

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Forschungsbereich Kosmische Physik

ZENTRALINSTITUT PHYSIK DER ERDE

Veröffentlichungen des Zentralinstituts Physik der Erde

Nr. 3

Zur Einwirkung der Stativelastizität auf
Amplituden und Phasen von Schwerependeln

von

Claus Elstner

Als Manuskript gedruckt

1969

Inhalt

	Seite
Einleitung	5
1. Die Differentialgleichungen des Problems und ihre Lösungen	5
2. Amplituden- und Phasenverlauf bei gegeneinander schwingenden Pendeln	8
3. Diskussion der Lösungen	11
3.1. Verlauf der Amplitudenschwankungen	11
3.2. Verlauf der Phasenschwankungen	13
4. Zur Mitschwingreduktion der Schwingungszeiten	14
5. Praktische Anwendungen	15
Literatur	17
Abbildungen	18

Zusammenfassung

Es werden die Störungen im zeitlichen Ablauf der Amplituden und Phasen zweier auf elastischem Stativ schwingender Schwerependel untersucht. Betrag und Periode der Störungen werden in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und dem Verhältnis (ξ) zwischen dem Parameter der elastischen Kopplung und der Verstimmung der beiden Pendel dargestellt. Es zeigt sich, daß die Amplituden und Phasendifferenzen bei $|\xi| = 1$ am stärksten gestört sind und mit wachsendem $|\xi|$ zunehmend von den Anfangsbedingungen beeinflußt werden.

Die Ergebnisse absoluter und relativer Pendelmessungen bestätigen den theoretischen Befund.

Summary

Disturbances are investigated which are introduced by the sway effect into the time-functions of amplitudes and phases of two pendulums swinging on the same support. Rate and period of the disturbances are represented as functions of the initial conditions and the quotient (ξ) formed by the parameter of elastic coupling and the differences of the periods of the two pendulums. Hence it follows that the perturbations of the amplitudes and phase differences are biggest if $|\xi| = 1$. With increasing $|\xi|$ the influence of the initial conditions is growing up.

The results of absolute and relative pendulum measurements confirm the theoretical statements.

Sommaire

On examine les perturbations des amplitudes et phases de deux pendules gravimétriques oscillants sur un support élastique en fonction du temps. On expose les valeurs et les périodes des perturbations en fonction des conditions initiales et du rapport (ξ) entre le paramètre du couplage élastique et la différence des durées d'oscillation des deux pendules. On trouve, que la perturbation des amplitudes et des différences en phase a un maximum pour la valeur $|\xi| = 1$ et que l'influence des conditions initiales augmente, si le rapport $|\xi|$ croît.

Les résultats des mesures du pendule absolues et relatives confirment la connaissance théorique.

Резюме

Изучаются возмущения амплитуд и фаз двух качающихся на упругом штативе маятников по времени. Величина и период возмущений изображаются в зависимости от начальных условий и отношения (ξ) параметра упругой взаимосвязи к величине неравенства периодов обоих маятников. Оказывается, что амплитуды и разности фаз возмущены сильнее всего при $|\xi| = 1$. С возрастающим значением $|\xi|$ усиливается влияние начальных условий на них.

Результаты абсолютных и относительных маятниковых измерений подтверждают теоретические выводы.

Einleitung

Die Störung der Schwingungszeit von Schwerependeln durch die elastische Mitbewegung des Drehpunktes wird bei zwei in Gegenphase auf dem gleichen Stativ schwingenden Pendeln weitgehend eliminiert. Die noch verbleibenden Einflüsse kann man in Abhängigkeit vom Amplitudenverhältnis und Phasendifferenz beider Pendel berechnen. Die Theorie der Mitschwingvorgänge ist bereits von FURTWÄNGLER, VENING-MEINESZ, SCHMEHL, ANDERSEN und anderen Autoren angegeben worden [1 - 10]. Entsprechend dem technischen Stand der früheren Pendelmessungen interessierten dabei im wesentlichen nur die Verbesserungen, die an die beobachteten Schwingungszeiten anzubringen waren.

Bei modernen absoluten und relativen Pendelmessungen geht man zu kontinuierlichen Registrierungen der Amplituden und Phasen über. Die elektronischen Verfahren der Schwingzeitbestimmung arbeiten mit erheblich kürzeren Meßzeiten. Dadurch werden kurzzeitige Störungen in den Meßergebnissen stärker wirksam. Die fortlaufende Erfassung von Amplitude und Phase bietet nun die Möglichkeit, derartige Störungen besser zu erkennen und auch über die Schwankung in den Dämpfungsparametern Veränderungen in der Energie-dissipation des Schwingungsvorganges zu erfassen. Für diese Betrachtungen müssen die Einflüsse der elastischen Stativbewegung auf die Amplituden und Phasen der Pendel genau bekannt sein.

1. Die Differentialgleichungen des Problems und ihre Lösungen

Um die Einwirkung der Stativelastizität zu beurteilen, geht man davon aus, daß die Drehpunkte der Pendel proportional zu den beim Schwingungsvorgang auftretenden Zwangskräften bewegt werden. Ferner nimmt man an, daß die Beweglichkeit des Drehpunktes in vertikaler Richtung klein ist. Für die horizontale Störbeschleunigung in der Schwingungsebene der beiden Pendel gilt dann:

$$S = g (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2) \quad \text{mit} \quad q_{1,2} = \frac{2\gamma_{1,2}}{T},$$

wo $\gamma_{1,2}$ die Vergrößerungen der Schwingungszeit der beiden Pendel infolge des Mitschwingens, T die mittlere Halbschwingzeit, $\varphi_{1,2}$ die momentanen Elongationswinkel und g die Fallbeschleunigung bedeuten. Die Bewegungsgleichungen erhalten damit die Form:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + 2\kappa_1 \dot{\varphi}_1 + n_1'^2 \varphi_1 - n_1^2 q_2 \varphi_2 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + 2\kappa_2 \dot{\varphi}_2 + n_2'^2 \varphi_2 - n_2^2 q_1 \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

mit $n_{1,2}'^2 = n_{1,2}^2 (1 - q_{1,2})$.

Hierin bezeichnen $\kappa_{1,2}$ die Dämpfungskoeffizienten und $n_{1,2} = \frac{\pi}{T_{1,2}}$ die ungestörten Kreisfrequenzen der beiden Pendel. Zum System gehören ferner die Anfangswerte $\varphi_{10,20}$ und $\dot{\varphi}_{10,20}$.

Mit der komplexen Substitution für die Pendelvektoren

$$p_{1,2} = \vartheta_{1,2} - \frac{i}{n_{1,2}} \dot{\vartheta}_{1,2} = Q_{1,2} e^{i\psi_{1,2}},$$

wo Q und ψ die Amplituden und Phasenfunktionen beschreiben, transformiert man das System (1) auf ein homogenes lineares System erster Ordnung [1, 11]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1 &= -(\varkappa_1 - i n'_1) p_1 - \frac{in}{2} q_2 p_2, \\ \dot{p}_2 &= -(\varkappa_2 - i n'_2) p_2 - \frac{in}{2} q_1 p_1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dazu gehören die Anfangsbedingungen:

$$p_{10,20} = \vartheta_{10,20} - \frac{i}{n_{1,2}} \dot{\vartheta}_{10,20} = Q_{10,20} e^{i\psi_{10,20}}.$$

Bei der Ableitung des Systems (2) ist zu beachten, daß die Parameter $\vartheta_i, \varkappa_i, \psi_i$ und $T_2 - T_1$ kleine Größen erster Ordnung sind und kleine Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden. Mit der bei Pendelmessungen in Betracht zu ziehenden Genauigkeit ersetzt das System (2) vollständig das System (1).

Die Lösungen von (2) sind bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= S_1 e^{\lambda_1 t} + S_2 e^{\lambda_2 t} = Q_1 e^{i\psi_1}, \\ p_2 &= R_1 e^{\lambda_1 t} + R_2 e^{\lambda_2 t} = Q_2 e^{i\psi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die Kreisfrequenzen $\lambda_{1,2}$ bekommt man als Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu

$$\lambda_{1,2} = -\varkappa + i \left(n' \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta n')^2 + n^2 q_1 q_2 - (\Delta \varkappa)^2 + i 2 \Delta \varkappa n'} \right), \quad (4)$$

wo $n' = \frac{1}{2} (n'_1 + n'_2)$, $\Delta n' = n'_2 - n'_1 \approx -\frac{\pi}{T^2} \Delta T$, $\Delta T = T_2 - T_1$ und $\Delta \varkappa = \varkappa_2 - \varkappa_1$ bedeuten.

Die komplexen Koeffizienten $S_{1,2}$ und $R_{1,2}$ bestimmt man aus den Systemen (2) und (3) unter Beachtung der Anfangsbedingungen. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} S_{1,2} &= \pm \left[(-\varkappa_1 + in'_1 - \lambda_{2,1}) p_{10} - \frac{in}{2} q_2 p_{20} \right] \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = K_{1,3} - iK_{2,4}, \\ R_{1,2} &= \pm \left[(-\varkappa_2 + in'_2 - \lambda_{2,1}) p_{20} - \frac{in}{2} q_1 p_{10} \right] \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = K_{5,7} - iK_{6,8}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Bei der Berechnung der Kreisfrequenzen aus Gleichung (4) können im Realteil des Radikanden die sehr kleinen Größen $(\Delta \varkappa)^2$ vernachlässigt werden, so daß

$$(\Delta n')^2 + n^2 q_1 q_2 \approx \frac{\pi^2}{T^4} (\Delta T^2 + 4 \nu^2)$$

gilt. Der Imaginärteil bekommt die Form:

$$2 \Delta \varkappa \Delta n' \approx \frac{2\sqrt{\pi}}{T^2} \Delta T \Delta \varkappa.$$

Für die Entwicklung der Wurzel in (4) sind die Größenverhältnisse

$$2 |\Delta T \Delta \varkappa| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{T^2} (\Delta T^2 + 4v^2)$$

bzw.

$$\frac{2T^2 |\Delta \varkappa|}{\sqrt{\pi}} \leq |\Delta T| \left(1 + \left(\frac{2v}{\Delta T}\right)^2\right) = N$$

zu betrachten.

In der Praxis relativer und absoluter Pendelmessungen wird in fast allen Fällen $\frac{2T^2}{\sqrt{\pi}} |\Delta \varkappa| < N$ gelten, so daß die folgenden Rechnungen darauf beschränkt werden können. Die Entwicklung für $\lambda_{1,2}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\varkappa \mp \frac{\Delta \varkappa \Delta n'}{2 \sqrt{(\Delta n')^2 + n^2 q_1 q_2}} + i \left(n' \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta n')^2 + n^2 q_1 q_2} \right) \\ &= -\varkappa \mp \beta + i (n' \pm \alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Aus der Voraussetzung

$$|\Delta \varkappa| < \frac{N \sqrt{\pi}}{2T^2}$$

folgt, daß $|\beta| < \frac{\alpha}{2}$ sein muß. Für die Größe $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ kann demnach die Entwicklung

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\frac{i}{2\alpha} \left(1 - \frac{i\beta}{\alpha}\right)$$

benutzt werden, wobei alle Glieder der Ordnung $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$ für $n \geq 2$ vernachlässigt worden sind.

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile im System (3) führt unter Berücksichtigung der Ausdrücke (5) und (6) zur expliziten Darstellung der Amplituden- und Phasenfunktionen $Q_{1,2}(t)$ und $\psi_{1,2}(t)$.

Entsprechend der Aufspaltung des Imaginärteiles von (6) kann man für

$$\psi_{1,2} = n't - \delta_{1,2}(t) \quad (7)$$

setzen.

Als Ergebnis dieser Rechnung erhält man schließlich die folgenden vier Funktionen, die den zeitlichen Verlauf von Amplitude und Phase der zwei Pendel beschreiben:

$$Q_1^2 = e^{-2\alpha t} (K_1^2 + K_2^2) e^{-2\beta t} + (K_3^2 + K_4^2) e^{2\beta t} + 2 (K_1 K_3 + K_2 K_4) \cos 2\alpha t + \\ + 2 (K_2 K_3 - K_1 K_4) \sin 2\alpha t \quad (8)$$

und

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{(K_3 e^{\beta t} - K_1 e^{-\beta t}) \sin \alpha t + (K_2 e^{-\beta t} + K_4 e^{\beta t}) \cos \alpha t}{(K_1 e^{-\beta t} + K_3 e^{\beta t}) \cos \alpha t + (K_2 e^{-\beta t} - K_4 e^{\beta t}) \sin \alpha t}.$$

Substituiert man die Indizes 1, 2, 3, 4 durch 5, 6, 7, 8, dann findet man Q_2^2 und $\operatorname{tg} \delta_2$.

2. Amplituden- und Phasenverlauf bei gegeneinander schwingenden Pendeln

In der Praxis der Pendelmessungen schwingen stets zwei Pendel mit nahezu gleicher Amplitude einander entgegen. Dabei gelten die Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} Q_{10} &= Q_{20} - \Delta Q_0, & \Delta Q_0 &= Q_{20} - Q_{10} \ll Q_{20}, \\ \psi_{10} &= 0, \\ \psi_{20} &= \pi + n \Delta / t_0, \rightarrow \psi_{20} = \pi + n \Delta t_0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wo $\Delta t_0 = (t_{10} - t_{20}) \ll 1$ den Zeitunterschied beschreibt, der der Abweichung von der Phasendifferenz zwischen beiden Pendeln am Anfang der Bewegung entspricht, also praktisch den Unterschied zwischen den Startmomenten der beiden Pendelbewegungen darstellt. $\Delta t_0 > 0$ bedeutet, daß Pendel 2 früher als Pendel 1 in Bewegung gesetzt wurde.

Ferner wird angenommen, daß $\Delta T \ll \Delta t_0$ (bei $\Delta t_0 \neq 0$) ist. Für die Größenordnung beider Werte kann

$$\operatorname{magn} (\Delta t_0) = 10^{-3} \text{ s}$$

und

$$\operatorname{magn} (\Delta T) \leq 10^{-5} \text{ s}$$

vorausgesetzt werden.

Unter diesen Bedingungen bekommt man für die Pendelvektoren zu der Zeit $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} p_{10} &= Q_{10} (\cos \psi_{10} + i \sin \psi_{10}) = Q_{10}, \\ p_{20} &= Q_{20} (\cos \psi_{20} + i \sin \psi_{20}) = - (Q_{10} + \Delta Q_0) (\cos n \Delta t_0 + i \sin n \Delta t_0) \\ &\approx - (Q_{10} + \Delta Q_0) (1 + i n \Delta t). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Glieder zweiter Ordnung können vernachlässigt werden, da eine Genauigkeit von etwa einem Prozent in den Phasen- und Amplitudenwerten ausreicht.

Setzt man (10) in die Gleichungen (5) ein, so findet man für die Konstanten der allgemeinen Lösung

$$S_{1,2} = \left(\frac{1}{2} \mp c_1 \right) Q_{10} \pm d (Q_{10} + \Delta Q_0) + i \left\{ \pm c_2 Q_{10} \pm d (Q_{10} + \Delta Q_0) \left(n \Delta t_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \right\} = K_{1,3} - i K_{2,4} \quad (11)$$

und

$$R_{1,2} = - \left(\frac{1}{2} \pm c_1 \right) (Q_{10} + \Delta Q_0) \mp c_2 (Q_{10} + \Delta Q_0) n \Delta t_0 \mp d Q_{10} + i \left\{ - \left(\frac{1}{2} \pm c_1 \right) (Q_{10} + \Delta Q_0) n \Delta t_0 \pm c_2 (Q_{10} + \Delta Q_0) \pm \frac{\beta}{\alpha} d Q_{10} \right\} = K_{5,7} - i K_{6,8}$$

Bei dieser Rechnung sind die Abkürzungen

$$c_1 = \frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{2 (1 + \xi^2)^{3/2}}, \quad c_2 = \frac{-\eta \xi^2}{2 (1 + \xi^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad d = \frac{\xi}{2 (1 + \xi^2)^{1/2}} \quad (12)$$

eingeführt worden. Als Variable fungieren jetzt

$$\xi = \frac{nq}{\Delta n'} = - \frac{2\gamma}{\Delta T} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\Delta x}{\Delta n'} = - \frac{T^2}{\pi} \frac{\Delta x}{\Delta T} \quad (13)$$

Die Größen $q_{1,2}$ sind durch ihren Mittelwert q ersetzt worden.

Bei absoluten und relativen Pendelmessungen schwanken die Mitschwingkonstanten γ , die Schwingzeitunterschiede der Pendel eines Paares ΔT und der Unterschied der Dämpfungskonstanten Δx etwa in folgenden Grenzen:

$$\begin{aligned} 10^{-7} &\leq 2\gamma \leq 10^{-4} \text{ s}, \\ 10^{-7} &\leq |\Delta T| \leq 10^{-4} \text{ s}, \\ 0 &< \frac{T^2}{\pi} \Delta x \leq 10^{-6} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Daraus ergibt sich, daß $10^{-3} \leq |\xi| \leq 10^3$ und $0 < |\eta| < 10$ ist. Weiterhin ist zu beachten, daß $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta}{1 + \xi^2}$ und gemäß Voraussetzung

$$\frac{2T^2}{\pi} \frac{|\Delta x|}{|\Delta T|} = 2|\eta| < 1 + \xi^2 \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{1}{2}$$

erfüllt sein muß.

Die Größe β stellt sich dar als

$$\beta = \frac{\Delta x}{2 \sqrt{1 + \xi^2}} < \frac{\Delta x}{2} \quad (15)$$

Verlangt man, daß $e^{\pm\beta t} \approx 1$ bis auf 1 % gültig ist, so folgt

$$\beta t < 10^{-2} \quad \text{bzw.} \quad t < \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\Delta \omega} \text{ s.}$$

Die unterschiedliche Dämpfung beider Pendel macht sich also erst nach mehreren Stunden im Amplituden- und Phasenverlauf bemerkbar. Man kann demnach ohne Genauigkeitsverlust in den allgemeinen Lösungen (8) $e^{\pm\beta t} = 1 \pm \beta t$ setzen.

Mit den durch (11) gegebenen Konstanten K_j ($j = 1 \dots 8$) kann man aus den Lösungen (8) Amplituden- und Phasenfunktionen für unser spezielles Anfangswertproblem berechnen. Zur bequemeren Darstellung der Resultate für das gegeneinander schwingende Pendelpaar dienen die Hilfsfunktionen

$$F_i(\zeta, \eta, Q_0, n\Delta t_0) \quad \text{mit} \quad Q_0 = \frac{Q_{20}}{Q_{10}} :$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= dQ_0 - c_1, & F_3 &= c_1 + c_2 n\Delta t_0 + \frac{d}{Q_0}, \\ F_2 &= c_2 + dQ_0 (n\Delta t_0 - \beta/\alpha), & F_4 &= c_1 n\Delta t_0 - c_2 - \frac{\beta d}{\alpha Q_0}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Schließlich ergeben sich die Amplitudenfunktionen in der Form:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(t) &= Q_{10} e^{-\lambda t} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - 4(F_1^2 + F_2^2) \right) (1 - \cos 2\alpha t) - 2F_2 \sin 2\alpha t - 4F_1 \beta t \right]^{1/2}, \\ Q_2(t) &= Q_{20} e^{-\lambda t} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - 4(F_3^2 + F_4^2) \right) (1 - \cos 2\alpha t) - 2(F_4 - n\Delta t_0 F_3) \sin 2\alpha t - \right. \\ &\quad \left. - 4\beta t (F_3 + n\Delta t_0 F_4) \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Analog findet man für die Phasenfunktionen

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \delta_1(t) &= \frac{2\beta F_2 t \cos \alpha t - (2F_1 - \beta t) \sin \alpha t}{(1 - 2\beta F_1 t) \cos \alpha t - 2F_2 \sin \alpha t} \quad \text{und} \\ \text{tg } \delta_2(t) &= - \frac{(n\Delta t_0 - 2\beta F_4 t) \cos \alpha t + (2F_3 - \beta t) \sin \alpha t}{(1 - 2\beta F_3 t) \cos \alpha t - (2F_4 - \beta t n\Delta t_0) \sin \alpha t} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Beziehungen (17) und (18) beschreiben den zeitlichen Verlauf der Amplituden und Phasen zweier gegeneinander schwingender Pendel in Abhängigkeit von den beiden Anfangswerten $Q_0, \Delta t_0$ und den Systemparametern ζ, η bzw. $\gamma, \Delta T$ und $\Delta \omega$.

3. Diskussion der Lösungen

Die Amplituden- und Phasenschwankungen laufen mit der Periode

$$T_Q = \frac{\pi}{\alpha} \frac{2T^2}{\sqrt{\Delta T^2 + 4\gamma^2}} = \frac{2T^2}{|\Delta T| \sqrt{1 + \xi^2}} \quad (19)$$

ab.

Für Halbsekundenpendel ist $T_Q(\gamma, \Delta T) = \text{const}$ in Abb. 1 dargestellt. Man sieht, daß für $|\xi| > 1$, resp. $|\Delta T| < 2\gamma$, $T_Q \approx T_Q(\gamma)$ ist und die Mitschwingkonstante γ über T_Q bestimmt werden kann, solange T_Q hinreichend klein bleibt. Wird hingegen $|\xi| < 1$, resp. $|\Delta T| > 2\gamma$, und damit $T_Q \approx T_Q(\Delta T)$, so verkleinert sich die Amplitude der Schwankungen, da die gegenseitige Kopplung der Pendel geringer wird.

Kleine Schwankungen im Amplituden- und Phasenverlauf ergeben sich auch, wenn $K_{3,7}$ und $K_{4,8}$ gegen Null gehen.

Neben den in Abb. 1 dargestellten Perioden der Lösungen (17) und (18), die nur von den Systemparametern ΔT und γ abhängen, sind besonders die Größen der Schwankungen in den Amplitudenfunktionen $Q(t)$ und den Phasendifferenzen $\delta_1 - \delta_2$ für die praktischen Anwendungen von Interesse.

3.1. Verlauf der Amplitudenschwankungen

Zur Abschätzung der Amplitudenfunktion (17) diene die Darstellung

$$Q_{1,2}(t) = Q_{10,20} e^{-\beta t} [1 - A_{1,2} - L_{1,2} \sin(2\alpha t - \vartheta_{1,2})]^{1/2} \quad (20)$$

mit

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} (1 - 4(F_{1,3}^2 + F_{2,4}^2)),$$

$$L_1^2 = A_1^2 + 4F_2^2, \quad \text{tg } \vartheta_1 = \frac{A_1}{2F_2},$$

$$L_2^2 = A_2^2 + 4(F_4 - n\Delta t_0 F_3)^2, \quad \text{tg } \vartheta_2 = \frac{A_2}{2(F_4 - n\Delta t_0 F_3)}.$$

Die Terme mit βt können bei diesen Betrachtungen außer acht bleiben.

Die Beträge der periodischen Schwankungen der Amplitudenfunktionen werden durch die Funktionen $L_{1,2}$ beschrieben. In den Abbildungen 2 und 3 sind der Verlauf dieser Funktionen für $\xi > 0$, $\eta = 0$ und spezielle Werte von Q_0 , $n\Delta t_0$ dargestellt. Für $\xi < 0$ bekommt man bei idealen Anfangswerten ($Q_0 = 1$, $n\Delta t_0 = 0$) einen zur ξ -Achse spiegelsymmetrischen Verlauf, der auch für $Q_0 = 1 + \varepsilon$, wenn $|\varepsilon| < 1$, erhalten bleibt. Im letzteren Fall muß für Q_0 der reziproke Wert Q_0^{-1} im Bereich $\xi < 0$ eingeführt werden. Da in den praktisch auftretenden Fällen $0,9 \leq Q_0 \leq 1,1$ und $n\Delta t_0 \leq 5 \cdot 10^{-2}$ angenommen werden darf, bleibt für $\xi < 0$, $F_1 \gg F_2$, auch bei beliebigen Anfangswerten die erwähnte Symmetrie zur ξ -Achse in guter Näherung gewahrt. Das bedeutet, daß mit ausreichender Genauigkeit die Beziehung

$$L_{1,2}(\zeta, 0, Q_0, n\Delta t_0) = -L_{1,2}(-\zeta, 0, \frac{1}{Q_0}, n\Delta t_0) \quad (21)$$

erfüllt ist.

Den Abbildungen 2 und 3 kann man entnehmen, daß für $|\zeta| > 1$ die Oberwelligkeit der Amplitudenfunktionen $Q(t)$ stark von den Anfangsbedingungen abhängt, während bei $|\zeta| < 1$ diese Bedingungen keinen Einfluß haben. Außerdem erkennt man, daß es auch bei großen Verhältnissen ζ bestimmte Amplitudenquotienten Q_0 gibt, bei denen die Oberwelligkeit verschwindet und die Amplituden monoton abnehmen. Das ist aber nur möglich, wenn $n\Delta t_0 = 0$ und damit $L_{1,2} = \pm A_{1,2}$ gilt.

Die Nullstellenbedingung von $L_{1,2}$ ergibt sich zu:

$$\zeta_0 = \frac{2Q_0}{Q_0^2 - 1} \quad (22)$$

In der Praxis kann man die Formel bei bekanntem ζ zur Berechnung von Q_0 benutzen, solange $|\zeta| < 100$ ist.

Man sieht ferner aus den Abbildungen, daß die kräftigsten Oberwellen der Amplitudenfunktionen bei $|\zeta| \approx 1$, d. h., wenn $2\gamma \approx |\Delta T|$ ist, auftreten werden.

Ist $\eta \neq 0$, haben also beide Pendel verschiedene Dämpfungskoeffizienten, so kann man deren Einwirkung auf die Amplitudenwelligkeit mit dem TAYLOR-Ansatz

$$L_{1,2}(\eta) = L_{1,2}(0) + \frac{dL_{1,2}}{d\eta} \eta \quad (23)$$

abschätzen. Die Glieder höherer Ordnung können vernachlässigt werden, da auch in den Lösungen (17) die zweiten und höheren Potenzen von $\beta/\alpha = \frac{\eta}{1+\zeta^2}$ unbeachtet geblieben sind. Außerdem wählen wir für diese Betrachtungen die Anfangswerte $Q_0 = 1$ und $n\Delta t_0 = 0$ aus, die mittleren Verhältnissen am besten entsprechen. Die Differentialquotienten stellen sich dann durch

$$\frac{dL_{1,2}}{d\eta} = \eta G_{1,2}(\zeta) \quad (24)$$

dar, mit

$$G_{1,2}(\zeta) = \pm \frac{\zeta(1+\zeta^2)(\zeta^2 \mp \zeta + 1)}{(1+\zeta^2)^3}$$

Die durch $L_{1,2}$ bestimmte Welligkeit der Amplitudenfunktionen ist damit

$$L_{1,2}(\eta) = L_{1,2}(0) + \eta^2 G_{1,2}(\zeta) \quad (25)$$

Im Intervall $-\infty < \zeta < \infty$ ist $|G_1| \leq \frac{1}{2}$ und $|G_2| \leq \frac{3}{2}$. Die Dämpfungsunterschiede vergrößern die Welligkeit, da $\text{sign } G_{1,2} = \text{sign } L_{1,2}$. Den größten Einfluß übt η bei $\zeta = 1$ und den übrigen Maxima resp. Minima der Funktionen $G_{1,2}$ aus. G_1 besitzt reelle Extrema bei

$$\zeta = -\frac{1 + \sqrt{7}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right)^2 - 1}$$

und G_2 bei

$$\zeta = -\frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}.$$

Bei $\zeta = -1$ ist der Dämpfungsunterschied ohne Bedeutung für die Welligkeit.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei kleinen Dämpfungsunterschieden die Welligkeit der Amplitudenfunktionen proportional dem Quadrat dieses Unterschiedes vergrößert wird.

3.2. Verlauf der Phasenschwankungen

Zur Untersuchung des Phasenverlaufes werden aus den Formeln (18) unter Vernachlässigung der Dämpfungsunterschiede ($\eta = 0$) die Phasendifferenzen $\delta_1 - \delta_2$ gebildet, die den praktisch beobachteten Zeitunterschieden zwischen benachbarten Nulldurchgängen der beiden Pendel proportional sind:

$$\delta_1 - \delta_2 = n (t_1 - t_2).$$

Die Extrema der Schwankungen der Phasendifferenzen ergeben sich im Intervall $0 \leq \alpha t \leq \frac{\pi}{2}$ aus $\frac{d}{d(\alpha t)} (\delta_1 - \delta_2) = 0$. Die Rechnung liefert für diese Extrema:

$$(\delta_1 - \delta_2)_{\text{Ext}} = \arctg \frac{n \Delta t_0 + 2F_3 \Omega}{1 - 2F_4 \Omega} - \arctg \frac{2F_1 \Omega}{1 - 2F_2 \Omega}, \quad (26)$$

$$\text{wo } \Omega = \frac{1}{2\Omega_2} (-\Omega_3 + \sqrt{\Omega_3^2 - 4\Omega_1 \Omega_2})$$

$$\text{und } \Omega_1 = F_1 (1 + (n \Delta t_0)^2) - (F_3 + F_4 n \Delta t_0),$$

$$\Omega_2 = 4F_1 (F_3^2 + F_4^2) - 4(F_2^2 + F_1^2) (F_3 + F_4 n \Delta t_0),$$

$$\Omega_3 = -4 [F_1 (F_4 - n \Delta t_0 F_3) - F_2 (F_3 + n \Delta t_0 F_4)]$$

bedeuten. Ist $n \Delta t_0 = 0$ und damit auch $F_{2,4} = 0$, so findet man

$$\Omega = \frac{1}{2\sqrt{F_1 F_3}} \quad \text{und} \quad (\delta_1 - \delta_2)_{\text{Ext}} = \arctg \frac{F_3 - F_1}{2\sqrt{F_1 F_3}}. \quad (27)$$

Für $F_{1,3} < 0$, das ist bei $Q_0 = 1$ für alle $\zeta < 1$ der Fall, ist im Intervall $0 \leq \alpha t \leq \frac{\pi}{2}$ ($\delta_1 - \delta_2$) eine monotone Funktion der Zeit. Die Begrenzung des Intervalles bedeutet, daß die Phasendifferenzen zweier nichtisochroner Pendel den Wert π nicht überschreiten, die Pendel also um höchstens eine Halbschwingung auseinander liegen können.

Sobald ζ größer als $\frac{1}{Q_0}$ oder, bei $\zeta < 0$, kleiner als Q_0 wird, treten im Inneren des αt -Intervalls Extrema der Phasendifferenzen auf. Die Beträge dieser Extrema nehmen mit wachsendem ζ ab und werden ebenso wie die Amplitudenschwankungen unter der Bedingung(22)

zu Null. In Abb. 4 ist dieser Sachverhalt dargestellt.

Die maximale Größe der Phasendifferenzschwankung beträgt $\frac{\pi}{2}$ bei $\xi = \frac{1}{Q_0}$ bzw. $\xi = -Q_0$. Dem entspricht die Hälfte der Halbschwingzeit als maximaler Meßgröße $\frac{1}{n} Q_0 (\delta_1 - \delta_2)$. Für negative ξ -Werte verlaufen die in Abb. 4 dargestellten Kurven spiegelbildlich zur Ordinatenachse. Ebenso wie bei der Welligkeit der Amplitudenfunktion ist hier bei $Q_0 \neq 1$ im negativen ξ -Bereich Q_0 durch Q_0^{-1} zu ersetzen.

Die Zeit

$$t = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{T_0}{2} = \frac{T^2}{|\Delta T| \sqrt{1 + \xi^2}}$$

entspricht bei $\xi \rightarrow 0$ der Zeit, die zur Vergrößerung der Phasendifferenz um π erforderlich ist. Die Pendel verschieben sich in diesem Zeitraum um eine Halbschwingung gegeneinander.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß die Phasendifferenzen $(\delta_1 - \delta_2)$ der gegeneinander schwingenden Pendel bei $|\xi| < 1$ zwischen $\pm \pi$, bei $|\xi| = 1$ zwischen $\pm \frac{\pi}{2}$ und bei $|\xi| > 1$ zwischen $\pm |\delta_1 - \delta_2|_{\text{Ext}}$ gemäß (26) schwanken. Die Periode der Schwankungen, die durch (19) gegeben ist, nimmt bei festem T mit wachsendem ξ ab.

Demnach ist es sinnvoll, $|\Delta T| \ll 2\gamma$ zu wählen, um den Einfluß des Mitschwingens auf die Phasendifferenzänderungen und damit auch auf die Schwingzeitänderungen klein zu halten. Außerdem erreicht man damit, daß sich beide Pendel stets um weniger als eine Halbschwingung unterscheiden und sich gegenseitig nicht ein- oder überholen können. Die elastische Kopplung verhindert in diesem Fall das Auseinanderlaufen der Pendelschwingungen.

Die Dämpfungsunterschiede $\Delta \alpha$ zwischen beiden Pendeln haben für die praktischen Phasenmessungen keine Bedeutung und brauchen daher hier nicht gesondert betrachtet zu werden.

4. Zur Mitschwingreduktion der Schwingungszeiten

Die für die Phasen- und Amplitudenschwankung aus der Integration des Differentialgleichungssystems der Pendelvektoren gewonnenen Darstellungen lassen sich natürlich auch für die Berechnung der Schwingungszeitstörungen benutzen. Aus den beiden Lösungen für gegeneinander schwingende Pendel

$$\varphi_{1,2} = \pm Q_{1,2} \cos(n't - \delta_{1,2}(t)) \quad (28)$$

kann die im Zeitintervall $t_2 - t_1$ beobachtete mittlere Schwingungszeit bestimmt werden. Zu den Zeiten $t_{1,2}$ muß $\varphi_{1,2} = 0$ sein, da bei der Ermittlung der Schwingungszeiten die Nulldurchgänge der Pendel beobachtet werden. Daraus resultieren die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} n't_1 - \delta(t_1) &= \left(\frac{2i+1}{2}\right)\pi, & i = 0, 1, 2, \dots, \\ n't_2 - \delta(t_2) &= \left(\frac{2(i+M)+1}{2}\right)\pi, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

aus denen man die beobachtete Schwingungszeit berechnen kann:

$$T_B = \frac{t_2 - t_1}{M},$$

M ist die Anzahl der Pendelhalbschwingungen im Zeitraum $t_2 - t_1$.

Es ergibt sich ähnlich wie in [3] ein allgemeiner Ausdruck für die Störungen der Schwingungszeiten:

$$T_{B1,2} - T_{1,2} = -\gamma \mp \frac{\Delta T}{2} - \frac{T^2}{\pi(t_2 - t_1)} (\delta_{1,2}(t_2) - \delta_{1,2}(t_1)). \quad (30)$$

Für praktische Zwecke ist diese Formel jedoch weniger vorteilhaft, da hier die Mitschwingreduktion von den Anfangsbedingungen der Pendelbewegung und der Zeit abhängen und auf relativ umständliche Weise berechnet werden müssen. Man wird daher besser diese Reduktionen mit Hilfe der aus (2) gewonnenen FURTWÄNGLERSchen Formeln berechnen, die bekanntlich die fortlaufend meßbaren Amplituden und Phasendifferenzen enthalten.

5. Praktische Anwendungen

Die vorliegende Untersuchung wurde auch durch Meßergebnisse veranlaßt, die bei der Neubestimmung der absoluten Schwere in Potsdam mit den 25-cm-Reversionspendeln erhalten wurden. Damit die beiden Pendel während der Reversion im Gerät verbleiben können, ist der in [12] beschriebene Apparat drehbar auf einem besonderen Stativ gelagert worden. Dadurch wird allerdings die von der Pendelbewegung angeregte elastische Mitbewegung der gesamten Anordnung relativ groß (bis zu $1,2 \cdot 10^{-5}$ s in der Pendelschwingzeit).

Unter diesen Umständen treten bei mehrstündigen Messungen periodische Schwankungen in den Amplituden und Phasendifferenzen der Reversionspendel auf. Die Schwingungen des Mittelpendels hingegen enthalten diese Störungen nicht. Die Größe der Störperioden ist natürlich von der Schwerpunktlage des Pendels abhängig. Bei großem Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehpunkt (G_v) ergeben sich kürzere Perioden als bei kleinem Abstand (G_0).

In den Abbildungen 5 - 8 sind die gemessenen Amplituden und Phasendifferenzen für G und G_0 zusammen mit den Ergebnissen der Rechnung dargestellt. Für die Berechnung wurden die Formeln (17) und (18) mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ verwendet. Auch die beobachteten Amplituden sind auf die Dämpfung Null reduziert worden. Die entsprechenden Koeffizienten wurden aus der Amplitudenabnahme der Mittelpendel bestimmt. Man erkennt aus der Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Werte, daß die Periodizität der Störungen gut wiedergegeben wird. Die zumeist geringen Abweichungen in den Beträgen sind hauptsächlich durch die Meßungenauigkeit der Anfangswerte bedingt. Außerdem können äußere Störimpulse während der mehrstündigen Beobachtungen Anlaß dieser kleinen Diskrepanzen sein.

Das Verhalten der Phasendifferenzen für $|\xi| \geq 1$ wurde mit einem Relativpendelapparat untersucht, der zu diesem Zweck auf besonders hohe Fußplatten gestellt wurde. Der Mitschwingkoeffizient dieser Anordnung betrug $47,5 \cdot 10^{-7}$ s. Zur Verstimmung der Invarpendel

wurde das Feld einer Magnetspule benutzt. Der Schwingzeitunterschied zwischen den beiden Pendeln konnte damit bis auf $3 \cdot 10^{-5}$ s vergrößert werden. Allerdings mußte bei diesen Versuchen wegen der variablen magnetischen Kopplung und der zum Teil sehr starken Amplitudenveränderlichkeit auch eine starke Drift der Schwingzeitdifferenzen während der mehrständigen Messungen in Kauf genommen werden. Für die Bestimmung der ξ -Werte ist der zeitliche Mittelwert von T benutzt worden.

In der folgenden Tabelle sind die beobachteten und berechneten Perioden der Phasendifferenzschwankungen angegeben. Für $|\xi| < 1$ wächst der Phasenunterschied monoton bis zum Wert π bzw. bis zum Zeitpunkt

$$t = \frac{T_Q}{2} = \frac{T^2}{|\Delta T|} \sqrt{1 + \xi^2},$$

wenn die Pendel mit gleicher Phase schwingen. Anschließend beginnt die Zählung der Phasendifferenzen wieder gegen die nun folgende Halbschwingung. Für $|\xi| \geq 1$ zeigen sich auch bei den Versuchen periodische Schwankungen der Phasendifferenzen. Die Größe dieser Perioden konnte aus den Beobachtungen jedoch nicht genau genug ermittelt werden, da die Meßzeiten klein gegenüber T_Q waren.

Schwankungen der Phasendifferenz bei relativen Pendelmessungen

$ \xi $	$ \Delta T /10^{-7}$ s	$\frac{T_Q}{2}/\text{min}$	
		beob.	berechn.
0,34	282	158	158
0,42	227	194	205
0,34	275	157	148
3,16	30	-	411
3,30	29	-	412
65,50	1	-	429

Für die Ausführung der hier diskutierten Versuchsreihen möchte ich den Herren H.-J. DITTFELD, G. HARNISCH, R. FREY und W. ALTMANN danken.

Literatur

- [1] FURTWÄNGLER, PH.: Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin 1902, I, S.245-253
- [2] VENING-MEINESZ, F. A.: Bijdragen tot de theorie de slingerwaarnemingen. Amsterdam: J. H. de Bussy, 1915, 162 S., 3 Anl.
- [3] VENING-MEINESZ, F. A.: Observations de pendule dans les Pays-Bas 1913 - 1921. Delft: Techn. Boekhandel en Druckkerij J. Waltman jr., 1923, 146 p., 8 Anl.
- [4] SCHMEHL, H.: Über den Einfluß der Elastizität zweier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingender Pendel. Z. Geophys. 3 (1927), S. 157 - 160
- [5] SCHMEHL, H.: Ein Beitrag zum Zweipendelverfahren bei relativen Schwere-messungen. Z. Geophys. 8 (1932), S. 427 - 438
- [6] ANDERSEN, E.: Beitrag zur Mitschwingtheorie der relativen Pendelmessun-gen mit 2- und 4-Pendelapparaten. Kopenhagen: Bianco Lunos Bogtrykkeri A/s, 1932, 96 S., 33 lit.
- [7] MOLODENSKY, M.: Zur Aufgabe der Berücksichtigung des Mitschwingens des Stativs bei Gegeneinanderschwingen zweier Pendel. Verh. Balt. Geod. Komm. 1934, Helsinki 1935, Teil II, S. 307 - 318
- [8] BOULANGER, Y. D.: Über die Bestimmung des Einflusses der Mitschwingung bei Pendelbeobachtungen. Trud. Seis. Inst. (1941) 107, 24 S.
- [9] ROMANJUK, V. A.: Der Einfluß des Stativmitschwingens auf die Schwingungs-zeit eines Pendels. Trud. Inst. Phys. Zemli (1959) 8 (175), S. 61 - 67
- [10] MAZZON, C.: Studio teorico e prove sperimentali dell'influenza della elasticità e della massa del supporto sul periodo del pendolo. Boll. di Geod. e sci. aff. 19 (1960) 4, S. 669 - 684
- [11] BAESCHLIN, C. F.: Lehrbuch der Geodäsie. Zürich: Orell Füssli Verlag, 1948, S. 627
- [12] SCHROETER, R.: Vorbereitungen zur Messung der absoluten Schwere in Potsdam. Feinger.-Techn. 7 (1958) 1, S. 21 - 22

Abb. 1 Perioden der Amplituden- und Phasenfunktionen für Halbs Sekundenpendel $T_Q(\gamma, \Delta T)$

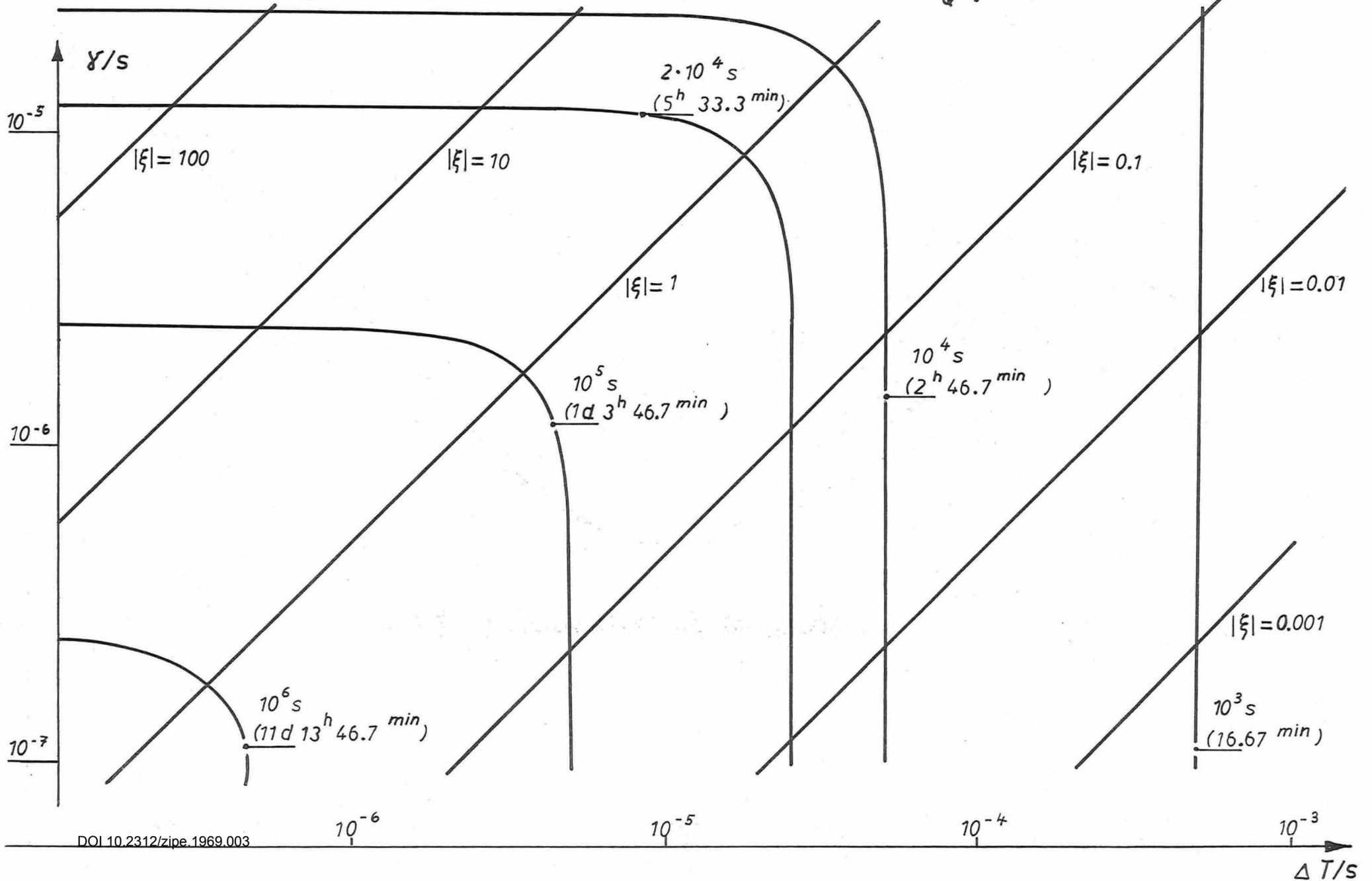
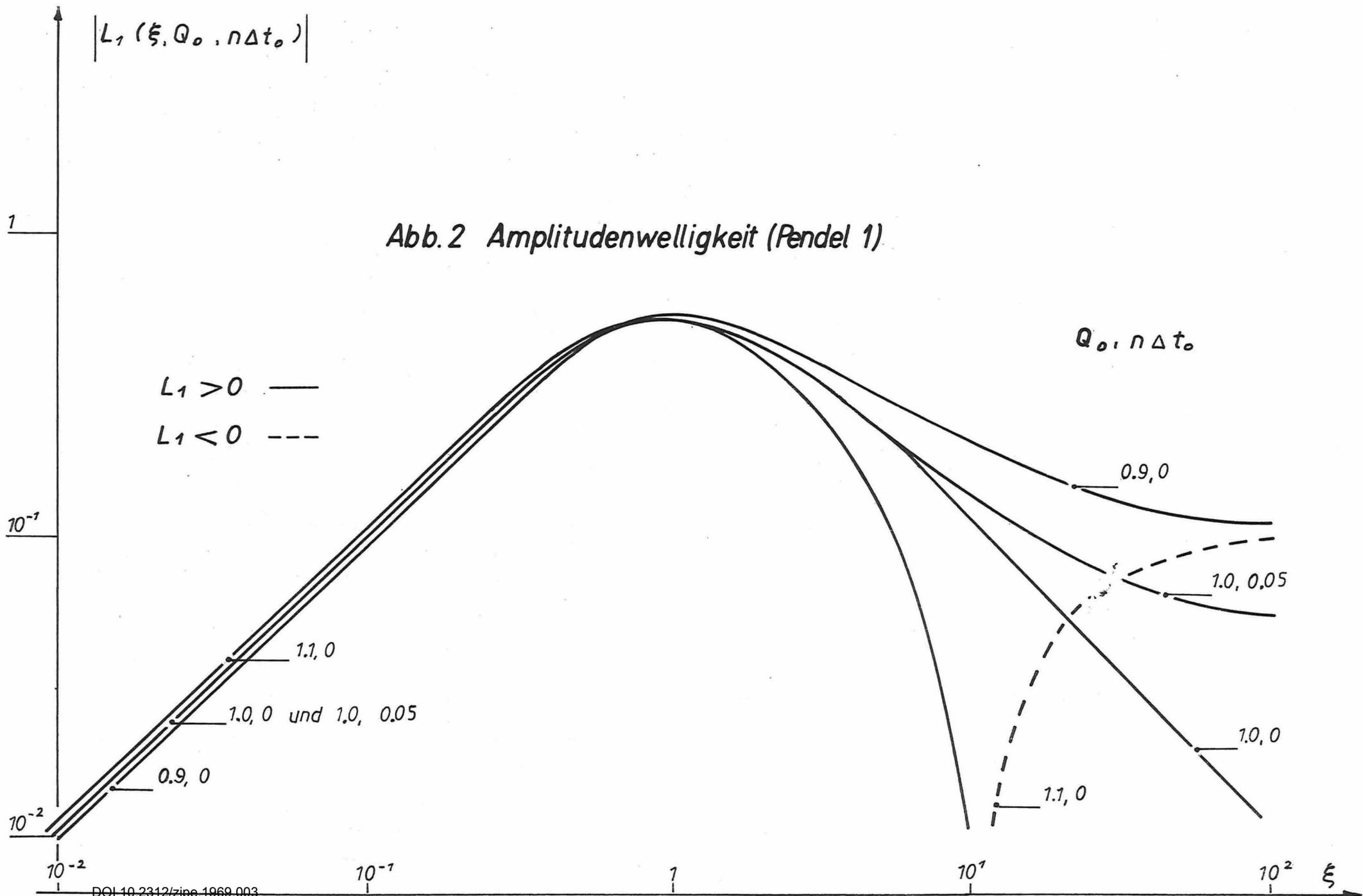
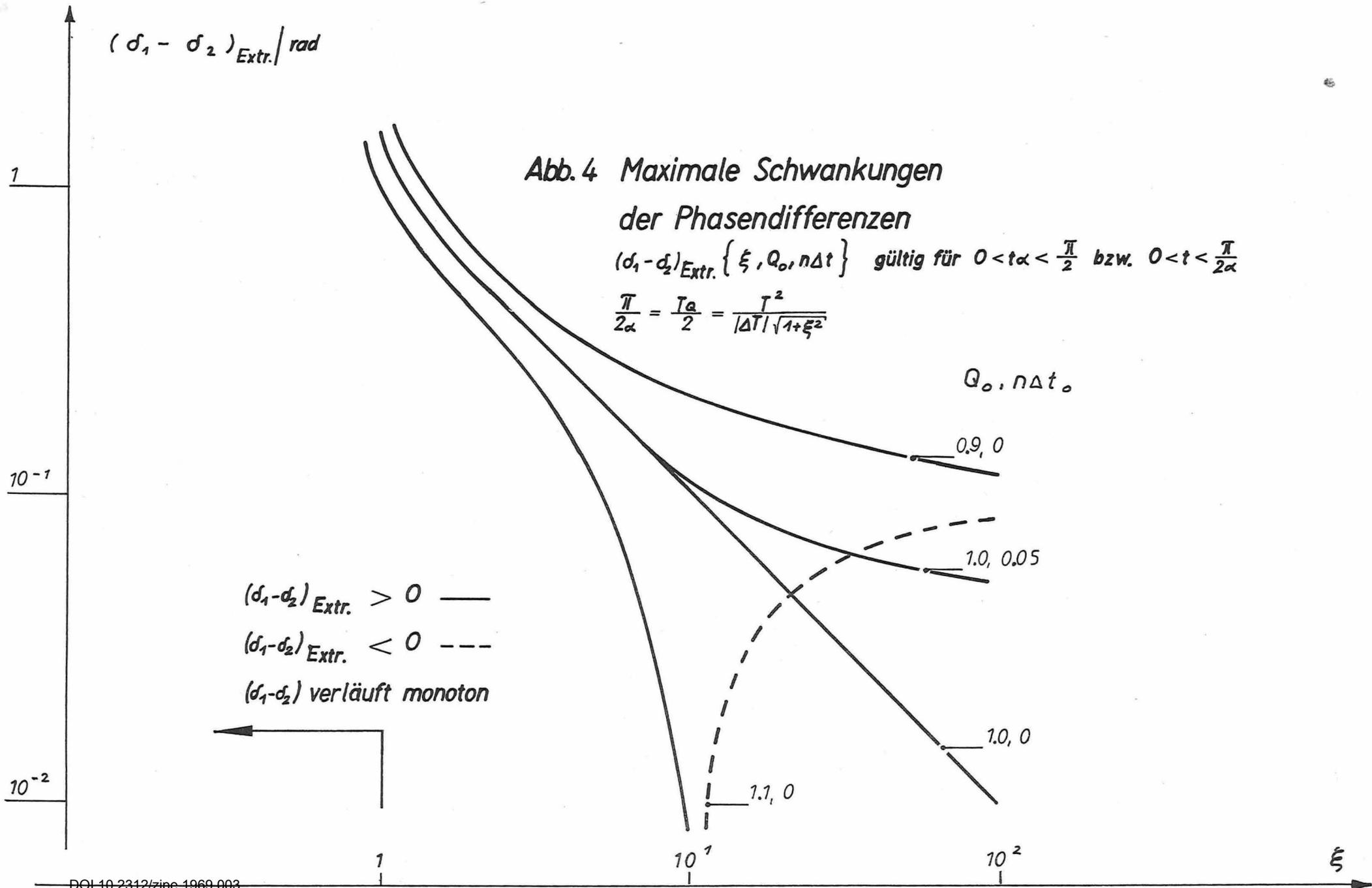


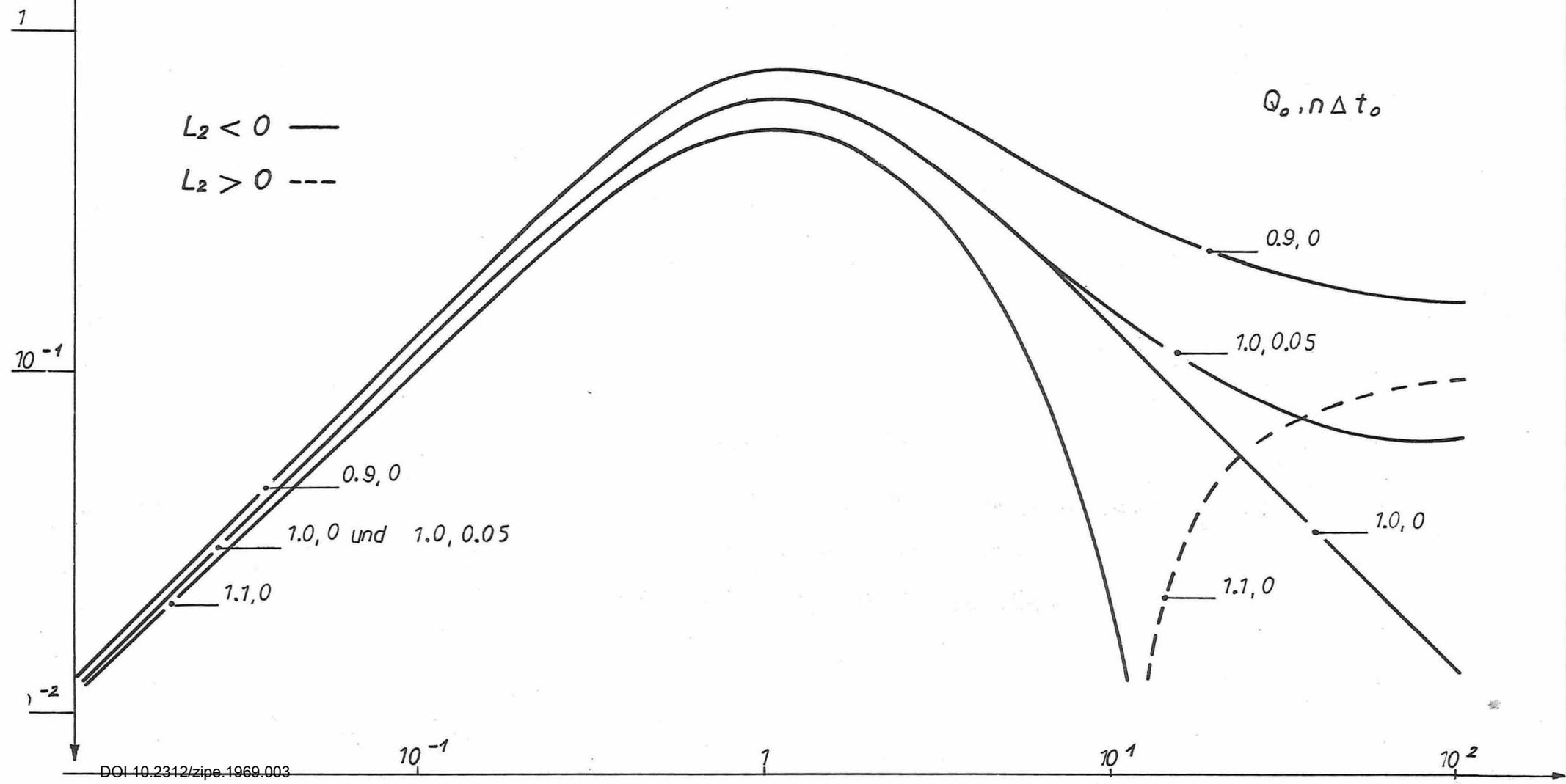
Abb. 2 Amplitudenwelligkeit (Pendel 1)





$$|L_2(\xi, Q_0, n\Delta t_0)|$$

Abb. 3 Amplitudenwelligkeit (Pendel 2)



2Q/mm

Abb. 5 25-cm-Reversionspendelgerät (Gu)
Amplitudenfunktionen 2Q (t)

