmessungen zum Mond

Mit einem Rubin-Laser ist es möglich, Impulse mit einer zeitlichen Dauer von 10^{-8} s und mit einer Energie von 10 Joule zu erzeugen. Wird dieser Impuls durch einen guten Kollimator geschickt, so kann er in einem Strahlungskegel mit einem Öffnungswinkel von etwa $2,7'$ zum Mond gesandt werden. Er wird dort eine Fläche von wenigen Kilometern Ausdehnung beleuchten [1, 10, 11]. Befindet sich ein Laserreflektor mit Tripelspiegeln etwa in der Mitte dieses Gebietes auf dem Mond, so wird das einfallende Licht ohne wesentliche Streuung zum Sender zurückgesandt. Wird die Laufzeit des Laserblitzes auf etwa 10^{-8} s genau ermittelt, so kann man damit die Entfernung von der Erde zum Mond auf etwa 1,5 m festlegen. Integriert man über 100 Laserblitze, so dürfte man eine Genauigkeit von etwa 0,15 m erreichen. Die Refraktion an der Atmosphäre ist bei den Entfernungsmessungen erheblich weniger bedeutungsvoll als bei den Richtungsmessungen. Werden bei der Berechnung des Einflusses, den die Atmosphäre auf die Entfernungsmessungen zum Mond ausübt, Messungen des Koeffizienten der Refraktion an der Erdoberfläche eingeführt, dann kann man die betreffenden Streckenkorrekturen auf etwa 0,06 m genau bestimmen. Die Zenitdistanz darf dabei 70° nicht übersteigen. Ein horizontaler Temperaturgradient von $0,01$ °C/km wird bei Zenitdistanzen von weniger als 60° die Streckenmessung nur um etwa 0,002 m beeinflussen.

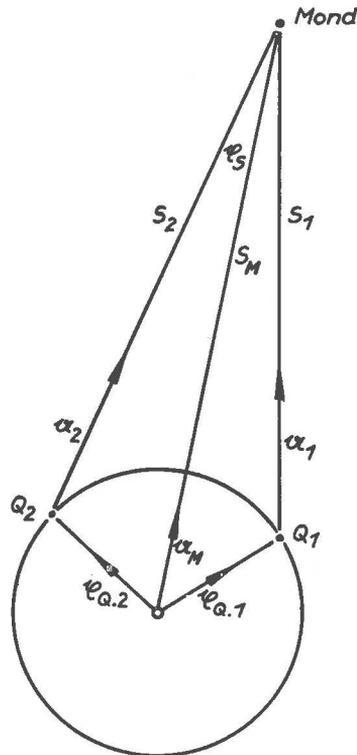


Abb.1. Laserentfernungsmessung zum Mond

2.2. Der astronomische Anschluß des Mondes

Die astronomische Position des Mittelpunktes des Mondes ist in den Astronomical Ephemeris auf $0,001$ s in der Rektaszension und auf $0,01$ in der Deklination angegeben. Dem entspricht ein linearer Fehler von etwa 20 m im Raum. Damit kennt man aber noch nicht die astronomische Position des Laserreflektors auf dem Mond. Für die Bestimmung der Rektaszension und Deklination des Laserreflektors bedarf es zusätzlicher astronomischer Messungen. Es gibt bisher noch keine geeignete Methode zur Bestimmung dieser Werte auf $0,001$ s bzw. $0,01$. Bei den später entwickelten Formeln wird daher die räumliche Position des Laserreflektors auf dem Mond durch unbekannte Parameter ausgedrückt, die im Zuge einer Ausgleichung aus den Streckenmessungen bestimmt werden müssen.

Besonders zu betrachten ist der astronomische Anschluß des Mondes, wenn simultane Entfernungsmessungen zum Mond an zwei irdischen Stationen vorliegen. Bildet man die Differenz dieser Messungen, dann ist diese Größe in hohem Maße frei von den Unsicherheiten in der räumlichen Position des Laserreflektors, und man kann sich dabei mit geeigneten Näherungswerten begnügen. Die Differenz der simultan gemessenen Strecken beträgt dann nur wenige tausend Kilometer. Sie ist genähert gleich dem Skalarprodukt des Einheitsvektors vom Erdmittelpunkt zum Laserreflektor auf dem Mond einerseits und des Differenzortsvektors der beiden Beobachtungsstationen andererseits. Ein Fehler in dem genannten zum Mond weisenden Einheitsvektor und damit im astronomischen Anschluß multipliziert sich nicht mehr mit der gesamten Strecke Erde - Mond, sondern nur noch mit der Differenz dieser Streckenmessungen an den beiden Stationen, also nur noch mit wenigen tausend Kilometern. Ein Richtungsfehler im astronomischen Anschluß von $0,01$ wird die Positionen auf der Erde nur noch um etwa $0,1$ m verfälschen. In diesem Falle wäre der astronomische Anschluß des Zielpunktes auf dem Mond auf $0,1$ schon ein Gewinn. Man könnte dann die Parameter des astronomischen Anschlusses als zufällige Variable einführen, man könnte sie auch als Unbekannte betrachten, die durch die Ausgleichung mit zu bestimmen sind. Die Formeln in Kap. 7 sehen beide Möglichkeiten vor.

3. Die Beobachtungen der Radiosterne

3.1. Interferometrische Beobachtungen eines Quasars

Beobachtet man in der Radioastronomie mit einer einzelnen Antenne einen Radiostern, so hat man bei einem Durchmesser der Antenne D von etwa 200 m und bei einer Wellenlänge von etwa 1 m für den Halbwert einen Strahlenkegel mit einem Öffnungswinkel von etwa $0,3^\circ$. Es ist hoffnungslos, mit einer solchen Antenne ein Auflösungsvermögen von auch nur $0,1$ erzielen zu wollen. Für das Auflösungsvermögen eines Radioteleskops gilt $(\lambda/D) \cdot 70^\circ$. Zur Erhöhung des Auflösungsvermögens werden Interferometersysteme gebaut, bei denen zwei relativ kleine Radioantennen in großer Entfernung d voneinander aufgestellt werden [4, 5, 6, 7].

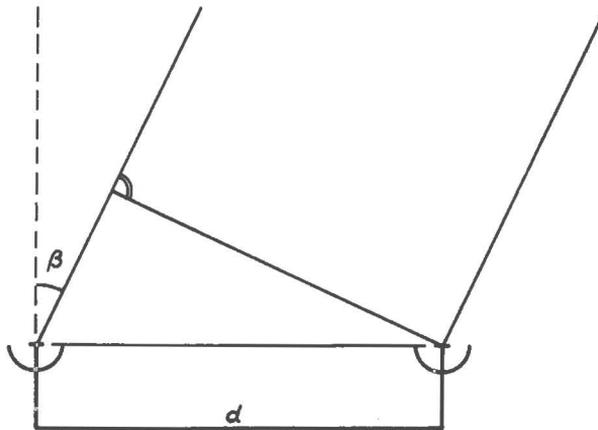


Abb.2. Radiointerferometer

Die Strahlung von einem Radiostern, der den Winkel β mit der Achse des Interferometers bildet, kommt bei den beiden Antennen mit unterschiedlicher Phase an. Ist

$$(1) \quad \beta = \frac{1}{2} n \frac{\lambda}{d}; \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

so tritt Interferenz ein. Das Auflösungsvermögen des Interferometers ist etwa gleich $\frac{1}{3} \lambda/d$ rad. oder $\frac{1}{3} \cdot 206\,265'' \lambda/d$. Der Phasenunterschied beträgt

$$(2) \quad \theta = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathcal{K} + d \sin \beta),$$

wobei \mathcal{K} eine instrumentelle Konstante ist, die aus einer Asymmetrie des Interferometers resultiert. Infolge der täglichen Bewegung des Radiosterns ändert sich der Winkel β und damit auch die Phasenverschiebung θ . Die Anzahl der pro Zeiteinheit beobachteten Interferenzstreifen ist

$$(3) f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{\lambda} \cos \beta \frac{d\beta}{dt}.$$

Diese Beziehungen gelten für einen unendlich entfernten punktförmigen Radiostern, der auf einer bestimmten Wellenlänge kohärente Strahlung aussendet.

In Wirklichkeit sind Radiosterne oder Radioquellen nicht punktförmig, sie können eine Größe von $0,1$ oder $10''$ oder $10'$ im Winkelmaß haben. Sie setzen sich gewissermaßen aus zahlreichen punktförmigen Radioquellen zusammen, die sich überlagern und auf verschiedener Wellenlänge aussenden. Ein Radiostern ist daher als ein räumliches Gebilde anzusehen, das inkohärente Strahlung auf einem breiten Frequenzspektrum aussendet. Beobachtet man den Durchgang ($\beta = 0$) eines punktförmigen Radiosterns mit einem Interferometer mit sehr kleiner Basis d , so werden die an den beiden Antennen ankommenden Strahlungen keine Phasenverschiebungen aufweisen, die Interferenzstreifen werden bei $\beta = \lambda/2d$ gut zu beobachten sein und eine relativ starke Amplitude haben. Die Interferenzstreifen werden auch dann noch von guter Qualität sein, wenn man den punktförmigen Radiostern mit einer größeren Basis d bei seinem Durchgang ($\beta = 0$) beobachtet. Die Größe d ist hier die wirksame Komponente der Basis, das ist die Komponente des Verbindungsvektors der beiden Antennen, die senkrecht zur Richtung der beobachteten Strahlen verläuft. Hat der Radiostern aber eine endliche Ausdehnung, dann wird die Intensität der Interferenzstreifen bei wachsender Basis d und gleicher Wellenlänge λ abnehmen. Ist γ die relative Intensität der Interferenzstreifen:

$$\gamma = \frac{\text{Streifenamplitude bei der Basis } d}{\text{Streifenamplitude bei der Basis } d = 0},$$

die die Sichtbarkeit der Interferenzstreifen charakterisiert, dann ist γ eine Funktion von d/λ . Aus dem Verlauf der Kurve für die Funktion γ kann man auf die Größe des Radiosterns schließen. Je größer die Ausdehnung der Radioquelle ist, desto kleiner muß d/λ sein, wenn man die Streifen noch gut beobachten will. Andererseits kann man nur durch Beobachtung von sehr kleinen Radioquellen noch Interferenzen bei sehr großen Werten von d/λ feststellen.

Beobachtet man sehr kleine Radiosterne, insbesondere Quasare, die immer einen sehr kleinen Winkeldurchmesser haben, mittels zweier Radioantennen, die mehrere hundert

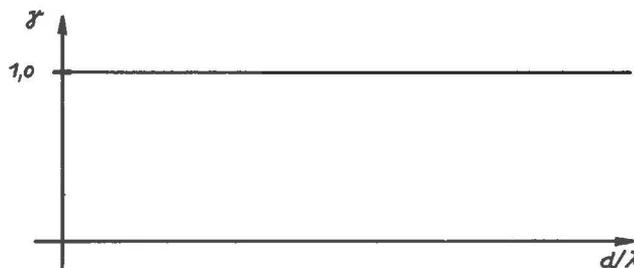


Abb. 3. Der Verlauf von γ bei einer einzelnen punktförmigen Radioquelle

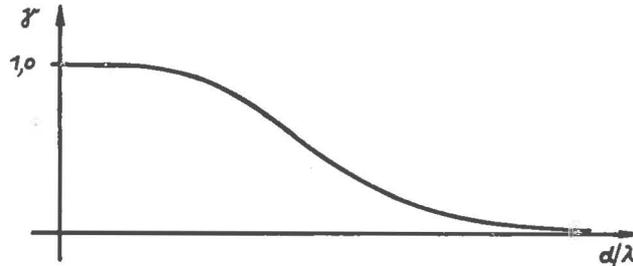


Abb. 4. Der Verlauf von γ bei einer kreissymmetrischen Radioquelle mit GAUSSscher Verteilung

oder mehrere tausend Kilometer voneinander entfernt sind, auf Wellenlängen, die zwischen 67 cm und 6 cm liegen, dann treten besondere Bedingungen auf. Die an den beiden Antennen ankommenden Strahlungen können nicht mehr durch ein Kabel in einer Empfangsstation vereinigt und als Registrierungen, die auf 10^{-7} oder besser 10^{-9} s simultan sind, betrachtet werden. Die Registrierungen der einzelnen Stationen werden jeweils auf ein Magnetband genommen; dabei wird gleichzeitig jeweils eine von einer Atomuhr gesteuerte Zeitskala auf das Magnetband übertragen. Die Zeitskala sollte auf 10^{-11} genau sein. Die Synchronisation der Atomuhren auf den beiden Stationen erhält man nach der Methode der "fliegenden Uhren", indem die Uhren auf den beiden Stationen mit einer anderen Atomuhr verglichen werden, die nach diesen beiden Stationen transportiert wird.

Die im Punkt Q_2 ankommende Radiostrahlung hat gegenüber der zum Punkt Q_1 gelangenden eine Phasenverschiebung von $2\pi(s_{12}/\lambda)$ und eine zeitliche Verzögerung von

$$(4) \quad t_{12} = \frac{s_{12}}{c} = \frac{s_2 - s_1}{c},$$

wenn c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Die Stationen Q_1 und Q_2 nehmen an der Rotationsbewegung der Erde teil. Der Radiostern sei ein Quasar; er kann als ein punktförmiges und unendlich entferntes Objekt angesehen werden, das Radiowellen in einem bestimmten Frequenzbereich ausstrahlt. Die beiden Radioantennen nehmen davon entsprechend ihrer Bandbreite einen Teil auf. Bei einem Vergleich der beiden in Q_1 und Q_2 ankommenden Strahlungen erhält man aber keine Interferenzstreifen, weil bei der gegebenen Bandbreite die Strecke s_{12} kein ganzes Vielfaches aller aufgenommenen Wellenlängen plus einer halben Wellenlänge sein kann, $\beta d \approx s_{12}$, es sei denn, s_{12} überdeckt nur relativ wenige Wellenlängen. Man kann Interferenzstreifen nur dann beobachten, wenn die Verzögerung t_{12} gleich der Hälfte oder einem Drittel der reziproken Bandbreite ist. Dann lassen sich die Interferenzstreifen integrierend über einige Minuten beobachten.

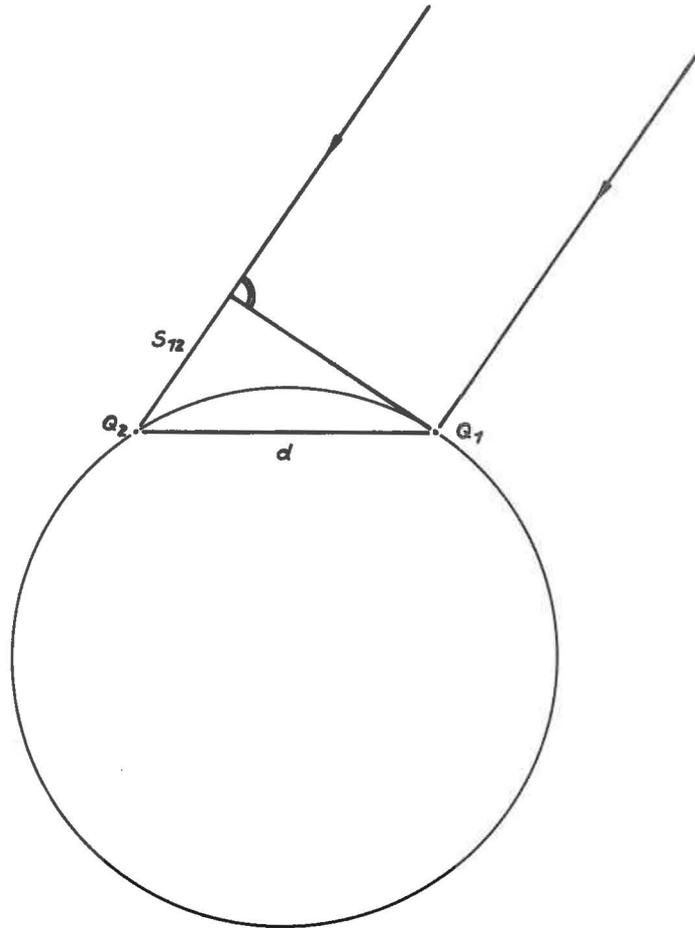


Abb. 5. Interferenzmessung nach einem Radiostern

Der Phasenunterschied

$$(5) \quad 2\pi \frac{s_{12}}{\lambda}$$

ändert sich mit der Zeit auf Grund der Rotationsbewegung der Erde. Die pro Sekunde beobachteten Interferenzstreifen werden daher mit der Frequenz

$$(6) \quad f = \frac{1}{\lambda} \frac{ds_{12}}{dt}$$

registriert. Man erhält also die zeitliche Änderung der Strecke s_{12} . Integriert man über einige Minuten, dann folgt

$$(7) \quad \int_u^o f dt = \frac{1}{\lambda} \int_u^o \frac{ds_{12}}{dt} dt = \frac{1}{\lambda} [s_{12.o} - s_{12.u}] = \frac{1}{\lambda} \int ds_{12}.$$

Man erhält als Integral die Änderung der Strecke s_{12} zwischen der unteren und der oberen Begrenzung des Integrationsintervalls t_u und t_o .

In der Praxis wird man nur selten den Quasar beobachten können, wenn die Basis des Interferometers in so hoher Annäherung senkrecht zur Richtung zum Quasar ist. Die Strecke s_{12} wird einige tausend Kilometer betragen; dann kann man beim Vergleich simultaner Beobachtungen aus den genannten Gründen, nämlich wegen Überlagerung zahlreicher Frequenzen die innerhalb der Bandbreite empfangen werden, keine Interferenzstreifen beobachten, weil nicht alle Wellen gleichzeitig interferieren. Bei großen Beträgen für s_{12} kann man aber folgendes Verfahren anwenden: Man legt gewissermaßen die beiden Magnetbänder mit den auf den beiden Stationen Q_1 und Q_2 erhaltenen Registrierungen parallel und synchron nebeneinander, so daß synchrone Zeitmarken die gleiche Höhe haben. Aus Näherungspositionen für die Richtung zum Quasar einerseits und für die Radioantennen Q_1 und Q_2 andererseits kann man einen Näherungswert für die Strecke s_{12} und nach Division durch die Lichtgeschwindigkeit c einen Näherungswert für die Verzögerung t_{12} ermitteln. Verschiebt man jetzt das Magnetband der Station Q_2 um diesen Betrag t_{12} , dann liegen gewissermaßen Teile der gleichen Wellenfront nebeneinander. Ist der Näherungswert t_{12} innerhalb von Bruchteilen der reziproken Bandbreite richtig, dann wird man Interferenzen beobachten können, und aus einer Analyse der beiden Magnetbänder nach den Regeln der Korrelationsrechnung kann man den genauen Wert von t_{12} auf etwa 10^{-7} s genau bestimmen. Eine Steigerung der Genauigkeit kann erreicht werden, wenn z.B. die Bandbreite vergrößert wird. Differiert der Näherungswert t_{12} um mehr als die reziproke Bandbreite vom wahren Wert, dann können keine Interferenzen festgestellt werden. Es empfiehlt sich dann, das eine Magnetband um den Betrag der reziproken Bandbreite der Radioantenne einmal oder gegebenenfalls auch mehrmals zu verschieben, bis man Interferenzen erhält. Aus t_{12} erhält man nach Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c die Strecke s_{12} .

Interferometrische Beobachtungen gestatten also die Bestimmung der beiden Größen

$$(8) \quad s_{12} \quad \text{und} \quad \delta s_{12} = s_{12} \cdot \sigma - s_{12} \cdot u \cdot$$

Schließlich soll noch die Genauigkeit betrachtet werden, mit der man die Werte s_{12} und δs_{12} erhält. Kann man t_{12} mit einer Genauigkeit von 10^{-7} s bestimmen, so findet man nach der Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c die Strecke s_{12} mit einem Fehler von etwa ± 30 m.

Ein typischer Wert für die Frequenz f der nach (6), (7) beobachteten Interferenzstreifen ist z.B. 300 pro Sekunde. Man mißt diesen Wert mit einer Genauigkeit von etwa 0,001. Für f und damit auch für δs_{12} erhält man folglich einen relativen Fehler von etwa $3 \cdot 10^{-6}$. Integriert man in (7) über ein Intervall von 3 Minuten und beträgt δs_{12} z.B. 50 km, so wird man diese Strecke auf etwa 0,15 m genau bestimmen können.

Diese Genauigkeitsangaben für s_{12} und δs_{12} müssen als die Ergebnisse erster Experimente betrachtet werden. Nach verschiedenen technischen Verbesserungen werden wahrscheinlich die Fehler etwa um den Faktor 1:100 vermindert, so daß man Dezimetergenauigkeit für die Koordinaten der geodätischen Punkte erhalten wird. Zu diesen Verbesserungen gehören genauere Atomuhren, die Umrüstung der Radioantennen von der Wellenlänge 67 cm

auf die Wellenlängen 20 oder 10 cm, Vergrößerung der Bandbreite zwecks Erhöhung der Genauigkeit in der Bestimmung von t_{12} , Durchführung der Messungen auf verschiedenen Frequenzen, um den Refraktionseinfluß der Ionosphäre zu eliminieren. Man hofft mit dieser verbesserten Technik eine Genauigkeit von wenigen Dezimetern in den gemessenen Strecken s_{12} und δs_{12} zu erhalten, auch wenn die Stationen auf der Erde weit voneinander entfernt sind. Zu vermeiden sind auf jeden Fall Messungen an Tagen, an denen auf einer oder auf beiden Stationen das Magnetfeld stark gestört ist, weil dann die Elektronendichte der Ionosphäre in Abhängigkeit vom Ort und von der Zeit stark variabel ist.

Nachdem an verschiedenen Orten erste Experimente mit Interferometern mit unterschiedlicher Basislänge (zwischen 183 km und 7719 km) durchgeführt worden sind, konnte man das höchste Auflösungsvermögen mit einem Interferometer mit 6319 km Basislänge erzielen. Die eine Antenne mit einem Durchmesser von 42,7 m stand in Green Bank (USA), die andere mit dem Durchmesser von 25,9 m in Onsala in Schweden. Die benutzte Wellenlänge war $\lambda = 6$ cm, d/λ war gleich $1,1 \cdot 10^8$. Das Auflösungsvermögen dieses Interferometers betrug

$$\frac{1}{3} \vartheta'' \frac{\lambda}{d} = 0,00006 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ rad.}$$

Es ist erstaunlich hoch. Jedoch darf man nach den angestellten Betrachtungen aus diesem Auflösungsvermögen nicht schließen, daß mit diesem Interferometer auch geodätische Strecken mit einer Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-9}$ bestimmt werden können.

3.2. Der astronomische Anschluß eines Quasars

Das hohe Auflösungsvermögen eines Radiointerferometers, das Werte bis zu etwa $\pm 0,00006$ erreicht, gestattet z.B. die Entfernungen zwischen benachbarten Quasaren mit dieser Genauigkeit zu bestimmen, es gestattet aber nicht ohne weiteres, die astronomischen Positionen des Quasars mit der gleichen Präzision zu bestimmen.

Der mittlere Fehler der astronomischen Positionen der Quasare (Rektaszension und Deklination) kann mit $\pm 0,3$ angenommen werden. Beträgt die Entfernung zwischen den Stationen 6000 km, so wird ein Richtungsfehler von $0,3$ in den geodätischen Positionen einen Fehler von etwa 10 m verursachen. Für manche Zwecke kann man daher die Richtung zum Quasar als eine fehlerfreie Größe einführen. Will man aber die höchste Genauigkeit erreichen und strebt man Genauigkeiten von 1 m oder gar wenigen Dezimetern auf der Erde an, dann wird man die Rektaszension und Deklination des Quasars als unbekannte Größen einführen müssen, die durch die Ausgleichung der Interferometerbeobachtungen zu bestimmen sind. Bildet man nämlich das Skalarprodukt zwischen dem Differenzortsvektor der beiden Beobachtungsstationen Q_1 und Q_2 und dem Einheitsvektor, der von der Erde zum Quasar zeigt, so ist dieses Skalarprodukt gleich der Strecke s_{12} . Hat man also aus Interferometermessungen die Strecke s_{12} mit Metergenauigkeit erhalten und ist s_{12} etwa gleich 6000 km, so dürfte man die Position des Quasars auf etwa $\pm 0,03$ genau ermitteln können.

Bei den späteren Untersuchungen wird angenommen, daß die Position des Quasars während der Beobachtungsperiode konstant ist. Bei zeitlich voneinander entfernt liegenden Beobachtungsperioden wird man Reduktionen wegen der Präzession und Nutation anbringen müssen, oder man wird aus der Änderung der Position des Quasars eben die Präzessions- und Nutationskonstante bestimmen.

4. Koordinatensysteme

Die rechtwinkligen kartesischen geodätischen Koordinaten X, Y, Z der Beobachtungsstation Q auf der Erdoberfläche gelten in einem mit dem Erdkörper fest verbundenen System. Die Z -Achse zeigt zum mittleren Pol der Erde. Die X, Y -Ebene ist die Äquatorebene, und die X, Z -Ebene ist die Meridianebene von Greenwich.

Führt man zur Abkürzung für den Einheitsvektor in räumlichen Polarkoordinaten die Bezeichnung

$$(9) \quad \kappa(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & \sin \beta \\ \sin \alpha & \end{pmatrix}$$

ein und hat man ferner die Ableitungen

$$(10) \quad \kappa_1^i = \frac{\partial \kappa(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \beta \\ -\sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \end{pmatrix},$$

$$(11) \quad \kappa_2^i = \frac{\partial \kappa(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \\ 0 & \end{pmatrix},$$

so folgt für den geozentrischen Ortsvektor ϱ_Q bzw. ϱ_{Q_1} der Satellitenbeobachtungsstation Q bzw. Q_1

$$(12) \quad \varrho_Q = \begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \cos \lambda \\ \cos \varphi & \sin \lambda \\ \sin \varphi & \end{pmatrix} = \varrho \kappa(\varphi, \lambda), \quad \varrho_{Q_1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \varrho_1 \kappa(\varphi_1, \lambda_1);$$

ϱ : geozentrischer Radius,

φ : geozentrische Breite,

λ : geographische Länge.

Die räumliche Position des kosmischen Objekts ist im momentanen astronomischen Koordinatensystem x, y, z gegeben. Die z -Achse fällt mit der momentanen Rotationsachse der Erde zusammen. Die x, y -Ebene ist die momentane Äquatorebene, die ihre räumliche Lage entsprechend der Präzession und Nutation verändert; die x -Achse zeigt in die Richtung des momentanen Frühlingspunktes, sie ist die Schnittgerade der Äquatorebene und der Ebene der Ekliptik.

Den geozentrischen Ortsvektor eines kosmischen Objekts kann man in den rechtwinkligen räumlichen x, y, z -Koordinaten ausdrücken. Ist die Position des Objekts zeitlich nicht oder nur wenig veränderlich, wie bei einem Quasar, dann empfiehlt es sich, geozentrische räumliche Polarkoordinaten r, α, δ einzuführen. r ist die geozentrische

Entfernung, α die Rektaszension und δ die Deklination. Bewegt sich aber das Objekt (z.B. der Mond) relativ zu den Sternen, dann kann es sich empfehlen, die Bahnelemente des Objekts relativ zur Äquatorebene oder zur Ekliptik anzugeben. Verläuft die Bahn in der Nähe der Ekliptik, wie es beim Mond zutrifft, dann kann es auch zweckmäßig sein, die Bahn durch die ekliptikale Länge und Breite zu beschreiben.

Sind x^0, y^0, z^0 die astronomischen Koordinaten zur Epoche 1950,0, dann folgen die momentanen astronomischen Koordinaten nach der Beziehung [2]

$$(13) \quad \bar{v}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{P}} \begin{pmatrix} x_S^0 \\ y_S^0 \\ z_S^0 \end{pmatrix};$$

$\underline{\underline{N}}$: Nutationsmatrix,
 $\underline{\underline{P}}$: Präzessionsmatrix.

Die momentanen astronomischen Koordinaten x, y, z transformieren sich in das erdfeste X, Y, Z -Koordinatensystem und haben dort die Komponenten X_S, Y_S, Z_S . Die Koordinatentransformation wird durch folgende Matrizenmultiplikation erreicht:

$$(14) \quad \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix},$$

$$(15) \quad v_S = \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \bar{v}_S = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix};$$

$\underline{\underline{S}}(\xi, \eta)$ ist die Polbewegungsmatrix.

$$(16) \quad \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & -\eta \\ -\xi & \eta & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie hat die später ebenfalls benötigten Ableitungen

$$(17) \quad \underline{\underline{S}}_1'(\xi, \eta) = \underline{\underline{S}}_1' = \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(18) \quad \underline{\underline{S}}_2'(\xi, \eta) = \underline{\underline{S}}_2' = \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\underline{R}}_Z(\theta)$ ist die Rotationsmatrix in bezug auf die z -Achse,
 θ ist die Sternzeit.

Die Rotationsmatrizen in bezug auf die x, y, z -Achsen sind

$$(19) \quad \underline{\underline{R}}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{R}}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$(20) \quad \underline{\underline{R}}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Später werden auch die Ableitungen dieser Rotationsmatrizen gebraucht:

$$(21) \quad \underline{\underline{R}}'_x(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{\underline{R}}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$(22) \quad \underline{\underline{R}}'_y(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{\underline{R}}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$(23) \quad \underline{\underline{R}}'_z(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{\underline{R}}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Abkürzung werden später noch die folgenden Vektoren eingeführt:

$$(24) \quad \varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi'(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stellt man die x, y, z -Koordinaten des Vektors $\bar{\varphi}_S$ durch Polarkoordinaten dar, so folgt mit (9)

$$(25) \quad \bar{\varphi}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = r \kappa(\delta, \alpha);$$

α : Rektaszension,

δ : Deklination.

Geht man zu Bahnelementen in bezug auf den Äquator über, so findet man

$$(26) \quad \bar{\varphi}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\nu + \omega) \cos \mathcal{N} - \sin(\nu + \omega) \sin \mathcal{N} \cos i \\ \cos(\nu + \omega) \sin \mathcal{N} + \sin(\nu + \omega) \cos \mathcal{N} \cos i \\ \sin(\nu + \omega) \sin i \end{pmatrix},$$

$$(27) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu};$$

- a : große Halbachse der Bahn,
 e : Exzentrizität,
 ω : Argument des Perigäums,
 i : Neigung der Bahn,
 \mathcal{N} : Länge des aufsteigenden Knotens,
 ν : wahre Anomalie.

Für die späteren Entwicklungen ist es zweckmäßig, die rechte Seite der Gleichung (26) durch Rotationsmatrizen darzustellen:

$$(28) \quad \bar{\varphi}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = r \underline{\underline{R}}_z(-\mathcal{N}) \underline{\underline{R}}_x(-i) \underline{\underline{R}}_z(-\omega) \varphi(\nu).$$

Wählt man nicht die Bahnelemente in bezug auf den Äquator, sondern in bezug auf die Ekliptik, so folgt

$$(29) \quad \bar{\varphi}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = r \underline{\underline{R}}_x(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_z(-\mathcal{N}^*) \underline{\underline{R}}_x(-i^*) \underline{\underline{R}}_z(-\omega^*) \varphi(\nu);$$

- ω^* : Argument des Perigäums in bezug auf die Ekliptik,
 i^* : Neigung der Bahnebene in bezug auf die Ekliptik,
 \mathcal{N}^* : Länge des aufsteigenden Knotens in bezug auf die Ekliptik,
 ε : Schiefe der Ekliptik.

Für den Radius r in (25), (26), (28) und (29) gilt die Beziehung (27). a , e und ν sind im äquatorialen und ekliptikalen System gleich. Führt man die ekliptikale Länge l und Breite b ein, so hat man

$$(30) \quad \bar{\varphi}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = r \underline{\underline{R}}_x(-\varepsilon) \varpi(b, l).$$

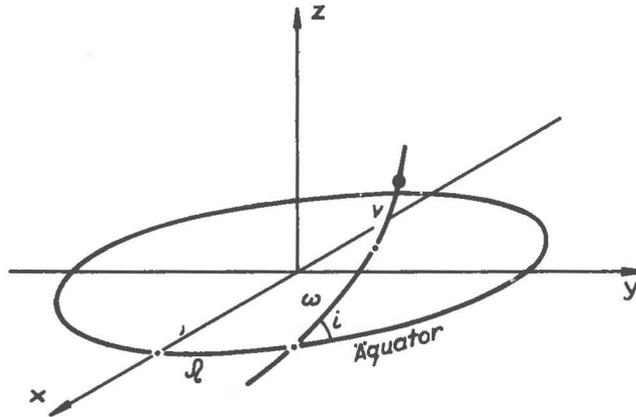


Abb. 6. Bahnelemente im Äquatorialen System

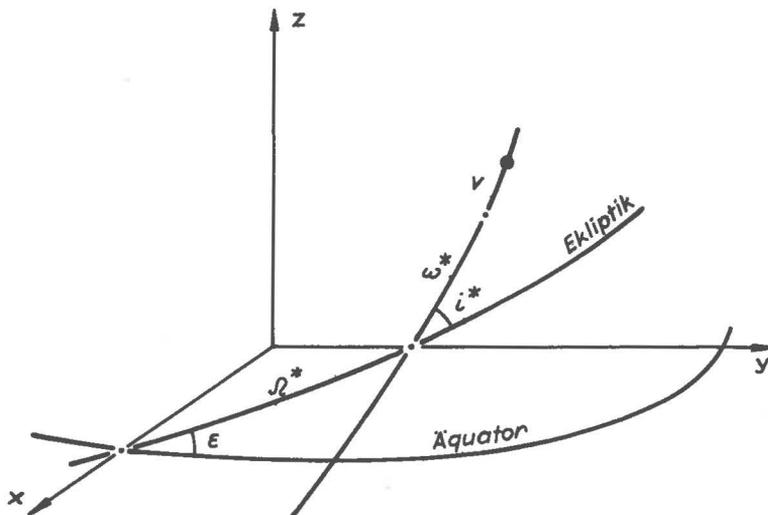


Abb. 7. Bahnelemente im Ekliptiksystem

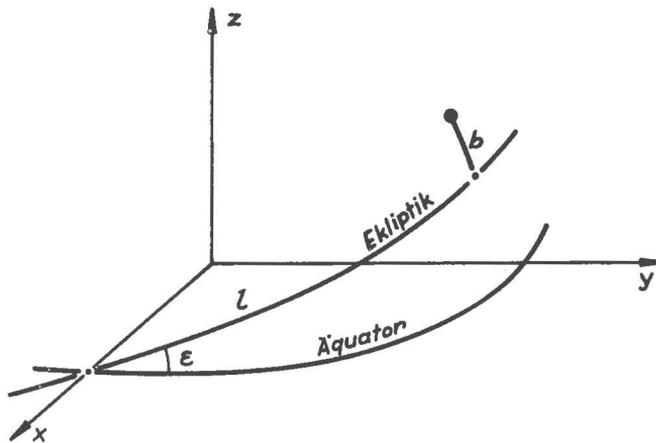


Abb. 8. Ekliptikale Länge und Breite

Für die späteren Entwicklungen werden noch die Ableitungen des geozentrischen Radiusvektors r nach den Bahnelementen a , e , v benötigt (27). Es ist

$$(31) \quad \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v} ,$$

$$(32) \quad \frac{\partial r}{\partial e} = -a \frac{2e + (1 + e^2) \cos v}{(1 + e \cos v)^2} ,$$

$$(33) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial e} = - \frac{2e + (1 + e^2) \cos v}{(1 - e^2)(1 + e \cos v)} ,$$

$$(34) \quad \frac{\partial r}{\partial v} = a \frac{(1 - e^2) e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} ,$$

$$(35) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} .$$

5. Die Fehlergleichungen für Entfernungsmessungen zum Mond an einer Station

Die zwischen der Beobachtungsstation auf der Erdoberfläche (Ortsvektor ϱ_Q) und dem Laserreflektor auf dem Mond (Ortsvektor ϱ_S bzw. $\bar{\varrho}_S$) gemessene Entfernung s errechnet sich aus den räumlichen Koordinaten dieser beiden Stationen mit (12), (13), (15) nach folgender Formel:

$$(36) \quad s^2 = (\varrho_Q - \varrho_S)^2 = (\varrho_Q - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \bar{\varrho}_S)^2$$

oder in Komponentenschreibweise:

$$(37) \quad s^2 = \left[\begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix} - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right]^2 .$$

Die Strecke s wird aus Beobachtungen ermittelt und hat den Charakter einer zufälligen Variablen.

Die Sternzeit θ wird ebenfalls bei der Beobachtung der Strecke s gemessen. Geht man davon aus, daß der Wert von θ auf eine Millisekunde genau bestimmt wird, dann wird sich in dieser Zeitspanne die Erde am Äquator um etwa 0,5 m auf Grund ihrer Rotation fortbewegt haben. In höheren Breiten hat man nur den Betrag $\pm 0,5 \text{ m} \cdot \cos \varphi$. Man wird die Sternzeit auch auf eine Zehntel Millisekunde genau bestimmen können. Bei der Zeitregistrierung verwendet man meistens die Atomzeit, während hier die von der Rotationsbewegung der Erde abhängige Sternzeit θ zu verwenden ist. Die Transformation zwischen beiden Systemen kann gewisse Unsicherheiten enthalten, so daß für die Zeit eine konstante und eine linear mit der Zeit veränderliche Korrektur, κ bzw. κ^* , eingeführt werden müssen, die im Rahmen der Ausgleichung der Lasermessungen zum Mond zu bestimmen sind. Für die endgültige Sternzeit $\bar{\theta}$ hat man daher den Ausdruck

$$(38) \quad \bar{\theta} = \theta + \kappa + \kappa^* \cdot t .$$

Die Koordinaten der Beobachtungsstation X_Q, Y_Q, Z_Q , die Koordinaten der Position der Satelliten x_S, y_S, z_S , die Parameter der Polbewegungsmatrix ξ, η und die Konstanten κ und κ^* sind in (36), (37) die unbekanntenen Größen, die durch eine Ausgleichung der beobachteten s -Werte zu bestimmen sind. In die Ausgleichung werden a priori die Näherungswerte $(X_Q)_0, (Y_Q)_0, \dots$ eingeführt. Durch die Ausgleichung ergeben sich die Zuschläge $\delta X_Q, \delta Y_Q, \dots$. Für die plausibelsten Werte nach der Ausgleichung X_Q, Y_Q, \dots gilt dann beispielsweise bei rechtwinkligen Koordinaten

$$(39) \left\{ \begin{array}{lll} X_Q = (X_Q)_0 + \delta X_Q, & Y_Q = (Y_Q)_0 + \delta Y_Q, & Z_Q = (Z_Q)_0 + \delta Z_Q; \\ x_S = (x_S)_0 + \delta x_S, & y_S = (y_S)_0 + \delta y_S, & z_S = (z_S)_0 + \delta z_S; \\ \xi = \xi_0 + \delta \xi, & \eta = \eta_0 + \delta \eta; \\ \varkappa = \varkappa_0 + \delta \varkappa, & \varkappa^* = \varkappa_0^* + \delta \varkappa^*; \\ \bar{\theta} = \theta_0 + \delta \varkappa + \delta \varkappa^* \cdot t. \end{array} \right.$$

θ_0 ist der Näherungswert für die Sternzeit,

$$(39a) \quad \theta_0 = \theta + \varkappa_0 + \varkappa_0^* t.$$

Meistens wird $\varkappa_0 = \varkappa_0^* = 0$ sein, dann ist $\theta_0 = \theta$.

Aus den Näherungswerten der Unbekannten gewinnt man mit (36), (37) die Strecke s_0 . Errechnet man die Strecke s aus den plausibelsten Werten der Unbekannten nach der Ausgleichung, so muß man die zufällige Verbesserung \bar{v} abziehen, um die beobachtete Strecke s zu erhalten:

$$(40) \quad s + \bar{v} = s(X_Q, Y_Q, Z_Q, x_S, y_S, z_S, \xi, \eta, \varkappa, \varkappa^*).$$

Die Strecke s wird nicht unmittelbar gemessen, sie wird aus der Laufzeit t , die die Lichtwellen zum Durchheilen der Strecke von der Beobachtungsstation zum Laserreflektor benötigen, abgeleitet. Die Laufzeit t ist die unmittelbare Meßgröße. Es ist

$$(41) \quad s = c \cdot t,$$

wenn c die Lichtgeschwindigkeit ist. Eine Ungenauigkeit in c wird sich also auch auf s auswirken. Man kann daher auch die Größe c in die Ausgleichung als Unbekannte einführen:

$$(42) \quad c = c_0 + \delta c.$$

Die Unbekannte δc bewirkt eine Maßstabsänderung in den geozentrischen Koordinaten der Beobachtungsstation und des Mondes. Diese Größe kann nicht aus der Laufzeit der Laserblitze bestimmt werden, sondern nur durch geodätische Bestimmung der Entfernungen zwischen den Beobachtungsstationen auf der Erde.

Man erhält daher die Fehlergleichung

$$(43) \quad \bar{v} = -(s - s_0) + \frac{\partial s}{\partial X_Q} \delta X_Q + \frac{\partial s}{\partial Y_Q} \delta Y_Q + \frac{\partial s}{\partial Z_Q} \delta Z_Q + \frac{\partial s}{\partial x_S} \delta x_S + \frac{\partial s}{\partial y_S} \delta y_S + \frac{\partial s}{\partial z_S} \delta z_S + \\ + \frac{\partial s}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial s}{\partial \eta} \delta \eta - \frac{\partial s}{\partial c} \delta c + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon^*} \delta \varepsilon^*$$

oder

$$(44) \quad \bar{v} = -(s - s_0) + \sum_u \frac{\partial s}{\partial u} \delta u - \frac{\partial s}{\partial c} \delta c .$$

Es ist

$$s_0 = s \left\{ (X_Q)_0, (Y_Q)_0, (Z_Q)_0, (x_S)_0, (y_S)_0, (z_S)_0, \xi_0, \eta_0, \varepsilon_0, \varepsilon_0^* \right\} ;$$

$$s = c_0 \cdot t ;$$

$$u = X_Q, Y_Q, Z_Q, x_S, y_S, z_S, \xi, \eta, \varepsilon, \varepsilon^* .$$

Werden in die Ausgleichung nur solche Laserbeobachtungen einbezogen, die eine relativ kurze zeitliche Spanne von etwa wenigen Stunden überdecken, dann kann es den Anforderungen der Ausgleichung genügen, wenn die Korrekturen der Koordinaten des Mondes $\delta x_S, \delta y_S, \delta z_S$ als zeitlich konstante Größen angesehen werden. Erstrecken sich aber die Beobachtungen über mehrere Tage und Wochen, dann wird es notwendig sein, für die Korrekturen der Koordinaten des Mondes analytische Ausdrücke einzuführen, die von der Zeit abhängig sind. Diesen analytischen Ausdrücken kann z.B. die Form von Potenzreihenentwicklungen nach der Zeit gegeben werden:

$$\delta x_S = \sum_{i=0}^m \chi_{1,i} \cdot t^i ,$$

$$\delta y_S = \sum_{i=0}^m \chi_{2,i} \cdot t^i ,$$

$$\delta z_S = \sum_{i=0}^m \chi_{3,i} \cdot t^i .$$

Die Koeffizienten $\chi_{1,i}, \chi_{2,i}, \chi_{3,i}$ sind die Unbekannten, die im Rahmen der Ausgleichung mitzubestimmen sind. Die obere Grenze m der Summation ist so hoch zu wählen, daß die Restfehler der obigen Ausdrücke für die Koordinatenverbesserungen genügend weit unterhalb der Beobachtungsgenauigkeit bleiben.

Die obigen Potenzreihen wurden für die Korrekturen der kartesischen x_S, y_S, z_S -Koordinaten des Mondes entwickelt. Diese Koordinaten werden im Abschnitt 5.1. behandelt. In den Abschnitten 5.2., 5.3., 5.4., 5.5. werden für den Mond andere Koordinaten eingeführt: der geozentrische Radius und die Rektaszension und Deklination des Mondes oder seine ekliptikale Länge und Breite, ferner die Bahnelemente des Mondes im ekliptikalen oder im Äquatorialen System. Auch für diese Unbekannten müssen analoge Potenzreihenentwicklungen nach der Zeit eingesetzt werden.

5.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und den Mond

Die Unbekannten:

die Stationskoordinaten: X_Q, Y_Q, Z_Q ;

die Koordinaten des Laserreflektors auf dem Mond: x_S, y_S, z_S ;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: α, α^* .

Der Näherungswert s_0 für die gemessene Strecke s :

$$(45) \quad s_0^2 = [(\varrho_Q)_0 - (\varrho_S)_0]^2 = \left[\begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix} - \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right]_0^2 = \left[\begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} \right]_0^2.$$

Die Fehlergleichung:

$$(46) \quad \bar{v} = -(s - s_0) + \sum_u A_u \delta u; \quad u = X_Q, Y_Q, Z_Q, x_S, y_S, z_S, \xi, \eta, c, \alpha, \alpha^*.$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichung:

$$(47) \quad A_{X_Q} = \frac{1}{s} (X_Q - X_S),$$

$$(48) \quad A_{Y_Q} = \frac{1}{s} (Y_Q - Y_S),$$

$$(49) \quad A_{Z_Q} = \frac{1}{s} (Z_Q - Z_S);$$

$$(50) \quad A_{x_S} = -\frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(51) \quad A_{y_S} = -\frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(52) \quad A_{z_S} = -\frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$(53) \quad A_{\xi} = -\frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{\underline{S}}'_1(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right\},$$

$$(54) \quad A_{\eta} = -\frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{\underline{S}}'_2(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right\};$$

30

$$(55) \quad A_{\circ} = -\frac{s}{c} ;$$

$$(56) \quad A_{\varkappa} = -\frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}'_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right\},$$

$$(57) \quad A_{\varkappa^*} = t A_{\varkappa} .$$

Die Koeffizienten (47) bis (57) sind, wie s_{\circ} nach (45), für die Näherungswerte der Unbekannten zu berechnen. Den Näherungswert der Polbewegungsmatrix $\underline{S}(\xi, \eta)$ wird man in (47) bis (57) meistens gleich der Einheitsmatrix setzen können.

5.2. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Mond

Die Unbekannten:

die Stationskoordinaten: $\varphi, \varphi, \lambda$;

φ : Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, φ : geozentrische Breite,

λ : geozentrische Länge;

die Koordinaten des Mondes: r, δ, α ;

r : Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, δ : Deklination, α : Rektaszension;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: \varkappa, \varkappa^* .

Der Näherungswert s_{\circ} für die gemessene Strecke s mit (12)(15)(25):

$$(58) \quad s_{\circ}^2 = [(\varrho_Q)_{\circ} - (\varrho_S)_{\circ}]^2 ,$$

$$(59) \quad s_{\circ}^2 = \left[\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi & \cos \lambda \\ \cos \varphi & \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} - r \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}'_Z(\theta) \begin{pmatrix} \cos \delta & \cos \alpha \\ \cos \delta & \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \right]_{\circ}^2 ;$$

$$(60) \quad \varrho_S = r \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}'_Z(\theta) \varkappa(\delta, \alpha), \quad (\varrho_S)_{\circ} = r_{\circ} \underline{S}(\xi_{\circ}, \eta_{\circ}) \underline{R}'_Z(\theta) \varkappa(\delta_{\circ}, \alpha_{\circ}) .$$

Die Fehlergleichung:

$$(61) \quad \bar{v} = -(s - s_{\circ}) + \sum_u B_u \delta u ; \quad u = \varphi, \varphi, \lambda, r, \delta, \alpha, \xi, \eta, c, \varkappa, \varkappa^* .$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichung:

$$(62) \quad B_{\varphi} = \frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \varkappa(\varphi, \lambda) ,$$

$$(63) \quad B_{\varphi} = \frac{\varphi}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \varkappa'_1(\varphi, \lambda) ,$$

$$(64) \quad B_\lambda = \frac{\varphi}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa_2'(\varphi, \lambda);$$

$$(65) \quad B_T = -\frac{1}{sT} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S,$$

$$(66) \quad B_\delta = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa_1'(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(67) \quad B_\alpha = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa_2'(\delta, \alpha) \right\};$$

$$(68) \quad B_\xi = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}_1'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(69) \quad B_\eta = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}_2'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\};$$

$$(70) \quad B_o = -\frac{s}{c};$$

$$(71) \quad B_\varkappa = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z'(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(72) \quad B_{\varkappa^*} = t B_\varkappa.$$

5.3. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und ekliptikale Länge und Breite als Koordinaten für den Mond

Die Unbekannten:

die Stationskoordinaten: $\varphi, \varphi, \lambda$;

φ : Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, φ : geozentrische Breite,

λ : geographische Länge;

die Koordinaten des Mondes: r, b, l ;

r : Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, b : ekliptikale Breite, l : ekliptikale Länge;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: \varkappa, \varkappa^* .

Der Näherungswert s_o für die gemessene Strecke s mit (12),(13),(15),(30):

$$(73) \quad s_o^2 = [(\varrho_Q)_o - (\varrho_S)_o]^2;$$

$$(74) \quad \begin{cases} \varrho_Q = \varphi \kappa(\varphi, \lambda), & \varrho_S = r \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\bar{\theta}) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b, l); \\ (\varrho_Q)_o = \varphi_o \kappa(\varphi_o, \lambda_o), & (\varrho_S)_o = r_o \underline{S}(\xi_o, \eta_o) \underline{R}_Z(\bar{\theta}_o) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b_o, l_o). \end{cases}$$

Die Fehlergleichung:

$$(75) \quad \bar{v} = -(s - s_0) + \sum_u C_u \delta u ; \quad u = \varphi, \varphi, \lambda, r, b, l, \xi, \eta, \sigma, \varkappa, \varkappa^* .$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichung:

$$(76) \quad C_\varphi = \frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa(\varphi, \lambda) ,$$

$$(77) \quad C_\varphi = \frac{s}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa'_1(\varphi, \lambda) ,$$

$$(78) \quad C_\lambda = \frac{s}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa'_2(\varphi, \lambda) ;$$

$$(79) \quad C_r = -\frac{1}{s r} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S ,$$

$$(80) \quad C_b = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \frac{s}{s}(\xi, \eta) \frac{R_z}{R_x}(\theta) \frac{R_x}{R_x}(-\varepsilon) \kappa'_1(b, l) \right\} ,$$

$$(81) \quad C_l = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \frac{s}{s}(\xi, \eta) \frac{R_z}{R_x}(\theta) \frac{R_x}{R_x}(-\varepsilon) \kappa'_2(b, l) \right\} ;$$

$$(82) \quad C_\xi = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \frac{s}{s}'_1(\xi, \eta) \frac{R_z}{R_x}(\theta) \frac{R_x}{R_x}(-\varepsilon) \kappa(b, l) \right\} ,$$

$$(83) \quad C_\eta = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \frac{s}{s}'_2(\xi, \eta) \frac{R_z}{R_x}(\theta) \frac{R_x}{R_x}(-\varepsilon) \kappa(b, l) \right\} ;$$

$$(84) \quad C_\sigma = -\frac{s}{\sigma} ;$$

$$(85) \quad C_{\varkappa} = -\frac{H}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \frac{s}{s}(\xi, \eta) \frac{R_z}{R_x}'(\theta) \frac{R_x}{R_x}(-\varepsilon) \kappa(b, l) \right\} ,$$

$$(86) \quad C_{\varkappa^*} = t \cdot C_{\varkappa} .$$

5.4. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf die Ekliptik für den Mond

Die Unbekannten:

die Stationskoordinaten: $\varphi, \varphi, \lambda$;

die ekliptikalen Bahnelemente des Mondes: $a, e, \omega^*, i^*, \mathcal{L}^*, v$;

a : große Halbachse der Bahnellipse des Mondes, e : Exzentrizität der Bahnellipse des Mondes, ω^* : Argument des Perigäums in bezug auf die Ekliptik, i^* : Neigung der Bahn des Mondes relativ zur Ekliptik, \mathcal{L}^* : ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens, v : wahre Anomalie;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: \varkappa , \varkappa^* .

Der Näherungswert s_0 für die gemessene Strecke s ist mit (29):

$$(87) \quad s_0^2 = [(\varrho_Q)_0 - (\varrho_S)_0]^2 ;$$

$$(88) \quad \varrho_Q = \varrho \kappa(\varphi, \lambda), \quad \varrho_S = r \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-i^*) \times \\ \times \underline{R}_Z(-\omega^*) \varrho(v) ;$$

$$(89) \quad (\varrho_Q)_0 = \varrho_0 \kappa(\varphi_0, \lambda_0), \quad (\varrho_S)_0 = r_0 \underline{S}(\xi_0, \eta_0) \underline{R}_Z(\theta_0) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega_0^*) \underline{R}_X(-i_0^*) \times \\ \times \underline{R}_Z(-\omega_0^*) \varrho(v_0) ;$$

$$r_0 = \frac{a_0 (1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cos v_0} .$$

Die Fehlergleichung:

$$(90) \quad \bar{v} = -(s - s_0) + \sum_u D_u \delta u ; \quad u = \varrho, \varphi, \lambda, a, e, \omega^*, i^*, \Omega^*, v, \xi, \eta, \\ c, \varkappa, \varkappa^* .$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichung:

$$(91) \quad D_\varrho = \frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa(\varphi, \lambda),$$

$$(92) \quad D_\varphi = \frac{\varrho}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa'_1(\varphi, \lambda),$$

$$(93) \quad D_\lambda = \frac{\varrho}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa'_2(\varphi, \lambda) ;$$

$$(94) \quad D_a = -\frac{1}{s a} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S ,$$

$$(95) \quad D_e = \frac{1}{s} \frac{2e + (1 + e^2) \cos v}{(1 - e^2)(1 + e \cos v)} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S ,$$

$$(96) \quad D_{\omega^*} = \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-i^*) \underline{R}'_Z(-\omega^*) \varrho(v) \right\} ,$$

$$(97) \quad D_{i^*} = \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}'_X(-i^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varrho(v) \right\} ,$$

$$(98) \quad D_{\Omega^*} = \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}'_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-i^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varrho(v) \right\} ,$$

$$(99) \quad D_v = -\frac{1}{s} \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S - \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\varrho^*) \right. \\ \left. * \underline{R}_X(-i^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi'(v) \right\};$$

$$(100) \quad D_\xi = -\frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}'_1(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\varrho^*) \underline{R}_X(-i^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\},$$

$$(101) \quad D_\eta = -\frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}'_2(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\varrho^*) \underline{R}_X(-i^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\};$$

$$(102) \quad D_c = -\frac{r}{c};$$

$$(103) \quad D_{\varrho^*} = -\frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}'_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\varrho^*) \underline{R}_X(-i^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\},$$

$$(104) \quad D_{\varrho^*} = t \cdot D_{\varrho^*}.$$

5.5. Räumliche Polarkoordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf den Äquator für den Mond

Die Unbekannten:

die Stationskoordinaten: $\varphi, \varphi, \lambda$;

die äquatorialen Bahnelemente des Mondes: $a, e, \omega, i, \varrho, v$;

a : große Halbachse der Bahnellipse des Mondes, e : Exzentrizität der Bahnellipse des Mondes, ω : Argument des Perigäums in bezug auf den Äquator, i : Neigung der Bahn des Mondes relativ zum Äquator, ϱ : Länge des aufsteigenden Knotens, v : wahre Anomalie;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: ϱ, ϱ^* .

Der Näherungswert s_0 für die gemessene Strecke s ist mit (28) und (15):

$$(105) \quad s_0^2 = [(\varrho_Q)_0 - (\varrho_S)_0]^2;$$

$$(106) \quad (\varrho_Q)_0 = r_0 * (\varphi_0, \lambda_0),$$

$$(107) \quad (\varrho_S)_0 = r_0 \underline{S}(\xi_0, \eta_0) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_Z(-\varrho_0) \underline{R}_X(-i_0) \underline{R}_Z(-\omega_0) \varphi(v_0).$$

Die Fehlergleichung:

$$(108) \quad \bar{v} = -(s - s_0) + \sum_u \underline{E}_u \delta u; \quad u = \varphi, \varphi, \lambda, a, e, \omega, i, \varrho, v, \xi, \eta, \\ c, \varrho, \varrho^*.$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichung:

$$(109) \quad E_p = \frac{1}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa(\varphi, \lambda),$$

$$(110) \quad E_\varphi = \frac{\varphi}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa_1'(\varphi, \lambda),$$

$$(111) \quad E_\lambda = \frac{\lambda}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \kappa_2'(\varphi, \lambda);$$

$$(112) \quad E_a = -\frac{1}{sa} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S,$$

$$(113) \quad E_e = \frac{1}{s} \frac{2e + (1 + e^2)\cos v}{(1 - e^2)(1 + e \cos v)} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S,$$

$$(114) \quad E_\omega = \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_Z(-\Omega) \underline{R}_X(-1) \underline{R}_Z'(-\omega) \varphi(v) \right\},$$

$$(115) \quad E_i = \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_Z(-\Omega) \underline{R}_X'(-1) \underline{R}_Z(-\omega) \varphi(v) \right\},$$

$$(116) \quad E_\Omega = \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_Z'(-\Omega) \underline{R}_X(-1) \underline{R}_Z(-\omega) \varphi(v) \right\},$$

$$(117) \quad E_v = -\frac{1}{s} \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} (\varrho_Q - \varrho_S) \varrho_S - \frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_Z(-\Omega) \underline{R}_X(-1) \times \right. \\ \left. \times \underline{R}_Z(-\omega) \varphi'(v) \right\};$$

$$(118) \quad E_\xi = -\frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}_1'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_Z(-\Omega) \underline{R}_X(-1) \underline{R}_Z(-\omega) \varphi(v) \right\},$$

$$(119) \quad E_\eta = -\frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}_2'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_Z(-\Omega) \underline{R}_X(-1) \underline{R}_Z(-\omega) \varphi(v) \right\};$$

$$(120) \quad E_c = -\frac{s}{c};$$

$$(121) \quad E_{\kappa_c} = -\frac{r}{s} (\varrho_Q - \varrho_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z'(\theta) \underline{R}_Z(-\Omega) \underline{R}_X(-1) \underline{R}_Z(-\omega) \varphi(v) \right\},$$

$$(122) \quad E_{\varrho^k} = t \cdot E_{\varrho^k}.$$

6. Die Fehlergleichungen für simultane Entfernungsmessungen zum Mond an zwei Stationen

In Kap. 5 waren die Fehlergleichungen abgeleitet worden, mit denen man im Rahmen einer Ausgleichung die bei den Entfernungsmessungen zum Mond anfallenden geodätischen und astronomischen Parameter bestimmen kann. Beobachtet man an zwei terrestrischen Stationen die Entfernung zum Mond, so haben die beiden Bahnen, die von diesen Laserimpulsen durchlaufen werden, innerhalb von etwa $1/30,2$ rad. (d.i. das Verhältnis des Erddurchmessers zur Entfernung des Mondes) oder 2° etwa die gleiche Richtung im Raum. Eine kleine Änderung in der räumlichen Position des Mondes wird sich auf zwei simultane Messungen der Entfernung Erde - Mond an zwei verschiedenen Stationen auf der Erde etwa in gleicher Weise auswirken. Bildet man daher die Differenz dieser beiden Strecken, so wird sie in viel geringerem Maße durch Fehler in der Kenntnis der räumlichen Position des Mondes beeinflusst als eine einzelne Strecke selbst.

Will man andererseits die räumliche Position des Mondes relativ zur Erde aus den Laserbeobachtungen möglichst genau bestimmen, so wird man die einzelnen Streckenmessungen auswerten, wie im vorigen Kapitel dargelegt wurde; dabei wird also auch der astronomische Aspekt betont. Hat man auf diesem Wege durch Auswertung der Einzelmessungen die räumliche Position des Mondes sehr genau ermittelt, dann kann man anschließend aus der Differenz simultaner Streckenmessungen die geodätischen Parameter besonders genau ableiten, weil bei der Differenz der Messungen kleine Restfehler in der Position des Mondes nur nach Multiplikation mit einem Faktor von etwa der Größenordnung $1 : 60,3$ eingehen, d.i. das Verhältnis des Erdradius zur Entfernung des Mondes. Man wird unter diesen Voraussetzungen, bei denen die Position des Mondes auf etwa 2 Meter genau bekannt und damit das freie Glied in den Fehlergleichungen der Differenzbeobachtungen nur um etwa $\pm 2 \text{ m} \cdot 1/60,3 = \pm 3 \text{ cm}$ unsicher ist, die Position des Mondes in die Fehlergleichungen als fehlerfrei gegebene Größe einführen können (Abb. 1).

6.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und den Mond

Als Unbekannte gelten die gleichen Parameter wie in Abschnitt 5.1. Setzt man zur Abkürzung für die Streckendifferenzen

$$(123) \quad s_{12} = s_2 - s_1$$

und für ihre Näherungswerte

$$(124) \quad (s_{12})_0 = (s_2)_0 - (s_1)_0$$

sowie für die betreffenden zufälligen Verbesserungen

$$(125) \quad \bar{v}_{12} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 ,$$

so folgt mit (46)

$$(126) \quad \bar{v}_{12} = -[s_{12} - (s_{12})_0] + A_{X.2} \delta X_{Q.2} + A_{Y.2} \delta Y_{Q.2} + A_{Z.2} \delta Z_{Q.2} - A_{X.1} \delta X_{Q.1} - \\ - A_{Y.1} \delta Y_{Q.1} - A_{Z.1} \delta Z_{Q.1} + (A_{x.2} - A_{x.1}) \delta x_S + (A_{y.2} - A_{y.1}) \delta y_S + \\ + (A_{z.2} - A_{z.1}) \delta z_S + (A_{\xi.2} - A_{\xi.1}) \delta \xi + (A_{\eta.2} - A_{\eta.1}) \delta \eta + \\ + (A_{c.2} - A_{c.1}) \delta c + (A_{\varkappa.2} - A_{\varkappa.1}) \delta \varkappa + (A_{\varkappa^*.2} - A_{\varkappa^*.1}) \delta \varkappa^* .$$

Bei den Koeffizienten $A_{X.1}, \dots, A_{Z.2}$ wurden die Indizes Q und S für die Beobachtungsstation und das kosmische Objekt zwecks Vereinfachung fortgelassen, ohne daß deswegen Irrtümer auftreten könnten.

Die Koeffizienten $A_{u.1}, A_{u.2}$; $u = X, Y, Z, x, y, z, \xi, \eta, c, \varkappa, \varkappa^*$ sind mit (12) und (47) bis (57)

$$(127) \quad A_{X.1} = \frac{1}{s_1} (X_1 - X_S) ,$$

$$(128) \quad A_{Y.1} = \frac{1}{s_1} (Y_1 - Y_S) ,$$

$$(129) \quad A_{Z.1} = \frac{1}{s_1} (Z_1 - Z_S) ;$$

$$(130) \quad A_{x.1} = -\frac{1}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$(131) \quad A_{y.1} = -\frac{1}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$(132) \quad A_{z.1} = -\frac{1}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$(133) \quad A_{\xi.1} = -\frac{1}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}'_1(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$(134) \quad A_{\eta.1} = -\frac{1}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}'_2(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$(135) \quad A_{c.1} = -\frac{s_1}{c} ;$$

$$(136) \quad A_{\varkappa.1} = -\frac{1}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}'_Z(\theta) \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$(137) \quad \Delta_{\alpha^*.1} = t \cdot \Delta_{\alpha.1} .$$

Weil man aus Simultanbeobachtungen an zwei Stationen Q_1 und Q_2 vor allem die Koordinatenunterschiede dieser beiden Stationen

$$X_2 - X_1 , \quad Y_2 - Y_1 , \quad Z_2 - Z_1 ,$$

also den Vektor

$$(138) \quad \varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} ,$$

bestimmen kann und weniger die absolute Lage dieser Stationen im Raum in dem geozentrischen X, Y, Z -Koordinatensystem, so empfiehlt es sich, in der Fehlergleichung (126) für die Korrekturen der Unbekannten die folgenden Substitutionen vorzunehmen:

$$(139) \quad \delta X_{2+1} = \frac{1}{2} (\delta X_2 + \delta X_1) ,$$

$$(140) \quad \delta Y_{2+1} = \frac{1}{2} (\delta Y_2 + \delta Y_1) ,$$

$$(141) \quad \delta Z_{2+1} = \frac{1}{2} (\delta Z_2 + \delta Z_1) ,$$

$$(142) \quad \delta X_{2-1} = \frac{1}{2} (\delta X_2 - \delta X_1) ,$$

$$(143) \quad \delta Y_{2-1} = \frac{1}{2} (\delta Y_2 - \delta Y_1) ,$$

$$(144) \quad \delta Z_{2-1} = \frac{1}{2} (\delta Z_2 - \delta Z_1) .$$

Dabei wurden wieder die Indizes Q zwecks Vereinfachung fortgelassen.

Aus den vorstehenden Gleichungen (139) bis (144) leiten sich die nachstehenden Beziehungen ab:

$$(145) \quad \delta X_2 = \delta X_{2+1} + \delta X_{2-1} ,$$

$$(146) \quad \delta Y_2 = \delta Y_{2+1} + \delta Y_{2-1} ,$$

$$(147) \quad \delta Z_2 = \delta Z_{2+1} + \delta Z_{2-1} ,$$

$$(148) \quad \delta X_1 = \delta X_{2+1} - \delta X_{2-1} ,$$

$$(149) \quad \delta Y_1 = \delta Y_{2+1} - \delta Y_{2-1} ,$$

$$(150) \quad \delta Z_1 = \delta Z_{2+1} - \delta Z_{2-1} .$$

Aus (126) und (145) bis (150) folgt durch Substitution:

$$\begin{aligned}
 (151) \quad \bar{v}_{12} = & -[s_{12} - (s_{12})_0] + (A_{X.2} - A_{X.1})\delta X_{2+1} + (A_{Y.2} - A_{Y.1})\delta Y_{2+1} + (A_{Z.2} - A_{Z.1})\delta Z_{2+1} + \\
 & + (A_{X.2} + A_{X.1})\delta X_{2-1} + (A_{Y.2} + A_{Y.1})\delta Y_{2-1} + (A_{Z.2} + A_{Z.1})\delta Z_{2-1} + \\
 & + (A_{X.2} - A_{X.1})\delta x_S + (A_{Y.2} - A_{Y.1})\delta y_S + (A_{Z.2} - A_{Z.1})\delta z_S + \\
 & + (A_{\xi.2} - A_{\xi.1})\delta \xi + (A_{\eta.2} - A_{\eta.1})\delta \eta + (A_{\zeta.2} - A_{\zeta.1})\delta \zeta + \\
 & + (A_{x^*.2} - A_{x^*.1})\delta x^* + (A_{y^*.2} - A_{y^*.1})\delta y^* .
 \end{aligned}$$

Die Richtungen, die von den beiden Beobachtungsstationen auf der Erde zum Laserreflektor auf dem Mond zeigen, verlaufen zueinander genähert parallel im Raum. Ihre Divergenz beträgt Größenordnungsmäßig lediglich 1:60,3 und errechnet sich aus dem Verhältnis des Erdradius zur Entfernung des Mondes von der Erde. Entlang diesen beiden Geraden, die genähert parallel verlaufen, werden die Streckenmessungen ausgeführt. Die Differenz dieser Streckenmessungen ändert sich aber kaum bei einer Translation des die beiden Beobachtungsstationen Q_1 und Q_2 verbindenden Vektors im Raum. Daher wird man die Parameter dieser Translation, die drei räumlichen Verschiebungskomponenten, aus einer Analyse der Gleichungen (126) bis (137) wegen des geringen Divergenzwinkels der Richtungen zwischen den Beobachtungsstationen und dem Mond von 1/60,3 rad. kaum bestimmen können.

Es folgt, daß man aus einer Ausgleichung von Fehlergleichungen der Form (151) die Unbekannten δX_{2+1} , δY_{2+1} , δZ_{2+1} entsprechend (139), (140), (141) nur mit sehr mäßiger Genauigkeit bestimmen kann, während für die Korrekturen der halben Koordinatenunterschiede δX_{2-1} , δY_{2-1} , δZ_{2-1} eine wesentlich höhere Genauigkeit zu erwarten ist, etwa die gleiche Genauigkeit, die bei der Auswertung von Entfernungsmessungen zum Mond an einer einzigen Station zu erhalten ist, entsprechend den Ausführungen im Kap. 5 über die Ermittlung der Koordinatenverschiebungen δX , δY , δZ einer einzelnen Station. Von dieser Unterschiedlichkeit in den zu erwartenden Gewichten für die Unbekannten δX_{2+1} , δY_{2+1} , δZ_{2+1} einerseits und δX_{2-1} , δY_{2-1} , δZ_{2-1} andererseits kann man sich auch durch eine Betrachtung der numerischen Beträge der Koeffizienten bei diesen Unbekannten in Gleichung (151) überzeugen. Der Koeffizient $A_{X.2} - A_{X.1}$ bei der Unbekannten δX_{2+1} beträgt nach (127)

$$\frac{1}{s_2}(X_2 - X_S) - \frac{1}{s_1}(X_1 - X_S) = \frac{1}{s_2} X_2 - \frac{1}{s_1} X_1 - \frac{X_S}{s_1} \frac{s_1 - s_2}{s_2} .$$

Auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehen drei Glieder, von denen jedes die Größenordnung 1/60,3 hat. Man kann daher feststellen, daß der Koeffizient von δX_{2+1} in (151) von der Größenordnung 1/60,3 ist. Eine analoge Aussage kann man auch über die Koeffizienten $A_{Y.2} - A_{Y.1}$ und $A_{Z.2} - A_{Z.1}$ bei δY_{2+1} und δZ_{2+1} machen. Der Koeffizient $A_{X.2} + A_{X.1}$ beim halben Koordinatenunterschied δX_{2-1}

40

beträgt dagegen

$$\frac{1}{s_2}(X_2 - X_S) + \frac{1}{s_1}(X_1 - X_S) \cong - \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} \right) X_S .$$

Dieser Ausdruck ist größenordnungsmäßig gleich Eins.

Durch eine Ausgleichung der Fehlergleichungen (151) wird man nach diesen Betrachtungen die halben Koordinatenunterschiede

$$\delta X_{2-1} , \quad \delta Y_{2-1} , \quad \delta Z_{2-1}$$

etwa mit der gleichen Genauigkeit bestimmen können, mit der man die Streckendifferenz s_{12} und damit die einzelnen Strecken s_1 und s_2 bestimmt hat. Bei einer größeren Anzahl von Beobachtungen steigert sich die Genauigkeit der erhaltenen Koordinatenunterschiede nach dem Wurzelgesetz entsprechend dem Ausdruck $1/\sqrt{n}$, wenn n die Anzahl der Beobachtungen ist. Die mittleren Fehler der absoluten geozentrischen Lage der Beobachtungsstationen werden sich dagegen nach den Auswertungen wesentlich größer ergeben als die mittleren Fehler der Koordinatendifferenzen. Die mittleren Fehler der Unbekannten δX_{2+1} , δY_{2+1} , δZ_{2+1} werden größenordnungsmäßig etwa das 60,3fache der mittleren Fehler der halben Koordinatenunterschiede δX_{2-1} , δY_{2-1} , δZ_{2-1} erreichen.

Die Differenz s_{12} der gemessenen Strecken zum Mond ist ferner in hoher Annäherung unempfindlich gegen eine solche Rotation der beiden Beobachtungsstationen Q_1 und Q_2 , die bewirkt wird durch einen Rotationsvektor, der vom Mittelpunkt der Erde zum Mond gerichtet ist. Die durch diese Rotation hervorgerufenen differentiellen Ortsverschiebungen in den Positionen der Beobachtungsstationen erfolgen senkrecht zu den gemessenen Strecken, die von der Erde zum Mond gerichtet sind. Sie bewirken daher keine Änderung der Strecken s_1 und s_2 und der Streckendifferenz s_{12} . Rotationen dieser Art können daher nicht durch eine Ausgleichung der Fehlergleichungen (151) bestimmt werden.

6.2. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Mond

Als Unbekannte für die Position der Beobachtungsstation werden die gleichen X_Q , Y_Q , Z_Q -Koordinaten wie im vorstehenden Abschnitt 6.1. gesetzt. Als Parameter für die Position des Mondes werden die räumlichen Polarkoordinaten r , δ , α eingeführt wie im Abschnitt 5.2. Es sind also die folgenden Unbekannten zu bestimmen:

- die Stationskoordinaten: X_Q , Y_Q , Z_Q ;
- die Koordinaten des Mondes: r , δ , α ;

r : Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, δ : Deklination, α : Rektaszension;
 die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, η ;
 die Lichtgeschwindigkeit: c ;
 die Parameter der Erdrotation: \varkappa, \varkappa^* .

Der Näherungswert s_0 für die gemessene Strecke s :

$$(152) \quad s_0^2 = [(\varphi_Q)_0 - (\varphi_S)_0]^2,$$

$$(153) \quad s_0^2 = \left[\begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix} - r \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \begin{pmatrix} \cos \delta & \cos \alpha \\ \cos \delta & \sin \alpha \\ \sin \delta & \end{pmatrix} \right]_0^2;$$

$$(154) \quad (\varphi_S)_0 = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix}_0 = r_0 \underline{\underline{S}}(\xi_0, \eta_0) \underline{\underline{R}}_Z(\theta_0) \kappa(\delta_0, \alpha_0).$$

Die Fehlergleichung für die Differenz zweier simultaner Streckenmessungen zum Mond lautet daher

$$(155) \quad \bar{v}_{12} = -[s_{12} - (s_{12})_0] + (B_{X.2} - B_{X.1})\delta X_{2+1} + (B_{Y.2} - B_{Y.1})\delta Y_{2+1} + (B_{Z.2} - B_{Z.1})\delta Z_{2+1} + \\
 + (B_{X.2} + B_{X.1})\delta X_{2-1} + (B_{Y.2} + B_{Y.1})\delta Y_{2-1} + (B_{Z.2} + B_{Z.1})\delta Z_{2-1} + \\
 + (B_{r.2} - B_{r.1})\delta r + (B_{\delta.2} - B_{\delta.1})\delta(\delta) + (B_{\alpha.2} - B_{\alpha.1})\delta\alpha + \\
 + (B_{\xi.2} - B_{\xi.1})\delta\xi + (B_{\eta.2} - B_{\eta.1})\delta\eta + (B_{c.2} - B_{c.1})\delta c + \\
 + (B_{\varkappa.2} - B_{\varkappa.1})\delta\varkappa + (B_{\varkappa^*.2} - B_{\varkappa^*.1})\delta\varkappa^*.$$

Die Koeffizienten $B_{u.1}, B_{u.2}$ mit $u = X, Y, Z, r, \delta, \alpha, \xi, \eta, c, \varkappa, \varkappa^*$ sind nach (65) bis (72) und nach (127),(128),(129),(153),(154):

$$(156) \quad B_{X.1} = \frac{1}{s_1} (X_1 - X_S),$$

$$(157) \quad B_{Y.1} = \frac{1}{s_1} (Y_1 - Y_S),$$

$$(158) \quad B_{Z.1} = \frac{1}{s_1} (Z_1 - Z_S);$$

$$(159) \quad B_{r.1} = -\frac{1}{s_1 r} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \varphi_S,$$

$$(160) \quad B_{\delta.1} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \kappa'_1(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(161) \quad B_{\alpha.1} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \kappa'_2(\delta, \alpha) \right\};$$

42

$$(162) \quad B_{\xi.1} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{s}_1'(\xi, \gamma) \underline{R}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(163) \quad B_{\eta.1} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{s}_2'(\xi, \gamma) \underline{R}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\};$$

$$(164) \quad B_{o.1} = -\frac{s_1}{c};$$

$$(165) \quad B_{\varepsilon.1} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.1} - \varphi_S) \left\{ \underline{s}(\xi, \gamma) \underline{R}_Z'(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(166) \quad B_{\varepsilon^*.1} = t \cdot B_{\varepsilon.1}.$$

6.3. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und ekliptikale Länge und Breite als Koordinaten für den Mond

Als Unbekannte für die Position der Beobachtungsstation gelten wieder die X_Q, Y_Q, Z_Q -Koordinaten. Die Parameter der Position des Mondes sind die räumlichen Polarkoordinaten r, b, l , die schon im Abschnitt 5.3. eingeführt wurden.

Es liegen also die folgenden Unbekannten vor:

die Stationskoordinaten: X_Q, Y_Q, Z_Q ;

die Koordinaten des Mondes: r, b, l ;

r : Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, b : ekliptikale Breite, l : ekliptikale Länge ;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, γ ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: $\varepsilon, \varepsilon^*$.

Der Näherungswert s_o für die gemessene Strecke s :

$$(167) \quad s_o^2 = [(\varphi_Q)_o - (\varphi_S)_o]^2$$

mit :

$$(168) \quad (\varphi_{Q_1})_o = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_o, \quad ,$$

$$(169) \quad (\varphi_S)_o = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix}_o = r_o \underline{s}(\xi_o, \gamma_o) \underline{R}_Z(\theta_o) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b_o, l_o) .$$

Die Fehlergleichung für die Differenz zweier simultaner Streckenmessungen zum Mond lautet

$$\begin{aligned}
 (170) \quad \bar{v}_{12} = & -[s_{12} - (s_{12})_0] + (C_{X.2} - C_{X.1})\delta X_{2+1} + (C_{Y.2} - C_{Y.1})\delta Y_{2+1} + (C_{Z.2} - C_{Z.1})\delta Z_{2+1} + \\
 & + (C_{X.2} + C_{X.1})\delta X_{2-1} + (C_{Y.2} + C_{Y.1})\delta Y_{2-1} + (C_{Z.2} + C_{Z.1})\delta Z_{2-1} + \\
 & + (C_{r.2} - C_{r.1})\delta r + (C_{b.2} - C_{b.1})\delta b + (C_{l.2} - C_{l.1})\delta l + \\
 & + (C_{\xi.2} - C_{\xi.1})\delta \xi + (C_{\eta.2} - C_{\eta.1})\delta \eta + (C_{c.2} - C_{c.1})\delta c + \\
 & + (C_{\alpha.2} - C_{\alpha.1})\delta \alpha + (C_{\alpha^*.2} - C_{\alpha^*.1})\delta \alpha^* .
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $C_{u.1}$, $C_{u.2}$; $u = X, Y, Z, r, b, l, \xi, \eta, c, \alpha, \alpha^*$ sind mit (156) bis (166) und mit (167), (168), (169):

$$(171) \quad C_{X.i} = \frac{1}{s_i} (X_i - X_S) ,$$

$$(172) \quad C_{Y.i} = \frac{1}{s_i} (Y_i - Y_S) ,$$

$$(173) \quad C_{Z.i} = \frac{1}{s_i} (Z_i - Z_S) ;$$

$$(174) \quad C_{r.i} = -\frac{1}{s_i r} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \varphi_S ,$$

$$(175) \quad C_{b.i} = -\frac{r}{s_i} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa_1'(b, l) \right\} ,$$

$$(176) \quad C_{l.i} = -\frac{r}{s_i} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa_2'(b, l) \right\} ;$$

$$(177) \quad C_{\xi.i} = -\frac{r}{s_i} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}_1'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b, l) \right\} ,$$

$$(178) \quad C_{\eta.i} = -\frac{r}{s_i} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}_2'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b, l) \right\} ;$$

$$(179) \quad C_{c.i} = -\frac{s_i}{c} ;$$

$$(180) \quad C_{\alpha.i} = -\frac{r}{s_i} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z'(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b, l) \right\} ,$$

$$(181) \quad C_{\alpha^*.i} = t \cdot C_{\alpha.i} .$$

6.4. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf die Ekliptik für den Mond

Die Beobachtungsstationen sind wieder in X, Y, Z-Koordinaten angegeben, während die räumliche Position des Mondes mit ekliptikalischen Bahnelementen berechnet wird, wie in Abschnitt 5.4.

Die Unbekannten:

die Stationskoordinaten: X_Q, Y_Q, Z_Q ;

die ekliptikalen Bahnelemente des Mondes: $a, e, \omega^*, i^*, \Omega^*, v$;

a : große Halbachse der Bahnellipse des Mondes, e : Exzentrizität der Bahnellipse des Mondes, ω^* : Argument des Perigäums in bezug auf die Ekliptik, i^* : Neigung der Bahn des Mondes relativ zur Ekliptik, Ω^* : ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens, v : wahre Anomalie ;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ, η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: α, α^* .

Der Näherungswert s_0 für die gemessene Strecke s :

$$(182) \quad s_0^2 = [(\varphi_Q)_0 - (\varphi_S)_0]^2$$

mit

$$(183) \quad (\varphi_{Q_1})_0 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_0 ,$$

$$(184) \quad (\varphi_S)_0 = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix}_0 = r_0 \underline{\underline{S}}(\xi_0, \eta_0) \underline{\underline{R}}_Z(\theta_0) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\Omega_0^*) \underline{\underline{R}}_X(-i_0^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega_0^*) \varphi(v_0) .$$

Die Fehlergleichung für die Differenz zweier simultaner Streckenmessungen:

$$(185) \quad \bar{v}_{12} = -[s_{12} - (s_{12})_0] + (D_{X.2} - D_{X.1})\delta X_{2+1} + (D_{Y.2} - D_{Y.1})\delta Y_{2+1} + (D_{Z.2} - D_{Z.1})\delta Z_{2+1} + \\ + (D_{X.2} + D_{X.1})\delta X_{2-1} + (D_{Y.2} + D_{Y.1})\delta Y_{2-1} + (D_{Z.2} + D_{Z.1})\delta Z_{2-1} + \\ + (D_{a.2} - D_{a.1})\delta a + (D_{e.2} - D_{e.1})\delta e + (D_{\omega^*.2} - D_{\omega^*.1})\delta \omega^* + \\ + (D_{i^*.2} - D_{i^*.1})\delta i^* + (D_{\Omega^*.2} - D_{\Omega^*.1})\delta \Omega^* + (D_{v.2} - D_{v.1})\delta v + \\ + (D_{\xi.2} - D_{\xi.1})\delta \xi + (D_{\eta.2} - D_{\eta.1})\delta \eta + (D_{c.2} - D_{c.1})\delta c + \\ + (D_{\alpha.2} - D_{\alpha.1})\delta \alpha + (D_{\alpha^*.2} - D_{\alpha^*.1})\delta \alpha^* .$$

Die Koeffizienten $D_{u.2}, D_{u.1}$ mit $u = X, Y, Z, a, e, \omega^*, i^*, \Omega^*, v, \xi, \eta, c, \alpha, \alpha^*$ sind nach (182)(183)(184):

$$(186) \quad D_{X.i} = \frac{1}{s_1} (X_1 - X_S) ,$$

$$(187) \quad D_{Y.i} = \frac{1}{s_1} (Y_1 - Y_S) ,$$

$$(188) \quad D_{Z.i} = \frac{1}{s_1} (Z_1 - Z_S) ;$$

$$(189) \quad D_{a.i} = -\frac{1}{s_1 a} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \varphi_S,$$

$$(190) \quad D_{e.i} = \frac{1}{s_1} \frac{2e+(1+e^2)\cos v}{(1-e^2)(1+e\cos v)} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \varphi_S,$$

$$(191) \quad D_{\omega^*.i} = \frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-1^*) \underline{R}_Z'(-\omega^*) \varphi(v) \right\},$$

$$(192) \quad D_{i^*.i} = \frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X'(-1^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\},$$

$$(193) \quad D_{\mathcal{J}^*.i} = \frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z'(-\Omega^*) \underline{R}_X(-1^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\},$$

$$(194) \quad D_{v.i} = -\frac{1}{s_1} \frac{e \sin v}{1+e \cos v} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \varphi_S - \frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \times \right. \\ \left. \times \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-1^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi'(v) \right\};$$

$$(195) \quad D_{\xi.i} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}'_1(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-1^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\},$$

$$(196) \quad D_{\eta.i} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}'_2(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-1^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\};$$

$$(197) \quad D_{c.i} = -\frac{s_1}{c};$$

$$(198) \quad D_{\omega.e.i} = -\frac{r}{s_1} (\varphi_{Q.i} - \varphi_S) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z'(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \underline{R}_Z(-\Omega^*) \underline{R}_X(-1^*) \underline{R}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \right\},$$

$$(199) \quad D_{\omega^*.i} = t \cdot D_{\omega.e.i}.$$

7. Die Fehlergleichungen für simultane Entfernungsmessungen zum Mond an zwei Stationen bei astronomischem Anschluß des Mondes

Die Fehlergleichungen für simultane Entfernungsmessungen kann man auch in eine andere als in Kap. 6 angegebene Form bringen. Mit Abb. 1 gilt im geozentrischen erdfesten X,Y,Z-Koordinatensystem

$$\varrho_{Q.2} + s_2 \alpha_2 = s_M \alpha_M ,$$

$$\varrho_{Q.1} + s_1 \alpha_1 = s_M \alpha_M .$$

Es folgt

$$\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1} = -s_2 \alpha_2 + s_1 \alpha_1 ;$$

$$(200) \quad \alpha_1 = \alpha_M + \alpha_1 - \alpha_M ,$$

$$(201) \quad \alpha_2 = \alpha_M + \alpha_2 - \alpha_M .$$

Also

$$(202) \quad (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) = -s_2 \alpha_M - s_2 (\alpha_2 - \alpha_M) + s_1 \alpha_M + s_1 (\alpha_1 - \alpha_M) ,$$

$$(203) \quad (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \alpha_M = -(s_2 - s_1) - s_2 (\alpha_2 - \alpha_M) \alpha_M + s_1 (\alpha_1 - \alpha_M) \alpha_M ,$$

$$(204) \quad (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \alpha_M = -(s_2 - s_1) + \Delta w_{12} ;$$

$$(205) \quad \Delta w_{12} = \Delta w_2 - \Delta w_1 ,$$

$$(206) \quad \Delta w_2 = -s_2 (\alpha_2 - \alpha_M) \alpha_M ,$$

$$(207) \quad \Delta w_1 = -s_1 (\alpha_1 - \alpha_M) \alpha_M .$$

Es ist weiter

$$(208) \quad \Delta w_2 = -s_2 \alpha_2 \alpha_M + s_2 .$$

Der theoretische Widerspruch Δw_2 errechnet sich aus Näherungswerten für die Position des Mondes $(\varrho_S)_0$ und der irdischen Beobachtungsstation $(\varrho_{Q.2})_0$:

$$(209) \quad \Delta w_2 = (\varrho_{Q.2})_0 \frac{(\varrho_S)_0}{|(\varrho_S)_0|} + |(\varrho_S)_0 - (\varrho_{Q.2})_0| - |(\varrho_S)_0| ,$$

$$(210) \quad \Delta w_1 = (\varrho_{Q.1})_0 \frac{(\varrho_S)_0}{|(\varrho_S)_0|} + |(\varrho_S)_0 - (\varrho_{Q.1})_0| - |(\varrho_S)_0| ,$$

$$(211) \quad \Delta w_{12} = \{(\varrho_{Q.2})_0 - (\varrho_{Q.1})_0\} \frac{(\varrho_S)_0}{|(\varrho_S)_0|} + |(\varrho_S)_0 - (\varrho_{Q.2})_0| - |(\varrho_S)_0 - (\varrho_{Q.1})_0| .$$

Es ist noch notwendig, die Genauigkeit, mit der die Näherungspositionen $(\varphi_Q)_0$ und $(\varphi_S)_0$ bekannt sein sollten, zu betrachten. Ist $\zeta_1(\zeta_2)$ der Winkel zwischen den Vektoren $\alpha_1(\alpha_2)$ und α_M , dann ist mit Abb. 1

$$(212) \quad \Delta w_2 = s_2 - s_2 \cos \zeta_2,$$

$$(213) \quad \Delta w_2 = s_2 \frac{1}{2} \zeta_2^2,$$

und für die Fehlerfortpflanzung gilt

$$(214) \quad d[\Delta w_2] = \frac{1}{2} \zeta_2^2 ds_2 + s_2 \zeta_2 d\zeta_2.$$

Mit $\zeta_2 = 1/60$, $s_2 d\zeta_2 = dq_2$ folgt

$$(215) \quad d[\Delta w_2] = \frac{1}{7000} ds_2 + \frac{1}{60} dq_2.$$

Das Differential ds_2 repräsentiert den Fehler in der Entfernung des Mondes, dq_2 den in der Lage der Beobachtungsstation. Verschiebt sich die Position des Mondes senkrecht zu seinem geozentrischen Radiusvektor um den Betrag $d\bar{q}$, dann ändert sich das Produkt $s_2 \cdot d\zeta_2$ maximal um den Betrag $\zeta_2 \cdot d\bar{q}$. Der Einfluß von $d\bar{q}$ auf die Änderung des theoretischen Widerspruchs Δw_2 ist daher mit (214) gleich $\zeta_2^2 \cdot d\bar{q}$. Soll also Δw_2 um weniger als 10 cm verfälscht sein, dann muß s_2 innerhalb von etwa 700 m und die Position der Beobachtungsstation innerhalb von etwa 6 m bekannt sein. Die senkrecht zum geozentrischen Radiusvektor verlaufenden Komponenten in der Position des Mondes können innerhalb von 350 m unsicher sein, wenn Δw_2 maximal innerhalb von 10 cm unsicher sein darf. Unter Umständen ist also eine zweite Ausgleichung mit einer Nachiteration für Δw_2 und Δw_1 vorzunehmen. Man hat daher die Bedingungsgleichung

$$(216) \quad \Xi = (\varphi_{Q.2} - \varphi_{Q.1}) \alpha_M + s_{12} - \Delta w_{12} = 0.$$

Es folgt

$$(217) \quad \bar{v}_{12} + \sum_u \frac{\partial \Xi}{\partial u} du + s_{12} + [(\varphi_{Q.2} - \varphi_{Q.1}) \alpha_M]_0 - \Delta w_{12} = 0;$$

Der Parameter u durchläuft die Unbekannten des Problems.

Ist der zum Mond weisende Vektor α_M durch Beobachtungen, also durch einen astronomischen Anschluß, auf etwa $\pm 0,1$ genau oder genauer gegeben, so kann man ihn als eine zufällige Variable behandeln. Man hat dann \bar{v}_{12} und die Parameter des Vektors α_M als zufällige Variable in (217). Gleichung (217) ist dann eine Bedingungsgleichung mit Unbekannten. Ist aber auch der Vektor α_M unbekannt, dann hat man nur \bar{v}_{12} als zufällige Variable und die Stationskoordinaten, die Koordinaten des Mondes, die Parameter der Polbewegungsmatrix, die Lichtgeschwindigkeit und die Parameter der Erdrotation als Unbekannte. Es liegt dann eine Fehlergleichung der vermittelnden Beobachtungen vor.

7.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Mond

Die Parameter:

die halben Differenzen der Koordinaten der beiden Stationen Q_1 und Q_2 :

δX_{2-1} , δY_{2-1} , δZ_{2-1} ;

die Koordinaten des Mondes: δ , α ;

δ : Deklination, α : Rektaszension ;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ , η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: \varkappa , \varkappa^* .

Den Näherungswert für

$$(218) \quad [(\varphi_{Q.2} - \varphi_{Q.1}) \alpha_M]_0 = -(\overline{s_{12}})_0$$

erhält man aus den Näherungswerten für die Lage der Beobachtungsstationen, für die Position des Mondes, die Polbewegungsmatrix, die Lichtgeschwindigkeit und die Parameter der Erdrotation.

Die Bedingungsgleichung ist mit (214), (217), (218):

$$(219) \quad \overline{v}_{12} + \sum_u \overline{B}_u \delta u + s_{12} - (\overline{s_{12}})_0 - \Delta w_{12} = 0 ;$$

$$u = X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, \delta, \alpha, \xi, \eta, c, \varkappa, \varkappa^* .$$

Im erdfesten Koordinatensystem gilt

$$(220) \quad (\varphi_{Q.1})_0 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_0 ,$$

$$(221) \quad (\alpha_M)_0 = \underline{S}(\xi_0, \eta_0) \underline{R}_Z(\theta_0) \varkappa(\delta_0, \alpha_0) .$$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichung sind mit (156) bis (166) und mit (219):

$$(222) \quad \overline{B}_{X_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(223) \quad \overline{B}_{Y_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(224) \quad \overline{B}_{Z_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_M ;$$

$$(225) \quad \bar{B}_\delta = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa_1'(\delta, \alpha) \right\} ,$$

$$(226) \quad \bar{B}_\alpha = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa_2'(\delta, \alpha) \right\} ;$$

$$(227) \quad \bar{B}_\xi = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}_1'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\} ,$$

$$(228) \quad \bar{B}_\eta = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}_2'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\} ;$$

$$(229) \quad \bar{B}_c = \frac{s_{12}}{c} ;$$

$$(230) \quad \bar{B}_\alpha = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \right\} ,$$

$$(231) \quad \bar{B}_{\alpha^*} = t \cdot \bar{B}_\alpha .$$

7.2. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und ekliptikale Länge und Breite als Koordinaten für den Mond

Die Parameter:

die halben Koordinatenunterschiede der beiden Stationen: δX_{2-1} , δY_{2-1} , δZ_{2-1} ;

die Koordinaten des Mondes: b , l ;

b : ekliptikale Breite, l : ekliptikale Länge ;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ , η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: α , α^* .

Die Bedingungsgleichung ist mit (211),(217),(218):

$$(232) \quad \bar{v}_{12} + \sum_u \bar{C}_u \delta u + s_{12} - (\bar{s}_{12})_0 - 4w_{12} = 0 ;$$

$$u = X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, b, l, \xi, \eta, c, \alpha, \alpha^* .$$

Im erdfesten Koordinatensystem gilt

$$(233) \quad (\varrho_{Q.i})_0 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_0 ,$$

$$(234) \quad (\alpha_M)_0 = \underline{S}(\xi_0, \eta_0) \underline{R}_Z(\theta_0) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b_0, l_0) .$$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichung sind mit (171) bis (181) und mit (232):

$$(235) \quad \bar{C}_{X_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(236) \quad \bar{C}_{Y_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(237) \quad \bar{C}_{Z_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_M ;$$

$$(238) \quad \bar{C}_b = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa_1'(b, 1) \right\} ,$$

$$(239) \quad \bar{C}_1 = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa_2'(b, 1) \right\} ;$$

$$(240) \quad \bar{C}_\xi = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}'_1(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b, 1) \right\} ,$$

$$(241) \quad \bar{C}_\eta = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}'_2(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b, 1) \right\} ;$$

$$(242) \quad \bar{C}_c = \frac{s_{12}}{c} ;$$

$$(243) \quad \bar{C}_{\alpha} = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}'_Z(\theta) \underline{R}_X(-\varepsilon) \kappa(b, 1) \right\} ,$$

$$(244) \quad \bar{C}_{\alpha^*} = t \cdot \bar{C}_\alpha .$$

7.3. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Bahnelemente in bezug auf die Ekliptik für den Mond

Die Parameter:

die halben Differenzen der Koordinaten der beiden Stationen: δX_{2-1} , δY_{2-1} , δZ_{2-1} ;

die ekliptikalen Bahnelemente des Mondes: ω^* , i^* , \mathcal{L}^* , v ;

ω^* : Argument des Perigäums in bezug auf die Ekliptik, i^* : Neigung der Bahn des Mondes relativ zur Ekliptik, \mathcal{L}^* : ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens, v : wahre Anomalie ;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ , η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: α , α^* .

Die Bedingungsgleichung ist mit (211), (217), (218):

$$(245) \quad \bar{v}_{12} + \sum_u \bar{D}_u \delta u + s_{12} - (\overline{s_{12}})_0 - \Delta w_{12} = 0 ;$$

$$u = X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, \omega^*, i^*, \mathcal{L}^*, v, \xi, \eta, c, \alpha, \alpha^* .$$

Im erdfesten Koordinatensystem gilt:

$$(246) \quad (\varrho_{Q.1})_0 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_0 ,$$

$$(247) \quad (\alpha_M)_0 = \underline{\underline{S}}(\xi_0, \eta_0) \underline{\underline{R}}_Z(\theta_0) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}_0^*) \underline{\underline{R}}_X(-i_0^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega_0^*) \varphi(v_0) .$$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichung sind mit (186) bis (199) und mit (218), (245), (246), (247):

$$(248) \quad \bar{D}_{X_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(249) \quad \bar{D}_{Y_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(250) \quad \bar{D}_{Z_{2-1}} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_M ;$$

$$(251) \quad \bar{D}_{\omega^*} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}^*) \underline{\underline{R}}_X(-i^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \} ,$$

$$(252) \quad \bar{D}_{i^*} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}^*) \underline{\underline{R}}_X(-i^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \} ,$$

$$(253) \quad \bar{D}_{\mathcal{J}^*} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}^*) \underline{\underline{R}}_X(-i^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \} ,$$

$$(254) \quad \bar{D}_v = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}^*) \underline{\underline{R}}_X(-i^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega^*) \varphi'(v) \} ;$$

$$(255) \quad \bar{D}_\xi = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}_1(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}^*) \underline{\underline{R}}_X(-i^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \} ,$$

$$(256) \quad \bar{D}_\eta = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}_2(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}^*) \underline{\underline{R}}_X(-i^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \} ;$$

$$(257) \quad \bar{D}_c = \frac{s_{12}}{c} ;$$

$$(258) \quad \bar{D}_{\alpha c} = (\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \underline{\underline{R}}_X(-\varepsilon) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{J}^*) \underline{\underline{R}}_X(-i^*) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega^*) \varphi(v) \} ,$$

$$(259) \quad \bar{D}_{\alpha c^*} = t \cdot \bar{D}_{\alpha c} .$$

8. Die Fehlergleichungen für radiointerferometrische Beobachtungen der Laufzeitdifferenz

Wie in Kap. 3 ausgeführt wurde, kann man durch radiointerferometrische Beobachtungen eines Quasars an zwei Stationen auf der Erde die Differenz der Entfernungen dieser beiden Stationen von dem Quasar bestimmen (Abb.5):

$$(260) \quad s_{12} = s_2 - s_1 .$$

Es liegt also im Prinzip ein Fall vor, der analog ist dem bei simultanen Entfernungsmessungen zum Mond an zwei Stationen. Der Unterschied liegt lediglich darin, daß das kosmische Objekt jetzt unendlich entfernt ist. Daher kann man setzen

$$(261) \quad \frac{s_1}{s_1} = \frac{s_2}{s_2} = \frac{s_{12}}{s_1} = \frac{s_{12}}{s_2} = \frac{r_1}{r} = \frac{r_2}{r} = \frac{s_{12}}{r} = 0 .$$

Die Fehlergleichung hat mit (44),(126),(217) die folgende Form:

$$(262) \quad \bar{v}_{12} = - [s_{12} - (s_{12})_0] + \sum_u \frac{\partial s_{12}}{\partial u} \delta u - \frac{\partial s_{12}}{\partial c} \delta c .$$

Der Index u ist über die Unbekannten des Problems zu erstrecken, also über die Koordinatendifferenz der beiden Beobachtungsstationen, die Parameter des Einheitsvektors zum Quasar, die Parameter der Polbewegungsmatrix und die Parameter der Erdrotation. Die Größe s_{12} in (262) wird gemessen, die Näherungsgröße $(s_{12})_0$ ergibt sich aus den Näherungswerten für die Unbekannten:

$$(263) \quad (s_{12})_0 = - [(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \alpha_M]_0 ; \quad \alpha_M \text{ ist hier der Einheitsvektor zum Quasar.}$$

Die Koordinaten des Quasars wird man während der von den Interferenzbeobachtungen überdeckten Zeit in genügender Näherung als konstant ansehen können; man wird sie nicht wie beim Mond durch analytische Ausdrücke, die von der Zeit abhängen, darstellen müssen.

8.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Quasar

Die Unbekannten:

die halben Differenzen der Koordinaten der beiden Stationen Q_1 und Q_2 :

δX_{2-1} , δY_{2-1} , δZ_{2-1} ;

die Koordinaten des Quasars: δ , α ; δ : Deklination, α : Rektaszension ;

die Parameter der Polbewegungsmatrix: ξ , η ;

die Lichtgeschwindigkeit: c ;

die Parameter der Erdrotation: \varkappa , \varkappa^* .

Die folgende Gleichung muß erfüllt werden:

$$(264) \quad s_{12} = - (v_{Q.2} - v_{Q.1}) \alpha_M$$

mit

$$(265) \quad v_{Q.i} = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$$

und

$$(266) \quad \alpha_M = \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) .$$

Die Fehlergleichung:

$$(267) \quad \bar{v}_{12} = - [s_{12} - (s_{12})_0] + \sum_u B_u^* \delta u ;$$

$$u = X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, \delta, \alpha, \xi, \eta, c, \varkappa, \varkappa^* .$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichung:

$$(268) \quad B_{X_{2-1}}^* = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(269) \quad B_{Y_{2-1}}^* = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_M ,$$

$$(270) \quad B_{Z_{2-1}}^* = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_M ;$$

$$(271) \quad B_{\delta}^* = - (v_{Q.2} - v_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \kappa_1'(\delta, \alpha) \} ,$$

$$(272) \quad B_{\alpha}^* = - (v_{Q.2} - v_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \kappa_2'(\delta, \alpha) \} ;$$

$$(273) \quad B_{\xi}^* = - (v_{Q.2} - v_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}_1'(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \} ,$$

$$(274) \quad B_{\eta}^* = - (v_{Q.2} - v_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}_2'(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \} ;$$

$$(275) \quad B_c^* = - \frac{s_{12}}{c} ;$$

$$(276) \quad B_{\varkappa}^* = - (v_{Q.2} - v_{Q.1}) \{ \underline{\underline{S}}(\xi, \eta) \underline{\underline{R}}_Z'(\theta) \kappa(\delta, \alpha) \} ,$$

$$(277) \quad B_{\varkappa^*}^* = t \cdot B_{\varkappa}^* .$$

9. Die Fehlergleichungen für radiointerferometrische Beobachtungen der Streifenfrequenz

In Kap. 3 wurde gezeigt, daß man durch Beobachtung der Streifenfrequenz f - vgl. (3)(6)(7) - die zeitliche Änderung der Streckendifferenz s_{12} bestimmen kann. Man kann über einige Minuten integrieren und erhält als Integral die Differenz von s_{12} an der unteren und oberen Integrationsgrenze. $s_{12.o}$ ist der obere und $s_{12.u}$ der untere Wert für s_{12} , δs_{12} ist die Differenz dieser Werte. Mit den Gleichungen (7)(8) ist der beobachtete Wert

$$(278) \quad \delta s_{12} = s_{12.o} - s_{12.u} .$$

Behandelt man δs_{12} als eine zufällige Variable mit der zufälligen Verbesserung $\bar{v}_{\delta,12}$ und setzt man für den aus den Näherungswerten der Unbekannten errechneten Betrag von δs_{12} die Abkürzung

$$(279) \quad (\delta s_{12})_0 = (s_{12.o})_0 - (s_{12.u})_0 ,$$

so erhält man als Differenz zweier Fehlergleichungen der Form (262) die gesuchte Fehlergleichung für den ausgeglichenen Wert $\delta s_{12} + \bar{v}_{\delta,12}$. Es ist also

$$(280) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_{12.o} = - [s_{12.o} - (s_{12.o})_0] + \sum_w \frac{\partial s_{12.o}}{\partial w} \delta w - \frac{\partial s_{12.o}}{\partial c} \delta c , \\ \bar{v}_{12.u} = - [s_{12.u} - (s_{12.u})_0] + \sum_w \frac{\partial s_{12.u}}{\partial w} \delta w - \frac{\partial s_{12.u}}{\partial c} \delta c , \\ \bar{v}_{\delta,12} = - [\delta s_{12} - (\delta s_{12})_0] + \sum_w \frac{\partial (\delta s_{12})}{\partial w} \delta w - \frac{\partial (\delta s_{12})}{\partial c} \delta c ; \\ w = X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, \delta, \alpha, \xi, \eta, \varrho, \varpi, \varpi^* . \end{array} \right.$$

9.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten für die Station und Rektaszension und Deklination als Koordinaten für den Quasar

Die unbekannt Parameter w in (280) sind die gleichen wie in Abschnitt 8.1. des letzten Kapitels:

$$X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, \delta, \alpha, \xi, \eta, \varrho, \varpi, \varpi^* .$$

Mit (267) erhält man daher aus (280)

$$(281) \quad \bar{v}_{\delta,12} = - [\delta s_{12} - (\delta s_{12})_0] + \sum_w (B_w^*)_{\sigma} - (B_w^*)_{\mu} \delta w ; \\ w = X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, \delta, \alpha, \xi, \eta, \varrho, \varpi, \varpi^* .$$

Mit

$$(282) \quad [(B_W^*)_{\sigma} - (B_W^*)_{\mu}] = B_W^{**}$$

folgt

$$(283) \quad \bar{v}_{\delta.12} = - [\delta s_{12} - (\delta s_{12})_0] + \sum_W B_W^{**} \delta w$$

Die Koeffizienten der Fehlergleichung ergeben sich nach (264) bis (277) wie folgt:

$$(284) \quad B_{X_{2-1}}^{**} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\sigma}) \kappa(\delta, \alpha) - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\mu}) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(285) \quad B_{Y_{2-1}}^{**} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\sigma}) \kappa(\delta, \alpha) - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\mu}) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(286) \quad B_{Z_{2-1}}^{**} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\sigma}) \kappa(\delta, \alpha) - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\mu}) \kappa(\delta, \alpha) \right\};$$

$$(287) \quad B_{\delta}^{**} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\sigma}) \kappa_1'(\delta, \alpha) - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\mu}) \kappa_1'(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(288) \quad B_{\alpha}^{**} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\sigma}) \kappa_2'(\delta, \alpha) - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\mu}) \kappa_2'(\delta, \alpha) \right\};$$

$$(289) \quad B_{\xi}^{**} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}_1'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\sigma}) \kappa(\delta, \alpha) - \underline{S}_1'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\mu}) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(290) \quad B_{\eta}^{**} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}_2'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\sigma}) \kappa(\delta, \alpha) - \underline{S}_2'(\xi, \eta) \underline{R}_Z(\theta_{\mu}) \kappa(\delta, \alpha) \right\};$$

$$(291) \quad B_c^{**} = -\frac{\delta s_{12}}{c};$$

$$(292) \quad B_{\alpha}^{**} = -(\varrho_{Q.2} - \varrho_{Q.1}) \left\{ \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z'(\theta_{\sigma}) \kappa(\delta, \alpha) - \underline{S}(\xi, \eta) \underline{R}_Z'(\theta_{\mu}) \kappa(\delta, \alpha) \right\},$$

$$(293) \quad B_{\alpha\alpha}^{**} = t \cdot B_{\alpha}^{**}.$$

θ_{σ} ist die Sternzeit für die obere und θ_{μ} für die untere Begrenzung des Integrationsintervalls (nicht zu verwechseln mit dem Wert θ_0 nach (39) für den Näherungswert der Sternzeit allgemein). Bei den Gleichungen (284) bis (293) wurde angenommen, daß die Parameter der Polbewegungsmatrix ξ, η und die Parameter der Position des Quasars α, δ während des nur wenige Minuten dauernden Zeitintervalls $(\theta_{\sigma} - \theta_{\mu})$ in genügender Annäherung konstant sind.

10. Interferometrische Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten und künstlicher Radioquellen auf dem Mond

Nicht nur die Radiosterne und insbesondere die Quasare können interferometrisch beobachtet werden, auch künstliche Erdsatelliten mit einem Radiosender können in ihrer Bahn mit einer Radiointerferenzeinrichtung verfolgt werden. Hierbei kommt man mit einem relativ schwachen Sender und relativ einfachen Antennen aus, weil die meisten künstlichen Erdsatelliten in etwa 1000 km Höhe über der Erdoberfläche ihre Bahn ziehen und damit den Interferometerstationen relativ nahe sind. Es sollen daher noch die Fehlergleichungen aufgestellt werden, die für die interferometrische Bahnverfolgung der erdnahen künstlichen Satelliten gültig sind.

Sind Q_1 und Q_2 die Positionen der Antennen des Interferometers, Abb. 5, dann soll angenommen werden, (5),(6),(7),(8), daß man wie bei der interferometrischen Beobachtung der Quasare einerseits die Streckendifferenz $s_{12} = s_2 - s_1$ aus einer Kreuzkorrelation der Registrierungen auf den Stationen Q_1 und Q_2 erhalten habe und daß man andererseits aus den pro Sekunde beobachteten durch die Meßeinrichtung laufenden Interferenzstreifen ("Streifenfrequenz")

$$f = \frac{1}{\lambda} \frac{ds_{12}}{dt}$$

durch Integration über einen bestimmten Zeitabschnitt die Differenz

$$\delta s_{12} = s_{12,\sigma} - s_{12,u}$$

bestimmt hat, wobei der Index σ die obere und u die untere Integrationsgrenze bezeichnen.

Im Abschnitt 5.5. sind bereits die Fehlergleichungen für eine einzelne Streckenmessung zum Mond entwickelt worden, wobei die Position des Mondes in Bahnelementen in bezug auf den Äquator dargestellt wurde. Die Gleichungen dieses Abschnittes lassen sich verwenden für die Aufstellung der Fehlergleichung für die Streckendifferenz s_{12} bei interferometrischer Beobachtung künstlicher Erdsatelliten.

Die Fehlergleichung für die Strecke s_1 zwischen dem Satelliten und der Station Q_1 lautet mit (108)

$$(294) \quad \bar{v}_1 = - [s_1 - (s_1)_0] + \sum_u E_{u,1} \delta u$$

mit

$$u = \varrho_1, \varphi_1, \lambda_1, a, e, \omega, i, \Omega, v, \xi, \eta, c, \kappa, \kappa^*.$$

Die Koeffizienten $E_{u,1}$ der Gleichung (294) ergeben sich aus den Koeffizienten E_u der Gleichungen (108) bis (122), indem man dort die Strecke s durch s_1 und den Vektor ϱ_Q durch $\varrho_{Q,1}$ ersetzt. Dadurch bezieht man sich speziell auf die Beobachtungsstation Q_1 . Analog gilt für die Fehlergleichung der Strecke s_2 zwischen dem Satelliten und der Station Q_2

$$(295) \quad \bar{v}_2 = - [s_2 - (s_2)_0] + \sum_w E_{w,2} \delta w$$

mit

$$w = \varrho_2, \varphi_2, \lambda_2, a, e, \omega, i, \varrho, v, \xi, \eta, c, x, x^*.$$

Man bildet schließlich die Differenz der Gleichungen (295) und (294) und findet mit

$$\bar{v}_{12} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

die folgende Beziehung:

$$(296) \quad \bar{v}_{12} = - [s_{12} - (s_{12})_0] + E_{\varrho_2.2} \delta\varrho_2 + E_{\varphi_2.2} \delta\varphi_2 + \\ + E_{\lambda_2.2} \delta\lambda_2 - E_{\varrho_1.1} \delta\varrho_1 - E_{\varphi_1.1} \delta\varphi_1 - E_{\lambda_1.1} \delta\lambda_1 + \\ + (E_{a.2} - E_{a.1})\delta a + (E_{e.2} - E_{e.1})\delta e + (E_{\omega.2} - E_{\omega.1})\delta\omega + \\ + (E_{i.2} - E_{i.1})\delta i + (E_{\varrho.2} - E_{\varrho.1})\delta\varrho + (E_{v.2} - E_{v.1})\delta v + \\ + (E_{\xi.2} - E_{\xi.1})\delta\xi + (E_{\eta.2} - E_{\eta.1})\delta\eta + (E_{c.2} - E_{c.1})\delta c + \\ + (E_{x.2} - E_{x.1})\delta x + (E_{x^*.2} - E_{x^*.1})\delta x^*.$$

Die Gleichung (296) kann man abkürzend wie folgt schreiben:

$$(297) \quad \bar{v}_{12} = - [s_{12} - (s_{12})_0] + \sum_q E_q^* \delta q$$

mit

$$q = \varrho_2, \varphi_2, \lambda_2, \varrho_1, \varphi_1, \lambda_1, a, e, \omega, i, \varrho, v, \xi, \eta, c, x, x^*.$$

Nachdem die Fehlergleichung für die beobachtete Größe s_{12} gefunden worden ist, kann damit die Fehlergleichung für die Differenz δs_{12} der Werte $s_{12.o}$ und $s_{12.u}$ gebildet werden. Man findet

$$(298) \quad \bar{v}_{\delta.12} = - [\delta s_{12} - (\delta s_{12})_0] + \sum_q [(E_q^*)_{\theta} - (E_q^*)_u] \delta q$$

mit

$$q = \varrho_2, \varphi_2, \lambda_2, \varrho_1, \varphi_1, \lambda_1, a, e, \omega, i, \varrho, v, \xi, \eta, c, x, x^*.$$

Bei den Koeffizienten $(E_q^*)_u$ bzw. $(E_q^*)_{\theta}$ wurde in E_q^* die Sternzeit θ im Moment der unteren bzw. der oberen Begrenzung des Integrationsintervalls, $\theta = \theta_u$ bzw. θ_{θ} , genommen, oder richtiger die genäherte Sternzeit $(\theta_o)_u$ und $(\theta_o)_{\theta}$;

$$(299) \quad (E_q^*)_u = (E_q^*)_{\theta=\theta_u},$$

$$(300) \quad (E_q^*)_{\theta} = (E_q^*)_{\theta=\theta_{\theta}}.$$

Durch die Veränderung der Zeit ändern sich in den Koeffizienten der Gleichungen (300), (299), (298), (297), (109) bis (122) mit (107) die Rotationsmatrix $\underline{R}_Z(\theta_0)$ und die Bahnelemente des Satelliten, insbesondere seine wahre Anomalie v .

Setzt man in (298) zur Abkürzung

$$(301) \quad \mathbb{E}_q^{**} = (\mathbb{E}_q^*)_e - (\mathbb{E}_q^*)_u ,$$

so folgt die gesuchte Fehlergleichung mit

$$(302) \quad \bar{v}_{\delta,12} = - \left[\delta s_{12} - (\delta s_{12})_0 \right] \sum_q \mathbb{E}_q^{**} \delta q ,$$

$$q = \varrho_2, \varphi_2, \lambda_2, \varrho_1, \varphi_1, \lambda_1, a, e, \omega, i, \Omega, v, \xi, \eta, \sigma, \varkappa, \varkappa^* .$$

Bei der Auswertung der Beobachtungen kosmischer Objekte führt die endliche Laufzeit der Laserblitze und die der Radiowellen dazu, daß die Position des kosmischen Objekts, sei es nun der Mond oder ein künstlicher Erdsatellit, zu einem anderen Zeitpunkt zu berechnen ist als die Position der einen Beobachtungsstation oder der beiden Beobachtungsstationen auf der Erde.

Wird der Laserimpuls zur Zeit θ_a ausgestrahlt, dann erreicht er den Satelliten in dessen räumlicher Position zur Zeit $\theta_a + s/c$, wenn s hier ein grober Näherungswert für die Entfernung zum Satelliten ist; der Impuls kehrt zur selben Beobachtungsstation zur Zeit $\theta_e = \theta_a + 2s/c$ zurück. Der Weg von der Erde zum Satelliten errechnet sich also mit (105), (106), (107) nach folgender Formel:

$$(303) \quad (s_{aE})^2 = \left[\varrho_0 \kappa(\varphi_0, \lambda_0) - \{r_0\}_{1/2(a+e)} \underline{S}(\xi_0, \eta_0) \underline{R}_Z(\{\theta_0\}_a) \underline{R}_Z(-\Omega_0) \underline{R}_X(-i_0) \times \right. \\ \left. \times \underline{R}_Z(-\omega_0) \varphi(\{v_0\}_{1/2(a+e)}) \right]^2$$

Die Bezeichnung $\{\theta_0\}_a$ bedeutet, daß der Näherungswert für die Sternzeit θ_0 für den Augenblick des Ausstrahlens des Laserblitzes zu nehmen ist; die Bezeichnungen $\{r_0\}_{1/2(a+e)}$ und $\{v_0\}_{1/2(a+e)}$ weisen dagegen darauf hin, daß die Werte r_0 und v_0 für den Wert der genäherten Sternzeit θ_0 im Moment des Eintreffens des Laserblitzes beim Satelliten zur Zeit

$$(304) \quad \{\theta_0\}_{1/2(a+e)} = \frac{1}{2} \left[\{\theta_0\}_a + \{\theta_0\}_e \right]$$

zu berechnen sind. Der Weg vom Satelliten zurück zur Beobachtungsstation ergibt sich dann aus

$$(305) \quad (s_{eE})^2 = \left[\varrho_0 \kappa(\varphi_0, \lambda_0) - \{r_0\}_{1/2(a+e)} \underline{S}(\xi_0, \eta_0) \underline{R}_Z(\{\theta_0\}_e) \underline{R}_Z(-\Omega_0) \underline{R}_X(-i_0) \times \right. \\ \left. \times \underline{R}_Z(-\omega_0) \varphi(\{v_0\}_{1/2(a+e)}) \right]^2 .$$

In den Gleichungen (303) und (305) wird man die Bahnelemente $a, e, \mathcal{L}, i, \omega$ des künstlichen Erdsatelliten oder des Mondes während der Laufzeit der Laserblitze als konstant annehmen können. Bei den Laserentfernungsmessungen muß man dann den Wert

$$(306) \quad s = \frac{1}{2} [s_{aS} + s_{Se}]$$

als Beobachtungsgröße einführen. Weil die Laufzeit der Laserblitze relativ kurz ist, kann man in den Gleichungen (303), (305), (306) in der Zeit linearisieren. So ergibt sich in ausreichender Annäherung

$$(307) \quad s^2 = \left[\varrho_0 \kappa(\varphi_0, \lambda_0) - \{r_0\} \frac{1}{2(a+e)} \underline{\underline{S}}(\xi_0, \eta_0) \underline{\underline{R}}_Z(\{\theta_0\} \frac{1}{2(a+e)}) \times \right. \\ \left. \times \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{L}_0) \underline{\underline{R}}_X(-i_0) \underline{\underline{R}}_Z(-\omega_0) \varphi(\{v_0\} \frac{1}{2(a+e)}) \right]^2 .$$

Während bei Laserbeobachtungen die Laufzeit der Blitze von der Erde zum kosmischen Objekt und dann wieder zurück zur Erde zu betrachten ist, ist dagegen bei interferometrischen Messungen der zeitliche Unterschied von Wichtigkeit, zu dem eine von einem Quasar, von einem künstlichen Erdsatelliten oder von einer künstlichen Radioquelle auf dem Mond ausgesandte Radiowelle auf der Erde an dem einen Endpunkt Q_2 des Interferometers später eintrifft als an dem anderen Endpunkt Q_1 . Verläßt die Radiowelle zur Zeit θ_S den Satelliten, dann erreicht sie den Punkt Q_1 in seiner räumlichen Position zur Zeit $\theta_S + s_1/c = \theta_{Q_1}$ und den anderen Endpunkt Q_2 des Interferometers zur Zeit $\theta_S + s_2/c = \theta_{Q_2}$. Hier sind s_1 und s_2 nur grobe Näherungswerte für die betreffenden Entfernungen zum Satelliten. Die genau aus den Näherungswerten der Parameter errechnete Strecke $(s_1)_0$ ergibt sich dann mit der folgenden Gleichung:

$$(308) \quad (s_1)_0^2 = \left[\varrho_0 \kappa(\varphi_0, \lambda_0) - \{r_0\}_S \underline{\underline{S}}(\xi_0, \eta_0) \underline{\underline{R}}_Z(\{\theta_0\}_{Q_1}) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{L}_0) \underline{\underline{R}}_X(-i_0) \times \right. \\ \left. \times \underline{\underline{R}}_Z(-\omega_0) \varphi(\{v_0\}_S) \right]^2 .$$

Die Bezeichnung $\{ \}_S, \{ \}_{Q_1}$ weist darauf hin, daß für die Zeit die Werte θ_S bzw. θ_{Q_1} zu wählen sind. Für die Strecke $(s_2)_0$ gilt analog

$$(309) \quad (s_2)_0^2 = \left[\varrho_0 \kappa(\varphi_0, \lambda_0) - \{r_0\}_S \underline{\underline{S}}(\xi_0, \eta_0) \underline{\underline{R}}_Z(\{\theta_0\}_{Q_2}) \underline{\underline{R}}_Z(-\mathcal{L}_0) \underline{\underline{R}}_X(-i_0) \times \right. \\ \left. \times \underline{\underline{R}}_Z(-\omega_0) \varphi(\{v_0\}_S) \right]^2 .$$

In die Fehlergleichungen der Radiointerferometrie sind bei dem aus den Näherungsdaten der Parameter genau berechneten Wert von $(s_{12})_0 = (s_2)_0 - (s_1)_0$ die einzelnen Strecken $(s_1)_0$ und $(s_2)_0$ mit den Gleichungen (308) und (309) zu erhalten. Der Ausdruck $(\delta s_{12})_0$ ergibt sich als Differenz zweier Werte $(s_{12})_0$, die beide mit (308) und (309) zu ermitteln sind.

Ist die Länge der Basis von der gleichen Größenordnung wie die Höhe des Satelliten, dann erscheinen die beiden Beobachtungsstationen auf der Erde vom Satelliten aus unter

einem relativ großen Winkel, und man kann nicht nur wie bei den Beobachtungen des Mondes oder eines Quasars den Verbindungsvektor zwischen den beiden Stationen bestimmen, sondern auch ihre absolute Lage im Raum. Die Koordinaten beider Stationen lassen sich vollkommen trennen, daher sind die Gleichungen (297) und (302) auch nach allen 6 Koordinaten dieser beiden Stationen entwickelt.

Ist aber auf dem Mond eine künstliche Radioquelle installiert und wird diese mit einem Interferometer mit langer Basis beobachtet, dann erscheinen die Endpunkte des Interferometers vom Mond aus betrachtet unter einem relativ kleinen Winkel, und die Koordinaten der beiden Stationen lassen sich nicht trennen, man kann lediglich den Verbindungsvektor (Differenzvektor) der beiden Stationen ermitteln, wie dies in den Kapiteln 6 und 7 dargestellt wurde. Man kann hier also auch die Fehlergleichungen der Kapitel 6 und 7 verwenden. Stellt man die Position des Mondes durch seine ekliptikale Länge und Breite dar, so hat man mit der Gleichung (170) im Abschnitt 6.3.

$$(310) \quad \bar{v}_{12} = -[s_{12} - (s_{12})_0] + \sum_q C_q^* \delta q \quad ,$$

$$q = X_{2+1}, Y_{2+1}, Z_{2+1}, X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, r, b, l, \xi, \eta, c, \varkappa, \varkappa^* .$$

Für die aus der "Streifenfrequenz" abgeleitete Fehlergleichung folgt mit (301) und (302)

$$(311) \quad \bar{v}_{\delta.12} = -[\delta s_{12} - (\delta s_{12})_0] \sum_q C_q^{**} \delta q .$$

Hier ist analog wie bei Gleichung (301)

$$C_q^{**} = (C_q^*)_{\sigma} - (C_q^*)_{\mu} .$$

Geht man dagegen von den Gleichungen des Abschnitts 7.2. aus, dann hat man als Fehlergleichung für die Streckendifferenz s_{12} mit (232)

$$(312) \quad \bar{v}_{12} + \sum_q \bar{C}_q \delta q + s_{12} - (\bar{s}_{12})_0 - \Delta w_{12} = 0 \quad ;$$

$$q = X_{2-1}, Y_{2-1}, Z_{2-1}, b, l, \xi, \eta, c, \varkappa, \varkappa^* .$$

Die Koeffizienten \bar{C}_q sind mit (235) bis (244) erklärt.

Geht man von (312) zur Fehlergleichung der aus der "Streifenfrequenz" abgeleiteten Fehlergleichung über, so folgt

$$(313) \quad \bar{v}_{\delta.12} + \sum_q \bar{C}_q^{**} \delta q + \delta s_{12} - (\delta \bar{s}_{12})_0 - \delta(\Delta w_{12}) = 0$$

mit

$$\bar{v}_{\delta,12} = (\bar{v}_{12})_{\sigma} - (\bar{v}_{12})_{\mu} ,$$

$$\delta s_{12} = (s_{12})_{\sigma} - (s_{12})_{\mu} ,$$

$$\delta \bar{s}_{12} = (\bar{s}_{12})_{\sigma} - (\bar{s}_{12})_{\mu} ,$$

$$\delta(\Delta w_{12}) = (\Delta w_{12})_{\sigma} - (\Delta w_{12})_{\mu} ,$$

$$\bar{c}_q^{**} = (\bar{c}_q)_{\sigma} - (\bar{c}_q)_{\mu} .$$

Literatur

- [1] ALLEY, C.O.; et al. Optical radar using a corner reflector on the Moon.
J. geophys. Res. 70 (1965), S. 2267 - 2269
- [2] ARNOLD, K. Methoden der Satellitengeodäsie.
Berlin: Akademie-Verlag 1970. 231 S.
- [3] ARNOLD, K. Zur geodätischen Nutzung der Laserortung zum Mond.
Gerlands Beitr. Geophysik 80 (1971)5, S.401-405
- [4] BARE, C.; et al. Interferometer experiment with independent local
oscillators.
Science 157 (1967), S. 189 - 191
- [5] BROTEN, N.W.; et al. Long base line interferometry.
Science 156 (1967), S. 1592 - 1593
- [6] COHEN, M.H.;
JAUNCEY, D.L.;
KELLERMANN, K.I.;
CLARK, B.G. Radio interferometry at one-thousandth second of arc.
Science 162 (1968), S. 88 - 94
- [7] GOLD, R. Radio method for the precise measurement of the
rotation period of the Earth.
Science 157 (1967), S. 302 - 304
- [8] JONES, H.E. Geodetic ties between continents by means of radio
telescopes.
The Canadian Surveyor 23 (1969) 4, S. 377 - 388
- [9] LUNDQUIST, C.A. Application of space techniques to solid-earth
and ocean physics.
COSPAR-Tagung 1970
- [10] MARKOWITZ, Wm.;
GUINOT, B. (eds.) Continental drift, secular motion of the pole,
and rotation of the Earth.
Dordrecht (Holland): D. Reidel Publishing Comp. 1968,
S. 91 - 94
- [11] RÖSCH, J.;
ORSZAG, A. Les applications de mesures de distance terre - lune
par Laser.
Bull. astron. 3, Série 3 (1968), S. 453 - 459