

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR

Forschungsbereich Kosmische Physik

ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde

Nr. 19

**Die Niveauflächen der Erde nach der Integralgleichung
für das gravimetrische Zusatzglied
und anderen Verfahren**

von

K. Arnold

Als Manuskript gedruckt

Potsdam 1973

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	7
2. Das Randwertproblem der physikalischen Geodäsie und seine Eindeutigkeit	8
3. Die Umformung des GREENSchen Satzes für die Bestimmung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche nach dem gravimetrischen Zusatzglied	13
4. Die Integralgleichung für das gravimetrische Zusatzglied	27
5. Die Formeln für die Bestimmung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche nach dem gravimetrischen Zusatzglied	32
6. Numerische Beispiele für die Berechnung der Lotabweichungen	34
7. Die Bestimmung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche nach Addition der isostatischen oder der Geländereduktion zu den Freiluftanomalien	39
8. Die Bestimmung der Höhenanomalien und der Geoidundulationen nach dem gravimetrischen Zusatzglied	47
9. Die Höhenanomalien nach der Integralgleichung von MOLODENSKY	54
10. Die Bestimmung des Geoids nach der Methode von BJERHAMMAR	58
Literatur	60

Zusammenfassung

In der vorliegenden Abhandlung werden die an verschiedenen Orten in den vergangenen 13 Jahren vom Autor veröffentlichten Arbeiten zur Lösung der Randwertaufgabe der physikalischen Geodäsie nach dem gravimetrischen Zusatzglied zusammengefaßt. Zunächst wird das Randwertproblem allgemein betrachtet. Als Randwerte werden das Potential und seine Normalableitung eingeführt, und es wird gezeigt, daß daraus die Geometrie der Randfläche eindeutig bestimmt werden kann. Geeignete Umformungen des GREENSchen Satzes führen zu einer Formel zur Bestimmung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche einschließlich der Glieder zweiter und höherer Ordnung, die sich von der klassischen Lösung von VENING-MEINESZ u.a. dadurch unterscheidet, daß zu den Freiluftanomalien das gravimetrische Zusatzglied addiert wird. Für dieses Zusatzglied wird eine Integralgleichung angegeben. Diese wird in eine NEUMANNsche Reihe entwickelt. Die Konvergenz dieser Reihe wird gezeigt. Durch Superposition des Störpotentials mit den Potentialen der isostatischen und der BOUGUER-Massen wird man zu einer Verallgemeinerung der Ergebnisse geführt und zu Formeln, bei denen die Geländereduktion auftritt und die für praktische Anwendungen besonders geeignet sind. Durch Integration kommt man von den Lotabweichungen zu den Höhenanomalien und Geoidundulationen. Die erhaltenen Lösungen werden an praktischen Beispielen und Geländemodellen erläutert und erprobt.

Summary

The present short essay summarizes the author's work on the solution of the boundary value problem of physical geodesy according to the gravimetric additional term, published at various places in the past 13 years. First of all the boundary value problem is considered in a general way. The potential and its normal derivative are introduced as boundary values, and it is shown that based on this the geometry of the boundary surface can be uniquely determined. Suitable variations of GREEN's theorem lead to a formula for determining the deflections of the vertical at the Earth's surface including the terms of the second and of higher orders, which are distinguished from VENING-MEINESZ's classical solution, inter alia, by adding the gravimetric additional term to the free-air anomalies. For this additional term an integral equation is given, which is being developed to a NEUMANN series. The convergency of this series is shown. By superpositioning the disturbing potential with the potentials of the isostatic and of BOUGUER's masses a generalization of the results as well as formulae are arrived at with which the topographical reduction occurs and which are especially suitable for practical application. Proceeding from the deflections of the vertical one arrives at elevation anomalies and undulations of the geoid through integration. The solutions obtained are explained and tested by means of practical examples and topographical models.

Résumé

Dans le présent exposé on fait le résumé de tous les ouvrages publiés par l'auteur au cours des treize années écoulées en différents lieux et relatifs à la solution du problème des valeurs limites dans la géodésie physique en partant du terme additionnel gravimétrique. Tout d'abord, le problème des valeurs limites est abordé d'une manière générale. Pour les valeurs limites on met en jeu le potentiel et sa dérivée normale, et l'on montre qu'il est possible à partir de là, de déterminer d'une manière absolue la géométrie de la surface marginale. Des transformations convenables du théorème de GREEN donnent une formule pour la détermination des déviations de la verticale à la surface de la Terre, y compris les termes de second ordre ou d'ordre supérieur, cette formule se distinguant de la solution classique de VENING-MEINESZ, entre autre, par le fait que l'on ajoute aux anomalies à l'air libre le terme additionnel gravimétrique. Pour ce terme additionnel on indique une équation intégrale, cette équation étant développée pour donner une série de NEUMANN. On montre la convergence de cette série. La superposition du potentiel de perturbation avec les potentiels des masses isostatiques et de BOUGUER conduit vers une généralisation des résultats et donne des formules dans lesquelles se présente la réduction du terrain et qui se prêtent parfaitement pour les applications pratiques. Par intégration on passe des déviations de la verticale aux anomalies de la hauteur et aux ondulations du géoïde. Les solutions trouvées sont expliquées et démontrées moyennant des exemples pris dans la pratique et sur des modèles.

Резюме

В данной статье подводятся итоги работ, опубликованных автором в различных районах за прошедшие 13 лет для решения краевых задач физической геодезии по гравиметрическому дополнительному члену. Вначале краевая задача рассматривается в общем. В качестве краевых значений вводятся потенциал и его нормальная производная и показывается, что исходя из этого можно определить геометрию краевой поверхности. Соответствующие преобразования теоремы ГРИНА приводят к формуле для определения отклонения нота на поверхности земли, включая члены второго и более высокого порядка, которая отличается от классического решения ВЕНИНГА-МАЙНИЦА также тем, что к открытым аномалиям прибавляется гравиметрический дополнительный член. Для этого дополнительного члена дается интегральное уравнение. Оно раскладывается в ряд НЕЙМАНА. Показывается сходимости этого ряда. Благодаря суперпозиции возмущающего потенциала с потенциалами изостатической массы и массы БУГЕ мы приходим к обобщению результатов и получаем формулы, в которых возникает топографическая поправка особенно подходящая для практического применения. С помощью интегрирования мы приходим от отклонения нота к аномалиям высоты и отклонению геоида. Получаемые результаты поясняются на практических примерах и испытываются на моделях местности.

1. Einleitung

Bei dem klassischen Randwertproblem der physikalischen Geodäsie gilt es, aus den Schwerewerten an der Oberfläche einer sphärischen Erde die Niveauflächen im Außenraum und insbesondere das Geoid zu bestimmen. Dieses Problem wurde von STOKES seit langem gelöst.

Um die hierbei auftretenden Regularisierungen der Erde und die daraus folgenden Reduktionen der Schwerewerte von der Erdoberfläche auf das Meeresniveau mit den dabei notwendigen Hypothesen zu vermeiden, löste MOLODENSKY das Problem für die Erdoberfläche, ohne daß Reduktionen der Schwerewerte notwendig wären. Die Lösung ist elegant. Er führt an der Erdoberfläche eine Flächenbelegung ein und stellt für deren Dichte eine Integralgleichung auf, die dann nach der bekannten Reihenentwicklung iterativ gelöst werden kann.

Die vorliegende Abhandlung stellt eine Zusammenfassung von Arbeiten des Autors zum Randwertproblem der physikalischen Geodäsie dar, deren Anfänge bis ins Jahr 1958 zurückreichen. Dabei wird vom GREENSchen Satz für das Störpotential an der Erdoberfläche ausgegangen. Dieser wird ohne Einführung von Hypothesen umgeformt, so daß ein Ausdruck für die Lotabweichungen und für das Störpotential (Höhenanomalie, Geoidundulation) an der Erdoberfläche in Strenge erhalten wird. Es werden nur Reihenentwicklungen eingeführt, deren Konvergenz gesichert ist. Die Ausdrücke enthalten keine analytische Fortsetzung nach unten. Die Lösung besteht in der Addition des gravimetrischen Zusatzgliedes zu den Freiluftanomalien bei der klassischen STOKESschen Formel. Das gravimetrische Zusatzglied ergibt sich nach einer inhomogenen Integralgleichung der zweiten Art aus den Freiluftanomalien. Die Lösung dieser Integralgleichung nach der NEUMANNschen Reihe ist konvergent. Bei den meisten praktischen Anwendungen genügt die Berechnung des ersten Gliedes dieser Reihenentwicklung. Bei praktischen Anwendungen empfiehlt es sich ferner, die Superposition des Störpotentials an der Erdoberfläche mit dem Potential der isostatischen Massen oder mit dem Potential der BOUGUER-Massen vorzunehmen. Im letzten Falle wird man zu einer Formel geführt, bei der in dem klassischen STOKESschen Integral zu den Freiluftanomalien noch die Geländereduktion und das gravimetrische Zusatzglied in Abhängigkeit von den BOUGUER-Anomalien auftreten. Es wird ferner gezeigt, daß die Lösung des Problems eindeutig ist. Die Eindeutigkeit galt schon für das klassische NEUMANNsche Randwertproblem. Sie gilt auch, wenn das Potential und seine Normalableitung an der Randfläche als Randwerte gegeben sind und wenn daraus die Geometrie der Randfläche und das Potential im Außenraum bestimmt werden sollen.

2. Das Randwertproblem der physikalischen Geodäsie und seine Eindeutigkeit

Für die weiteren mathematischen Entwicklungen ist der GREENsche Satz grundlegend. Ist σ eine Randfläche, P_1 ein auf ihr gelegener Punkt, P_2 ein im Außenraum τ von σ gelegener Anpunkt und r die Entfernung zwischen diesen beiden Punkten, dann gilt die dritte Identität von GREEN

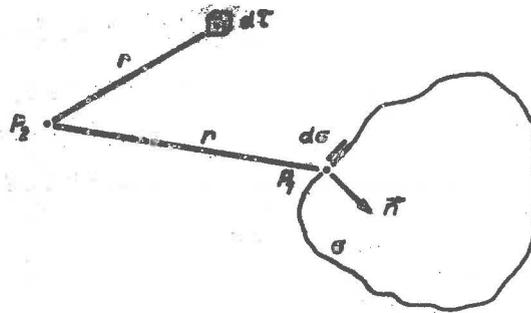


Abb.1 Der Anpunkt P_2 im Außenraum der Randfläche σ

$$(1) \quad v = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau} \Delta v \frac{1}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} v \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma .$$

Δv ist der LAPLACE-Operator,

$$(2) \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi f \mu (x, y, z) .$$

f ist die Gravitationskonstante und μ die Dichte der gravitierenden Massenelemente. Liegt der Anpunkt P_2 auf der Fläche σ , so folgt aus (1) mit (2)

$$(3) \quad v = 2f \iiint_{\tau} \mu \frac{1}{r} d\tau + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} v \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma ;$$

denn beim Grenzübergang gilt für das dritte Glied auf der rechten Seite von (1):

$$(4) \quad -\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} v \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma \longrightarrow \frac{1}{2} v_{\sigma} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} v \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right]_{\sigma} d\sigma .$$

Ist der Außenraum frei von Materie, $\mu = 0$, dann folgt aus (3) der GREENsche Satz für einen Anpunkt auf der Randfläche σ

$$(5) \quad v = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} v \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma .$$

Sind $\partial V/\partial n$ und die Geometrie der Randfläche gegeben, so ist (5) eine Integralgleichung zur Bestimmung des Potentials V im Außenraum. Dieses Randwertproblem von NEUMANN ist bis auf eine Konstante eindeutig lösbar, wie in der Potentialtheorie gezeigt wird. Auch bei dem gemischten Randwertproblem der Potentialtheorie mit Randwerten nach dem BRUNSSchen Theorem,

$$(6) \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial \varrho} - \frac{2}{R} T,$$

ist die Eindeutigkeit der Lösung für das Potential im Außenraum gesichert. Hier bezeichnet ϱ die Entfernung vom Erdmittelpunkt und T das Störpotential. R ist der Erdradius.

Man kann mit (5) noch folgenden Gedanken verknüpfen: Sind das Potential V und seine Normalableitung $\partial V/\partial n$ bekannt - den Unterschied des Potentials gegenüber seinem Wert am Meeresniveau kann man durch Vereinigung von Nivellements mit Schweremessungen erhalten, und die Normalableitung des Potentials steht den Schweremessungen nahe - , so kann man die Parameter der Geometrie der Randfläche, die in (5) durch die Werte von r und $d\sigma$ zum Ausdruck kommen, als die Unbekannten des Problems auffassen, die es zu bestimmen gilt. Soll die Geometrie der Randfläche daraus eindeutig zu bestimmen sein, dann darf die folgende Gleichung keine Lösung haben:

$$(7) 0 = \iint_{\sigma} \delta v_2 \left[\frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v_2} - v \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial v_2} \right] d\sigma + \\ + \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v_1} - v \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial v_1} \right] \delta v_1 d\sigma + \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{r} - v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] \frac{\partial d\sigma}{\partial v_1} \delta v_1.$$

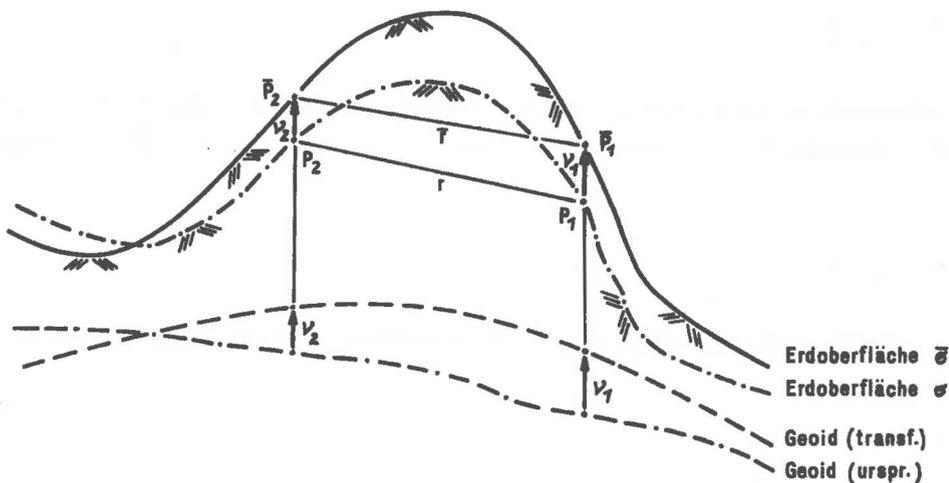


Abb. 2. Die Erdoberfläche und das Geoid vor und nach einer Deformation

Eine kleine Deformation der Randfläche ohne gleichzeitige Transformation der Randwerte V und $\partial V/\partial n$ muß also die Gültigkeit der Gleichung (5) zunichte machen, wenn die Lösung eindeutig sein soll. Die Korrespondenz zwischen zusammengehörigen Punkten P_1, \bar{P}_1 auf den benachbarten Flächen ergibt sich durch die Abbildung entlang den Lotlinien v_1 und v_2 (Abb.2). Gleichung (7) ist eine homogene Integralgleichung der 2. Art für die Deformationsgrößen δv_1 , und es gilt zu zeigen, daß sie durch die Eigenfunktionen nicht befriedigt werden kann.

Transformiert man in (5) oder, falls auch im Außenraum der transformierten Fläche Massen liegen, in (3) alle Parameter auf eine benachbarte Fläche, dann wird man zu folgender Gleichung geführt:

$$(8) \quad \frac{\partial V}{\partial v_2} \delta v_2 = -2 f \iint_{\sigma} \mu \frac{1}{R} \delta v_1 d\sigma + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial n \partial v_1} \right]_{\sigma} \frac{1}{R} \delta v_1 d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial V}{\partial v_1} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} \delta v_1 d\sigma + \delta v_2 \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial v_2} - v \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial n \partial v_2} \right] d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial v_1} - v \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial n \partial v_1} \right] \delta v_1 d\sigma + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{R} - v \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} \right] \frac{\partial d\sigma}{\partial v_1} \delta v_1 .$$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$(8a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial v} = -g, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial n \partial v} = -2 \frac{g}{R} + 4\pi f \mu, \\ \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} = \frac{1}{2R} \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial n \partial v} = -\frac{1}{4R^2} \frac{1}{r}; \end{array} \right.$$

dabei wurde vorübergehend angenommen, daß die Randfläche σ mit dem Geoid in genügender Annäherung zusammenfällt. Somit folgt aus (8) und (7) die homogene Integralgleichung

$$(9) \quad \delta v_2 - \lambda \iint_{\sigma} K(x_2, x_1) \delta v_1 d\sigma = 0, \quad \lambda = 1.$$

Diese Beziehung konnte man auch allein aus (7) ableiten. Für den Kern gilt

$$(10) \quad K(x_2, x_1) = \frac{3}{4\pi R} \frac{1}{r} .$$

Entwickelt man nach Kugelfunktionen, so folgt

$$(11) \quad K(x_2, x_1) = \frac{3}{4\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi) = \frac{3}{4\pi R^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta_1) P_n(\cos \vartheta_2) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \vartheta_1) P_{nm}(\cos \vartheta_2) \cos m(\varphi_1 - \varphi_2) \right] .$$

Setzt man ferner für δv die LAPLACESche Reihe an:

$$(12) \quad \delta v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos \vartheta_1) (a_{nm} \cos m \varphi_1 + b_{nm} \sin m \varphi_1) ,$$

so folgt mit (9), (10), (11), (12)

$$(13) \quad \left. \begin{array}{l} a_{nm} \\ b_{nm} \end{array} \right\} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{n+1} \right) = 0 .$$

Die homogene Gleichung hat also nur dann nichttriviale Lösungen, wenn $n = 1$ ist. Für $n = 1$ drückt (12) aber eine räumliche Translation der Randfläche aus, ohne daß diese deformiert würde. Das ist eine Lösung, die a priori zu erwarten war.

Aus der Gleichung (13) folgen für $n = 0, 2, 3, 4 \dots$ die folgenden Bedingungen, wenn noch ein Ausdruck $0(\alpha)$ hinzugenommen wird, der die vernachlässigte Erdbplatte berücksichtigt:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 0(\alpha) - 3 = 0 , \\ 1 + 0(\alpha) - 3/5 = 0 , \\ 1 + 0(\alpha) - 3/7 = 0 , \\ 1 + 0(\alpha) - 3/9 = 0 , \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots , \\ 1 + 0(\alpha) \pm 0 = 0 . \end{array} \right.$$

Man erkennt, daß diese Gleichungen nicht befriedigt werden können, so daß die Integralgleichung (9) für $\lambda = 1$ keinen Eigenwert hat und daher auch keine Eigenfunktion, die sie befriedigen würde. Es folgt notwendigerweise

$$\delta v = 0 .$$

Die Topographie der Randfläche ist daher bei gegebenen Randwerten V und $\partial V / \partial n$, also bei Randwerten der CAUCHYSchen Form, eindeutig bestimmt.

Die vorstehenden Deduktionen gelten eigentlich wegen der bei (8a) begangenen Vereinfachungen nur für den Fall, daß die Randfläche genähert horizontal ist. Wäre aber das Randwertproblem bei bewegtem Gelände zweideutig, dann hätte man zwei Randflächen für V und $\partial V/\partial n$, und man könnte diese Randwerte vertikal nach oben auf zwei genähert horizontale nichtidentische Flächen (z.B. Niveauflächen im Außenraum) reduzieren, die dann wiederum jeweils die gleichen reduzierten Werte für V und $\partial V/\partial n$ haben würden. Dann wäre aber die Randwertaufgabe für horizontales Gelände (Niveauflächen) als Randfläche zweideutig; dieser Sachverhalt würde im Widerspruch zu den obigen Deduktionen stehen. Die Eindeutigkeit gilt daher auch für eine Randfläche beliebiger Topographie.

3. Die Umformung des GREENSchen Satzes für die Bestimmung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche nach dem gravimetrischen Zusatzglied

Ist W das Potential der Erde im Außenraum, U das normale Potential und T das Störpotential, so gilt

$$(15) \quad T = W - U .$$

T ist im Außenraum der Erde eine harmonische Funktion. Nach dem GREENSchen Satz gilt daher für Aufpunkte im Außenraum

$$(16) \quad T = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} T \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma .$$

σ ist die Erdoberfläche, n die Normalenrichtung der Erdoberfläche, positiv in Richtung zum Erdinnern. Wird der Aufpunkt auf die Erdoberfläche herabgesenkt, so geht (16) in die folgende Gleichung über:

$$(17) \quad T = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} T \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma .$$

Es gilt zunächst, $\partial T / \partial n$ durch die Schwereanomalien auszudrücken. Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = g \cos (g, n) ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \gamma \cos (\gamma, n) .$$

(g, n) bzw. (γ, n) sind die Winkel zwischen der wirklichen bzw. normalen Lotrichtung (positiv nach innen) und der Normalen der Erdoberfläche. Ist θ die Lotabweichung, $\alpha_{1, \theta}$ das Azimut der Lotabweichung und $\alpha_{1, n}$ das Azimut der Geländeneigung, so folgt mit Abb.3

$$\cos (g, n) = \cos (\gamma, n) \cos \theta + \sin (\gamma, n) \sin \theta \cos (\alpha_{1, \theta} - \alpha_{1, n}) .$$

Somit ergibt sich

$$(18) \quad \frac{\partial T}{\partial n} = (g - \gamma) \cos (\gamma, n) + \theta g \sin (\gamma, n) \cos (\alpha_{1, \theta} - \alpha_{1, n}) .$$

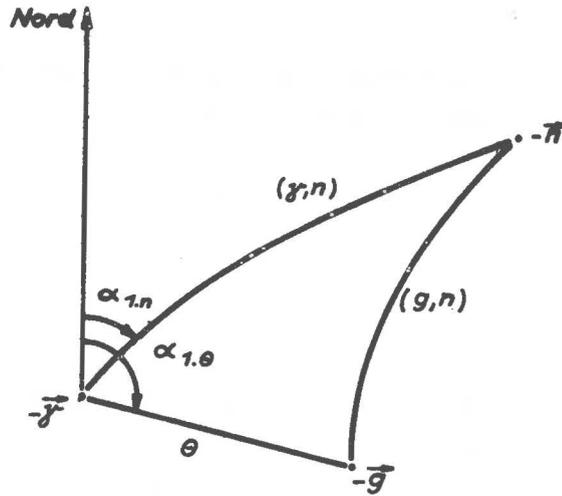


Abb. 3 Die äußeren Normalen des Ellipsoids $-\gamma$ und der Erdoberfläche $-\pi$ und die Lotlinie $-g$

Die normale Schwere γ an der Erdoberfläche ist durch die normale Schwere am Niveauellipsoid γ_ϵ auszudrücken. Der vertikale Gradient der normalen Schwere ist

$$\frac{d\gamma}{dh_0} = -2\gamma H_\gamma - 2\omega^2,$$

wobei h_0 die orthometrische Höhe, H_γ die mittlere Krümmung der Niveauflächen des normalen Potentialfeldes und ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde sind. Daraus folgt durch Integration und nach einigen Umformungen

$$(19) \quad \gamma = \gamma_\epsilon - 2c \bar{H}_\gamma - 2\omega^2 h_0 - 2\bar{H}_\gamma T - 2\omega^2 N_\epsilon.$$

Hier ist c die geopotentielle Kote, \bar{H}_γ der Mittelwert von H_γ zwischen der Erdoberfläche und dem Niveauellipsoid. N_ϵ ist die Geoidundulation (im Meeresniveau).

Führt man die Freiluftanomalie ein:

$$(20) \quad \Delta g_F = g + 2c \bar{H}_\gamma + 2\omega^2 h_0 - \gamma_\epsilon,$$

dann folgt schließlich

$$(21) \quad \frac{\partial T}{\partial n} \frac{1}{\cos(\gamma, n)} = \Delta g_F + \theta G \tan(\gamma, n) \cos(\alpha_{1,\theta} - \alpha_{1,n}) + 2(\bar{H}_\gamma + \omega^2 \frac{1}{g}) T.$$

G ist ein globaler Mittelwert der Schwere. Die Gleichung (17) kann man schließlich noch durch Hinzufügung einer Konstanten K erweitern:

$$(22) \quad T - K = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} (T + K) \frac{\partial 1}{\partial n} d\sigma.$$

Durch Differentiation der Gleichung (22) kann man zu den Lotabweichungen übergehen. Ist θ_s die Komponente der Lotabweichung an der Erdoberfläche in der Richtung des horizontalen Vektors \vec{s} mit dem Azimut A , dann gilt für die Erdoberfläche

$$(23) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial s} = -\theta_s .$$

Differenziert man (22), so folgt

$$(24) \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \iint (T + K) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r^2} \cos(r, n) \right) d\sigma$$

und mit (21)

$$(25) \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{2\pi} \iint \left[\Delta g_P + \theta G \tan(\gamma, n) \cos(\alpha_{1, \theta} - \alpha_{1, n}) \right] \cos(\gamma, n) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint \check{T} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r^2} \cos(r, n) \right) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \iint 2 T (\bar{H}_r + \omega^2 \frac{1}{g}) \cos(\gamma, n) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

mit

$$(26) \quad \check{T} = T + K \gamma_{P_2} ,$$

wobei γ_{P_2} die normale Schwere im Aufpunkt an der Erdoberfläche ist.

Es gilt nun, die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{r^2} \cos(r, n) \right]$$

durch die Topographie der Erdoberfläche darzustellen. Als Bezugsfläche für die Topographie wird die Niveaufäche eingeführt, die durch den Aufpunkt verläuft, für den die Lotabweichungen und das Störpotential zu bestimmen sind. Diese Niveaufäche kann man dann in bestimmten Gleichungen durch das bestanschließende Ellipsoid und dieses weiter durch eine geeignete Kugel ersetzen, wobei relative Fehler von der Größenordnung der Abplattung vernachlässigt werden. Zu den Punkten auf der Erdoberfläche gelangt man, indem man über der Niveaufäche des Aufpunktes P_2 die Höhenunterschiede h gegenüber dem Aufpunkt abträgt. Man erhält, wenn α das im Aufpunkt P_2 gemessene Azimut des Punktes P_1 ist,

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) = \sum_1 Z_{5.1} = \frac{1}{r_x^2} \cos \frac{\psi}{2} \cos(\alpha - A) + \frac{1}{r_x^3} h \sin \psi \cos(\alpha - A) + \\ + \frac{r_x^3 - r^3}{r_x^3 r^3} \left[r_x \cos \frac{\psi}{2} \cos(\alpha - A) + h \sin \psi \cos(\alpha - A) \right] .$$

$r_{\alpha}(\psi)$ ist der geradlinige Abstand zwischen dem Aufpunkt P_2 und dem Punkt P_1 , nachdem dieser auf die geozentrische Kugel, die durch den Aufpunkt P_2 verläuft, herabgesenkt worden ist. r ist der geradlinige Abstand zwischen den Oberflächenpunkten.

Man findet ferner:

$$(28) \quad \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{1}{r^2} \cos(r, n) \right] = \frac{1}{r^3} \left[-3 \cos(r, n) \frac{\partial r}{\partial S} + \cos \chi_3 \right],$$

$$(29) \quad \cos(r, n) = \sum_1 Z_{2.1} = \cos(r_{\alpha}, \gamma) \cos(\gamma, n) + \\ + \cos(r_{\alpha}, \gamma) \cos(\gamma, n) [\cos(r, r_{\alpha}) - 1] + \\ + \sin(r_{\alpha}, \gamma) \sin(r, r_{\alpha}) \cos(\gamma, n) - \\ - \sin(r, \gamma) \sin(\gamma, n) \cos \tau,$$

$$(30) \quad \frac{\partial r}{\partial S} = \sum_1 Z_{1.1} = -\cos \frac{\psi}{2} \cos(\alpha - A) - \frac{h}{r_{\alpha}} \sin \psi \cos(\alpha - A) - \\ - \frac{r_{\alpha} - r}{r r_{\alpha}} \left[r_{\alpha} \cos \frac{\psi}{2} \cos(\alpha - A) + h \sin \psi \cos(\alpha - A) \right],$$

$$(31) \quad \cos \chi_3 = \sum_1 Z_{3.1} = \sin \psi \cos(\alpha - A) \cos(\gamma, n) + \\ + \cos \psi \cos(\alpha - A) \sin(\gamma, n) \cos \tau + \\ + \sin(\alpha - A) \sin(\gamma, n) \sin \tau.$$

Ist $\alpha_{1.2}$ das im variablen Punkt P_1 gemessene Azimut des Punktes P_2 und $\alpha_{1.n}$ das entsprechende der Richtung des stärksten Geländegefälles, so ist mit Abb. 3

$$\tau = 180^\circ - (\alpha_{1.n} - \alpha_{1.2}).$$

τ ist der im Punkt P_1 auftretende Winkel zwischen dem Azimut der Geländeneigung und dem der Verlängerung des Großkreises $P_2 P_1$ über den Punkt P_1 hinaus.

Ferner gilt die folgende, schon in (27) benutzte Gleichung:

$$(32) \quad \frac{1}{r^3} = \sum_1 Z_{4.1} = \frac{1}{r_{\alpha}^3} + \frac{r_{\alpha}^3 - r^3}{r_{\alpha}^3 r^3}.$$

Man hat mit

$$(33) \quad \xi = \frac{h}{r_{\alpha}}$$

die folgenden Beziehungen:

$$r = r_{\infty} \sqrt{1 + \xi^2 + \frac{h}{R}}^{1/2} ,$$

$$\frac{r_{\infty} - r}{r r_{\infty}} = \frac{1}{r_{\infty}} \left[(1 + \xi^2 + \frac{h}{R})^{-1/2} - 1 \right] ,$$

$$\frac{r_{\infty}^3 - r^3}{r_{\infty}^3 r^3} = \frac{1}{r_{\infty}^3} \left[(1 + \xi^2 + \frac{h}{R})^{-3/2} - 1 \right] .$$

Für kleine Werte von ψ gilt:

$$\sin(r_{\infty}, \gamma) = \cos \frac{\psi}{2} \approx 1 ,$$

$$\cos(r_{\infty}, \gamma) = -\sin \frac{\psi}{2} = -\frac{r}{2R} .$$

Mit (25) bis (33) erhält man:

$$(34) \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \left[\Delta g_F + \theta G \tan(\gamma, n) \cos(\alpha_{1,\theta} - \alpha_{1,n}) \right] \cos(\gamma, n) \sum_1 Z_{5,1} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} T \left[\sum_1 Z_{4,1} (-3 \sum_1 Z_{2,1} \sum_1 Z_{1,1} + \sum_1 Z_{3,1}) \right] d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} 2 T \left(\bar{H}_{\gamma} + \omega^2 \frac{1}{G} \right) \cos(\gamma, n) \sum_1 Z_{5,1} d\sigma .$$

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$(35) \quad \Delta g^* = \Delta g_F + \theta G \tan(\gamma, n) \cos(\alpha_{1,\theta} - \alpha_{1,n}) .$$

Ferner werden die folgenden Ausdrücke eingeführt:

$$(36) \quad F_1(\Delta g^*) = \frac{1}{2\pi} \iint \Delta g^* \cos(\gamma, n) Z_{5,0} d\sigma ,$$

$$(37) \quad F_2(T) = \frac{1}{2\pi} \iint T Z_{4,0} (-3 Z_{2,0} Z_{1,0} + Z_{3,0}) d\sigma ,$$

$$(38) \quad F_3(T) = \frac{1}{2\pi} \iint 2 T \left(\bar{H}_{\gamma} + \omega^2 \frac{1}{G} \right) \cos(\gamma, n) Z_{5,0} d\sigma ,$$

$$(39) \quad F_4(\Delta g^*) = \frac{1}{2\pi} \iint \Delta g^* \cos(\gamma, n) \sum_1 Z_{5,1} d\sigma ,$$

$$(40) \quad F_5(T) = \frac{1}{2\pi} \iint T Z_{4,0} \left[-3 Z_{2,0} \sum_1 Z_{1,1} - 3 \sum_1 Z_{2,1} \sum_1 Z_{1,1} + \sum_1 Z_{3,1} \right] d\sigma ,$$

$$(41) \quad F_6(T) = \frac{1}{2\pi} \iint T Z_{4,1} \left[-3 \sum_1 Z_{2,1} \sum_1 Z_{1,1} + \sum_1 Z_{3,1} \right] d\sigma ,$$

$$(42) \quad F_7(T) = \frac{1}{2\pi} \iint 2 T \left(H_\gamma + \omega^2 \frac{1}{G} \right) \cos(\gamma, n) \sum_1 Z_{5.1} \, d\sigma \quad .$$

Das Störpotential T an der Erdoberfläche wird in zwei Glieder zerlegt:

$$(43) \quad T = T_1 + T_2 \quad .$$

Vernachlässigt man die Topographie, dann geht T_2 gegen Null, und T ist gleich T_1 . T_1 ist also gewissermaßen der sphärische Anteil, T_2 der zusätzliche Anteil der Topographie, der durch die Weiterungen gegenüber der STOKESschen Theorie entsteht. So wird mit (34) bis (43):

$$(44) \quad \frac{\partial T_1}{\partial s} = F_1(\Delta g^*) + F_2(T_1) + F_3(T_1) \quad ,$$

$$(45) \quad \frac{\partial T_2}{\partial s} = F_2(T_2) + F_3(T_2) + F_4(\Delta g^*) + F_5(\ddot{\eta}) + F_6(\ddot{\eta}) + F_7(T) \quad .$$

Es folgt

$$(46) \quad -\frac{1}{G} \frac{\partial T_1}{\partial s} = \theta_{s.1} = -\frac{1}{2\pi} \iint \Delta g^* V_M(\psi) \cos(\alpha - \Lambda) \, d\psi \, d\alpha \quad ,$$

$$(47) \quad V_M = -\frac{1}{2G} \sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi} s_T(\psi) \quad .$$

$\theta_{s.1}$ ist im wesentlichen die Lotabweichungskomponente im Azimut Λ entsprechend der STOKESschen Theorie.

Betrachtet man $\partial T_2 / \partial s$, so kann man die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite von (45) vernachlässigen; denn es ist

$$(48) \quad F_2(T_2) + F_3(T_2) = \frac{1}{2\pi} \iint N_2 \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r_x} \sin \psi + 2 \frac{1}{R} \frac{1}{r_x^2} \cos \frac{\psi}{2} \right] \cos(\alpha - \Lambda) \, d\alpha$$

mit

$$N_2 = \frac{T_2}{G}, \quad d\alpha = R^2 \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \quad .$$

Setzt man

$$-\frac{1}{G} \frac{\partial T_2}{\partial s} = \theta_{s.2} \quad ,$$

so ist $\theta_{s.2}$ die Komponente der Lotabweichung in Richtung des Radius s , die zusätzlich durch die Berücksichtigung der Topographie entsteht. Die Lotabweichung $\theta_{r.2}$ bezieht sich also auf den variablen Radius r . Sie ist, wie später gezeigt werden wird, maximal kaum größer als 1". Aus (48) ergibt sich dann durch partielle Integration und einige Umformungen größenordnungsmäßig der folgende Ausdruck:

$$\frac{3}{4\pi R} \iint \Theta_{r,2} \ln r_x \cos(\alpha - \Lambda) dr d\alpha .$$

Der Aufpunkt liege in der Mitte eines Hochgebirges von 200×200 km Ausdehnung.

$\Theta_{r,2}$ sei in diesem Bereich eine zufällige Variable mit der Amplitude 1° und der Wellenlänge 10 km. Nimmt man die Längeneinheit gleich einem Kilometer, dann kann man für den Bereich des Hochgebirges den Mittelwert von $\ln r_x$ etwa gleich 5 setzen. Der quadratische Mittelwert von $\cos(\alpha - \Lambda)$ ist 0,5; damit wird (48) für diesen Bereich mit 0,005 abgeschätzt. Für ein 3000 km entferntes Hochgebirge von 200×200 km Ausdehnung erhält man mit den gleichen Parametern für $\Theta_{r,2}$ den geschätzten Wert 0,0002 für die Gleichung (48). Der Ausdruck (48) wird daher kaum 0,005 übersteigen und kann immer vernachlässigt werden. Aus (45) wird damit

$$(49) \quad \frac{1}{G} \frac{\partial T_2}{\partial s} = F_4 \left(\frac{\Delta g^*}{G} \right) + F_5(\check{N}) + F_6(\check{N}) + F_7(N) ; \quad \check{N} = N - N_{P_2} .$$

N_{P_2} ist der Wert von N für den Aufpunkt P_2 .

Die mit (39), (40), (41), (42) gegebenen Größen F_4, F_5, F_6, F_7 werden umgeformt und vereinfacht. Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$(50) \quad F_4 \left(\frac{\Delta g^*}{G} \right) = \sum_1^2 \Lambda_1 ,$$

$$(51) \quad F_5(\check{N}) = \sum_3^{12} \Lambda_1 ,$$

$$(52) \quad F_6(\check{N}) = \sum_{13}^{14} \Lambda_1 + \sum_3^{12} \Lambda_{1*} ,$$

$$(53) \quad F_7(N) = \sum_{15}^{16} \Lambda_1 .$$

Die Darstellung der einzelnen Glieder Λ_1, Λ_{1*} und ihre weitere Umformung ist in [7], S.8 bis 17 zu finden. Es soll hier lediglich die Transformation der in $F_5(\check{N})$ vorkommenden Größe Λ_{11} ausführlich dargestellt werden:

$$(54) \quad \begin{cases} \Lambda_{11} = \frac{1}{2\pi} \iint \check{N} z_{4,0} z_{3,1} d\sigma , \\ \Lambda_{11} = \frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^3} \sin(\gamma, n) \cos \tau \cos \psi \cos(\alpha - \Lambda) d\sigma , \\ \Lambda_{11} = \frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^3} \tan(\gamma, n) \cos \tau \cos(\alpha - \Lambda) d\alpha , \end{cases}$$

und mit

$$\tan(\gamma, n) \cos \tau = -\left(\zeta + r \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) \left(1 - \frac{h}{R}\right) \cos \frac{\psi}{2} \approx -\zeta - r \frac{\partial \xi}{\partial r}$$

folgt

$$(55) \Lambda_{11} = -\frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^3} \left(\xi + r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \cos(\alpha - \Lambda) d\alpha .$$

Faßt man alle Glieder Λ_1, Λ_{1*} zusammen und vernachlässigt solche Ausdrücke, die auch in extremen Hochgebirgen kleiner als etwa 0,01 sind, so folgt, wenn der Einfachheit halber für r_{α} jetzt r geschrieben wird:

$$(56) \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = \frac{1}{2\pi G} \iint \Delta g^* \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) / (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1/ d\alpha ,$$

$$(57) \Lambda_4 + \Lambda_5 + \Lambda_6 = -\frac{3}{2\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) / (1 + \xi^2)^{-1/2} - 1/ d\alpha ,$$

$$(58) \Lambda_7 = -\frac{3}{4\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) / (1 + \xi^2)^{-1/2} - 1/ d\alpha ,$$

$$(59) \Lambda_8 + \Lambda_9 + \Lambda_{10} = \frac{3}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \frac{1}{1 + \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial r} d\alpha - \\ - \frac{3}{2\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} d\alpha ,$$

$$(60) \Lambda_{11} = -\frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^3} \cos(\alpha - \Lambda) \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} + \xi \right) d\alpha ,$$

$$(61) \Lambda_{12} = \frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^4} \sin(\alpha - \Lambda) \frac{\partial h}{\partial \alpha} d\alpha ,$$

$$(62) \Lambda_{13} + \Lambda_{14} = -\frac{1}{4\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) / (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1/ d\alpha ,$$

$$(63) \Lambda_{3*} + \Lambda_{4*} + \Lambda_{5*} = -\frac{3}{2\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) / (1 + \xi^2)^{-1/2} - 1/ / (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1/ d\alpha ,$$

$$(64) \Lambda_{6*} + \Lambda_{7*} = -\frac{3}{4\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) / (1 + \xi^2)^{-1/2} - 1/ d\alpha \xi^2 ,$$

$$(65) \Lambda_{8*} + \Lambda_{9*} + \Lambda_{10*} = \frac{3}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) (1 + \xi^2)^{-1} / (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1/ \frac{\partial \xi}{\partial r} d\alpha - \\ - \frac{3}{2\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \xi^2 (1 + \xi^2)^{-1} / (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1/ d\alpha ,$$

$$(66) \Lambda_{11*} = -\frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^3} \cos(\alpha - \Lambda) \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} + \xi \right) / (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1/ d\alpha ,$$

$$(67) \Lambda_{12*} = \frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^4} \sin(\alpha - \Lambda) / (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1/ \frac{\partial h}{\partial \alpha} d\alpha ,$$

$$(68) \Lambda_{15} + \Lambda_{16} = \frac{1}{\sqrt{R}} \iint N \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \left[(1 + \xi^2)^{-3/2} - 1 \right] d\alpha .$$

Die Gleichung (49) mit (50) bis (53) und (56) bis (68) läßt sich auf der rechten Seite in 5 Gliedern Λ_1^* ($i=1, 2, \dots, 5$) zusammenfassen. Setzt man mit (49), (50), (51), (52), (53) die folgende Beziehung an:

$$(69) \frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{1}{G} \frac{\partial T_2}{\partial s} = \sum_1^{16} \Lambda_1 + \sum_3^{12} \Lambda_{1^*} = \sum_1^5 \Lambda_1^* ,$$

dann ergibt sich:

$$(70) \Lambda_1^* = \frac{1}{\pi} \iint N \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \frac{\partial \xi}{\partial r} \left[\frac{3}{2}(1 + \xi^2)^{-5/2} - \frac{1}{2}(1 + \xi^2)^{-3/2} \right] d\alpha ,$$

$$(71) \Lambda_2^* = -\frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^3} \cos(\alpha - \Lambda) \xi (1 + \xi^2)^{-3/2} d\alpha ,$$

$$(72) \Lambda_3^* = \frac{1}{2\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^4} \sin(\alpha - \Lambda) \frac{\partial h}{\partial \alpha} (1 + \xi^2)^{-3/2} d\alpha ,$$

$$(73) \Lambda_4^* = \frac{1}{\sqrt{R}} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \left\{ \frac{3}{4} \left[(1 + \xi^2)^{-5/2} - 1 \right] - (1 + \xi^2)^{-3/2} + 1 \right\} d\alpha + \\ + \frac{1}{\sqrt{R}} \iint N \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \left[(1 + \xi^2)^{-3/2} - 1 \right] d\alpha ,$$

$$(74) \Lambda_5^* = \frac{1}{2\sqrt{RG}} \iint \Delta g^* \frac{1}{r^2} \cos(\alpha - \Lambda) \left[(1 + \xi^2)^{-3/2} - 1 \right] d\alpha .$$

Die Ausdrücke für Λ_1^* und Λ_3^* lassen sich durch partielle Integration vereinfachen. Substituiert man in (70)

$$u = \check{N} \frac{1}{r} , \quad u' = \frac{\partial \check{N}}{\partial r} \frac{1}{r} - \check{N} \frac{1}{r^2} ,$$

$$v = \xi(1 + \xi^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \xi^3(1 + \xi^2)^{-3/2} ,$$

$$v' = \left[\frac{3}{2}(1 + \xi^2)^{-5/2} - \frac{1}{2}(1 + \xi^2)^{-3/2} \right] \frac{\partial \xi}{\partial r} ,$$

nimmt eine ähnliche Substitution in (72) vor, führt dann die partielle Integration durch und faßt die erhaltenen Ausdrücke mit den Beziehungen (71), (73), (74) zusammen, so folgt für $\sum_1^5 \Lambda_1^*$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
(75) \quad \sum_1^5 \Lambda_1^* &= -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\partial \check{N}}{\partial r} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \frac{1}{r} (\xi (1 + \xi^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \xi^3 (1 + \xi^2)^{-3/2}) dr d\alpha - \\
&- \frac{1}{2\pi} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \check{N}}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} \frac{1}{r} \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \iint \check{N} \frac{1}{r^2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \left\{ \frac{3}{4} \xi (1 + \xi^2)^{-5/2} - 1 \right\} \xi (1 + \xi^2)^{-3/2} + 1 \right\} dx + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \iint N \frac{1}{r^2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \xi (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1 \right\} dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi G} \iint \Delta g^* \frac{1}{r^2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \xi (1 + \xi^2)^{-3/2} - 1 \right\} dx .
\end{aligned}$$

Der obere Ausdruck in den geschweiften Klammern gilt für die Nord-Süd- ($\Lambda = 0^\circ$) und der untere für die Ost-West-Komponente ($\Lambda = 90^\circ$) der Lotabweichung, also für ξ bzw. η .

Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \check{N}}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \check{N}}{\partial \alpha}$$

sind entlang der Erdoberfläche genommen, wie überhaupt alle Werte N , \check{N} , θ , Δg^* in bezug auf die Erdoberfläche zu verstehen sind, wie bereits früher betont wurde. Zerlegt man die entlang der Erdoberfläche genommenen Differentialquotienten in eine horizontale und eine vertikale Komponente, so ergibt sich:

$$\frac{\partial \check{N}}{\partial r} = \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]_g + \left[\frac{\partial N}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial r} \right]_g ,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \check{N}}{\partial \alpha} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial N}{\partial \alpha} \right]_g + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial N}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right]_g .$$

Mit einigen Umformungen folgt für die Ableitungen entlang der Erdoberfläche

$$(76) \quad \frac{\partial \check{N}}{\partial r} = -\theta_r - \left[\frac{\Delta g_F}{G} + \frac{2}{R} N \right] r \left[\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \xi \right] ,$$

$$(77) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \check{N}}{\partial \alpha} = -\theta_\alpha - \left[\frac{\Delta g_F}{G} + \frac{2}{R} N \right] \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} .$$

Werden diese Ausdrücke (76) und (77) in (75) eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
(78) \quad \sum_1^2 \Lambda_1^* &= \frac{1}{\pi} \iint \theta_r \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \frac{1}{r} \left[\zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \zeta^3 (1 + \zeta^2)^{-3/2} \right] dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \iint \theta_\alpha \left\{ \begin{array}{c} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right\} \frac{1}{r} \zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \left[\frac{3}{4} \zeta (1 + \zeta^2)^{-5/2} - 1 \right] - (1 + \zeta^2)^{-3/2} + 1 \right] dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{\pi R} \iint N \frac{1}{r^2} \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \left[(1 + \zeta^2)^{-3/2} - 1 \right] dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{2\pi G} \iint \Delta g^* \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \left[(1 + \zeta^2)^{-3/2} - 1 \right] dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{\pi} \iint \left(\frac{\Delta g_F}{G} + \frac{2}{R} N \right) \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r} \zeta \right) \left[\zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \zeta^3 (1 + \zeta^2)^{-3/2} \right] dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \iint \left(\frac{\Delta g_F}{G} + \frac{2}{R} N \right) \left\{ \begin{array}{c} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} dr d\alpha .
\end{aligned}$$

In den beiden letzten Gliedern der Gleichung (78) werden die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}$$

auf dem Wege der partiellen Integration in den Ausdruck ζ umgeformt. Es ist

$$\int_0^\zeta \left[\zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \zeta^3 (1 + \zeta^2)^{-3/2} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial r} dr = \frac{1}{2} \zeta^2 (1 + \zeta^2)^{-1/2}$$

und

$$\frac{1}{2} \zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} \sin(\alpha - A) \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 + \zeta^2)^{1/2} - 1 \right] \sin(\alpha - A) - \frac{1}{2} \left[(1 + \zeta^2)^{1/2} - 1 \right] \cos(\alpha - A) .$$

Nach einigen weiteren Umformungen erhält schließlich die Gleichung (78) die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
(79) \quad \sum_1^2 \Lambda_1^* &= \frac{1}{\pi} \iint \theta_r \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \frac{1}{r} \left[\zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \zeta^3 (1 + \zeta^2)^{-3/2} \right] dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \iint \theta_\alpha \left\{ \begin{array}{c} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right\} \frac{1}{r} \zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} dr d\alpha + \\
&+ \frac{1}{\pi R} \iint \check{N} \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \left[\frac{3}{4} \zeta (1 + \zeta^2)^{-5/2} - 1 \right] - (1 + \zeta^2)^{-3/2} + 1 \right] dr d\alpha +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{noch} & + \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \left[-\Delta g_F \{(1 + \xi^2)^{-3/2} - 1\} + \Delta g^* \{(1 + \xi^2)^{-3/2} - 1\} \right] dr d\alpha \\
 (79) & - \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{\partial g_F}{\partial r} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} dr d\alpha - \\
 & - \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta g_F}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} \left[(1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] dr d\alpha .
 \end{aligned}$$

Die Komponenten der Lotabweichung an der Erdoberfläche im Meridian und im ersten Vertikal, ξ bzw. η , errechnen sich daher mit (35), (46), (47), (69), (79) nach den folgenden Gleichungen, wobei $\alpha_{2,\theta}$ das Azimut der Lotabweichung θ im Aufpunkt P_2 ist:

$$(80) \quad \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \theta \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{2,\theta} \\ \sin \alpha_{2,\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{Bmatrix} - \sum_1^2 \Lambda_1^* ,$$

$$(81) \quad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\pi} \iint \Delta g^* V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha .$$

Die in (81) und (79) vorkommende Schwereanomalie Δg^* ist nach (35) aus den Parametern der Geländeneigung und dem Azimut der Lotabweichung nicht sehr vorteilhaft zu berechnen. Sie wird umgeformt in die Freiluftanomalie, die Lotabweichung und den Parameter ξ . In (35) ist

$$\tan(\gamma, n) \cos(\alpha_{1,\theta} - \alpha_{1,n})$$

die Komponente der Geländeneigung im Azimut $\alpha_{1,\theta}$ der maximalen Lotabweichung θ . Bei den weiteren notwendigen Umformungen wird wieder die partielle Integration herangezogen; es werden auch die rechtwinkligen GAUSS-KRÜGER-Koordinaten eingeführt. ξ_* bzw. η_* sind die Komponenten der Lotabweichung entlang den Linien $Y = \text{const}$ bzw. $X = \text{const}$ dieses Koordinatensystems, θ_{r^*} ist die Komponente entlang der Verlängerung der "ebenen Entfernung" r^* der Punkte P_2 und P_1 über den Punkt P_1 hinaus. Die zahlreichen Transformationen können in [7], S.24 bis 31 nachgelesen werden. Hier soll nur das Ergebnis mitgeteilt werden.

$$\begin{aligned}
 (82) \quad \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{2\pi} \iint \Delta g_F V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha - \\
 &- \frac{1}{\pi r} \iint \dot{N} \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \left[\frac{3}{4} \left[(1 + \xi^2)^{-5/2} - 1 \right] - (1 + \xi^2)^{-3/2} + 1 \right] dr d\alpha + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \iint \theta_{r^*} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left[\xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \right] dr d\alpha +
 \end{aligned}$$

noch
(82)

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{1}{r} \left[-\xi_* \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \alpha \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \\ \sin^2 \alpha \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \end{array} \right\} + \right. \\
& + \left. \eta_* \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \\ \sin \alpha \cos \alpha \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \end{array} \right\} \right] dr d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{\partial \Delta g_F}{\partial r} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} dr d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta g_F}{\partial \alpha} \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right\} \left[(1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] dr d\alpha .
\end{aligned}$$

Schließlich empfiehlt es sich, die im dritten, vierten, fünften und sechsten Glied der Gleichung (82) erscheinenden Ableitungen nach den Polarkoordinaten r, α zu substituieren durch die Ableitung nach den rechtwinkligen Koordinaten x, y , wobei die x -Achse nach Norden und die y -Achse nach Osten zeigt, so daß man hierunter auch die GAUSS-KRÜGER-Koordinaten X, Y verstehen kann.

Mit den für jede Funktion φ gültigen Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} ,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

und einigen Umformungen nach den Regeln der partiellen Integration folgt endlich die nachstehende Gleichung für die Komponenten der Lotabweichung an der Erdoberfläche im Meridian und im ersten Vertikal:

$$\begin{aligned}
(83) \quad \left. \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \Delta g_F V_M(\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} d\varphi d\alpha - \\
& - \frac{1}{2\pi} \iint \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} dr d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{\partial \Delta g_F}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha \xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} - \sin^2 \alpha \left[(1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \\ \sin \alpha \cos \alpha \left[\xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} + (1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \end{array} \right\} dr d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{\partial \Delta g_F}{\partial y} \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \alpha \left[\xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} + (1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \\ \sin^2 \alpha \xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} - \cos^2 \alpha \left[(1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \end{array} \right\} dr d\alpha + \\
& + \frac{1}{\pi R} \iint (N - N_{P_2}) \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} \Xi(\xi) dr d\alpha
\end{aligned}$$

mit

$$\Xi(\xi) = (1 + \xi^2)^{-5/2} \left(\xi^2 + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \xi^2 - \frac{45}{32} \xi^4 + \dots$$

Die Gleichung (83) löst also die Randwertaufgabe für die Erdoberfläche. Die fünf Glieder auf ihrer rechten Seite sind nach der Größenordnung ihrer numerischen Beiträge geordnet. Das erste Glied, das Hauptglied oder das Glied nullter Ordnung, stellt die bekannte STOKESSsche Lösung für eine sphärische Erde dar. Es erreicht Werte zwischen $-30''$ und $+30''$, wenn man von vereinzelt vorkommenden extrem großen Lotabweichungen absieht. — Das zweite Glied ist die wichtigste durch die Berücksichtigung der Topographie hinzugekommene Erweiterung. Es ist linear in ξ und damit in den topographischen Höhen, man spricht daher auch von dem linearen Glied. Das Integral für das zweite Glied muß man nicht, wie das für das erste, über die ganze Erdoberfläche ausdehnen; es genügt meistens ein Umkreis von wenigen 100 Kilometern um den Aufpunkt. Im Flachland und im Mittelgebirge übersteigt das lineare Glied nur selten $1''$, im Hochgebirge kann es größer als $1''$ sein. — Die Strukturen des dritten und vierten Gliedes sind einander sehr ähnlich. Beide Glieder sind quadratisch in ξ und damit in den topographischen Höhen. Während beim ersten linearen Glied der Integrand mit wachsender Entfernung vom Aufpunkt wie $1/r$ abnimmt, erfolgt beim dritten und vierten Glied die Abnahme entsprechend $1/r^2$. Im Flachland und im Mittelgebirge können diese Glieder fast immer vernachlässigt werden. Man wird sie nur im Hochgebirge mit extremem Relief berücksichtigen müssen und braucht auch dann in diese Integrale nur einen Umkreis von etwa 10 bis 20 km einzubeziehen. Das dritte und vierte Integral in (83) werden kaum Werte zwischen $0,5''$ und $1''$ übersteigen. — Das fünfte Glied auf der rechten Seite der Gleichung (83) schließlich übersteigt auch in extremen Fällen kaum den tausendsten Teil von ξ und η selbst. Es soll daher im weiteren nicht berücksichtigt werden.

Setzt man für das dritte und vierte Glied in (83) zur Abkürzung

$$(84) \quad \left. \begin{array}{l} \delta\xi \\ \delta\eta \end{array} \right\},$$

je nachdem, ob ξ oder η zu berechnen ist, so folgt aus (83):

$$(85) \quad \left. \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g_F V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} dr d\alpha + \left\{ \begin{array}{l} \delta\xi \\ \delta\eta \end{array} \right\}.$$

4. Die Integralgleichung für das gravimetrische Zusatzglied

In Gleichung (85) lassen sich das erste und das dritte Glied auf der rechten Seite aus den Freiluftanomalien, aus der Topographie und aus den sphärischen Koordinaten ψ, α direkt bestimmen. Im zweiten Glied dagegen tauchen die horizontalen Ableitungen der Lotabweichungskomponenten, also der unbekanntes und gesuchten Größen, im Integranden auf. Die Gleichung (85) ist daher iterativ zu lösen. In der Praxis kommt man aber meistens mit der ersten Iteration aus, wie später gezeigt werden wird.

Hat man mit [1], S. 7, Gleichung (17) und (18), die Formel

$$(86) \quad \left. \begin{matrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi GR^2} \iint \Delta g_F \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\alpha,$$

so gilt mit [1], S. 14, Gleichung (83) und (86) die Gleichung

$$(87) \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi GR} \iint [\Delta g_F - \Delta g_{F.0}] K_1(\psi) d\alpha d\psi + \frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \chi_1.$$

Hier ist

$$(88) \quad K_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\psi} \left\{ \sin \psi \frac{dS_T}{d\psi} \right\} = \frac{1}{\psi^2} - \frac{49}{24} + \left(\frac{19}{2} - 3 \ln 2 \right) \psi + \dots$$

Vergleicht man (85) mit (86) und substituiert mit (47) im ersten Glied in (85)

$$-2G V_M(\psi) \frac{1}{\sin \psi} = \frac{\partial S_T}{\partial \psi}$$

und beim zweiten

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \longrightarrow \Delta g_F, \quad \frac{1}{R} \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \longrightarrow \frac{\partial S_T}{\partial \psi},$$

so folgt mit (86) und (87)

$$(89) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi GR} \iint [\Delta g_F - \Delta g_{F.0}] K_1(\psi) d\alpha d\psi + \\ + \frac{R}{2\pi} \iint \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \frac{d}{d\psi} \left\{ \sin \psi \frac{1}{R} \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \right\} d\alpha d\psi + \\ + \frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right).$$

$\Delta g_{F,0}$ ist die Freiluftanomalie im Aufpunkt P_2 . Nun ist genähert

$$(90) \quad \frac{d}{d\psi} \left\{ \sin \psi \frac{1}{R} \zeta (1 + \zeta^2)^{-1/2} \right\} \approx \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{h}{R} \left[1 + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} = -\frac{1}{R} \zeta (1 + \zeta^2)^{-3/2} .$$

Daher gilt mit [15], S. 275

$$(91) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi GR} \iint [\Delta g_F - \Delta g_{F,0}] K_1(\psi) d\alpha d\psi - \\ - \frac{1}{2\pi R} \iint \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] h (1 + \zeta^2)^{-3/2} \frac{1}{\zeta^2} d\alpha d\psi + \\ + \left(\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \xi .$$

Dies ist eine inhomogene Integralgleichung der 2. Art für die in die Gleichung (85) auf der rechten Seite im zweiten Glied einzusetzende Größe

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} .$$

Diese Größe kann aus (91) bestimmt werden. Die Integralgleichung kann man in folgender Form schreiben:

$$(92) \quad f(x_2) = g(x_2) + \lambda \iint f(x_1) k(x_2, x_1) dx_1 .$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der Gleichung (91), so ist

$$(93) \quad \lambda = 1 ,$$

$$(94) \quad f(x_2) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} ,$$

$$(95) \quad g(x_2) = -\frac{1}{2\pi GR} \iint [\Delta g_F - \Delta g_{F,0}] K_1(\psi) d\alpha d\psi + \left[\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial y} \right] + \frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \xi ,$$

$$(96) \quad k(x_2, x_1) = -\frac{1}{2\pi R} h (1 + \zeta^2)^{-3/2} K_1(\psi) , \quad dx_1 = d\alpha d\psi$$

Der Kern $k(x_2, x_1)$ ist antisymmetrisch, weil h antisymmetrisch ist;

$$k(x_2, x_1) = -k(x_1, x_2) .$$

Ferner ist der Kern eigentlich nicht stetig, weil er für $\psi \rightarrow 0$ gegen Unendlich geht. Man kann aber bei der Integration in (92) einen angemessenen kleinen Kreis um den Aufpunkt ausschließen, ohne daß das Integral seinen Wert ändern würde. Den Radius dieses Kreises kann man dann gegen Null gehen lassen. Unter dieser Voraussetzung erfüllt der Kern die Bedingung, stetig und endlich zu sein.

Die Integralgleichung wird iterativ nach der NEUMANN'schen Reihe gelöst. Man erhält dann nacheinander folgende Näherungslösungen:

$$(97) \quad f_1(x_2) = g(x_2) \quad ,$$

$$(98) \quad f_2(x_2) = g(x_2) + \lambda \iint g(x_1) k(x_2, x_1) dx_1 \quad ,$$

$$(99) \quad f_3(x_2) = g(x_2) + \lambda \iint g(x_1) k(x_2, x_1) dx_1 + \\ + \lambda^2 \iint g(x_1) dx_1 \iint k(x_2, x_3) k(x_3, x_1) dx_3 \quad .$$

Die NEUMANN'sche Reihe hat dann folgende Form:

$$(100) \quad f(x_2) = g(x_2) + \iint g(x_1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n k_n(x_2, x_1) dx_1 \quad .$$

$k_n(x_2, x_1)$ ist der iterierte Kern,

$$(101) \quad k_n(x_2, x_1) = \iint k_{n-1}(x_2, x_3) k(x_3, x_1) dx_3 \quad .$$

In der Theorie der Integralgleichungen wird gezeigt, daß die NEUMANN'sche Reihe konvergiert, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(102) \quad \iint k^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 < \frac{1}{\lambda^2} \quad , \quad \lambda = 1 \quad .$$

Der Kern $k(x_1, x_2)$ ergibt sich nach (96); er hängt von der Topographie ab. Je kleiner die Höhen sind, desto kleiner ist der Betrag des Kernes, und um so besser ist die Konvergenzbedingung (102) erfüllt. Je steiler das Relief ist, um so größer ist der Betrag des Kernes, und um so kritischer wird die Frage der Konvergenz. Der Kern kann nach (96) wie folgt geschrieben werden:

$$(103) \quad k(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\frac{h}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2}}^{3/2} \frac{1}{\psi} \quad .$$

Je kleiner die Geländeneigungen sind, um so kleiner ist h/r , und um so kleiner ist der Kern. Wenn h/r gegen Null oder gegen Unendlich geht, dann geht der Betrag des

Kerns der Integralgleichung auch gegen Null. Der Maximalwert des Ausdrucks

$$(104) \quad \frac{\frac{h}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2}^{3/2}}$$

im Kern beträgt 0,38 für $h/r = 0,71$. Wenn die Geländeneigungen gegen Unendlich gehen, bleibt der Betrag des Kerns endlich.

Es soll jetzt der Wert auf der linken Seite der Bedingung (102) abgeschätzt werden. Setzt man

$$(105) \quad h = \beta r^2 = \beta (R \psi)^2$$

oder

$$(106) \quad \frac{h}{r} = \beta r = \beta R \psi ,$$

dann gilt für das in der Bedingung (102) erscheinende Quadrat des Kerns

$$(107) \quad k^2(x_1, x_2) = \left[\frac{1}{2\pi} \beta R \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2}^{3/2}} \right]^2 .$$

Integriert man in der Bedingung (102) mit den Integrationsvariablen

$$dx_1 = d\alpha_1 d\psi_1 \quad \text{und} \quad dx_2 = d\alpha_2 d\psi_2 ,$$

dann folgt

$$(108) \quad \iint k^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx \frac{\left(\frac{h^0}{r^0}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{h^0}{r^0}\right)^2}^3} .$$

r^0 ist der Radius der Integrationsfläche, h^0 ist der Höhenunterschied zwischen der Peripherie dieses Kreises und dem Aufpunkt.

Die vorstehenden Deduktionen, bei denen betrachtet wird, ob die Bedingung (102) erfüllt ist, enthalten in den Gleichungen (105), (106), (107), (108) einige Vereinfachungen, durch die der Wert der linken Seite der Bedingung (102) mittels der Gleichung (108) zu hoch eingeschätzt wird. In Wirklichkeit wird der Betrag des Integrals in der Bedingung (102) kleiner sein, als er nach (108) ausgewiesen wird.

Wenn in (108) der Quotient h^0/r^0 klein ist, insbesondere kleiner als Eins, dann ist das Integral auch klein und kleiner als Eins. Ist aber h^0/r^0 groß, dann geht der Ausdruck (108) gegen $(h^0/r^0)^{-4}$ und ist daher auch klein und kleiner als Eins. Der maximale Wert von (108) ist 0,15 für $h^0/r^0 = 0,71$ und damit wesentlich kleiner als Eins.

Die Bedingung (102) wird nach diesen Untersuchungen immer erfüllt sein, und die NEUMANNsche Reihe wird daher für jede Topographie konvergieren.

5. Die Formeln für die Bestimmung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche nach dem gravimetrischen Zusatzglied

Faßt man die theoretischen Untersuchungen zusammen, so ergeben sich folgende Formeln für die Berechnung der Lotabweichungskomponenten an der Erdoberfläche:

$$(109) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g_F V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint \left[\xi_x + \eta_y \right] \xi (1 + \xi^2)^{-1/2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} dr d\alpha + \left\{ \begin{matrix} \delta_\xi \\ \delta_\eta \end{matrix} \right\} ;$$

$$(110) \quad \xi_x + \eta_y = -\frac{1}{2\pi GR} \iint \left[\Delta g_F - \Delta g_{F,0} \right] K_1(\psi) d\alpha d\psi + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta_\xi + \frac{\partial}{\partial y} \delta_\eta \right] + \frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \xi + \\ + \iint \left\{ \frac{1}{2\pi GR} \iint \left[\Delta g_F - \Delta g_{F,0} \right] K_1(\psi) d\alpha_1 d\psi_1 - \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta_\xi + \frac{\partial}{\partial y} \delta_\eta \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \xi \right\} \frac{1}{2\pi R} h(1 + \xi^2)^{-3/2} K_1(\psi_2) d\alpha_2 d\psi_2 + \dots ,$$

$$(111) \quad \left. \begin{matrix} \delta_\xi \\ \delta_\eta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{\partial \Delta g_F}{\partial x} \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} - \sin^2 \alpha \left[(1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \\ \sin \alpha \cos \alpha \left[\xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} + (1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \end{Bmatrix} dr d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi G} \iint \frac{\partial \Delta g_F}{\partial y} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha \left[\xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} + (1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \\ \sin^2 \alpha \xi^2 (1 + \xi^2)^{-1/2} - \cos^2 \alpha \left[(1 + \xi^2)^{1/2} - 1 \right] \end{Bmatrix} dr d\alpha .$$

In (109) kann man das zweite Glied auf der rechten Seite mit dem ersten zusammenfassen. Die NEUMANNsche Reihe kann man in (110) in den meisten Fällen, wenn das Relief nicht sehr steil ist, nach dem Glied nullter Ordnung abbrechen. Es verbleibt dann nur das erste Glied auf der rechten Seite. Ferner kann man in (110) setzen

$$K_1(\psi) \approx \frac{1}{\psi^2} .$$

Mit diesen bei nicht zu extremem Relief zulässigen Vereinfachungen folgt

$$(112) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \left[\Delta g_F + K G (\Delta g_F) \right] V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha + \left\{ \begin{matrix} \delta_\xi \\ \delta_\eta \end{matrix} \right\} ;$$

$$(113) \quad \text{KG}(\Delta g_F) = \text{Gh}(\xi_x + \eta_y) \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \approx \text{Gh}(\xi_x + \eta_y) \approx -\frac{h}{2R} \iint \frac{\Delta g_F - \Delta g_{F.0}}{r^2} dr d\alpha .$$

h ist der Höhenunterschied gegenüber dem Aufpunkt, $\text{KG}(\Delta g_F)$ ist das gravimetrische Zusatzglied.

Mit gewissen Annäherungen kann man das gravimetrische Zusatzglied interpretieren als die Reduktionsgröße, die man zu den Freiluftanomalien an der Erdoberfläche addieren muß, um gewissermaßen zu den Freiluftanomalien im Niveau des Aufpunktes zu gelangen. Für die Freiluftanomalie im Punkt P_1 an der Erdoberfläche gilt mit (20)

$$[\Delta g_F]_1 = g + 2 \sigma H_\gamma + 2 \omega^2 h_0 - \gamma \epsilon .$$

Berechnet man aus $[\Delta g_F]_1$ die Freiluftanomalien entlang der Lotlinie des Punktes P_1 , also die vertikale Fortsetzung nach unten und nach oben, so ergibt sich die entsprechende Freiluftanomalie im Niveau des Aufpunktes P_2 durch diese Transformation entlang dem Radiusvektor folgendermaßen:

$$[\Delta g_F]_2 \approx [\Delta g_F]_1 + \int_1^2 \frac{dg}{dr} dr - \int_1^2 \frac{dr}{dr} dr .$$

Nun ist

$$\frac{dg}{dr} = -2g H_g , \quad \frac{dr}{dr} = -2\gamma H_\gamma .$$

Hier ist H_g bzw. H_γ die mittlere Krümmung der wirklichen bzw. der normalen Niveauflächen.

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) .$$

κ_1 und κ_2 sind die Hauptkrümmungen, R_1 und R_2 die betreffenden Krümmungsradien. Es folgt

$$[\Delta g_F]_2 \approx [\Delta g_F]_1 + 2g(H_g - H_\gamma) h .$$

Die Anomalien der Krümmungen in Nord-Süd- bzw. in Ost-West-Richtung kann man ausdrücken durch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} .$$

Man findet also

$$[\Delta g_F]_2 = [\Delta g_F]_1 + g(\xi_x + \eta_y) h$$

und mit (110)

$$(114) \quad [\Delta g_F]_2 = [\Delta g_F]_1 - h \frac{1}{2R} \iint [\Delta g_F - \Delta g_{F.0}] \frac{1}{r^2} dr d\alpha = \Delta g_F + \text{KG}(\Delta g_F) .$$

6. Numerische Beispiele für die Berechnung der Lotabweichungen

Um eine Vorstellung von der Größenordnung der Beträge zu bekommen, um die sich die Ergebnisse der vorstehenden Theorie von der klassischen STOKESschen Theorie unterscheiden, wurden die Lotabweichungen nach den Formeln (109) bzw. (112) für ausgewählte Beispiele, an einem Geländemodell und an zwei Beispielen aus der Praxis, berechnet.

Zunächst soll das Geländemodell betrachtet werden (Abb. 4) [10]. Dieses Modell besteht aus einer sphärischen Erde vom Radius 6370 km mit der Dichte $\varrho = 3 \text{ g cm}^{-3}$. Zur gravitierenden Masse dieser Kugel addiert sich die Masse einer zweiten Kugel mit einem Radius von 7 km und ebenfalls der Dichte $\varrho = 3 \text{ g cm}^{-3}$. Der Mittelpunkt dieser Kugel befindet sich 2 km unterhalb der Oberfläche der ersten Kugel; ihr höchster Punkt überragt die erste Kugel daher um 5 km . Er wurde als Aufpunkt für die Berechnung der Lotabweichungen gewählt. Die Topographie um diesen Aufpunkt ist rotationssymmetrisch, so daß im Aufpunkt die Lotabweichungen durch die Gravitationswirkung dieser beiden Kugeln gleich Null sein werden; daher wird noch eine dritte Kugel hinzugenommen. Sie hat einen Radius von 10 km , ihre Dichte ist ebenfalls $\varrho = 3 \text{ g cm}^{-3}$, ihr Mittelpunkt hat von dem der zweiten Kugel die horizontale Entfernung 20 km , der sphärische Abstand der Mittelpunkte der zweiten und der dritten Kugel beträgt $0,18$, die Entfernung der Mittelpunkte der ersten und der dritten Kugel beläuft sich auf $6359,73 \text{ km}$.

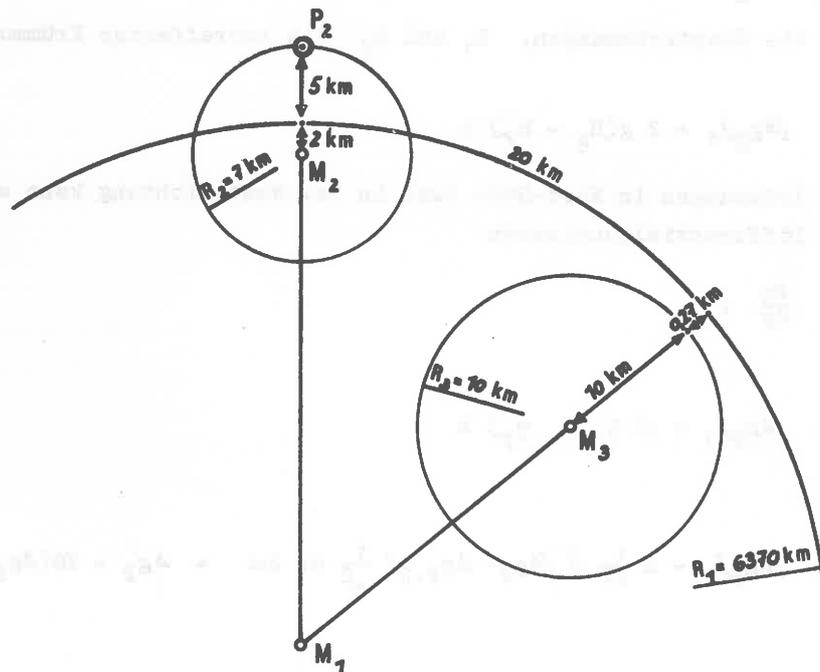


Abb. 4. Modellerde zur Berechnung der Lotabweichungen

Die numerische Auswertung der Formel (109) für den Aufpunkt P_2 ergab für die Lotabweichungskomponente in der Richtung zum Mittelpunkt M_3 der dritten Kugel die folgenden Werte. Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (109), also das Integral von VENING-MEINESZ entsprechend der STOKES'schen Theorie, betrug $-55\text{,}5$. Das zweite und das dritte Glied auf der rechten Seite der Gleichung (109), also die Weiterungen der vorstehenden Theorie gegenüber der Theorie von STOKES, betragen zusammen genommen $+15\text{,}2$. Das ist ein Betrag, der nicht vernachlässigt werden kann. Man erkennt, daß die Weiterungen der vorstehenden Theorie in bewegtem Gelände nicht ohne weiteres vernachlässigt werden dürfen. Insgesamt ergab die Formel (109) für die Lotabweichung aus Freiluftanomalien $-40\text{,}35$. Aus den bekannten Massen des Geländemodells resultierte für die Lotabweichung der Wert $-40\text{,}57$. Die Differenz beträgt nur $0\text{,}22$, sie kann schon aus den Abrundefehlern bei den numerischen Rechnungen erklärt werden. Das Ergebnis bestätigt die Richtigkeit der Formel (109).

In einem aus der Praxis herausgegriffenen Beispiel [10] wurden die Lotabweichungen im Meridian für zwei etwa auf dem gleichen Meridian ($\lambda \approx 32^\circ 50'$ östl.) auf der Insel Zypern etwa 50 km voneinander entfernt gelegene Punkte bestimmt. Die Insel zeichnet sich durch ungewöhnlich große Freiluftanomalien aus, die Beträge zwischen 100 und 300 mgal erreichen. Die Topographie ist dadurch gekennzeichnet, daß sich zwischen den beiden an der Küste in Meeresniveau gelegenen Punkten ein Gebirge in ost-westlicher Richtung mit Höhen bis zu 1951 m erstreckt.

Nach Gleichung (109) wurden die Ergänzungsglieder, also das zweite und dritte, berechnet. Für die Werte von $\xi_x + \gamma_y$ wurde der Mittelwert mit dem Betrag $1\text{,}6$ je km errechnet. Beim nördlichen Punkt ergab sich für die Lotabweichung im Meridian die Korrektur $+0\text{,}6$, beim südlichen Punkt waren es $-0\text{,}6$. Die Differenz beider Lotabweichungen ist also um $1\text{,}2$ zu korrigieren. Das dritte Glied d_ξ in (109) blieb unterhalb von $0\text{,}01$; denn die Geländeneigungen waren im allgemeinen kleiner als $1/10$.

Für das Territorium der DDR wurden die Werte des gravimetrischen Zusatzgliedes nach (113) im Bereich des Oberharzes berechnet [18]. Dabei wurden die im gravimetrischen Zusatzglied unter dem Integral vorkommenden Freiluftanomalien in genügender Annäherung mittels folgender Beziehung durch die topographischen Höhen h_0 ausgedrückt:

$$(115) \quad \Delta g_P = a + b \cdot h_0 \quad .$$

a und b sind hier konstante Größen. Der Wert von a wird nicht benötigt, weil nur die Differenzen der Lotabweichungen in (113) eingehen. Für b kann man in genügender Annäherung setzen

$$(116) \quad b = 0,1 \text{ mgal/m} \quad .$$

Daher kann man das gravimetrische Zusatzglied durch die topographischen Höhen ausdrücken:

$$(117) \quad KG(\Delta g_P) = -h \frac{0,1}{2\pi} \iint \frac{h_0 - h_{0.0}}{r^2} dr d\alpha \quad .$$

h_0 ist die orthometrische Höhe, $h_{0.0}$ dieser Wert in dem Punkt, für den das Zusatzglied berechnet werden soll. Die Formel (117) gilt, solange die BOUGUER-Anomalien einigermaßen glatt verlaufen. Anderenfalls muß man in Gleichung (113) substituieren

$$(118) \quad \Delta g_P - \Delta g_{P.0} = 0,1 (h_0 - h_{0.0}) + \Delta g_B - \Delta g_{B.0} \quad ,$$

wenn Δg_B die BOUGUER-Anomalie ist.

Zur Auswertung des Integrals (117) wurde das Gebiet des Oberharzes mit einem rechtwinkligen Gitter von x,y-Koordinaten mit 0,5 km Maschenweite überdeckt. Man hat dann für die numerische Integration

$$(119) \quad KG(\Delta g_P) = -h \sum_1 \sum_k (h_0 - h_{0.0})_{ik} \psi_{ik} \quad .$$

Dabei ist

$$\psi_{ik} = -\frac{0,1}{2\pi} \Delta F_{ik} \frac{1}{(x^2 + y^2)_{ik}^{3/2}} \quad .$$

ΔF_{ik} ist das Flächenelement von $0,5 \times 0,5$ km Größe. Auf diesem Wege wurden die Werte für

$$(120) \quad \frac{KG(\Delta g_P)}{h} = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\Delta g_P - \Delta g_{P.0}}{r^2} dr d\alpha = G(\xi_x + \eta_y)$$

gewonnen. Ein Teil dieser Werte, die die Dimension $[\text{mgal}/\text{km}]$ haben, ist in Abb. 5 dargestellt, die das Brockenmassiv (1142 m Höhe) überdeckt. Der Brockengipfel liegt etwa im Bereich der $0,5 \times 0,5$ km großen Quadrate, die in der 7. Zeile von oben und in der 3. und 4. Spalte der Abb. 5 gelegen sind (70 bzw. 57 mgal/km).

Die zu den Werten von Abb. 5 gehörigen Daten für das gravimetrische Zusatzglied $KG(\Delta g_P)$ ergeben sich nach Multiplikation mit dem Höhenunterschied gegenüber dem Aufpunkt. Wählt man den Brockengipfel als Aufpunkt, dann erhält man die in Abb. 6 dargestellten Werte für das gravimetrische Zusatzglied. Diese muß man nach (112) zu den Freiluftanomalien im Integral von VERNING-MRINESZ hinzuaddieren, wenn man die Lotabweichungen für den Brockengipfel errechnen will. Die Daten in Abb. 6 haben daher die Dimension $[\text{mgal}]$.

+11	+ 3	- 2	± 0	+16	-20	+13	± 0	+ 9	+ 4
- 5	+16	+13	± 0	+ 4	-20	+ 7	+ 7	+21	+25
+21	+27	+28	- 8	- 7	-12	-19	-17	+13	+13
+25	+44	+ 9	- 6	+ 6	- 5	- 2	- 9	+23	+19
+22	+55	+14	+28	+20	-13	+38	- 9	+ 2	+10
+44	+41	+41	+40	+18	- 7	+49	+13	+ 1	+11
+31	+42	+70	+57	+35	-15	+25	+24	-18	-10
+14	+21	+27	+43	+27	- 2	+24	+24	-13	-20
+48	+12	+ 7	+28	+54	+18	+15	+39	+38	-12
+35	+34	+ 4	+ 6	+34	+45	+19	+19	+40	+24
+ 4	+23	+41	- 9	- 5	+16	+17	+ 6	+37	+38
-18	- 4	+12	+40	-11	-12	+17	- 4	+19	+20
-14	-19	-13	-10	- 3	-17	-14	-15	+ 1	+24
+ 7	- 5	-15	-15	-22	-12	- 8	-15	+ 2	+ 3
+25	+17	± 0	+22	+17	+ 5	+ 5	-11	-15	-19

Abb. 5. Die Werte $G(\xi_x + \eta_y)$ im Bereich des Oberharzes

- 6	- 2	+ 1	± 0	- 8	+12	- 6	± 0	- 5	- 2
+ 2	- 6	- 5	± 0	- 2	+12	- 4	- 4	-10	-12
- 6	- 8	- 8	+ 2	+ 4	+ 6	+11	+ 8	- 6	- 6
- 7	- 9	- 3	+ 2	- 2	+ 2	+ 1	+ 4	- 9	- 8
- 4	- 6	- 3	- 6	- 6	+ 5	-11	+ 4	- 1	- 4
- 4	- 4	- 4	- 4	- 4	+ 2	-10	- 4	± 0	- 4
- 3	- 4	± 0	± 0	- 7	+ 4	- 8	- 7	+ 7	+ 5
- 3	- 2	- 3	- 4	- 3	+ 1	- 5	- 7	+ 5	+10
- 5	- 2	- 1	- 3	- 5	- 4	- 3	- 8	-11	+ 5
- 7	- 7	- 1	- 1	- 7	- 9	- 4	- 6	- 8	- 7
- 1	- 5	- 8	+ 3	+ 2	- 5	- 5	- 2	- 7	-11
- 7	- 2	- 4	-12	+ 4	+ 5	- 7	+ 2	- 6	- 6
+ 6	+ 8	+ 5	+ 4	+ 1	+ 8	+ 7	+ 8	± 0	- 9
- 3	+ 2	+ 6	+ 6	+11	+ 6	+ 4	+ 8	- 1	- 1
- 8	- 5	± 0	- 7	- 7	- 2	- 2	+ 6	+ 8	+10

Abb. 6. Die Werte $KG(\Delta g_p)$ im Bereich des Oberharzes

Die Gleichung (112) unterscheidet sich vom Ausdruck (109) für die Lotabweichungen nicht zuletzt dadurch, daß in der NEUMANNschen Reihe für $\xi_x + \eta_y$ nur das erste Glied berücksichtigt worden ist. Es entsteht die Frage, wie groß die dabei vernachlässigten Beträge sind. Zu ihrer Klärung wurde der Ausdruck $\xi_x + \eta_y$ für den Bereich des

Brockengipfels nach der Formel (110) berechnet, also unter Einschluß des zweiten Gliedes der NEUMANNschen Reihe. Berechnet man mit diesem nach (110) erhaltenen Wert für $\xi_x + \eta_y$ den Betrag

$$KG(\Delta g_F)/h = G(\xi_x + \eta_y)$$

für den Gipfel des Brockens, so findet man folgenden Sachverhalt.

Das Glied nullter Ordnung in der NEUMANNschen Reihe für $\xi_x + \eta_y$ hat für den Gipfel des Brockens nach Multiplikation mit G den Wert $+70$ [mgal km⁻¹]. Das zweite Glied in der NEUMANNschen Reihe erreicht für den Brockengipfel den Wert $+4,7$ [mgal km⁻¹]. Beim Übergang von der Formel (110) zur Formel (113) vernachlässigt man also einen relativen Fehler von nur 7 %, wenn man den Brockengipfel als Aufpunkt wählt [14].

Ein Fehler von 7 % kann hier meistens vernachlässigt werden; denn das gravimetrische Zusatzglied hat nur in Ausnahmefällen einen Einfluß von mehr als 1" bis 2" auf die Lotabweichungen. Ein relativer Fehler von 7 % im gravimetrischen Zusatzglied wird daher die Lotabweichungen im allgemeinen um nicht mehr als 0,07 bis 0,14 beeinflussen; das sind Beträge, die vernachlässigt werden können.

7. Die Bestimmung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche nach Addition der isostatischen oder der Geländereduktion zu den Freiluftanomalien

Die Gleichungen (109) bzw. (112) sind noch einer Verallgemeinerung fähig. Geht man von (112) aus und setzt dabei zur Abkürzung

$$(121) \quad I_{V_M}(\Delta g_F) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} [\Delta g_F + K_G(\Delta g_F)] V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha ,$$

dann folgt mit (112)

$$(122) \quad \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = I_{V_M}(\Delta g_F) + \begin{Bmatrix} \delta_\xi(\Delta g_F) \\ \delta_\eta(\Delta g_F) \end{Bmatrix} ,$$

wobei zum Ausdruck gebracht wurde, daß die Funktionen δ_ξ und δ_η nach (111) auch von den Freiluftanomalien linear abhängig sind.

In (121) und (122) ist mit (20)

$$(123) \quad \Delta g_F \approx g_\sigma - \gamma_c + 0,3086 h_0 .$$

Gleichung (122) folgte mit (17) aus dem Störpotential T an der Erdoberfläche σ . Für dieses wird T_σ gesetzt, und es gilt

$$(124) \quad T_\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} T \frac{\partial 1}{\partial n} d\sigma .$$

Nun sei A das Störpotential irgendeiner Massenverteilung in dem von der Erdoberfläche umschlossenen Raum, dann gilt auch für A

$$(125) \quad A_\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial A}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} A \frac{\partial 1}{\partial n} d\sigma ,$$

und nach Superposition von (124) und (125) folgt

$$(126) \quad T_\sigma + A_\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial(T+A)}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} (T+A) \frac{\partial 1}{\partial n} d\sigma .$$

Wie man aus (124) die Gleichung (122) erhalten hat, so findet man analog aus (125) die folgende Beziehung:

$$(127) \quad \begin{Bmatrix} \xi_A \\ \eta_A \end{Bmatrix} = I_{V_M}(D_A) + \begin{Bmatrix} \delta_\xi(D_A) \\ \delta_\eta(D_A) \end{Bmatrix} .$$

Hier ist D_{Δ} gewissermaßen die Freiluftanomalie an der Erdoberfläche, die man aus den das Störpotential Δ verursachenden Massenunregelmäßigkeiten erhält. Entsprechend der Gleichung (123) wird

$$(128) \quad D_{\Delta} = \gamma_{\sigma} + \frac{\partial \Delta}{\partial \nu} - \gamma_{\epsilon} + 0,3086 h_{\Delta.0} \quad .$$

$\partial \Delta / \partial \nu$ bezeichnet die vertikale Ableitung des Störpotentials Δ an der Erdoberfläche, $h_{\Delta.0}$ ist das Analogon zur orthometrischen Höhe h_0 . Nun ist

$$\gamma_{\sigma} = \gamma_{\epsilon} - 0,3086 h_{\Delta.0} - \frac{2}{R} \Delta_{\epsilon} \quad .$$

Daher folgt

$$(129) \quad D_{\Delta} = \frac{\partial \Delta}{\partial \nu} - \frac{2}{R} \Delta_{\epsilon} \quad .$$

Wie man von (124) zu (122) und von (125) zu (127) gekommen ist, so gelangt man analog von (126) zu folgender Gleichung:

$$(130) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = I_{VM} (dG_F + D_{\Delta}) + \left\{ \begin{matrix} d_{\xi} (dG_F + D_{\Delta}) \\ d_{\eta} (dG_F + D_{\Delta}) \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \xi_{\Delta} \\ \eta_{\Delta} \end{matrix} \right\} \quad .$$

Sind die Massen, die das Störpotential Δ und damit auch die Anomalien D_{Δ} und die Lotabweichungen ξ_{Δ} , η_{Δ} verursachen, a priori mathematisch genau definiert, und zwar sowohl hinsichtlich ihrer räumlichen Verteilung als auch bezüglich ihrer Dichte, dann lassen sich D_{Δ} und ξ_{Δ} , η_{Δ} genau berechnen, ohne geologische Dichteabschätzungen, die mit Hypothesen verbunden wären.

Die Störmassen, die das Potential Δ hervorrufen, können z.B. die isostatischen Massen sein, also die topographischen Massen über dem Meeresniveau mit der Standarddichte $\rho = 2,67 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$ und die isostatischen Kompensationsmassen zwischen dem Meeresniveau und der isostatischen Ausgleichtiefe nach AIRY-HEISKANEN. Die isostatischen Massen müssen hier mit negativem Vorzeichen eingesetzt werden, die Standarddichte hat daher negatives Vorzeichen. In (128) kann der Koeffizient beim normalen Freiluftgradienten in Strenge gleich 0,3086 gesetzt werden. Gleichung (130) ist also ebenso wie (122) frei von Hypothesen.

Geht man von diesen isostatischen Massentransporten aus, dann wird man zur isostatischen Reduktion D_I und zur isostatischen Anomalie dG_I geführt.

$$(131) \quad dG_F + D_{\Delta} \longrightarrow dG_F + D_I = dG_I \quad .$$

Dies ist die übliche isostatische Schwereanomalie, und in (130) geht ξ_A bzw. η_A in die aus den topographisch-isostatischen Massen berechneten Lotabweichungen ξ_I bzw. η_I über. Es folgt also mit (130)

$$(132) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = I_{VM}(\Delta g_I) + \left\{ \begin{matrix} \delta_\xi(\Delta g_I) \\ \delta_\eta(\Delta g_I) \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \xi_I \\ \eta_I \end{matrix} \right\} .$$

Es ist hervorzuheben, daß die isostatischen Anomalien wesentlich mehr "geglättet" sind als die Freiluftanomalien. Es gilt daher

$$(133) \quad \frac{\partial \Delta g_I}{\partial x, y} \ll \frac{\partial \Delta g_F}{\partial x, y} ,$$

$$(134) \quad \delta_\xi(\Delta g_I) \ll \delta_\xi(\Delta g_F) ,$$

$$(135) \quad \delta_\eta(\Delta g_I) \ll \delta_\eta(\Delta g_F) .$$

Weil schon

$$\delta_\xi(\Delta g_F) , \quad \delta_\eta(\Delta g_F)$$

ziemlich kleine Größen sind, kann man, wie sich zeigen läßt, setzen

$$(136) \quad \delta_\xi(\Delta g_I) \approx 0 ,$$

$$(137) \quad \delta_\eta(\Delta g_I) \approx 0 .$$

Es folgt daher

$$(138) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = I_{VM}(\Delta g_I) - \left\{ \begin{matrix} \xi_I \\ \eta_I \end{matrix} \right\}$$

oder ausführlich

$$(139) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} [\Delta g_I + KG(\Delta g_I)] V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha - \left\{ \begin{matrix} \xi_I \\ \eta_I \end{matrix} \right\} .$$

Weil die isostatischen Anomalien Δg_I "geglättet" sind, ist im allgemeinen

$$(140) \quad KG(\Delta g_I) < KG(\Delta g_F) .$$

Man wird daher in (139) das gravimetrische Zusatzglied in Abhängigkeit von den isostatischen Anomalien in den meisten Fällen vernachlässigen können. Nur in isostatisch stark gestörten Gebieten wird es zu berechnen sein; es wird wesentlich kleiner und auch mehr "geglättet" sein als die Werte des gravimetrischen Zusatzgliedes in Abhängigkeit von den Freiluftanomalien, wie sie in Abb. 5 und 6 dargestellt sind.

In vielen Fällen wird man daher statt (139) in ausreichender Näherung setzen können

$$(141) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} \approx -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^r \Delta g_I V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha - \left. \begin{matrix} \xi_I \\ \eta_I \end{matrix} \right\} .$$

Dies ist die übliche Formel zur Berechnung der Lotabweichungen aus den isostatischen Anomalien. Die aus den isostatischen Anomalien seither errechneten Lotabweichungen sind also frei von Hypothesen über die Dichte in der Erdkruste, und sie beziehen sich auf die Erdoberfläche.

Interessant ist auch die Interpretation der Gleichung (130) für den Fall, daß das Potential A , die Anomalien D_A und die Lotabweichungen ξ_A, η_A sich aus den BOUGUER-Massen ergeben. Diese erfüllen den Raum zwischen dem Meeresniveau und der Erdoberfläche mit der Standarddichte $\rho = 2,67 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$. Diese Dichte ist hier mit negativem Vorzeichen anzusetzen, weil die betreffenden Massen ideell wegtransportiert werden. Geht man von diesen BOUGUER-Massen aus, so ist D_A hier die BOUGUER-Reduktion der Schwere D_B . Ist Δg_B die BOUGUER-Anomalie, so wird in (130)

$$(142) \quad \Delta g_F + D_A \longrightarrow \Delta g_F + D_B = \Delta g_B .$$

ξ_A, η_A gehen in die aus den BOUGUER-Massen hypothesenfrei zu errechnenden Lotabweichungen ξ_B, η_B über. Es folgt daher aus (130)

$$(143) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = I_{V_M}(\Delta g_B) + \begin{Bmatrix} \delta_\xi(\Delta g_B) \\ \delta_\eta(\Delta g_B) \end{Bmatrix} - \left. \begin{matrix} \xi_B \\ \eta_B \end{matrix} \right\} .$$

Die BOUGUER-Anomalien sind wie die isostatischen Anomalien im Vergleich mit den Freiluftanomalien stark geglättet. Daher gilt

$$(144) \quad \frac{\partial \Delta g_B}{\partial x, y} \ll \frac{\partial \Delta g_F}{\partial x, y} ,$$

$$(145) \quad \delta_\xi(\Delta g_B) \ll \delta_\xi(\Delta g_F) ,$$

$$(146) \quad \delta_\eta(\Delta g_B) \ll \delta_\eta(\Delta g_F) ,$$

$$(147) \quad d_{\xi}(\Delta g_B) \approx 0 ,$$

$$(148) \quad d_{\eta}(\Delta g_B) \approx 0 ,$$

und es folgt

$$(149) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = I_{V_M}(\Delta g_B) - \left. \begin{matrix} \xi_B \\ \eta_B \end{matrix} \right\}$$

oder ausführlich mit (139)

$$(150) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\tau} [\Delta g_B + KG(\Delta g_B)] V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha - \left. \begin{matrix} \xi_B \\ \eta_B \end{matrix} \right\} .$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch weiter vereinfachen. Zwischen der BOUGUER- und der Freiluftanomalie gilt die Beziehung

$$(151) \quad \Delta g_B = \Delta g_F - 2\pi f \varrho h_0 + \Delta g_{Top.} ,$$

wobei f die Gravitationskonstante, ϱ die Dichte der BOUGUER-Massen, h_0 die Höhe über dem Meere und $\Delta g_{Top.}$ die Geländereduktion sind. Die Differenz von (122) und (150) ergibt

$$(152) \quad -\frac{1}{2\pi} \iint [KG(\Delta g_F) + 2\pi f \varrho h_0 - \Delta g_{Top.} - KG(\Delta g_B)] V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha + \\ + \left. \begin{matrix} d_{\xi}(\Delta g_F) \\ d_{\eta}(\Delta g_F) \end{matrix} \right\} + \left. \begin{matrix} \xi_B \\ \eta_B \end{matrix} \right\} = 0 .$$

Das gravimetrische Zusatzglied als Funktion von den Freiluftanomalien einschließlich der Glieder 2. Ordnung d_{ξ} , d_{η} läßt sich daher wie folgt durch die Geländereduktion ausdrücken:

$$(153) \quad -\frac{1}{2\pi} \iint KG(\Delta g_F) V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha + \left. \begin{matrix} d_{\xi}(\Delta g_F) \\ d_{\eta}(\Delta g_F) \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \iint [\Delta g_{Top.} + \\ + KG(\Delta g_B)] V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha + \left. \begin{matrix} D_{\xi} \\ D_{\eta} \end{matrix} \right\}$$

mit

$$(154) \quad \left. \begin{matrix} D_{\xi} \\ D_{\eta} \end{matrix} \right\} = f \varrho \iint h V_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha - \left. \begin{matrix} \xi_B \\ \eta_B \end{matrix} \right\} .$$

h ist wieder der Höhenunterschied gegenüber dem Aufpunkt $h = h_0 - h_{0.0}$, $h_{0.0}$ ist die Höhe des Aufpunktes. Nun gilt für die Lotabweichungen ξ_B, η_B aus den BOUGUER-Massen

$$(155) \left. \begin{array}{l} \xi_B \\ \eta_B \end{array} \right\} = \frac{f \varrho}{2 G} \iint h \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} d\psi d\alpha$$

mit

$$R = 2 R \sin \frac{\psi}{2} .$$

Damit wird (154) zu

$$(156) \left. \begin{array}{l} D_\xi \\ D_\eta \end{array} \right\} = \frac{3 \varrho}{8 \pi \varrho_m R} \iint h \phi(\psi, h) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} d\psi d\alpha ;$$

ϱ_m ist dabei die mittlere Dichte der Erde.

Es ist ferner

$$(157) \phi(\psi, h) = -\frac{\partial S_T}{\partial \psi} \sin \psi - \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2}} .$$

$S_T(\psi)$ ist die STOKESsche Funktion. Für kleine Werte von ψ gilt in genügender Annäherung

$$(158) \phi(\psi, h) = \frac{1}{\psi} \left[\left(\frac{h}{R}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{h}{R}\right)^4 + \dots \right] = \frac{2}{\psi} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2}} \right] .$$

Bei größeren Werten von ψ kann man setzen

$$(159) \phi(\psi, h) = -\frac{\partial S_T}{\partial \psi} \sin \psi - \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} .$$

Für die Funktion $\phi(\psi, h)$ gilt im entfernteren Bereich mit (159) Tab. 1 .

Tab. 1. Werte der Funktion ϕ nach Gleichung (159)
im entfernteren Bereich

ψ	0,1°	0,5°	1°	4°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
ϕ	+1,5	+1,5	+1,5	+1,7	+1,9	+2,1	+2,0	+1,6	+1,1	+0,3	-0,4	-1,2	-1,7

Wie man aus der Tabelle entnimmt, hat die Funktion ϕ im Bereich zwischen $0,1^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ relativ kleine Werte und einen glatten Verlauf.

Die Werte D_ξ , D_η wird man nach (156) durch Integration nur über den nahen Bereich mit (158) berechnen müssen; dann läßt sich für ϕ ein geschlossener Ausdruck angeben, auch bei steilem Relief, so daß Konvergenzschwierigkeiten nicht auftreten.

Nach diesen Entwicklungen errechnen sich die Lotabweichungskomponenten ξ , η aus den Freiluftanomalien und der Geländereduktion der Schwere wie folgt:

$$(160) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} [\Delta g_F + \Delta g_{\text{Top.}} + KG(\Delta g_B)] v_M(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\psi d\alpha + \begin{Bmatrix} D_\xi \\ D_\eta \end{Bmatrix}$$

oder, wenn man statt der Funktion von VENING-MEINESZ die STOKESSsche Funktion $S_T(\psi)$ nimmt und wenn $d\omega$ das Flächenelement auf der Einheitskugel ist,

$$(161) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi G} \iint [\Delta g_F + \Delta g_{\text{Top.}} + KG(\Delta g_B)] \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\omega + \begin{Bmatrix} D_\xi \\ D_\eta \end{Bmatrix} .$$

Die numerische Berechnung der Lotabweichungen nach (160), (161) erscheint besonders vorteilhaft. Dieser Weg wird meistens günstiger sein als die Anwendung der Formeln (109) oder (112). Dieser Sachverhalt ist folgendermaßen zu begründen: Wie aus Abb. 5 und 6 ersichtlich ist, sind die Werte für $KG(\Delta g_F)/h$ relativ groß und kurzperiodisch, auch die Werte für $KG(\Delta g_B)$ sind kurzperiodisch. Beide Werte haben sowohl positives als auch negatives Vorzeichen. Man muß sie daher für relativ viele Punkte berechnen, um die nötige Rechengenauigkeit zu erhalten. Die Maschenweite des Gitters in den genannten Abbildungen ist folglich nur 0,5 km. Die Berechnung der gravimetrischen Zusatzglieder in Abhängigkeit von den Freiluftanomalien ist daher relativ arbeitsintensiv. Die Geländereduktion für die Schwere dagegen ist eine "glattere" Funktion; sie hat nur das positive Vorzeichen, sie ist für viele Punkte ohnehin a priori bekannt und wird sich daher mit Vorteil bei der Berechnung der Lotabweichungen nach (160), (161) einführen.

Das gravimetrische Zusatzglied in Abhängigkeit von den BOUGUER-Anomalien $KG(\Delta g_B)$, das ebenfalls in (160), (161) auftritt, errechnet sich aus (110), (113), indem man dort die Freiluftanomalien durch die BOUGUER-Anomalien ersetzt. Auch die BOUGUER-Anomalien sind mehr geglättet als die Freiluftanomalien. Daher gilt im allgemeinen

$$(162) \quad KG(\Delta g_B) \ll KG(\Delta g_F) .$$

In vielen Fällen wird man das gravimetrische Zusatzglied in Abhängigkeit von den BOUGUER-Anomalien in (160), (161) überhaupt vernachlässigen können:

$$(163) \quad KG(\Delta g_B) \approx 0.$$

Nur in Gebieten mit starken und unregelmäßigen BOUGUER-Anomalien wird man diese Größe mitnehmen müssen. Die Konvergenz der NEUMANNschen Reihe (100), (110) für $KG(\Delta g_B)$ oder für $\xi_x + \eta_y$ in Abhängigkeit von den BOUGUER-Anomalien ist ebenso gesichert wie die entsprechende Entwicklung in Abhängigkeit von den Freiluftanomalien; denn die Konvergenz hängt mit (102) nur vom Kern ab, und dieser ist bei beiden Entwicklungen gleich. Man wird daher die NEUMANNsche Reihe erst recht dann nach dem Glied nullter Ordnung abbrechen können, wenn man von BOUGUER-Anomalien ausgeht. Es gilt in meistens genügender Annäherung

$$(164) \quad KG(\Delta g_B) \approx Gh(\xi_x + \eta_y)_B \approx -\frac{h}{2\pi} \iint \frac{\Delta g_B - \Delta g_{B.0}}{r^2} dr d\alpha.$$

Der Index B bei $(\xi_x + \eta_y)_B$ bedeutet hier, daß in (164) in der Formel für die Lotabweichungen statt der Freiluftanomalien die BOUGUER-Anomalien gesetzt werden müssen. Die Gleichung (161) läßt sich noch weiter vereinfachen. Es läßt sich zeigen, daß die Ausdrücke 2. Ordnung D_ξ bzw. D_η mit in das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (161) hineingenommen werden können und dann eine weitere Korrektur für die Freiluftanomalien darstellen. Man findet nämlich für die Funktion $\phi(\psi, h)$ in (156) mit (158) die folgende Beziehung:

$$\phi(\psi, h) d\psi d\alpha \approx \frac{1}{\psi} \phi(\psi, h) d\omega = \frac{2}{\psi^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right] d\omega = -\frac{\partial S_T}{\partial \psi} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right] d\omega$$

mit

$$S_T(\psi) \approx \frac{2}{\psi},$$

$$\frac{\partial S_T}{\partial \psi} = -\frac{2}{\psi^2} + \dots, \quad \xi = \frac{h}{r}, \quad r \approx R.$$

Es folgt

$$(165) \quad \left. \begin{array}{l} D_\xi \\ D_\eta \end{array} \right\} = -\frac{3g}{8\pi \rho_m R} \iint h \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right] \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} d\omega.$$

Faßt man (161) und (165) zusammen, so folgt endlich

$$(166) \quad \left. \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi G} \iint \left[\Delta g_F + \Delta g_{Top.} + KG(\Delta g_B) - \frac{3gG}{2\rho_m R} h \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right) \right] \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right\} d\omega.$$

Diese Formel empfiehlt sich besonders für die praktische Berechnung der Lotabweichungen an der Erdoberfläche aus Schwereanomalien.

8. Die Bestimmung der Höhenanomalien und der Geoidundulationen nach dem gravimetrischen Zusatzglied

Nachdem mit den Gleichungen (109), (112), (160), (161), (166) die Formeln zur Bestimmung der Lotabweichungen angegeben worden sind, sollen auch noch die betreffenden Beziehungen zur Berechnung der Geoidundulationen N_G bzw. der Höhenanomalien N_G entwickelt werden.

Die STOKESSche Formel für die Geoidundulationen lautet bei Abbildung der Erde auf die Kugel

$$(167) \quad N = \frac{R}{4\pi G} \iint \Delta \sigma_F S_T(\psi) d\omega, \quad ,$$

wobei R der Erdradius, G ein globaler Mittelwert der Schwere, $d\omega$ das Flächenelement für die Einheitskugel und $S_T(\psi)$ die STOKESSche Funktion ist.

Die Lotabweichungen an der Erdoberfläche ergeben sich aus den horizontalen Ableitungen der Höhenanomalien. Umgekehrt folgen die Höhenanomalien

$$(168) \quad N_G = \frac{T_G}{\gamma_G}$$

durch Integration über die Lotabweichungen an der Erdoberfläche.

$$(169) \quad \xi = -\frac{\partial N_G}{\partial x} = -\frac{1}{R_0} \frac{\partial N_G}{\partial \varphi}, \quad ,$$

$$(170) \quad \eta = -\frac{\partial N_G}{\partial y} = -\frac{1}{R_0 \cos \varphi} \frac{\partial N_G}{\partial \lambda} \quad .$$

Bei der Bestimmung der Geoidundulationen und Höhenanomalien wird hier die Abplattung der Erde vernachlässigt. φ und λ können daher in (169) und (170) als geozentrische Breite und Länge angesehen werden. R_0 ist dann der geozentrische Radiusvektor des Aufpunktes an der Erdoberfläche: $R_0 = R + h_0$, h_0 = orthometrische Höhe. In (169), (170) zeigt die x -Richtung horizontal nach Norden, die y -Richtung horizontal nach Osten. Ist ds das horizontale Linienelement im Azimut A , dann erhält man die Änderung der Höhenanomalie zwischen den Punkten P_1 und P_2 an der Erdoberfläche aus den Lotabweichungen nach folgender Formel:

$$(171) \quad (N_G)_2 - (N_G)_1 = - \int_{P_1}^{P_2} [\xi \cos A + \eta \sin A] ds = - \int_{P_1}^{P_2} \theta_s ds \quad .$$

Mit (112), (167), (169), (170), (171) gilt daher für die Höhenanomalie das folgende Integral:

$$(172) \quad N_{\sigma} = \frac{R_0}{4\pi G} \iint [\Delta g_F + KG(\Delta g_F)] S_T(\psi) d\omega$$

In (172) wurden die Glieder 2. Ordnung vernachlässigt. Eigentlich tritt noch das Integral

$$(173) \quad -\int [\sigma_{\xi} \cos \Lambda + \sigma_{\eta} \sin \Lambda] ds$$

in (172) hinzu. (173) ist analytisch schwierig zu integrieren.

Geht man aber bei der Bestimmung der Höhenanomalien durch Integration der Lotabweichungen von der Gleichung (166) aus, dann ergeben sich die folgenden Beziehungen. Betrachtet man nämlich das Integral

$$(174) \quad \frac{R_0}{4\pi G} \iint \left[-\frac{3 G_F}{2 \varrho_m R} h \left(1 - \frac{1}{\xi} \operatorname{arsh} \xi \right) \right] S_T(\psi) d\omega$$

und bildet seine Ableitung nach der x- bzw. nach der y-Richtung, so folgt, weil die Ableitung von

$$\frac{R}{4\pi G} \iint \Delta g_F S_T(\psi) d\omega$$

das Integral

$$\frac{1}{4\pi G} \iint \Delta g_F \frac{\partial S_T(\psi)}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\omega$$

ist, der Ausdruck

$$(175) \quad \frac{1}{4\pi G} \iint \left[-\frac{3 G_F}{2 \varrho_m R} h \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\xi} \operatorname{arsh} \xi \right) S_T(\psi) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\omega$$

Nun ist

$$\left(1 - \frac{1}{\xi} \operatorname{arsh} \xi \right) S_T(\psi) \cong \left(1 - \frac{R\psi}{h} \operatorname{arsh} \frac{h}{R\psi} \right) \frac{2}{\psi} = 2 \left(\frac{1}{\psi} - \frac{R}{h} \operatorname{arsh} \frac{h}{R\psi} \right)$$

Die Ableitung dieses Ausdrucks nach ψ ist

$$-2 \frac{1}{\psi^2} + \frac{2}{\psi \sqrt{\psi^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^2}} = -\frac{2}{\psi^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{R\psi}\right)^2}} \right] = \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right],$$

und aus (175) wird damit

$$(176) \quad \frac{1}{4\pi G} \iint \left[-\frac{3 G \varphi}{2 \varphi_m R} h \right] \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} \right\} \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\omega \quad .$$

Die Höhenanomalien ergeben sich daher als Integral von (166) zu

$$(177) \quad N_\sigma = \frac{R_0}{4\pi G} \iint \left\{ \Delta g_F + \Delta g_{TOP.} + K G (\Delta g_B) - \frac{3 G \varphi}{2 \varphi_m R} h \left(1 - \frac{1}{\zeta} \operatorname{arsh} \zeta \right) \right\} S_T(\psi) d\omega$$

Dies ist ein geschlossener Ausdruck für die Höhenanomalie einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Hinsichtlich der Funktion $\operatorname{arsh} \zeta$ sind folgende Entwicklungen interessant:

$$\operatorname{arsh} \zeta = \ln (\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1}) \quad ;$$

$$\operatorname{arsh} \zeta = \zeta - \frac{1}{6} \zeta^3 + \frac{3}{40} \zeta^5 - + \dots, \quad \zeta^2 \leq 1 \quad ;$$

$$\operatorname{arsh} \zeta = \ln |2\zeta| + \frac{1}{4\zeta^2} - \frac{3}{32\zeta^4} + - \dots, \quad \zeta \geq 1 \quad ;$$

$$\operatorname{arsh} \zeta = -\ln |2\zeta| - \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{3}{32\zeta^4} - + \dots, \quad \zeta \leq -1 \quad ;$$

$$1 - \frac{1}{\zeta} \operatorname{arsh} \zeta = \frac{1}{6} \zeta^2 - \frac{3}{40} \zeta^4 + - \dots, \quad \zeta^2 \leq 1 \quad .$$

Ferner ist

$$\frac{3 \varphi G}{4 \varphi_m R} = 0,055 \ 99 \quad [\text{mgal m}^{-1}]$$

mit $\varphi = 2,67 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$, $\varphi_m = 5,514 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$, $G = 979 \ 800 \text{ mgal}$, $R = 6371 \ 000 \text{ m}$.

Die Höhenanomalien N_σ , die sich nach (177) ermitteln lassen, sind die Erhebungen der Erdoberfläche über dem Telluroid. Die Geoidundulationen N_ϵ dagegen sind die Abweichungen des Geoids vom mittleren Erdellipsoid. Ist T_σ das Störpotential an der Erdoberfläche, dann gilt

$$(178) \quad N_\sigma = \frac{T_\sigma}{\gamma_\sigma} \quad .$$

Ist T_ϵ das Störpotential im Niveau des Meeres, dann folgt

$$(179) \quad N_\epsilon = \frac{T_\epsilon}{\gamma_\epsilon} \quad .$$

Das wahre Potential W_σ an der Erdoberfläche σ ergibt sich aus dem Potential an der Oberfläche des Niveuellipsoids $C = \text{const}$ und der wirklichen Schwere zwischen dem Meeresniveau und der Erdoberfläche nach

$$(180) \quad W_\sigma = C - \int_{t=0}^{h_0} g \, dt = C - \bar{g} h_0 .$$

Für das normale Potential U gilt analog, wenn man berücksichtigt, daß in der Höhe N_ϵ über dem Niveuellipsoid sich das Geoid befindet und um den Betrag N_σ unter der Erdoberfläche das Telluroid verläuft und daß der Mittelwert der normalen Schwere vom Niveuellipsoid bis zum Telluroid zu nehmen ist, während der Mittelwert der wahren Schwere in (180) zwischen dem Geoid und der Erdoberfläche integriert ist:

$$(181) \quad U_\sigma = C - \bar{f}(N_\epsilon + h_0 - N_\sigma) - \gamma_\sigma N_\sigma = C - \int_{\text{Ellipsoid}}^{\text{Telluroid}} \gamma \, dt - \int_{\text{Telluroid}}^{\text{Erdoberfläche}} \gamma \, dt .$$

Es folgt

$$(182) \quad T_\sigma = W_\sigma - U_\sigma = -(\bar{g} - \bar{f}) h_0 + \bar{f}(N_\epsilon - N_\sigma) + \gamma_\sigma N_\sigma$$

und mit (178)

$$(183) \quad 0 = -(\bar{g} - \bar{f}) h_0 + \bar{f}(N_\epsilon - N_\sigma)$$

und schließlich aus (183)

$$(184) \quad N_\epsilon - N_\sigma = \frac{\bar{g} - \bar{f}}{\bar{f}} h_0 \cong \frac{\bar{g} - \bar{f}}{\bar{g}} h_0 \cong \frac{\bar{g} - \bar{f}}{\bar{g}} h_n .$$

Dies ist die Beziehung zwischen den Höhenanomalien N_σ und den Geoidundulationen N_ϵ .

In (183) ist $\bar{g} h_0 = c$ die geopotentielle Kote. Es folgt

$$(185) \quad c = \bar{g} h_0 = \bar{f} h_n = \bar{f}(h_0 + N_\epsilon - N_\sigma) ;$$

h_n ist die normale Höhe, die Höhe des Telluroids über dem Niveuellipsoid.

Die Höhe der Erdoberfläche über dem mittleren Erdellipsoid ist

$$(186) \quad N_\epsilon + h_0 \quad \text{oder} \quad N_\sigma + h_n$$

mit

$$(187) \quad h_0 = \frac{c}{\bar{g}} , \quad h_n = \frac{c}{\bar{f}} ;$$

c ist hier wieder die geopotentielle Kote. Aus (187) folgt

$$(188) \quad h_0 - h_n = -\frac{1}{g} (\bar{g} - \bar{f}) h_0 .$$

Die Gleichungen (184) und (188) ergeben

$$(189) \quad N_\epsilon + h_0 = N_\sigma + h_n ,$$

wie es a priori gefordert wurde.

Geht man von der Höhenanomalie zur Geoidundulation über, so muß der Betrag

$$(190) \quad \frac{1}{g} (\bar{g} - \bar{f}) h_0$$

zur Höhenanomalie addiert werden. Hier ist \bar{g} mit einem relativ kleinen Fehler $\delta\bar{g}$ behaftet, der von der geologischen Abschätzung der Dichte in der Erdkruste abhängt. Man findet mit (184)

$$\frac{\partial N_\epsilon}{\partial \bar{g}} \delta\bar{g} = \frac{h_0}{g} \delta\bar{g}$$

und mit (187), (188)

$$\frac{\partial h_0}{\partial \bar{g}} \delta\bar{g} = -\frac{h_0}{g} \delta\bar{g} .$$

Die Summe $N_\epsilon + h_0$ ist frei von dem Einfluß von $\delta\bar{g}$:

$$(191) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{g}} (N_\epsilon + h_0) \delta\bar{g} = 0 .$$

Während also die Geoidundulation und die orthometrische Höhe jeweils von den Fehlern in der Abschätzung der Dichte in der Erdkruste beeinflusst werden, ist die Summe dieser beiden Größen ebenso wie N_σ , h_n und $N_\sigma + h_n$ frei von diesen Fehlereinflüssen. Der genannte Fehlereinfluß kann im Mittel einige Zentimeter und in extremeren Fällen einige Dezimeter in N_ϵ bzw. h_0 betragen.

Schließlich wurden diese Erweiterungen der STOKESSchen Theorie für die Geoidundulationen in einigen Beispielen numerisch berechnet. Der Unterschied

$$\frac{\bar{g} - \bar{f}}{g} h_0$$

zwischen den Geoidundulationen und den Höhenanomalien ergab sich für den Brockengipfel (1142 m) zu +1 cm. Für die Zugspitze (2955 m) fand man -54 cm und für den Mont Blanc (4807 m) -180 cm [10].

Den Einfluß, den die Zusatzglieder

$$\Delta g_{\text{Top.}} + \text{KG}(\Delta g_{\text{B}}) - \frac{3}{2} \frac{G_{\text{P}}}{g_{\text{m}} R} h \left(1 - \frac{1}{5} \text{arsh } \zeta\right)$$

nach (177) auf die Höhenanomalien nehmen, kann man abschätzen aus dem Einfluß, den diese Glieder nach (166) auf die Lotabweichungen haben. Dieser ist gleich dem Effekt, den die zusätzlichen Glieder in (109) bzw. (112) auf die Lotabweichungen ausüben und deren numerische Beträge in Kap. 6 behandelt worden sind. Betrachtet man ein astronomisches Nivellement von z.B. 500 km Länge, teilt diese Strecke in 10 Abschnitte von 50 km Länge ein und gibt für jeden dieser Abschnitte den Lotabweichungen eine (relativ hohe) Korrektur von $\pm 1''$, die zwischen den Abschnitten den Charakter einer zufälligen Variablen hat, dann ergibt sich für die gesamte Strecke von 500 km Länge nach dem Wurzelgesetz für die Fehlerfortpflanzung als Korrektur für den Unterschied der Höhenanomalien der Wert

$$\frac{1}{g''} 1'' \cdot 50 \text{ km} \cdot \sqrt{10} = \pm 70 \text{ cm} .$$

Dieser Betrag wurde unter ziemlich extremen Voraussetzungen abgeschätzt.

Die Genauigkeit der Formeln (109), (112) für die Zusatzglieder dürfte bei etwa $\pm 0,02$ liegen. Die Vereinfachungen in den mathematischen Ableitungen, die zur Formel (177) für die Höhenanomalien führten, werden dort analog einen Fehler von weniger als

$$\frac{1}{g''} 0,02 \cdot 50 \text{ km} \cdot \sqrt{10} = \pm 1 \text{ cm}$$

hervorrufen. Die Formel (177) wird also die Höhenanomalien etwa mit Zentimetergenauigkeit zu bestimmen gestatten.

Die Erweiterungen der STOKESSchen Theorie entsprechend der Gleichung (177) wurden auch auf ein mathematisch genau definiertes Geländemodell angewandt [10]. Dieses bestand aus einem ausgedehnten Gebirge von maximal 1,5 km Höhe, die Amplitude der Anomalien betrug etwa 83 mgal. Bei diesem Modell änderten sich die Höhenanomalien durch die Berücksichtigung der Zusatzglieder um etwa 3 %. Geht man davon aus, daß die Höhenanomalien im Mittel einen Wert von etwa 25 m erreichen, dann bewirkt ein prozentualer Fehler von 3 % einen linearen Fehler von etwa ± 70 cm. Dieser Wert befindet sich in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis der obigen Abschätzung.

Ferner wurden an diesem Geländemodell die Höhenanomalien aus den Schwereanomalien nach der erweiterten STOKESSchen Theorie einschließlich des gravimetrischen Zusatzgliedes berechnet. Darüber hinaus war es möglich, diese Werte auch aus den bekannten Massen des Geländemodells zu ermitteln. Die sich ergebenden Differenzen beider Werte lagen innerhalb der Rechengenauigkeit und betrugen nur 0,2 %.

Mit der erweiterten Theorie wurde die Höhenanomalie für den Mont Blanc errechnet. Die Zusatzglieder erreichten hier den Betrag -19 cm. Für den Broockengipfel im Harzgebirge fand man dafür den Wert -6 cm.

9. Die Höhenanomalien nach der Integralgleichung von MOLODENSKY

MOLODENSKY [20] hat für die Bestimmung des Störpotentials und der Höhenanomalien an der Erdoberfläche eine inhomogene Integralgleichung der zweiten Art angegeben und für ihre Lösung eine Reihenentwicklung gefunden, deren Glieder iterativ ermittelt werden können. Als Randfläche wird dabei das Telluroid eingeführt, eine Fläche, die der Erdoberfläche nahekommt und sich von dieser nur um die Höhenanomalien unterscheidet. Sie erhebt sich über dem mittleren Erdellipsoid um die Beträge der normalen Höhen.

Auf dem Telluroid wird eine Flächenbelegung φ eingeführt. Für das Störpotential T im Außenraum gilt dann

$$(192) \quad T = \iint_{\sigma} \frac{\varphi}{r} d\sigma \quad .$$

r ist der Abstand zwischen dem Aufpunkt, für den T zu berechnen ist, und dem variablen Punkt auf dem Telluroid σ . Das BRUNSSche Theorem für auf dem Telluroid gelegene Aufpunkte lautet

$$(193) \quad \left[\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{2}{R_{\sigma}} T \right]_{\sigma} = 4g_F \quad .$$

Setzt man (192) in (193) ein, dann ergibt sich mit

$$(194) \quad -\frac{\partial(1/r)}{\partial n} + \frac{1}{2Rr} = \frac{R_{\sigma}^2 - R^2}{2Rr^3}$$

und

$$(195) \quad r^2 = R_{\sigma}^2 + R^2 - 2R_{\sigma}R \cos \psi$$

die folgende Integralgleichung:

$$(196) \quad 2\pi\varphi \cos \alpha^* = 4g_F + \frac{3}{2R} \iint \frac{\varphi}{r} d\sigma + \frac{1}{2R} \iint \frac{R_{\sigma}^2 - R^2}{r^3} \varphi d\sigma \quad .$$

Bei einer sphärischen Erde mit dem Radius R gilt für den Radius des Telluroids R_{σ}

$$(197) \quad R + h_n = R_{\sigma} \quad ,$$

wobei h_n die normale Höhe ist. Der Winkel α^* ist hier die Geländeneigung. Mit der Substitution

$$(198) \quad \chi = \frac{R_{\sigma}^2}{R^2} \varphi \sec \alpha^* \approx \varphi \sec \alpha^*$$

folgt aus (196) mit einfachen Umformungen

$$(199) \quad 2\pi\chi \cos^2 \alpha^* = 4G_F + \frac{3R}{2} \iint \frac{\chi}{r} d\omega + R^2 \iint \frac{h_n - h_{n.o}}{r^3} \chi d\omega .$$

$d\omega$ ist das Flächenelement der Einheitskugel, $h_n - h_{n.o}$ der Höhenunterschied gegenüber dem Aufpunkt.

MOLODENSKY führt nun eine verflachte Erde ein, die statt durch (197) durch den Radius

$$(200) \quad R + k h_n = \bar{R}_\sigma$$

beschrieben wird. Es ist $0 \leq k \leq 1$. Für die verflachte Erde gilt die Integralgleichung

$$(201) \quad 2\pi\bar{\chi} \cos^2 \bar{\alpha}^* = 4G_F + \frac{3}{2} R \iint \frac{\bar{\chi}}{\bar{r}} d\omega + R^2 \iint k \frac{h_n - h_{n.o}}{\bar{r}^3} \bar{\chi} d\omega$$

mit

$$(202) \quad \bar{\chi} = \sum_{u=0}^{\infty} \chi_u k^u ,$$

$$(203) \quad \cos^2 \bar{\alpha}^* = (1 + k^2 \tan^2 \alpha^*)^{-1} = 1 - k^2 \tan^2 \alpha^* + k^4 \tan^4 \alpha^* - + \dots ,$$

$$\bar{\alpha}^* < 45^\circ ,$$

$$(203a) \quad \bar{r}^2 = r_x^2 \left(1 + k \frac{h_n + h_{n.o}}{R} + k^2 \frac{h_n h_{n.o}}{R^2} \right) + k^2 (h_n - h_{n.o})^2 ,$$

$$(204) \quad \bar{T} = \sum_{u=0}^{\infty} k^u T_u .$$

Setzt man (202), (203), (204) in (201) ein und läßt den Parameter k gegen Eins gehen, $k \rightarrow 1$, dann erhält man das Störpotential an der Erdoberfläche:

$$(205) \quad T = \sum_{u=0}^{\infty} T_u ,$$

$$(206) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint G_0 S_T(\psi) d\omega , \\ T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint G_1 S_T(\psi) d\omega , \\ T_2 = \frac{R}{4\pi} \iint G_2 S_T(\psi) d\omega - \frac{R^2}{2} \iint \frac{(h_n - h_{n.o})^2}{r_x^3} \chi_0 d\omega , \\ T_3 = \frac{R}{4\pi} \iint G_3 S_T(\psi) d\omega - \frac{R^2}{2} \iint \frac{(h_n - h_{n.o})^2}{r_x^3} \chi_1 d\omega , \\ \dots \end{array} \right.$$

Die Funktionen χ_u errechnen sich aus den Funktionen G_u nach den Beziehungen

$$(207) \left\{ \begin{aligned} 2\pi \chi_u - \frac{3}{2} R \iint \frac{\chi_u}{r_x^2} d\omega &= G_u, \\ \chi_u &= \frac{1}{2\pi} G_u + \frac{3}{(4\pi)^2} \iint G_u S_T(\psi) d\omega. \end{aligned} \right.$$

Die Funktionen G_u ergeben sich aus den Funktionen $\chi_{u-1}, \chi_{u-2}, \dots, \chi_0$ nach folgenden Beziehungen:

$$(208) \left\{ \begin{aligned} G_0 &= 4g_F, \\ G_1 &= R^2 \iint \frac{h_n - h_{n.0}}{r_x^3} \chi_0 d\omega, \\ G_2 &= R^2 \iint \frac{h_n - h_{n.0}}{r_x^3} \chi_1 d\omega - \frac{3}{4} R \iint \frac{(h_n - h_{n.0})^2}{r_x^3} \chi_0 d\omega + 2\pi \chi_0 \tan^2 \alpha^*, \\ G_3 &= R^2 \iint \frac{h_n - h_{n.0}}{r_x^3} \chi_2 d\omega - \frac{3}{4} R \iint \frac{(h_n - h_{n.0})^2}{r_x^3} \chi_1 d\omega - \\ &\quad - \frac{3}{2} R^2 \iint \frac{(h_n - h_{n.0})^3}{r_x^5} \chi_0 d\omega + 2\pi \chi_1 \tan^2 \alpha^*, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Die Lotabweichungen im Meridian, ξ , und im ersten Vertikal, η , folgen durch Differentiation des Störpotentials T in der Horizontalebene in Richtung nach Norden und nach Osten:

$$(209) \quad \xi = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \eta = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

$$(210) \quad \xi = \sum_{u=0}^{\infty} \xi_u;$$

$$(211) \left\{ \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{4\pi G} \iint G_0 \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \cos \alpha d\omega, \\ \xi_1 &= \frac{1}{4\pi G} \iint G_1 \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \cos \alpha d\omega - \left(4g_F + \frac{2T_0}{R}\right) \frac{\partial h_n}{R \partial \varphi}, \\ \xi_2 &= \frac{1}{4\pi G} \iint G_2 \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \cos \alpha d\omega + \frac{3}{2} R^2 \iint \frac{(h_n - h_{n.0})^2}{r_x^4} \cos \frac{\psi}{2} \chi_0 \cos \alpha d\omega - \\ &\quad - \left(G_1 + \frac{2T_1}{R}\right) \frac{\partial h_n}{R \partial \varphi}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{noch} \quad \left\{ \begin{array}{l} (211) \quad f_3 = \frac{1}{4\pi G} \iint G_3 \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \cos \alpha \, d\omega + \frac{3}{2} R^2 \iint \frac{(h_n - h_{n.0})^2}{r_\alpha^4} \chi_1 \cos \frac{\psi}{2} \cos \alpha \, d\omega - \\ \quad - \left[R^2 \iint \frac{(h_n - h_{n.0})}{r_\alpha^3} \chi_1 \, d\omega + \frac{2 T_2}{R} \right] \frac{\partial h_n}{R \partial \varphi} \quad , \\ \quad \dots \end{array} \right.$$

Die vorstehenden Gleichungen (205) bis (211) bilden die Lösung von MOLODENSKY für das Randwertproblem der physikalischen Geodäsie.

Weil die Gleichung (203) nur für $\alpha^* < 45^\circ$ konvergiert, hat man die Konvergenz der Reihen (205) und (210) wiederholt betrachtet. Ausführliche Untersuchungen stammen von MORITZ [21]. Einen allgemeinen strengen Beweis für die Konvergenz der Reihen (205) und (210) dürfte es nicht geben, man wird dann eher zu Divergenzen geführt. Bei den meisten praktischen Anwendungen wird man aber kaum auf Konvergenzschwierigkeiten stoßen.

PELLINEN hat ähnlich wie in Kap.7 und wie in [11] das Störpotential mit dem Potential der BOUGUER-Massen (topographische Massen) superponiert und ist zu einer Methode der Aussonderung der Topographie gekommen, die bei numerischen Berechnungen Vereinfachungen mit sich bringt [22, 23].

10. Die Bestimmung des Geoids nach der Methode von BJERHAMMAR

Transformiert man nach BJERHAMMAR [19] die Randwerte an der Erdoberfläche in die Randwerte auf einer sphärischen Oberfläche (BJERHAMMAR-Kugel), so kann man das Randwertproblem mit den Vereinfachungen einer sphärischen Randfläche lösen. Die BJERHAMMAR-Kugel verläuft ganz innerhalb des von der Erdoberfläche umschlossenen Raums. Vernachlässigt man die Erdabplattung, so kommt sie etwa der mittleren Erdkugel gleich. Auf der BJERHAMMAR-Kugel werden also ganz bestimmte Schwereanomalien als Randwerte verteilt; mit ihnen wird das NEUMANNsche Randwertproblem für den Außenraum der BJERHAMMAR-Kugel in Strenge nach der STOKESSchen Formel für den Außenraum gelöst. Man erhält dann ein Potentialfeld und ein Feld von Schwerewerten im Außenraum, dessen Werte für die Punkte auf der Erdoberfläche mit den dort gemessenen Schwerewerten identisch sind. Unter dieser Voraussetzung löst die STOKESSche Formel für den Außenraum der BJERHAMMAR-Kugel bei entsprechenden Randwerten auf dieser Kugel das Randwertproblem sowohl für die Erdoberfläche als auch für den Außenraum der Erde. Die dabei zwischen der BJERHAMMAR-Kugel und der Erdoberfläche gefundenen Potentialwerte sind nicht von besonderem Interesse.

Sind Δg_F die Freiluftanomalien an der Erdoberfläche und Δg^* die abgebildeten Anomalien auf der BJERHAMMAR-Kugel, ist R der Radius der BJERHAMMAR-Kugel und R_G der der Erdoberfläche und ist dS das Flächenelement auf der BJERHAMMAR-Kugel, dann ergibt sich aus Kugelfunktionsentwicklungen die folgende Beziehung zwischen den Anomalien Δg_F und Δg^* :

$$(212) \quad \Delta g_F = \frac{1}{4\pi R_G^2} \iint \Delta g^* \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left[\frac{R}{R_G} \right]^n P_n(\cos \psi) dS .$$

Der Winkel ψ ist der sphärische Abstand zwischen dem Aufpunkt und dem variablen Integrationspunkt, $P_n(\cos \psi)$ sind die LEGENDRESchen Polynome. Durch geeignete Umformungen der Gleichung (212) kann man die Reihenentwicklung im Integranden in einen geschlossenen Ausdruck transformieren. Man erhält mit gewissen Approximationen

$$(213) \quad (\Delta g_F)_j = \frac{\bar{h}_j}{2\pi} \iint (\Delta g^*)_i \frac{1}{r_{ij}} dS$$

mit

$$(214) \quad \bar{h} = \frac{(R_G^2 - R^2)}{2 R_G} .$$

Die Indizes j und i beziehen sich jeweils auf den laufenden Punkt auf der Erdoberfläche bzw. auf der BJERHAMMAR-Kugel. r_{ij} ist der geradlinige, schräge Abstand zwischen diesen beiden Punkten.

Gleichung (213) ist eine iterativ zu lösende Integralgleichung der ersten Art für die Ermittlung der Δg^* -Werte. Als Näherungslösung für die Gleichung (213) gibt BJERHAMMAR die folgende Beziehung an:

$$(215) \quad (\Delta g^* - \Delta g_P)_j = \frac{\bar{h}_j}{2\pi} \iint \frac{(\Delta g_{P.0} - \Delta g_P)_i}{r_{ij}^3} dS \quad .$$

BJERHAMMAR hat noch ein anderes Verfahren zur Auflösung der Gleichung (213) angegeben. Dabei werden die unbekannt Anomalien Δg^* in ein Polynom entwickelt, das durch wachsende Potenzen der Höhen \bar{h} der Topographie über der BJERHAMMAR-Kugel dargestellt wird.

$$(216) \quad \Delta g^* = \Delta g_P + \sum_{i=1}^n c_i \bar{h}^i \quad .$$

Substituiert man (216) in (213), dann erhält man ein System von linearen Gleichungen mit den Unbekannten c_i und den Koeffizienten $A_{i.k}$:

$$(217) \quad \sum_{i=1}^n A_{i.k} c_i = (\Delta g_P - \frac{\bar{h}}{2\pi} \iint \frac{(\Delta g_P)_i}{r_{k.j}^3} dS)_k \quad .$$

Aus der Auflösung dieses Gleichungssystems (217) erhält man die Unbekannten c_i und daraus weiter mit (216) die gesuchten Schwereanomalien Δg^* .

Das Verfahren von BJERHAMMAR hat sich bei praktischen Beispielen bewährt. Allgemeine, streng mathematische Untersuchungen über die Lösbarkeit der Integralgleichung (213) haben in bestimmten Fällen auch zu Divergenzen geführt, die aber bei praktischen Anwendungen kaum von Bedeutung sein dürften; insbesondere wenn man das Problem umformuliert und nicht die Δg^* aus den Δg_P durch eine strenge Fortsetzung nach unten zu ermitteln trachtet, sondern statt dessen die Δg^* so zu bestimmen sucht, daß sich aus ihnen nach (213) die Oberflächenwerte Δg_P innerhalb der Meßgenauigkeit ergeben.

Literatur

- [1] ARNOLD, K. Beiträge zur gravimetrischen Geodäsie.
Veröff. geodät. Inst. Potsdam Nr. 11, Berlin 1956,
30 S.
- [2] ARNOLD, K. Die Co-Geoide der Freiluftreduktion.
Gerlands Beitr. Geophysik 66 (1957) 3, S. 181-198
- [3] ARNOLD, K. Betrachtungen zur Bestimmung der gravimetrischen Lot-
abweichungen aus Freiluftanomalien der Schwere.
Gerlands Beitr. Geophysik 67 (1958) 2, S. 97-134
- [4] ARNOLD, K. Zur Theorie der gravimetrischen Verbesserung astro-
nomischer Nivellements.
Gerlands Beitr. Geophysik 67 (1958) 3, S. 171-176
- [5] ARNOLD, K. Zur Bestimmung der gravimetrischen Geoidundulationen
einschließlich der Glieder von der Größenordnung $N\mu$.
Gerlands Beitr. Geophysik 67 (1958) 4, S. 251-255
- [6] ARNOLD, K. Zur Bestimmung der Geoidundulationen aus Freiluft-
anomalien.
Veröff. geodät. Inst. Potsdam Nr. 12, Berlin 1959,
68 S.
- [7] ARNOLD, K. Strenge Theorie der absoluten Lotabweichungen als
Funktionen der Freiluftanomalien der Schwere.
Veröff. geodät. Inst. Potsdam Nr. 13, Berlin 1959,
46 S.
- [8] ARNOLD, K. Die Randbedingungen von Cauchy und die Hauptaufgabe
der physikalischen Geodäsie mit besonderer Berück-
sichtigung der Eindeutigkeit der Lösung.
Gerlands Beitr. Geophysik 68 (1959) 1, S. 1-14
- [9] ARNOLD, K. Zur strengen Theorie der Figur der Erde.
Gerlands Beitr. Geophysik 68 (1959) 5, S. 257-262
- [10] ARNOLD, K. Numerische Beispiele zur strengen Theorie der Figur
der Erde.
Veröff. geodät. Inst. Potsdam Nr. 16, Berlin 1960,
66 S.
- [11] ARNOLD, K. Die Methoden der Freiluftreduktion und der isosta-
tischen Reduktion in ihren gegenseitigen Beziehungen.
Gerlands Beitr. Geophysik 70 (1961) 3, S. 131-136
- [12] ARNOLD, K. Eine einfache Ableitung des gravimetrischen Zusatz-
gliedes.
Gerlands Beitr. Geophysik 74 (1965) 3, S. 207-211
- [13] ARNOLD, K. Neuerungen zur Theorie des Geoids.
Acta techn. hung. 52 (1965), S. 121-129
- [14] ARNOLD, K. Zur Genauigkeit der Formel für das gravimetrische
Zusatzglied.
Acta techn. hung. 52 (1965), S. 243-249

- [15] ARNOLD, K. Zur Eindeutigkeit und Konvergenz des Ausdrucks für das gravimetrische Zusatzglied.
Gerlands Beitr. Geophysik 78 (1969) 4, S. 273-282
- [16] ARNOLD, K. Das gravimetrische Zusatzglied in Abhängigkeit von der Geländereduktion einschließlich der Glieder 2. Ordnung.
Gerlands Beitr. Geophysik 79 (1970) 3, S. 181-184
- [17] ARNOLD, K. Zur Bahnmethode der Satellitengeodäsie ohne Stationskoordinaten.
Acta geodaet. geophys. et montanist. Acad. Sci. hung. 5 (1970) 3-4, S. 305-309
- [18] ARNOLD, K.; STANGE, L. Numerische Untersuchungen zum gravimetrischen Zusatzglied.
Gerlands Beitr. Geophysik 74 (1965) 5, S. 383-392
- [19] BJERHAMMAR, A. On the boundary value problem of physical geodesy.
Tellus 21 (1969) 4, S. 451-516
- [20] MOLODENSKY, M.S.; EREMEEV, V.F.; JURKINA, M.I. Methoden zum Studium des äußeren Schwerefeldes und der Figur der Erde.
Veröff. ZNIGAIK, Moskau 131 (1960)
- [21] MORITZ, H. Series solutions of Molodensky's problem.
Veröff. dt. geodät. Komm. b.d. bayer. Akad. Wiss., Reihe A, Heft 70, München 1974, 92 S.
- [22] PELLINEN, L.P. Accounting for topography in the calculation of quasigeoidal heights and plumbline deflections from gravity anomalies.
Bull. géodés. (1962) 63, S. 57-65
- [23] PELLINEN, L.P. Zur Berechnung von Lotabweichungen und Quasigeoidhöhen im Gebirge (in Russisch).
Veröff. ZNIGAIK, Moskau 176 (1969), S. 98-112