AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften
ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde
Nr. 48

Dichteanomalien in den oberen Schichten der Erde

von

K. Arnold

Als Manuskript gedruckt
Potsdam 1978

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

I/16/46 FG 037/ 2 /78

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Zusammenfassung

In den oberen Schichten der Erde bis herab zur Tiefe D werden räumliche Dichteanomalien verteilt, und an der Erdoberfläche wird eine Flächenbelegung angenommen. Diese werden so bestimmt, daß das Integral über ihre Quadrate zu einem Minimum wird. Ferner sollen ihre gravimetrischen Wirkungen zusammen mit denen der Gebirgsmassen und deren isostatischer Kompensation im Außenraum das aus Satelliten bestimmte Potentialfeld ergeben und in Tiefen größer als D zu keiner Änderung des Potentials führen. Durch Integration der Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichts ergeben sich aus den Dichteanomalien die elastische Deformation und aus ihr der Spannungstensor und die Spannungsunterschiede.

Summary

Spatial density anomalies are assumed to exist in the upper strata of the Earth down to a depth D, and a surface density is assumed for the Earth's surface. These are determined so as to minimize the integral over their squared values. Furthermore, their gravimetric effects together with those of the rock masses and the isostatic compensation of the latter in the external space are to yield the potential field as determined from satellite measurements, nor are they intended to result in any variations of the potential at depths greater than D. By integrating the differential equations of the elastic equilibrium, starting from the density anomalies, one obtains the elastic deformation, and from the latter the stress tensor and the stress differences are derived.

Résumé

Des anomalies de densité volumique sont distribuées dans les couches supérieures de la Terre jusqu'à la profondeur D, et sur la surface terrestre on suppose une densité surfacique. Celles-ci sont déterminées de sorte que l'intégrale sur leurs carrés devienne minimum. De plus, leurs effets gravimétriques, joints à ceux des masses de terrain et leur compensation isostatique dans l'espace extérieur, doivent donner le champ de potentiel déterminé à partir de satellites et ne pas donner lieu à une modification du potentiel dans des profondeurs supérieures à D. Après intégration des équations différentielles de l'équilibre élastique, on peut déduire des anomalies de densité la déformation élastique, laquelle donne ensuite le tenseur des tensions et les différences de tension.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Резюме

В верхних слоях Земли вниз до глубины D распределяются пространственные аномалии плотности, а на земной поверхности предполагается поверхностное покрытие. Они определяются так, что интеграл через их квадраты превращается в минимум. Далее их гравиметрические воздействия вместе с гравиметрическими воздействиями горных массивов и вместе с их изостатической компенсацией во внешнем пространстве должны составлять определенное из сателлитов потенциальное поле и в глубинах, которые больше глубины D, они не должны привести к какому-либо изменению потенциала. В результате интеграции дифференциальных уравнений эластического равновесия из аномалий плотности получается эластическая деформация, а из нее тензор напряжения и разности напряжения.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

1. Einleitung

Nachdem die wesentlichen Strukturen des Schwerefeldes der Erde an der Erdoberfläche und im Außenraum nach den Methoden der dynamischen Satellitengeodäsie [9] und durch Gravimetermessungen an der Erdoberfläche [22] bekannt sind, entsteht die Aufgabe, die Dichteanomalien im Erdinneren und damit die Abweichungen von der Gleichgewichtsfigur der Erde nach Lage und Betrag zu bestimmen. Es ist dies die Inversion der Aufgabe der Potentialtheorie, aus den nach Lage und Betrag gegebenen Quellen das zugehörige Potentialfeld C zu bestimmen:

$$(1) \qquad C = f \iiint_V \frac{\rho}{e}\, dV .$$

f ist die Gravitationskonstante, ρ die Dichte, V das Volumen des Körpers, und e ist der geradlinige Abstand zwischen dem Aufpunkt und dem Volumenelement dV.

Bei der Inversion dieser Aufgabe gilt es, aus der bekannten Funktion C die Funktion ρ zu bestimmen. Es liegt somit eine lineare Integralgleichung der ersten Art vor; sie hat keine eindeutige Lösung. Die Funktionen C und ρ brauchen nicht einmal der gleichen Klasse anzugehören. Bei einer stetigen Funktion C braucht ρ nicht stetig zu sein. Es gilt, solche Lösungen der Integralgleichung (1) zu suchen, die geophysikalisch plausibel sind.

Bei einer der zahlreichen Hypothesen geht man von der extremen Annahme aus, daß die Dichteanomalien ihren Sitz nur in der Erdkruste oder nur in der Lithosphäre haben. Es zeigt sich jedoch, daß diese Hypothese zumindest bei den Kugelfunktionen niederer Ordnung zu Dichteanomalien und Spannungsunterschieden in der Lithosphäre führt, die zu groß sind [17]. Durch die Gravitationswirkung der Dichteanomalien in der Lithosphäre und durch den von ihnen auf die tieferliegenden Schichten ausgeübten Druck darf der Gleichgewichtszustand unterhalb der Lithosphäre nicht gestört werden. Daher müssen bei dieser Hypothese innerhalb der Lithosphäre in der Verteilung der Dichte Kompensationserscheinungen auftreten, durch die die Beträge der Dichteanomalien erhöht werden.

Bei einer anderen Hypothese führt man die Annahme ein, daß die Dichteanomalien ihren Sitz nicht nur in der Lithosphäre, sondern auch im gesamten Erdmantel haben [14, 3]. Die erhaltenen Dichteanomalien und Spannungsunterschiede werden natürlich wesentlich kleiner, wenn sie nicht nur in der Lithosphäre, sondern auch im gesamten Erdmantel verteilt sind. Dieser Hypothese wird aber entgegengehalten, daß die Materie im Erdinneren bei Temperaturen über etwa 700 °C auf elastische Spannungen, die über längere Zeit wirken, nicht mehr rein als elastischer Körper entsprechend dem HOOKEschen Gesetz reagiert, sondern den Kraftwirkungen auch durch plastisches Fließen nachgibt, bis die Ursache der Spannungen abgebaut ist. Zur Aufrechterhaltung von Spannungen und Dichteanomalien über längere Zeiten wäre dann ein aktiver Prozeß notwendig [17], z.B. ein System von Konvektionsströmen. Die Temperatur von 700 °C wird im oberen Erdmantel wahrscheinlich schon in einer Tiefe von etwa 100 km, also am Unterrand der Lithosphäre, erreicht.

In der Seismologie hat man festgestellt, daß die Geschwindigkeit der seismischen P-Wellen dicht unterhalb der MOHOROVIČIĆ-Diskontinuität Abweichungen vom Normalwert

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

zeigt. In den genannten Tiefenbereichen bewirken diese Lateralinhomogenitäten der Geschwindigkeit der Primärwellen V_P Variationen dieser Geschwindigkeit zwischen 7,8 und 8,2 km/s [2]. Die Ursache kann in entsprechenden Lateralinhomogenitäten der Dichte des Gesteins, ϱ, gesucht werden. Es gilt die genäherte Beziehung (s. [2])

(2) $\quad V_P = -1{,}87 + 3{,}05\,\varrho$

oder nach [3]

(3) $\quad \varrho = 0{,}41 + 0{,}3597\, V_P$;

V_P ist hier in der Dimension [km s^{-1}] und ϱ in [g cm^{-3}] einzusetzen.

Wächst V_P von 7,8 auf 8,2 [km s^{-1}], dann steigt ϱ um 0,14 [g cm^{-3}]. Die Abweichungen des V_P-Wertes vom Mittelwert 8,0 [km s^{-1}] um maximal 0,2 [km s^{-1}] bedeuten, daß ϱ von seinem Mittelwert maximal etwa 0,07 [g cm^{-3}] nach oben und unten abweicht. Die Ursache für diese Anomalien in der Geschwindigkeit der seismischen Wellen kann wenigstens teilweise auch in thermischen Anomalien begründet sein.

Aus den Geschwindigkeiten der seismischen P-Wellen wurde auf wesentlich größere Lateralinhomogenitäten der Dichte in den oberen Schichten der Erde bis zu einer Tiefe von 50 km geschlossen [3]; man fand maximale Abweichungen der Dichte von ihrem Mittelwert von etwa $\pm 0{,}3$ [g cm^{-3}]. Für den oberen Erdmantel, also bis zu einer Tiefe von etwa 400 km, ergaben sich Dichtevariationen von etwa maximal $\pm 0{,}1$ [g cm^{-3}] [3].

Auch in größeren Tiefen des Erdmantels im Bereich der Schichten, die etwa bis zu 600 km über der Kern—Mantel-Grenze liegen, deuten sich Variationen in den Geschwindigkeiten der seismischen Wellen an, deren Ursache in Inhomogenitäten der elastischen Parameter oder der Temperatur oder auch in Variationen der Dichte gesucht wird; vielleicht spielen auch Undulationen der Kern—Mantel-Grenze eine Rolle. Die horizontale Ausdehnung dieser Inhomogenitäten beträgt wahrscheinlich etwa 200 bis 1000 km [7].

Die lineare Integralgleichung erster Art (1) hat keine eindeutige Lösung. Enthält das Potential C eine Kugelfunktion n-ter Ordnung, so kann man dieses Potential darstellen als das einer Flächenbelegung an der Erdoberfläche oder einer solchen innerhalb der Erdkugel in beliebiger Tiefe.

Ist G die mittlere Schwere der Erde und $\varrho_m = 5{,}5$ [g cm^{-3}] deren mittlere Dichte, ist r die Entfernung der Schicht vom Erdmittelpunkt, $h_n P_n(\sin\varphi)$ die Mächtigkeit dieser Schicht mit der Dichte ϱ und R_o der Radius der Erde, dann ist die Gravitationswirkung dieser Schicht an der Erdoberfläche gleich

(4) $$\delta g = G\,\frac{3}{2n+1}\,\frac{\varrho}{\varrho_m}\,\frac{h_n}{R_o}\left(\frac{r}{R_o}\right)^{n+2} P_n(\sin\varphi) \, .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Sind h_n und ϱ fest, dann nimmt δg mit wachsender Tiefe der Schicht, also mit wachsenden Werten von $R_o - r$, insbesondere bei höheren Werten von n schnell ab. Bei konstantem δg und ϱ muß dagegen h_n bei wachsender Tiefe erheblich zunehmen, so daß man bald Werte für h_n erhält, die geophysikalisch nicht zu vertreten sind [4].

Die folgenden Untersuchungen gelten für eine bestimmte Modellerde, die sich um differentielle Beträge von der Normalerde unterscheidet. Abweichungen von der hydrostatischen Schichtung sollen nur zwischen der Erdoberfläche und der Tiefe D auftreten. Unterhalb von D soll der Zustand der hydrostatisch geschichteten Normalerde erhalten bleiben, so daß dort auch keine Spannungsunterschiede wirken. Für einen bestimmten Wert von D sollen die Dichteanomalien in der Kugelschale zwischen den Radien R_o und $R_o - D$ bei Beachtung der Gleichung (1) so bestimmt werden, daß das Volumenintegral über ihre Quadrate zu einem Minimum wird. Diese Hypothese ist geophysikalisch plausibel und steht dem physikalischen Prinzip nahe, daß bestimmte Systeme einen Zustand anstreben, bei dem die potentielle Energie ein Minimum ist. Man erhält auf diesem Wege die Dichtefunktion

$$(5) \quad \varrho = \varrho_D(t,\delta,\lambda); \quad 0 \leqq t \leqq D; \quad 0 \leqq \delta \leqq \pi; \quad 0 \leqq \lambda \leqq 2\pi .$$

t ist die Tiefe, δ die Poldistanz und λ die geographische Länge. Aus den Dichteanomalien $\varrho_D(t,\delta,\lambda)$ folgen die zugehörigen Spannungsunterschiede ϑ. Die Funktion ϱ_D soll für verschiedene Werte des Parameters D berechnet werden. Es soll ein Überblick über die Struktur der Funktion ϱ_D für verschiedene Werte des Parameters D gegeben und die Frage geklärt werden, wie groß der Parameter D wenigstens sein muß, damit die Spannungsunterschiede ϑ innerhalb der geophysikalisch begründeten Toleranzen bleiben.

Auf die Diskrepanz zwischen der dynamischen und der statischen Abplattung der Erde sei hier nicht eingegangen [4, 21]; diese Frage soll getrennt behandelt werden. Weil hier eine Änderung der zonalen Kugelfunktion 2. Ordnung betrachtet wird, handelt es sich auch um eine Änderung der Abplattung der Bezugsfigur, so daß noch andere Gesichtspunkte zu berücksichtigen sind [5]. Es werden daher nur die Kugelfunktionen $P_{n,m}$ für die folgenden Wertepaare der Ordnungszahlen eingeführt:

$$(n.\ m) = (2.\ 2);\ (3.\ 0);\ (3.\ 1);\ (3.\ 2);\ (3.\ 3);\ (4.\ 0);\ (4.\ 1);\ \ldots$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

2. Modellerde

Bei den folgenden Untersuchungen wird von einem bestimmten Geländemodell ausgegangen, das den verschiedenen Varianten für die Verteilung der Dichte im Erdinneren angepaßt werden kann.

Das Gravitationspotential im Außenraum der Erde ist durch die Verfahren der dynamischen Satellitengeodäsie bestimmt worden. Es wird als Kugelfunktionsentwicklung eingeführt (s. [9]):

$$(6)\quad C = f\frac{M_e}{r}\sum_n\sum_m\left(\frac{R_o}{r}\right)^n\left[C_{1.n.m}\cos m\lambda + C_{2.n.m}\sin m\lambda\right]\bar{P}_{n.m}(\cos\delta)\ ;\ r \geqq R_o\ .$$

f ist die Gravitationskonstante, M_e die Masse der Erde und R_o der Radius der Erdkugel. Als räumliche geozentrische Polarkoordinaten werden r, δ, λ eingeführt. r ist der Radius, δ die Poldistanz und λ die geographische Länge. Die Funktionen $\bar{P}_{n.m}(\cos\delta)$ sind Kugelfunktionen entsprechend der Normierung

$$(7)\quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\bar{P}_{n.m}(\cos\delta)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda\\ \\ \sin m\lambda\end{Bmatrix}\right]^2\sin\delta\, d\delta\, d\lambda = 4\pi\ .$$

Die Parameter des Potentials C, also die STOKESschen Konstanten $C_{1.n.m}$ und $C_{2.n.m}$, werden so eingeführt, daß sie die Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht charakterisieren. Bestimmte Kugelfunktionen niederer Ordnung müssen verschwinden. Es folgt

$$(8)\quad C_{1.o.o} = C_{1.1.o} = C_{1.1.1} = C_{2.1.1} = C_{1.2.o} = C_{1.2.1} = C_{2.2.1} = 0.$$

Bei genauer Betrachtung darf ferner für $C_{1.4.o}$ nicht der Wert $+0{,}539\cdot10^{-6}$ von GAPOSCHKIN [9] für das Gravitationspotential im Außenraum hier eingesetzt werden, sondern es muß der für die hydrostatische Figur gültige Wert $C^H_{1.4.o} = +1{,}0296\cdot10^{-6}$ abgezogen werden. In der für das Potential der hydrostatischen Erde gültigen Entwicklung nach LEGENDREschen Polynomen ergibt sich der Koeffizient bei der 4. Ordnung nämlich als $J_4 = -2{,}99\cdot10^{-6}$ [19] oder $J_4 = -3{,}0888\cdot10^{-6}$ [16]. Wegen der unterschiedlichen Normierung gilt die Umrechnung $C^H_{1.4.o} = -1/3\ J^H_4$. Es ist also $C_{1.4.o} = -0{,}491\cdot10^{-6}$ in die Entwicklung (6) einzusetzen.

Die Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht innerhalb des Erdkörpers werden zunächst durch die Topographie und deren isostatische Kompensation beschrieben. Es wird von der Kugelfunktionsentwicklung für die äquivalente Topographie nach KAULA [14] ausgegangen. Dabei werden die Ozeane, Seen und Gletscher zu einer Schicht von der Dichte der Gebirgsmasse, $\varrho^o = 2{,}65\ [g\ cm^{-3}]$, kondensiert. Die Entwicklung für die äquivalente Topographie lautet

$$(9)\quad a = \sum_n\sum_m\left[A_{1.n.m}\cos m\lambda + A_{2.n.m}\sin m\lambda\right]\bar{P}_{n.m}(\cos\delta)\ .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Entsprechend der isostatischen Kompensation nach AIRY-HEISKANEN senken sich die Gebirgswurzeln um den Betrag $\varrho^0/\Delta\varrho \, a \, (1 + \xi)$ unter die Tiefe des isostatischen Ausgleichs $T = 30$ km herab, wenn $\Delta\varrho$ der Dichtesprung am Unterrand der Erdkruste und ξ der Parameter der isostatischen Überkompensation ist. Der Parameter ξ soll im folgenden durch Optimierungsrechnungen neben den anderen Unbekannten mit bestimmt werden. Die Dichteanomalien in den oberen Schichten der Erde sind im Gegensatz zu den Parametern der Topographie unbekannt.

Ist R_o der Radius der Erdoberfläche und R_u der Radius der unteren Begrenzung der betrachteten Erdschichten, dann ist $R_o - R_u = D$ die Mächtigkeit dieser Schichten, die in einer Kugelschale verteilt sind. In ihrem Bereich werden räumlich verteilte Dichteanomalien

(10) $\xi = \xi(t) , \qquad 0 \leq t \leq D ,$

(11) $t = R_o - r$

als Quellen des Gravitationspotentials eingeführt:

(12) $\xi = \xi(r) = \sum_n \sum_m [X_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + X_{2.n.m}(r) \sin m\lambda] \, \bar{P}_{n.m}(\cos\delta) ,$

$R_u \leq r \leq R_o .$

Es empfiehlt sich zu vermeiden, daß am Unterrand der Kugelschale, $r = R_u$, eine Unstetigkeit der Dichteanomalien ξ vorliegt. Diese würde auftreten, wenn für die Entwicklung (12) gilt $\xi(R_u) \neq 0$; denn für $r < R_u$ verschwindet die Dichteanomalie in jedem Fall. Daher wird die Bedingung

(13) $\xi(R_u) = 0$

mit hinzugenommen. Es folgt

(14) $X_{1.n.m}(R_u) = X_{2.n.m}(R_u) = 0$

für jeden Wert von n und m.

Bei den späteren Berechnungen soll auch die Stetigkeit der Tangente der Funktion $\xi(r)$ nach Gleichung (12) im Punkt $r = R_u$ zur Bedingung gemacht werden:

(15) $\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{d}{dr} X_{1.n.m} = \frac{d}{dr} X_{2.n.m} = 0 \qquad$ für $\qquad r = R_u .$

Die Erdkruste und die gesamte Lithosphäre haben eine wesentlich größere Festigkeit als die darunterliegenden Schichten des oberen Erdmantels. Sie können daher größere Spannungsunterschiede und auch größere Dichteanomalien aufnehmen. Im Bereich der Lithosphäre bis in die Tiefe T_y soll daher eine Schicht von Dichteanomalien eingeführt werden, deren Dichte η sich nur horizontal verändert. Diese Schicht kann auch Abweichungen von der isostatischen Kompensation nach AIRY-HEISKANEN aufnehmen. Man

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

kann diese Schicht ersetzen durch eine Flächenbelegung an der Erdoberfläche mit der Dichte

(16) $\sigma_y = \eta T_y$.

Für σ_y ergibt sich diese Kugelfunktionsentwicklung zu

(17) $\sigma_y = \sum_n \sum_m [Y_{1.n.m} \cos m\lambda + Y_{2.n.m} \sin m\lambda] \bar{P}_{n.m} (\cos \vartheta)$.

Die nach Gleichung (7) normierten Kugelfunktionen $\bar{P}_{n.m}$ errechnen sich folgendermaßen: Sind P_n die LEGENDREschen Polynome und $P_n^{(m)}$ deren m-te Ableitungen, dann ergeben sich die zugeordneten Kugelfunktionen $P_{n.m}$ nach der Formel

(18) $P_{n.m}(u) = (1 - u^2)^{m/2} P_n^{(m)}(u)$.

Es gilt

(19) $\bar{P}_{n.o}(u) = \sqrt{2n + 1}\, P_n(u)$;

(20) $\bar{P}_{n.m}(u) = \sqrt{2\,(2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!}}\, P_{n.m}(u)$; $m = 1, 2, \ldots, n$.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

3. Potentialentwicklungen

Das durch die topographischen Massen verursachte Gravitationsfeld wird als Potential einer Flächenbelegung mit der Dichte

$$(21) \qquad \sigma_a = \varrho^o a$$

an der Erdoberfläche eingeführt;

$$(22) \qquad A = f \iint_{\bar{\omega}} \frac{\sigma_a}{e} d\bar{\omega} .$$

$\bar{\omega}$ ist die Erdoberfläche und e der geradlinige Abstand zwischen dem Aufpunkt und dem bei der Integration variablen Punkt. Die Entwicklung (9) wird in (22) eingesetzt. Für den Außenraum, $r \geqq R_o$, gilt

$$(23) \qquad \frac{1}{e} = \frac{1}{r} \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{R_o}{r}\right)^n P_n (\cos \chi) , \qquad r \geqq R_o .$$

χ ist der sphärische Abstand der beiden Endpunkte der Strecke e.

Die Kugelfunktionen werden nach dem Additionstheorem entwickelt:

$$(24) \qquad P_n (\cos \chi) = P_n (\cos \delta) P_n (\cos \delta') + \\ + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n.m} (\cos \delta) P_{n.m} (\cos \delta') [\cos m\lambda \cos m\lambda' + \\ + \sin m\lambda \sin m\lambda'] .$$

Mit (9), (23), (24) wird aus (22) unter Berücksichtigung der Normierungen (19) und (20)

$$(25) \qquad A = 4\pi f \varrho^o R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R_o}{r}\right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{n.m} (\cos \delta) \{A_{1.n.m} \cos m\lambda + \\ + A_{2.n.m} \sin m\lambda\} , \qquad r \geqq R_o .$$

Im Innenraum, $r \leqq R_o$, gilt anstelle von (23)

$$(26) \qquad \frac{1}{e} = \frac{1}{R_o} \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{r}{R_o}\right)^n P_n (\cos \chi), \qquad r \leqq R_o .$$

Damit folgt in analoger Weise für den Innenraum

$$(27) \qquad A = 4\pi f \varrho^o R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{R_o}\right)^n \sum_m \bar{P}_{n.m} (\cos \delta) \{A_{1.n.m} \cos m\lambda + \\ + A_{2.n.m} \sin m\lambda\} , \qquad r \leqq R_o .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Die isostatischen Ausgleichsmassen werden als Flächenbelegung mit der Dichte

$$(28) \quad \sigma_b = -\sigma_a (1 + \xi) = -\varrho^o a (1 + \xi)$$

in der Tiefe $T = 30$ km verteilt. Das Potential B der isostatischen Kompensationsmassen ergibt sich damit durch das Integral

$$(29) \quad B = f \iint_{\bar{\omega}_1} \frac{\sigma_b}{e} d\bar{\omega}_1 .$$

$\bar{\omega}_1$ ist die Kugel mit dem Radius $R_o - T$.

Analog zur Ableitung von (25) und (27) aus (22) folgen die Entwicklungen für das Potential B im Außenraum und im Innenraum der Kugel mit dem Radius $R_T = R_o - T$:

$$(30) \quad B = -4\pi f \varrho^o R_T (1 + \xi) \sum_n \frac{1}{2n + 1} \left(\frac{R_T}{r}\right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{n.m} (\cos \delta) \left\{ A_{1.n.m} \cos m \lambda + \right.$$

$$\left. + A_{2.n.m} \sin m \lambda \right\}, \qquad r \geqq R_T ;$$

$$(31) \quad B = -4\pi f \varrho^o R_T (1 + \xi) \sum_n \frac{1}{2n + 1} \left(\frac{r}{R_T}\right)^n \sum_m \bar{P}_{n.m} (\cos \delta) \left\{ A_{1.n.m} \cos m \lambda + \right.$$

$$\left. + A_{2.n.m} \sin m \lambda \right\}, \qquad r \leqq R_T .$$

In den Formeln (30) und (31) soll R_T durch R_o und T ausgedrückt werden, um Entwicklungen zu haben, die mit (25) und (27) vergleichbar sind. Der Ausdruck

$$R_T \left(\frac{R_T}{r}\right)^{n+1} = (R_o - T)^{n+2} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}$$

wird in die binomische Reihe entwickelt:

$$(32) \quad (1 + x)^n = \binom{n}{o} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots ;$$

solange $|x| < 1$ ist, gilt diese Reihe für ganze und gebrochene, positive und negative Werte von n. Es folgt

$$(33) \quad R_T \left(\frac{R_T}{r}\right)^{n+1} = R_o \left(\frac{R_o}{r}\right)^{n+1} \left[1 - (n + 2) \frac{T}{R_o} + \frac{1}{2} (n + 1)(n+2)\left(\frac{T}{R_o}\right)^2 - + \ldots\right] .$$

Der entsprechende Ausdruck in Gleichung (31) lautet

$$(34) \quad R_T \left(\frac{r}{R_T}\right)^n = R_o \left(\frac{r}{R_o}\right)^n \left[1 + (n - 1) \frac{T}{R_o} + \frac{1}{2} n (n - 1)\left(\frac{T}{R_o}\right)^2 + \ldots\right] .$$

Es empfiehlt sich, die beiden Potentiale A und B zusammenzufassen. Die Summe von (25) und (30) einerseits und (27) und (31) andererseits ergibt mit (33) und (34)

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(35) \quad A + B = 4\pi f \varrho^o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left\{ R_o \left(\frac{R_o}{r}\right)^{n+1} - R_T \left(\frac{R_T}{r}\right)^{n+1} (1+\xi) \right\} \times$$

$$\times \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \left\{ A_{1.n.m} \cos m\lambda + A_{2.n.m} \sin m\lambda \right\}, \qquad r \geqq R_o.$$

Mit der Reihenentwicklung (33) folgt

$$(36) \quad A + B = 4\pi f \varrho^o R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R_o}{r}\right)^{n+1} \left[(n+2) \frac{T}{R_o} \left(1 - \frac{n+1}{2} \frac{T}{R_o}\right) - \xi \right] \times$$

$$\times \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \left\{ A_{1.n.m} \cos m\lambda + A_{2.n.m} \sin m\lambda \right\}, \qquad r \geqq R_o ,$$

und für den Innenraum

$$(37) \quad A + B = 4\pi f \varrho^o R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left\{ \left(\frac{r}{R_o}\right)^n - \frac{R_T}{R_o} \left(\frac{r}{R_T}\right)^n (1+\xi) \right\} \sum_m \overline{P}_{n.m} \cos\delta) \times$$

$$\times \left\{ A_{1.n.m} \cos m\lambda + A_{2.n.m} \sin m\lambda \right\}, \qquad r \leqq R_T .$$

Mit der Reihenentwicklung (34) folgt

$$(38) \quad A + B = -4\pi f \varrho^o R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{R_o}\right)^n \left[(n-1) \frac{T}{R_o} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{T}{R_o}\right) + \xi \right] \times$$

$$\times \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \left\{ A_{1.n.m} \cos m\lambda + A_{2.n.m} \sin m\lambda \right\},$$

$$r < R_T \cong R_o .$$

Das Potential Y für die unbekannte Flächenbelegung mit der Dichte σ_y an der Erdoberfläche (17) ergibt sich ähnlich wie das Potential A der Topographie aus der Dichte σ_a einer Flächenbelegung an der Erdoberfläche:

$$(39) \quad Y = 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R_o}{r}\right)^{n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \left\{ Y_{1.n.m} \cos m\lambda + Y_{2.n.m} \sin m\lambda \right\},$$

$$r \geqq R_o ;$$

$$(40) \quad Y = 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{R_o}\right)^n \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \left\{ Y_{1.n.m} \cos m\lambda + Y_{2.n.m} \sin m\lambda \right\},$$

$$r \leqq R_o .$$

Das Potential X der räumlich verteilten Dichteanomalien ξ nach (12) ergibt sich durch Integration über das Volumen der Kugelschale ε mit den Radien $r = R_u$ und $r = R_o$. Ist $d\varepsilon$ das Volumenelement, dann folgt

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(41) \qquad X = f \iiint_{\varepsilon} \frac{\xi}{e} \, d\varepsilon \, .$$

Im Außenraum der Kugelschale, $r \geqq R_o$, ist in (41) für $1/e$ der Ausdruck (23) einzusetzen. Es folgt

$$(42) \qquad X = 4\pi f r \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos \delta) \left\{ \cos m\lambda \int_{R=R_u}^{R_o} X_{1.n.m}(R) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} dR + \right.$$

$$\left. + \sin m\lambda \int_{R=R_u}^{R_o} X_{2.n.m}(R) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} dR \right\}, \qquad r \geqq R_o \, .$$

In dem von der Kugelschale ε umschlossenen Raum, $r \leqq R_u$, dagegen muß in (41) für $1/e$ der Ausdruck (26) genommen werden. Mit

$$(43) \qquad X = f \int_{R=R_u}^{R_o} \int_{\overline{\delta}=o}^{\pi} \int_{\overline{\lambda}=o}^{2\pi} \frac{\xi}{e} \, d\varepsilon$$

ergibt sich auf diesem Wege

$$(44) \qquad X = 4\pi f r \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos \delta) \left\{ \cos m\lambda \int_{R=R_u}^{R_o} X_{1.n.m}(R) \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} dR + \right.$$

$$\left. + \sin m\lambda \int_{R=R_u}^{R_o} X_{2.n.m}(R) \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} dR \right\}, \qquad r \leqq R_u \, .$$

Für Aufpunkte, die innerhalb des Volumens der Kugelschale ε gelegen sind, $R_u \leqq r \leqq R_o$, und die die Polarkoordinaten r, δ, λ haben, muß bei der Integration über die Variablen $R, \overline{\delta}, \overline{\lambda}$ zwischen dem Fall $R > r$ und dem Fall $r > R$ unterschieden werden. Das Integral (43) zerfällt daher in zwei Teilintegrale:

$$(45) \qquad X = f \left[\int_{R=R_u}^{r} + \int_{R=r}^{R_o} \right] \int_{\overline{\delta}=o}^{\pi} \int_{\overline{\lambda}=o}^{2\pi} \frac{\xi}{e} R^2 \sin \overline{\delta} \, dR \, d\overline{\delta} \, d\overline{\lambda} \, .$$

Im ersten Teilintegral, $r \geqq R$, gilt für $1/e$ die Entwicklung (23), wenn man dort R_o durch R substituiert. Beim zweiten Integrationsschritt, $R \geqq r$, wird in entsprechender Weise die Entwicklung (26) genommen. Es folgt

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(46)\quad X = 4\pi f r \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \bar{P}_{n.m}(\cos\delta) \Big\{ \cos m\lambda \Big[\int_{R=R_u}^{r} X_{1.n.m}(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} dR + \int_{R=r}^{R_o} X_{1.n.m}(R)\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} dR \Big] + \sin m\lambda \Big[\int_{R=R_u}^{r} X_{2.n.m}(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} dR + \int_{R=r}^{R_o} X_{2.n.m}(R)\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} dR \Big] \Big\},$$

$$R_u \leqq r \leqq R_o .$$

Im Hinblick auf die weiteren Untersuchungen empfiehlt es sich, für die Funktionen $X_{1.n.m}(r)$ und $X_{2.n.m}(r)$ Potenzreihenentwicklungen nach der Tiefe t im Erdinneren für den Bereich $0 \leqq t \leqq D$ einzuführen. Es gilt dann, die unbekannten Koeffizienten dieser Potenzreihenentwicklungen zu bestimmen:

$$(47)\quad X_{1.n.m}(r) = \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i}\, t^i ,$$

$$(48)\quad X_{2.n.m}(r) = \sum_{i=o}^{\tau} X_{2.n.m.i}\, t^i ;$$

$$0 \leqq t \leqq D; \qquad t = R_o - r ; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tau .$$

Selbstverständlich gilt

$$(49)\quad X_{2.n.o} = X_{2.n.o.i} = 0 ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tau .$$

Die Substitutionen (47) und (48) werden in (42), (44) und (46) eingesetzt. In den entstehenden Ausdrücken kann in den einzelnen Integralen über den Radius R integriert werden. Für die drei verschiedenen Darstellungen des Potentials X in den Bereichen $r \leqq R_u$, $R_u \leqq r \leqq R_o$, $r \geqq R_o$ ergeben sich Entwicklungen nach den konstanten Koeffizienten $X_{1.n.m.i}$ und $X_{2.n.m.i}$. Diese Entwicklungen werden ermittelt für die speziellen Fälle $r = R_o$, $r = R_u$ und für das Intervall $R_u \leqq r \leqq R_o$.

Für die Aufpunkte mit dem Radius $r = R_o$ sind nach (42) die Integrale

$$(50)\quad \int_{R=R_u}^{R_o} X_{1.n.m}(R)\left(\frac{R}{R_o}\right)^{n+2} dR$$

und

$$(51)\quad \int_{R=R_u}^{R_o} X_{2.n.m}(R)\left(\frac{R}{R_o}\right)^{n+2} dR$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

zu berechnen. Mit (32) folgt

$$(52)\qquad \left(\frac{r}{R_o}\right)^{n+2} = 1 - (n+2)\frac{t}{R_o} + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\left(\frac{t}{R_o}\right)^2 - $$

$$- \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2)\left(\frac{t}{R_o}\right)^3 + - \ldots ; \qquad r \leqq R_o ,\quad R_o - r = t .$$

Werden (47) und (52) in (50) substituiert, dann ergibt sich .

$$(53)\qquad \int\limits_{R=R_u}^{R_o} \left(\frac{R}{R_o}\right)^{n+2} \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i}\, t^i \, dR =$$

$$= \int\limits_{t=o}^{D} \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i} \left[t^i - (n+2)\frac{t^{i+1}}{R_o} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{t^{i+2}}{R_o^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{n\,(n+1)(n+2)}{6}\frac{t^{i+3}}{R_o^3} + - \ldots \right] dt = \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n,\, i)\, X_{1.n.m.i} .$$

Es ist

$$(54)\qquad \gamma_1(n,\, i) = \frac{1}{i+1}\, D^{i+1} \left[1 - (n+2)\frac{i+1}{i+2}\frac{D}{R_o} + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\frac{i+1}{i+3}\left(\frac{D}{R_o}\right)^2 - \right.$$

$$- \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2)\frac{i+1}{i+4}\left(\frac{D}{R_o}\right)^3 +$$

$$\left. + \frac{1}{24}(n-1)\, n\,(n+1)(n+2)\frac{i+1}{i+5}\left(\frac{D}{R_o}\right)^4 - + \ldots \right] ;$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, \tau ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Analog erhält man aus (51) mit (48) und (52)

$$(55)\qquad \int\limits_{R=R_u}^{R_o} X_{2.n.m}(R) \left(\frac{R}{R_o}\right)^{n+2} dR = \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n,\, i)\, X_{2.n.m.i} .$$

Für an der Erdoberfläche gelegene Aufpunkte wird damit aus (42)

$$(56)\qquad (X)_{r=R_o} = 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m}(\cos\delta) \left[\cos m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n,\, i)\, X_{1.n.m.i} + \right.$$

$$\left. + \sin m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n,\, i)\, X_{2.n.m.i} \right] .$$

Mittels der Gleichung (44) wird das Potential X für Aufpunkte am Unterrand der Kugelschale ε, also für $r = R_u$, bestimmt. Es tritt hier das Integral

$$(57)\qquad R_u \int\limits_{R=R_u}^{R_o} X_{1.n.m}(R) \left(\frac{R_u}{R}\right)^{n-1} dR$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

und entsprechend

$$(58) \quad R_u \int_{R=R_u}^{R_o} X_{2.n.m}(R)(\frac{R_u}{R})^{n-1}\, dR$$

auf. Diese Integrale sind gleich

$$(59) \quad R_u \, (\frac{R_u}{R_o})^{n-1} \int_{R=R_u}^{R_o} X_{1.n.m}(R)(\frac{R_o}{R})^{n-1}\, dR$$

und

$$(60) \quad R_u \, (\frac{R_u}{R_o})^{n-1} \int_{R=R_u}^{R_o} X_{2.n.m}(R)(\frac{R_o}{R})^{n-1}\, dR \; .$$

Aus der binomischen Reihe (32) ergibt sich zunächst

$$(61) \quad (\frac{R_o}{r})^{n-1} = 1 + (n-1)\frac{t}{R_o} + \frac{1}{2}\, n\,(n-1)(\frac{t}{R_o})^2 + \frac{1}{6}\,(n+1)\, n\,(n-1)(\frac{t}{R_o})^3 + \ldots$$

Damit erhält man

$$(62) \quad \int_{R=R_u}^{R_o} X_{1.n.m}(R)(\frac{R_o}{R})^{n-1}\, dR = \int_{R=R_u}^{R_o} (\frac{R_o}{R})^{n-1} \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i}\, t^i \, dR =$$

$$= \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i} \int_{t=o}^{D} t^i \, [1 + (n-1)\frac{t}{R_o} + \frac{1}{2}\, n\,(n-1)(\frac{t}{R_o})^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\,(n-1)\, n\,(n+1)(\frac{t}{R_o})^3 + \ldots]\, dt \; .$$

Der Faktor vor den Integralen in (59) und (60) wird mit $R_u = R_o - D$ gleich

$$(63) \quad \frac{(R_u)^n}{(R_o)^{n-1}} = R_o \, (1 - \frac{D}{R_o})^n \; .$$

Damit wird für (57) und (59)

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(64) \qquad R_u \int\limits_{R=R_u}^{R_o} X_{1.n.m}(R)\left(\frac{R_u}{R}\right)^{n-1} dR =$$

$$= \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i}\, R_o \left(1 - \frac{D}{R_o}\right)^n \left[\frac{1}{i+1} D^{i+1} + \frac{n-1}{i+2}\frac{D^{i+2}}{R_o} + \right.$$

$$\left. + \frac{n\,(n-1)}{2\,(i+3)}\frac{D^{i+3}}{R_o^2} + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6\,(i+4)}\frac{D^{i+4}}{R_o^3} + \ldots\right] =$$

$$= R_o \sum_{i=o}^{\tau} \bar{\gamma}_2(n,\, i)\, X_{1.n.m.i} \,.$$

Es ist

$$(65) \qquad \bar{\gamma}_2(n,\, i) = \left(1 - \frac{D}{R_o}\right)^n \frac{1}{i+1} D^{i+1} \left[1 + (n-1)\frac{i+1}{i+2}\frac{D}{R_o} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\, n\,(n-1)\frac{i+1}{i+3}\left(\frac{D}{R_o}\right)^2 + \frac{1}{6}\,(n+1)\, n\,(n-1)\frac{i+1}{i+4}\left(\frac{D}{R_o}\right)^3 +$$

$$\left. + \frac{1}{24}\,(n+2)(n+1)\, n\,(n-1)\frac{i+1}{i+5}\left(\frac{D}{R_o}\right)^4 + \ldots\right] ;$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, \tau \,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entsprechend ergibt sich

$$(66) \qquad R_u \int\limits_{R=R_u}^{R_o} X_{2.n.m}(R)\left(\frac{R_u}{R}\right)^{n-1} dR = R_o \sum_{i=o}^{\tau} \bar{\gamma}_2(n,\, i)\, X_{2.n.m.i} \,.$$

Substituiert man (64) und (66) in (44), so folgt

$$(67) \qquad (X)_{r=R_u} = 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \bar{P}_{n.m}(\cos\vartheta)\left[\cos m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \bar{\gamma}_2(n,\, i)\, X_{1.n.m.i} + \right.$$

$$\left. + \sin m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \bar{\gamma}_2(n,\, i)\, X_{2.n.m.i}\right] .$$

Schließlich müssen in der Entwicklung (46) für das Potential X im Bereich der Kugelschale ε, $0 \leqq t \leqq D$, die Substitutionen (47) und (48) vorgenommen werden. Mit der binomischen Reihe ergibt sich wieder

$$(68) \qquad R^{n+2} = R_o^{n+2}\left(1 - \frac{t}{R_o}\right)^{n+2} = R_o^{n+2}\left[1 - (n+2)\frac{t}{R_o} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\left(\frac{t}{R_o}\right)^2 - \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2)\left(\frac{t}{R_o}\right)^3 + - \ldots\right] .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Ferner gilt

$$(69)\qquad (\frac{1}{R})^{n+1} = (\frac{1}{R_o})^{n+1} (1 - \frac{t}{R_o})^{-(n+1)} .$$

In Gleichung (46) erhält man daher

$$(70)\qquad (\frac{1}{r})^{n+1} \int_{R=R_u}^{r} X_{1.n.m}(R)\, R^{n+2}\, dR =$$

$$= (\frac{1}{r})^{n+1} \int_{t}^{D} \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i}\, \bar{t}^{i} R_o^{n+2} [1 - (n+2) \frac{\bar{t}}{R_o} +$$

$$+ \frac{1}{2} (n+1)(n+2)(\frac{\bar{t}}{R_o})^2 - \frac{1}{6} n (n+1)(n+2)(\frac{\bar{t}}{R_o})^3 + - \ldots] d\bar{t} =$$

$$= (\frac{1}{r})^{n+1} R_o^{n+2} \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i} [\frac{1}{i+1} (D^{i+1} - t^{i+1}) -$$

$$- \frac{n+2}{i+2} (D^{i+2} - t^{i+2}) \frac{1}{R_o} + \frac{(n+1)(n+2)}{2\,(i+3)} (D^{i+3} - t^{i+3}) \frac{1}{R_o^2} -$$

$$- \frac{1}{6} \frac{n\,(n+1)(n+2)}{(i+4)} (D^{i+4} - t^{i+4}) \frac{1}{R_o^3} + - \ldots] .$$

Die beiden Gleichungen (69) und (70) ergeben

$$(71)\qquad (\frac{1}{r})^{n+1} \int_{R=R_u}^{r} X_{1.n.m}(R)\, R^{n+2}\, dR = R_o \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_3(t;\, n,\, i)\, X_{1.n.m.i} .$$

Es ist

$$(72)\qquad \gamma_3(t;\, n,\, i) = (1 - \frac{t}{R_o})^{-(n+1)} [\frac{1}{i+1} (D^{i+1} - t^{i+1}) -$$

$$- \frac{n+2}{i+2} \frac{1}{R_o} (D^{i+2} - t^{i+2}) + \frac{(n+1)(n+2)}{2\,(i+3)} \frac{1}{R_o^2} (D^{i+3} - t^{i+3}) -$$

$$- \frac{n\,(n+1)(n+2)}{6\,(i+4)} \frac{1}{R_o^3} (D^{i+4} - t^{i+4}) +$$

$$+ \frac{1}{24} (n-1)\, n\, (n+1)(n+2) \frac{1}{i+5} \frac{1}{R_o^4} (D^{i+5} - t^{i+5}) - + \ldots] ;$$

$$0 \leqq t \leqq D ; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tau ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Mit der binomischen Reihe

$$(73)\qquad \left(\frac{1}{R}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{R_o}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{t}{R_o}\right)^{-(n-1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{R_o}\right)^{n-1} \left[1 + (n-1)\frac{t}{R_o} + \frac{n\,(n-1)}{2}\left(\frac{t}{R_o}\right)^2 + \frac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(n+1)\left(\frac{t}{R_o}\right)^3 + \ldots\right]$$

und wegen

$$(74)\qquad R^n = (R_o - t)^n = R_o^n \left(1 - \frac{t}{R_o}\right)^n$$

folgt weiter in Gleichung (46)

$$(75)\qquad r^n \int_{R=r}^{R_o} X_{1.n.m}(R)\left(\frac{1}{R}\right)^{n-1} dR = r^n \left(\frac{1}{R_o}\right)^{n-1} \int_o^t \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i}\, \bar{t}^i \left[1 + (n-1)\frac{\bar{t}}{R_o} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\, n\,(n-1)\left(\frac{\bar{t}}{R_o}\right)^2 + \frac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(n+1)\left(\frac{\bar{t}}{R_o}\right)^3 + \ldots\right] d\bar{t} =$$

$$= r^n \left(\frac{1}{R_o}\right)^{n-1} \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i} \left[\frac{1}{i+1}\, t^{i+1} + \frac{n-1}{i+2}\,\frac{t^{i+2}}{R_o} + \right.$$

$$\left. + \frac{n\,(n-1)}{2\,(i+3)}\,\frac{t^{i+3}}{R_o^2} + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6\,(i+4)}\,\frac{t^{i+4}}{R_o^3} + \ldots\right].$$

Es folgt

$$(76)\qquad r^n \int_{R=r}^{R_o} X_{1.n.m}(R)\left(\frac{1}{R}\right)^{n-1} dR = R_o \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_4(t;\, n,\, i)\, X_{1.n.m.i}\,.$$

Hier bedeutet

$$(77)\qquad \gamma_4(t;\, n,\, i) = \left(1 - \frac{t}{R_o}\right)^n \left[\frac{1}{i+1}\, t^{i+1} + \frac{n-1}{i+2}\,\frac{t^{i+2}}{R_o} + \right.$$

$$+ \frac{n\,(n-1)}{2\,(i+3)}\,\frac{t^{i+3}}{R_o^2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6\,(i+4)}\,\frac{t^{i+4}}{R_o^3} +$$

$$\left. + \frac{1}{24}\,(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)\,\frac{1}{i+5}\,\frac{t^{i+5}}{R_o^4} + \ldots\right];$$

$$0 \leqq t \leqq D\,; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tau\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Substituiert man (71) und (76) in (46), dann ergibt sich

$$(78)\qquad X(t) = 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \Big\{ \cos m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} [\gamma_3(t;\, n,\, i) + \gamma_4(t;\, n,\, i)]\, X_{1.n.m.i} + \sin m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} [\gamma_3(t;\, n,\, i) + \gamma_4(t;\, n,\, i)]\, X_{2.n.m.i} \Big\} ;$$

$$0 \leqq t \leqq D; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tau ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

An der Erdoberfläche, also für $r = R_o$, geht $X(t)$ für $t = 0$ in $(X)_{r=R_o}$ nach Gleichung (56) über. Weil bei $t = 0$ die Beziehung $\gamma_4(0;\, n,\, i) = 0$ gilt, wie man aus (77) entnimmt, ergibt sich nämlich mit (78) die Beziehung

$$(79)\qquad (X(t))_{t=o} = 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \Big\{ \cos m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_3(0;\, n,\, i)\, X_{1.n.m.i} + \sin m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_3(0;\, n,\, i)\, X_{2.n.m.i} \Big\} .$$

Mit (72) und (54) überzeugt man sich davon, daß

$$(80)\qquad \gamma_3(0;\, n,\, i) = \gamma_1(n,\, i),$$

daher ist (79) identisch mit (56).

Am Unterrand der Kugelschale, $t = D$, muß (78) mit (67) zusammenfallen. Für $t = D$ gilt mit (72)

$$\gamma_3(D;\, n,\, i) = 0.$$

Daher wird mit (78)

$$(81)\qquad (X(t))_{t=D} = 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \Big\{ \cos m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_4(D;\, n,\, i)\, X_{1.n.m.i} + \sin m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_4(D;\, n,\, i)\, X_{2.n.m.i} \Big\} .$$

Mit (65) und (77) findet man

$$(82)\qquad \gamma_4(D;\, n,\, i) = \overline{\gamma}_2(n,\, i) ,$$

so daß also gilt

$$(83)\qquad (X(t))_{t=D} = (X)_{r=R_u} .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Schließlich soll noch das Potential X im Außenraum, $r \geqq R_o$, und im Innenraum, $r \leqq R_u$, nach den Koeffizienten $X_{1.n.m.i}$ und $X_{2.n.m.i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \tau)$ entwikkelt werden. Substituiert man (47), (48), (53), (55) in (42), dann folgt

$$(84) \qquad X = 4\pi f \sum_n \frac{R_o^{n+2}}{r^{n+1}} \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m}(\cos\delta) \Big\{ \cos m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n, i)\, X_{1.n.m.i} + \sin m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n, i)\, X_{2.n.m.i} \Big\}, \qquad r \geqq R_o .$$

Die entsprechende Beziehung für den Innenraum ergibt sich analog mit (64) und (66) aus Gleichung (44):

$$(85) \qquad X = 4\pi f R_o \sum_n \frac{r^n}{R_u^n} \frac{1}{2n+1} \sum_m \overline{P}_{n.m}(\cos\delta) \Big\{ \cos m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \overline{\gamma}_2(n, i)\, X_{1.n.m.i} + \sin m\lambda \sum_{i=o}^{\tau} \overline{\gamma}_2(n, i)\, X_{2.n.m.i} \Big\}, \qquad r \leqq R_u .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

4. Potentialbedingungen

Die drei Potentiale von Flächenbelegungen, A, B und Y, und das Potential X einer räumlichen Massenverteilung im Inneren der Kugelschale ε verursachen außerhalb dieser Kugelschale, also wenn $r \geqq R_o$ und $r \leqq R_u$, eine Gravitationskraft, die durch das Potential C beschrieben wird. Es müssen daher zwei Potentialbedingungen erfüllt werden:

$$(86)\quad \Omega_1 = 0 = A + B + X + Y - C, \qquad r \geqq R_o ,$$

und

$$(87)\quad \Omega_2 = 0 = A + B + X + Y - C, \qquad r \leqq R_u .$$

Mit den Gleichungen (6), (36), (39), (84) ergibt sich für die Bedingung Ω_1 aus Gleichung (86) die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}(88)\quad \Omega_1 = 0 = {} & 4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R_o}{r}\right)^{n+1} \sum_m \bar{P}_{n.m} (\cos\delta) \times \\ & \times \Big[\varrho^o \left\{ (n+2) \frac{T}{R_o} \left(1 - \frac{n+1}{2} \frac{T}{R_o}\right) - \xi \right\} \left\{ A_{1.n.m} \cos m\lambda + A_{2.n.m} \sin m\lambda \right\} + \\ & + \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n, i) \left\{ X_{1.n.m.i} \cos m\lambda + X_{2.n.m.i} \sin m\lambda \right\} + \\ & + Y_{1.n.m} \cos m\lambda + Y_{2.n.m} \sin m\lambda \Big] - \\ & - f \frac{M_e}{r} \sum_n \sum_m \left(\frac{R_o}{r}\right)^n \bar{P}_{n.m} (\cos\delta) \left[C_{1.n.m} \cos m\lambda + C_{2.n.m} \sin m\lambda \right] ; \end{aligned}$$

$$r \geqq R_o .$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(89)\quad \Omega_{1.n.m.1} = 0 = {} & 4\pi R_o^2 \frac{1}{2n+1} \Big[\varrho^o \left\{ (n+2) \frac{T}{R_o} \left(1 - \frac{n+1}{2} \frac{T}{R_o}\right) - \xi \right\} A_{1.n.m} + \\ & + \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n, i) X_{1.n.m.i} + Y_{1.n.m} \Big] - M_e C_{1.n.m} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(90)\quad \Omega_{2.n.m.1} = 0 = {} & 4\pi R_o^2 \frac{1}{2n+1} \Big[\varrho^o \left\{ (n+2) \frac{T}{R_o} \left(1 - \frac{n+1}{2} \frac{T}{R_o}\right) - \xi \right\} A_{2.n.m} + \\ & + \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n, i) X_{2.n.m.i} + Y_{2.n.m} \Big] - M_e C_{2.n.m} . \end{aligned}$$

Die Potentiale A und C sind gegeben, für ihren Anteil an den Gleichungen (89) und (90) wird zur Abkürzung gesetzt

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(91)\quad M_{1.n.m} = -M_e \frac{2n+1}{4\pi R_o^2} C_{1.n.m} + \varrho^o (n+2) \frac{T}{R_o} \left(1 - \frac{n+1}{2} \frac{T}{R_o}\right) A_{1.n.m}$$

und

$$(92)\quad M_{2.n.m} = -M_e \frac{2n+1}{4\pi R_o^2} C_{2.n.m} + \varrho^o (n+2) \frac{T}{R_o} \left(1 - \frac{n+1}{2} \frac{T}{R_o}\right) A_{2.n.m} .$$

Die zweite, aus der Gleichung (87) erhaltene Potentialbedingung Ω_2 wird für den Innenraum, $r \leqq R_u$, entwickelt. In diesem Bereich ist das Potential C konstant, weil in den Erdschichten mit einer Tiefe $t > D$ das hydrostatische Gleichgewicht erhalten bleiben soll:

$$(93)\quad C = C^o = \text{const}, \qquad r \leqq R_u .$$

Mit (38), (40), (85) und (93) ergibt sich aus (87) die folgende Beziehung:

$$(94)\quad \Omega_2 = 0 = -4\pi f R_o \sum_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{R_o}\right)^n \sum_m \overline{P}_{n.m} (\cos\delta) \times$$

$$\times \Big[\varrho^o \left\{ (n-1) \frac{T}{R_o} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{T}{R_o}\right) + \zeta \right\} \left\{ A_{1.n.m} \cos m\lambda + A_{2.n.m} \sin m\lambda \right\} -$$

$$- \left(\frac{R_o}{R_u}\right)^n \sum_{i=o}^{\tau} \overline{\gamma}_2(n,\, i) \left\{ X_{1.n.m.i} \cos m\lambda + X_{2.n.m.i} \sin m\lambda \right\} -$$

$$- Y_{1.n.m} \cos m\lambda - Y_{2.n.m} \sin m\lambda \Big] - C^o \; ; \qquad r \leqq R_u .$$

Die Gleichung (94) zerfällt in zwei neue Gleichungen, indem man die Koeffizienten bei $\cos m\lambda$ und bei $\sin m\lambda$ gleich Null setzt. Dabei wird davon ausgegangen, daß $n \neq 0$. Man erhält

$$(95)\quad \Omega_{1.n.m.2} = 0 = -\varrho^o \left\{ (n-1) \frac{T}{R_o} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{T}{R_o}\right) + \zeta \right\} A_{1.n.m} +$$

$$+ \left(\frac{R_o}{R_u}\right)^n \sum_{i=o}^{\tau} \overline{\gamma}_2(n,\, i)\, X_{1.n.m.i} + Y_{1.n.m}$$

und

$$(96)\quad \Omega_{2.n.m.2} = 0 = -\varrho^o \left\{ (n-1) \frac{T}{R_o} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{T}{R_o}\right) + \zeta \right\} A_{2.n.m} +$$

$$+ \left(\frac{R_o}{R_u}\right)^n \sum_{i=o}^{\tau} \overline{\gamma}_2(n,\, i)\, X_{2.n.m.i} + Y_{2.n.m} .$$

In den Gleichungen (95) und (96) werden für die Anteile der gegebenen Potentiale wieder Abkürzungen eingeführt:

$$(97)\quad N_{1.n.m} = -\varrho^o (n-1) \frac{T}{R_o} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{T}{R_o}\right) A_{1.n.m} ,$$

$$(98)\quad N_{2.n.m} = -\varrho^o (n-1) \frac{T}{R_o} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{T}{R_o}\right) A_{2.n.m} \; ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Mit (63) und (65) wird ferner gesetzt

$$(99) \quad \gamma_2(n,\ i) \ = \ \frac{R_o^n}{R_u^n}\,\bar{\gamma}_2(n,\ i)\ .$$

Es ergibt sich

$$(100) \quad \gamma_2(n,\ i) \ = \ \frac{1}{i+1}\, D^{i+1} \,[\,1 + (n-1)\,\frac{i+1}{i+2}\,\frac{D}{R_o} + \frac{1}{2}\, n\,(n-1)\,\frac{i+1}{i+3}\,(\frac{D}{R_o})^2 + \frac{1}{6}\,(n+1)\,n\,(n-1)\,\frac{i+1}{i+4}\,(\frac{D}{R_o})^3 + \frac{1}{24}\,(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)\,\frac{i+1}{i+5}\,(\frac{D}{R_o})^4 + \ldots\,]\ ;$$

$$i \ = \ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \tau\ ; \qquad n \ = \ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Die Potentialbedingungen haben daher die folgende Form:

$$(101) \quad \Omega_{1.n.m.1} \ = \ 0 \ = \ M_{1.n.m} + \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n,\ i)\ X_{1.n.m.i} + Y_{1.n.m} - \varrho^o \xi \ A_{1.n.m}\ ,$$

$$(102) \quad \Omega_{2.n.m.1} \ = \ 0 \ = \ M_{2.n.m} + \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_1(n,\ i)\ X_{2.n.m.i} + Y_{2.n.m} - \varrho^o \xi \ A_{2.n.m}\ ;$$

$$(103) \quad \Omega_{1.n.m.2} \ = \ 0 \ = \ N_{1.n.m} + \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_2(n,\ i)\ X_{1.n.m.i} + Y_{1.n.m} - \varrho^o \xi \ A_{1.n.m}\ ,$$

$$(104) \quad \Omega_{2.n.m.2} \ = \ 0 \ = \ N_{2.n.m} + \sum_{i=o}^{\tau} \gamma_2(n,\ i)\ X_{2.n.m.i} + Y_{2.n.m} - \varrho^o \xi \ A_{2.n.m}\ ;$$

$$n \ = \ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots; \qquad m \ = \ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ .$$

Zu den Gleichungen (101) - (104) treten die Bedingungen (13) und (15):

$$(105) \quad \Omega_3 \ = \ 0 \ = \ \xi(R_u),$$

$$(106) \quad \Omega_4 \ = \ 0 \ = \ (\frac{\partial \xi}{\partial r})_{r=R_u}\ .$$

Mit (12), (47), (48) folgt aus (105) und (106)

$$(107) \quad \Omega_{1.n.m.3} \ = \ 0 \ = \ \sum_{i=o}^{\tau} X_{1.n.m.i}\ D^i\ ,$$

$$(108) \quad \Omega_{2.n.m.3} \ = \ 0 \ = \ \sum_{i=o}^{\tau} X_{2.n.m.i}\ D^i\ ;$$

$$(109) \quad \Omega_{1.n.m.4} \ = \ 0 \ = \ \sum_{i=1}^{\tau} X_{1.n.m.i}\ i\ D^{i-1}\ ,$$

$$(110) \quad \Omega_{2.n.m.4} \ = \ 0 \ = \ \sum_{i=1}^{\tau} X_{2.n.m.i}\ i\ D^{i-1}\ ;$$

$$n \ = \ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots; \qquad m \ = \ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

5. Minimumprinzip für die Ermittlung der Dichteanomalien

Die Dichteanomalien sind so zu bestimmen, daß das Integral über das Quadrat ihres Wertes zu einem Minimum wird. Hierbei sind die Gleichungen (101) - (104) und (107) - (110) zu beachten. Diese a priori unbekannten Dichteanomalien treten als räumlich verteilte Werte $\xi = \xi(r)$ im Bereich der Kugelschale ε auf und als Flächenbelegung σ_y an der Erdoberfläche. Um die Flächenbelegung σ_y mit den ξ-Werten vergleichen zu können, wird sie in die räumlich verteilte Dichte η einer Schicht an der Erdoberfläche mit der Stärke T_y umgerechnet. Mit Gleichung (16) folgt

$$\eta = \frac{\sigma_y}{T_y} \, . \tag{111}$$

Unter Beachtung der Nebenbedingungen soll daher die Summe

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 \tag{112}$$

zu einem Minimum gemacht werden. Hier ist

$$\Sigma_1 = \iiint_{\varepsilon} \frac{\xi^2}{m_\xi^2} \, d\varepsilon \; ; \tag{113}$$

m_ξ ist der quadratische Mittelwert der ξ-Werte. Nimmt man den Mittelwert für die gesamte Kugelschale, dann ist m_ξ^2 gleich dem Integral

$$\frac{1}{W_\varepsilon} \iiint_{\varepsilon} \xi^2 \, d\varepsilon \; ; \tag{114}$$

W_ε ist das Volumen der Kugelschale ε:

$$W_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi \, (R_o^3 - R_u^3) \, . \tag{115}$$

Das Integral Σ_2 wird über das Quadrat der Funktion η erstreckt:

$$\Sigma_2 = \int_{r=R_o-T_y}^{R_o} \int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \frac{\eta^2}{m_\eta^2} \, r^2 \sin\delta \; dr \, d\delta \, d\lambda \, . \tag{116}$$

η und m_η sind nicht vom Radius r abhängig, daher folgt

$$\Sigma_2 = \frac{T_y}{m_\eta^2} R_o^2 \int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \eta^2 \sin\delta \; d\delta \, d\lambda = \frac{T_y}{m_\eta^2} \iint_{\bar\omega} \eta^2 \, d\bar\omega \, . \tag{117}$$

$d\bar\omega$ ist das Flächenelement auf der Erdoberfläche. m_η ergibt sich analog wie m_ξ als quadratischer Mittelwert über die η-Werte entlang der Erdoberfläche:

$$m_\eta^2 = \frac{1}{W_{\bar\omega}} \iint_{\bar\omega} \eta^2 \, d\bar\omega \; ; \tag{118}$$

$$W_{\bar\omega} = 4\pi R_o^2 \, . \tag{119}$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Entsprechend den Beziehungen (112), (113), (116) soll also die Summe der Quadrate der ξ- und der η-Werte unter Beachtung ihrer Gewichte zu einem Minimum gemacht werden.

In Anlehnung an die Fehlertheorie kann man hier die Ausdrücke $\xi \sqrt{d\varepsilon}$ und $\eta \sqrt{d\varepsilon}$ auch als zufällige Variable $v_{1.j}$ und $v_{2.j}$ mit den Gewichten p_1 und p_2 auffassen; $d\varepsilon$ ist hier ein konstantes Volumenelement der Kugelschale ε . Es gilt dann

$$(120) \quad \Sigma = \sum_j v_{1.j}^2 \, p_1 + \sum_j v_{2.j}^2 \, p_2 \, .$$

Die Summation im ersten Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (120) ist hinsichtlich der Variablen r über das Intervall $R_u \leqq r \leqq R_o$ zu erstrecken, im zweiten Ausdruck gilt für r das Intervall $R_o - T_y \leqq r \leqq R_o$. Mit

$$p_1 = \frac{1}{m_\xi^2} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{1}{m_\eta^2}$$

wird der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (120) nach (113) gleich Σ_1 und der zweite gleich dem Ausdruck (116) für Σ_2.

Substituiert man (12) in (113), dann folgt wegen der Orthogonalität der Kugelfunktionen

$$(121) \quad \Sigma_1 = \sum_n \sum_m \int_r \int_\delta \int_\lambda \frac{1}{m_\xi^2} \left[X_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + X_{2.n.m}(r) \sin m\lambda \right]^2 \times$$

$$\times \, \bar{P}_{n.m}^2 (\cos \delta) \, r^2 \sin \delta \, dr \, d\delta \, d\lambda \, .$$

Mit (7) ergibt sich

$$(122) \quad \Sigma_1 = 4\pi \sum_n \sum_m \int_{r=R_u}^{R_o} \frac{X_{1.n.m}^2 + X_{2.n.m}^2}{m_\xi^2} \, r^2 \, dr \, .$$

In den oberen Schichten der Erde wird mit wachsender Tiefe die Scherfestigkeit des Materials abnehmen. Um diesen Sachverhalt zu berücksichtigen, soll ein vom Radius abhängiger Wert für m_ξ eingeführt werden. Es wird gesetzt

$$(123) \quad \frac{1}{m_\xi^2} = \frac{1}{m_o^2} (1 + \nu_2 \, t^2) \, ;$$

t ist wieder die Tiefe im Erdinneren, $t = R_o - r$, $0 \leqq t \leqq D$. m_o und ν_2 sind konstante Parameter. Aus (122) und (123) folgt

$$(124) \quad \Sigma_1 = 4\pi \frac{1}{m_o^2} \sum_n \sum_m \int_{r=R_u}^{R_o} \left[X_{1.n.m}^2(r) + X_{2.n.m}^2(r) \right] (1 + \nu_2 \, t^2) \, r^2 \, dr \, .$$

Geeignete numerische Werte für die Parameter m_o und ν_2 ergeben sich aus statistischen Abschätzungen. m_ξ wird an der Erdoberfläche etwa zwei- bis dreimal so groß sein wie in einer Tiefe von 300 km [3].

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Das Integral Σ_2 wird in entsprechender Weise umgeformt. Zunächst wird mit (111) η durch σ_y ausgedrückt, man findet dann für den quadratischen Mittelwert der Dichte der Flächenbelegung σ_y

$$(125) \qquad m_y^2 = \frac{1}{W_{\bar{\omega}}} \iint_{\bar{\omega}} \sigma_y^2 \, d\bar{\omega} .$$

Mit (118) und (125) wird aus (117)

$$(126) \qquad \Sigma_2 = \frac{T_y}{m_y^2} \iint_{\bar{\omega}} \sigma_y^2 \, d\bar{\omega} .$$

Substituiert man (17), dann ergibt sich

$$(127) \qquad \Sigma_2 = 4\pi R_o^2 T_y \frac{1}{m_y^2} \sum_n \sum_m [Y_{1.n.m}^2 + Y_{2.n.m}^2] .$$

Man kann die Abnahme der Beträge der Dichteanomalien mit wachsender Tiefe auch durch die Einführung dieser Flächenbelegung σ_y berücksichtigen. Dann wird man in (123) den Parameter ν_2 gleich Null setzen und m_y z.B. so wählen, daß $1/m_o^2$ in (123) etwa das Vierfache oder das Neunfache von $1/m_\eta^2 = 1/m_y^2 \, (T_y)^2$ ist. Gegebenenfalls kann man beide Ansätze für die Dichteanomalien kombinieren und neben den ξ-Werten mit dem vollen Ausdruck (123) für ihre Streuung, also unter Einschluß von ν_2, zusätzlich noch die Flächenbelegung σ_y mit einem geeigneten Wert m_y für ihre Streuung einführen. Bei den weiteren Ableitungen soll von dieser letzten allgemeineren Variante ausgegangen werden.

Mit den Gleichungen (124) und (127) sind die Teilsummen Σ_1 und Σ_2 nach den unbekannten Funktionen $X_{1.n.m}(r)$ und $X_{2.n.m}(r)$ und den unbekannten Parametern $Y_{1.n.m}$ und $Y_{2.n.m}$ entwickelt. Die genannten Funktionen lassen sich durch die unbekannten Parameter $X_{1.n.m.i}$ und $X_{2.n.m.i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \tau)$ darstellen.

Nunmehr kann das Minimum der Funktion Σ_1 nach (112) unter Beachtung der Nebenbedingungen (101) - (104) und (107)- (110) ermittelt werden. Dazu werden die folgenden LAGRANGEschen Multiplikatoren eingeführt:

$$(128) \qquad K_{p.n.m.\beta} ;$$

$$p = 1, 2; \quad n = 2, 3, 4, \ldots; \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n ; \quad \beta = 1, 2, 3, 4 .$$

Es ist also das Minimum des folgenden Ausdrucks zu ermitteln:

$$(129) \qquad \Gamma = \Sigma + \sum_p \sum_n \sum_m \sum_\beta K_{p.n.m.\beta} \, \Omega_{p.n.m.\beta} \longrightarrow \text{Minimum} .$$

Man erhält dieses Minimum, indem man den Ausdruck Γ nach den Unbekannten $X_{1.n.m.i}$, $X_{2.n.m.i}$; $Y_{1.n.m}$, $Y_{2.n.m}$; ξ differenziert und die erhaltenen Ableitungen gleich Null setzt:

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(130)\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial X_{1.n.m.i}} = 0 ,$$

$$(131)\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial X_{2.n.m.i}} = 0 ;$$

$$(132)\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial Y_{1.n.m}} = 0 ,$$

$$(133)\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 ;$$

$$(134)\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = 0 .$$

Die Gleichung (130) zergliedert sich in die folgenden Teile:

$$(135)\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial X_{1.n.m.i}} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial X_{1.n.m.i}} + \frac{\partial \Sigma_2}{\partial X_{1.n.m.i}} + \sum_p \sum_n \sum_m \sum_\beta K_{p.n.m.\beta} \frac{\partial}{\partial X_{1.n.m.i}} \Omega_{p.n.m.\beta} = 0 .$$

Analoge Beziehungen gelten für die Gleichungen (131) - (134).

Zunächst soll die Gleichung (135) betrachtet werden. Mit (124) folgt

$$(136)\quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial X_{1.n.m.k}} = 4\pi \frac{1}{m_o^2} \sum_n \sum_m \int_{r=R_u}^{R_o} 2\, X_{1.n.m}(r) \frac{\partial X_{1.n.m}(r)}{\partial X_{1.n.m.k}} (1 + \nu_2\, t^2)\, r^2\, dr ;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \tau .$$

Mit (47) folgt

$$(137)\quad X_{1.n.m}(r) \frac{\partial X_{1.n.m}(r)}{\partial X_{1.n.m.k}} = \sum_i X_{1.n.m.i}\, t^{i+k} ; \qquad i, k = 0, 1, 2, \ldots, \tau .$$

Mit den Substitutionen

$$r = R_o - t = R_o \left(1 - \frac{t}{R_o}\right) ,$$

$$dr = -dt ,$$

$$r^2 = R_o^2 \left(1 - \frac{t}{R_o}\right)^2 = R_o^2 \left(1 - 2\frac{t}{R_o} + \frac{t^2}{R_o^2}\right)$$

erhält man

$$(138)\quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial X_{1.n.m.k}} = 8\pi\, R_o^2 \frac{1}{m_o^2} \int_{t=0}^{D} \sum_i X_{1.n.m.i} \left[t^{i+k} - 2\frac{t^{i+k+1}}{R_o} + \frac{t^{i+k+2}}{R_o^2} \right] (1 + \nu_2\, t^2)\, dt ,$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(139)\quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial X_{1.n.m.k}} = 8\pi R_o^2 \frac{1}{m_o^2} \int\limits_{t=o}^{D} \sum_i X_{1.n.m.i} \left[t^{i+k} - 2\frac{t^{i+k+1}}{R_o} + \frac{t^{i+k+2}}{R_o^2} \right] dt + $$

$$ + 8\pi R_o^2 \frac{\nu_2}{m_o^2} \int\limits_{t=o}^{D} \sum_i X_{1.n.m.i} \left[t^{i+k+2} - 2\frac{t^{i+k+3}}{R_o} + \frac{t^{i+k+4}}{R_o^2} \right] dt.$$

Wir führen die Funktion $\gamma_5(i, k)$ ein $(i, k = 0, 1, 2, \ldots, \tau)$:

$$(140)\quad \gamma_5(i, k) = \int\limits_{t=o}^{D} \left[t^{i+k} - 2\frac{t^{i+k+1}}{R_o} + \frac{t^{i+k+2}}{R_o^2} \right] dt = \frac{1}{i+k+1} D^{i+k+1} - $$

$$ - \frac{2}{i+k+2} \frac{D^{i+k+2}}{R_o} + \frac{1}{i+k+3} \frac{D^{i+k+3}}{R_o^2} ;$$

$$(141)\quad \gamma_5(i, k) = \frac{1}{i+k+1} D^{i+k+1} \left[1 - 2\frac{i+k+1}{i+k+2}\frac{D}{R_o} + \frac{i+k+1}{i+k+3}\left(\frac{D}{R_o}\right)^2 \right] ;$$

$$ i, k = 0, 1, 2, \ldots, \tau .$$

Mit (139) - (141) folgt

$$(142)\quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial X_{1.n.m.k}} = 8\pi R_o^2 \frac{1}{m_o^2} \sum_i X_{1.n.m.i} \left[\gamma_5(i, k) + \nu_2\, \gamma_5(i, k+2) \right] .$$

Man leitet weiter ab

$$(143)\quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial X_{1.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(144)\quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.1}}{\partial X_{1.n.m.k}} = \gamma_1(n, k) ,$$

$$(145)\quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.1}}{\partial X_{1.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(146)\quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.2}}{\partial X_{1.n.m.k}} = \gamma_2(n, k) ,$$

$$(147)\quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.2}}{\partial X_{1.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(148)\quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.3}}{\partial X_{1.n.m.k}} = D^k ,$$

$$(149)\quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.3}}{\partial X_{1.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(150)\quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.4}}{\partial X_{1.n.m.k}} = k\, D^{k-1} ,$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(151) \quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.4}}{\partial X_{1.n.m.k}} = 0 .$$

Für die Ableitungen nach $X_{2.n.m.k}$ folgt

$$(152) \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial X_{2.n.m.k}} = 8 \pi R_o^2 \frac{1}{m_o^2} \sum_i X_{2.n.m.i} [\gamma_5(i, k) + \nu_2 \gamma_5(i, k + 2)] ,$$

$$(153) \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial X_{2.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(154) \quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.1}}{\partial X_{2.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(155) \quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.1}}{\partial X_{2.n.m.k}} = \gamma_1(n, k) ,$$

$$(156) \quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.2}}{\partial X_{2.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(157) \quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.2}}{\partial X_{2.n.m.k}} = \gamma_2(n, k) ,$$

$$(158) \quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.3}}{\partial X_{2.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(159) \quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.3}}{\partial X_{2.n.m.k}} = D^k ,$$

$$(160) \quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.4}}{\partial X_{2.n.m.k}} = 0 ,$$

$$(161) \quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.4}}{\partial X_{2.n.m.k}} = k D^{k-1} .$$

Die Ableitung der Ausdrücke Σ_1, Σ_2 und $\Omega_{p.n.m.\beta}$ nach den Parametern der unbekannten Flächenbelegung $Y_{1.n.m}$ und $Y_{2.n.m}$ gestaltet sich analog:

$$(162) \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial Y_{1.n.m}} = 0 ,$$

$$(163) \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial Y_{1.n.m}} = 8 \pi R_o^2 T_y \frac{1}{m_y^2} Y_{1.n.m} ,$$

$$(164) \quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.1}}{\partial Y_{1.n.m}} = 1 ,$$

$$(165) \quad \frac{\partial \Omega_{2.n.m.1}}{\partial Y_{1.n.m}} = 0 ,$$

$$(166) \quad \frac{\partial \Omega_{1.n.m.2}}{\partial Y_{1.n.m}} = 1 ,$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

(167) $$\frac{\partial \Omega_{2.n.m.2}}{\partial Y_{1.n.m}} = 0 \,,$$

(168) $$\frac{\partial \Omega_{1.n.m.3}}{\partial Y_{1.n.m}} = 0 \,,$$

(169) $$\frac{\partial \Omega_{2.n.m.3}}{\partial Y_{1.n.m}} = 0 \,,$$

(170) $$\frac{\partial \Omega_{1.n.m.4}}{\partial Y_{1.n.m}} = 0,$$

(171) $$\frac{\partial \Omega_{2.n.m.4}}{\partial Y_{1.n.m}} = 0 \,;$$

(172) $$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 \,,$$

(173) $$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial Y_{2.n.m}} = 8 \pi R_o^2 T_y \frac{1}{m_y^2} Y_{2.n.m} \,,$$

(174) $$\frac{\partial \Omega_{1.n.m.1}}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 \,,$$

(175) $$\frac{\partial \Omega_{2.n.m.1}}{\partial Y_{2.n.m}} = 1 \,,$$

(176) $$\frac{\partial \Omega_{1.n.m.2}}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 \,,$$

(177) $$\frac{\partial \Omega_{2.n.m.2}}{\partial Y_{2.n.m}} = 1 \,,$$

(178) $$\frac{\partial \Omega_{1.n.m.3}}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 \,,$$

(179) $$\frac{\partial \Omega_{2.n.m.3}}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 \,,$$

(180) $$\frac{\partial \Omega_{1.n.m.4}}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 \,,$$

(181) $$\frac{\partial \Omega_{2.n.m.4}}{\partial Y_{2.n.m}} = 0 \,.$$

Schließlich sind noch die Ableitungen nach dem Parameter der Überkompensation, ξ, zu bilden:

(182) $$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \xi} \quad 0 \,,$$

(183) $$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial \xi} = 0 \,,$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

(184) $$\frac{\partial\Omega_{1.n.m.1}}{\partial\xi} = -\rho^o A_{1.n.m} ,$$

(185) $$\frac{\partial\Omega_{2.n.m.1}}{\partial\xi} = -\rho^o A_{2.n.m} ,$$

(186) $$\frac{\partial\Omega_{1.n.m.2}}{\partial\xi} = -\rho^o A_{1.n.m} ,$$

(187) $$\frac{\partial\Omega_{2.n.m.2}}{\partial\xi} = -\rho^o A_{2.n.m} ,$$

(188) $$\frac{\partial\Omega_{1.n.m.3}}{\partial\xi} = 0 ,$$

(189) $$\frac{\partial\Omega_{2.n.m.3}}{\partial\xi} = 0 ,$$

(190) $$\frac{\partial\Omega_{1.n.m.4}}{\partial\xi} = 0 ,$$

(191) $$\frac{\partial\Omega_{2.n.m.4}}{\partial\xi} = 0 .$$

Mit den Beziehungen (135) - (191) entwickeln sich die Gleichungen (130) - (134) folgendermaßen:

(192) $$8\pi R_o^2 \frac{1}{m_o^2} \sum_i X_{1.n.m.i} [\gamma_5(i, k) + \nu_2 \gamma_5(i, k+2)] + K_{1.n.m.1} \gamma_1(n, k) + K_{1.n.m.2} \gamma_2(n, k) + K_{1.n.m.3} D^k + K_{1.n.m.4} k D^{k-1} = 0 ,$$

(193) $$8\pi R_o^2 \frac{1}{m_o^2} \sum_i X_{2.n.m.i} [\gamma_5(i, k) + \nu_2 \gamma_5(i, k+2)] + K_{2.n.m.1} \gamma_1(n, k) + K_{2.n.m.2} \gamma_2(n, k) + K_{2.n.m.3} D^k + K_{2.n.m.4} k D^{k-1} = 0,$$

(194) $$8\pi R_o^2 T_y \frac{1}{m_y^2} Y_{1.n.m} + K_{1.n.m.1} + K_{1.n.m.2} = 0 ,$$

(195) $$8\pi R_o^2 T_y \frac{1}{m_y^2} Y_{2.n.m} + K_{2.n.m.1} + K_{2.n.m.2} = 0 ,$$

(196) $$K_{1.n.m.1} A_{1.n.m} + K_{2.n.m.1} A_{2.n.m} + K_{1.n.m.2} A_{1.n.m} + K_{2.n.m.2} A_{2.n.m} = 0 ;$$

$$n = 1, 2, \ldots; \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots, \tau .$$

Die Gleichungen (101) - (104), (107) - (110), (192) - (196) bilden das lineare System zur Bestimmung der Unbekannten $X_{1.n.m.i}$, $X_{2.n.m.i}$; $Y_{1.n.m}$, $Y_{2.n.m}$; ξ ; $K_{p.n.m.\beta}$ ($p = 1, 2$; $\beta = 1, 2, 3, 4$).

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Insgesamt ist also die Anzahl der vorliegenden Unbekannten für ein bestimmtes Wertepaar (n, m) gleich $2\tau + 13$ und entspricht der Anzahl der genannten Gleichungen. Die Eindeutigkeit der Bestimmung der Unbekannten ist daher gegeben; von einer Singularität der Koeffizientendeterminante soll abgesehen werden.

Die Unbekannte ξ soll noch gesondert betrachtet werden. Verzichtet man auf ihre Bestimmung und setzt sie gleich Null, dann entfällt die Gleichung (196). In den übrig bleibenden einzelnen Bestimmungsgleichungen treten dann jeweils entweder nur die Unbekannten $X_{1.n.m.i}$, $Y_{1.n.m}$ oder nur $X_{2.n.m.i}$, $Y_{2.n.m}$ auf. Das System von $2\tau + 12$ Unbekannten zerfällt in zwei unabhängige Systeme mit jeweils $\tau + 6$ Unbekannten. Damit sind Erleichterungen bei der numerischen Auflösung dieses Systems verbunden. Das eine Teilsystem besteht aus den Gleichungen (101), (103), (107), (109), (192), (194), das andere umfaßt die Gleichungen (102), (104), (108), (110), (193), (195).

Bei praktischen Berechnungen wird man aber nicht nur eine einzige Kugelfunktion $\overline{P}_{n.m}$, also ein einziges bestimmtes Wertepaar (n, m) einführen, sondern man wird alle Kugelfunktionen etwa bis zur 4. oder 7. oder 10. Ordnung berücksichtigen.

Nimmt man alle Kugelfunktionen von der 1. Ordnung bis zur Ordnung n^* mit, so ist die Anzahl der Glieder, die zu einer einzelnen Ordnung, z.B. der n-ten Ordnung, gehören, gleich $2n + 1$. Die Gesamtheit der Glieder dieser Entwicklung, die alle Ordnungen von $n = 1$ bis $n = n^*$ umfaßt, beträgt $s = n^* (n^* + 2)$. In dem Fall, daß $n^* = 10$ ist, gilt $s = 120$.

Für jedes einzelne Glied dieser Entwicklung fallen $\tau + 6$ Unbekannte an. Hinzu tritt noch die Unbekannte ξ. Die Anzahl der im gesamten System auftretenden Unbekannten ist somit gleich $(\tau + 6)\, s + 1$. Bei $\tau = 4$ und $n^* = 10$ hat man 1201 Unbekannte. Die Unbekannte ξ erscheint in diesem System von 1201 Unbekannten in allen Teilsystemen, deren Anzahl gleich $s = 120$ ist. Berücksichtigt man also den Parameter der Überkompensation, ξ, dann muß das gesamte System mit $(\tau + 6)\, s + 1$ Unbekannten als ein einziges in einem Rechengang aufgelöst werden, und es zerfällt nicht in Teilsysteme mit jeweils $\tau + 6$ Unbekannten.

Führt man aber den Parameter ξ als gegebene Größe ein, dann hat man rechentechnische Vorteile. Das gesamte System von $(\tau + 6)\, s + 1$ Unbekannten zerfällt in Teilsysteme mit jeweils nur $\tau + 6$ Unbekannten. Die Anzahl der Teilsysteme ist gleich s. Den optimalen Wert von ξ kann man dann dadurch ermitteln, daß man die s Teilsysteme für verschiedene plausible Werte des Parameters ξ auflöst. Man wird sich dann für die Variante entscheiden, bei der im Zuge dieses Optimierungsverfahrens die Summe der Quadrate der Restfehler, also die Summe Σ, ein Minimum wird.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

6. Näherungsformel für die Spannungsunterschiede

Der vorstehend entwickelte Formelapparat gestattet die Bestimmung der Dichteanomalien innerhalb des Volumens der Kugelschale ε. Dabei wurden die elastischen Eigenschaften der Kugelschale außer acht gelassen. Weil die Dichteanomalien relativ klein sind und nur bis zur Tiefe D auftreten, die relativ zum Erdradius klein ist, wird die elastische Deformation der Kugelschale klein sein. In Wirklichkeit bestehen auch die oberen Erdschichten aus elastischem Material. Will man die durch die Dichteanomalien verursachten Spannungsunterschiede berechnen, dann kann man nicht mehr von einem starren Körper ausgehen, sondern muß elastische Deformationen der Kugelschale ε zulassen und zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften die LAMÉschen Parameter $\lambda = \lambda(r)$ und $\mu = \mu(r)$ einführen. Aus den Deformationen und den elastischen Parametern lassen sich die Spannungsunterschiede berechnen. Die Ermittlung dieser Spannungsunterschiede aus den Dichteanomalien und den elastischen Parametern erfordert einen nicht unbeträchtlichen rechnerischen Aufwand. Die dazu benötigten theoretischen Entwicklungen sollen in den folgenden Kapiteln dargestellt werden.

Für den gleichen Zweck gibt es aber eine relativ einfach zu handhabende Näherungsformel von H. JEFFREYS [13]. Man geht dabei von dem Druck aus, den eine über dem Aufpunkt ruhende Last auf diesen ausübt. Variiert diese Last für Aufpunkte mit konstanter Tiefe t, also längs einer Kugelfläche mit dem Radius $R_o - t = r = \text{const}$, um den Betrag Λ, dann haben die Spannungsunterschiede in dieser Tiefe t etwa den Betrag $1/3\,\Lambda$ bis $1/2\,\Lambda$. Man wählt meistens den letzteren Wert, $1/2\,\Lambda$ [11]. Im vorliegenden Fall ermittelt sich die Last Λ aus den Dichteanomalien ξ, den Flächenbelegungen σ_a, σ_b, σ_y und der Schwere g oberhalb der Tiefe t. Der Anteil der ξ-Werte an der Last Λ ist

$$\int_{r=R_o-t}^{R_o} g\xi \, dr \cong G\,\bar{\xi}\,t \, .$$

Hier ist G ein Mittelwert der Schwere an der Erdoberfläche und $\bar{\xi}$ der Mittelwert der Dichteanomalien zwischen der Erdoberfläche, $r = R_o$, und der Tiefe t:

$$(197) \qquad \bar{\xi} = \frac{1}{t}\int_0^t \xi \, d\tau \, .$$

Der Anteil der topographischen Massen und ihrer Kompensation ist

$$G\,(\sigma_a + \sigma_b) = -G\,\sigma_a\,\zeta \, .$$

Die Berücksichtigung der Flächenbelegung σ_y gestaltet sich entsprechend. Man findet $G\,\sigma_y$. Die gesamte Last ist gleich

$$(198) \qquad \Lambda = G\,(\bar{\xi}\,t - \sigma_a\,\zeta + \sigma_y) \, .$$

Für die Spannungsunterschiede ergibt sich daher genähert

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

(199) $\frac{1}{2}\,G\,(\bar{\xi}\,t - \sigma_a \zeta + \sigma_y)\,.$

Bemerkenswert ist, daß Formel (199) nicht die elastischen Parameter λ und μ enthält. Ferner werden keine Daten über die elastischen Deformationen, also über die Punktverschiebungen, benötigt.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

7. Elastisches Modell

Die Erde und damit auch die Kugelschale ε werden nunmehr als ein elastischer Körper aufgefaßt. Vor dem Auftreten von Dichteanomalien ist die gesamte Erde hydrostatisch geschichtet. Die äußeren Schichten bis zur Tiefe D und auch die tieferen Schichten haben in Strenge eine sphärische Gestalt, die Schichtung verläuft entlang von konzentrischen Kugeln. Durch die Dichteanomalien im Bereich der Kugelschale ε, $R_u \leqq r \leqq R_o$, sollen nur in diesem Gebiet elastische Spannungen und elastische Punktverschiebungen auftreten.

Die Punktverschiebungen werden mit u, v, w bezeichnet. Die Komponente u verläuft in radialer Richtung, positiv nach außen; die Komponenten v und w sind horizontal, der Vektor mit dem Betrag v ist von Norden nach Süden gerichtet, der mit dem Betrag w von Westen nach Osten. Sind die Vektoren $\underline{\underline{e}}_r$, $\underline{\underline{e}}_\delta$, $\underline{\underline{e}}_\lambda$ die Einheitsvektoren in den positiven Richtungen der Parameterlinien der räumlichen Polarkoordinaten r, δ, λ, dann ergibt sich der Vektor $\underline{\underline{u}}$ der elastischen Punktverschiebung folgendermaßen:

$$\underline{\underline{u}} = u\,\underline{\underline{e}}_r + v\,\underline{\underline{e}}_\delta + w\,\underline{\underline{e}}_\lambda \, . \tag{200}$$

Unterhalb der Tiefe D gilt

$$u = v = w = 0 \, , \qquad r \leqq R_u \, . \tag{201}$$

Durch die elastischen Punktverschiebungen im Bereich ε ändert sich die Dichte in einem Punkt, der im Raume fest ist, um zwei Beträge. Die radiale Verschiebung des Massenelementes bewirkt eine Änderung der Dichte um $-u\,(d\varrho_1/dr)$, die Ausdehnung des Volumenelements hat eine Abnahme der Dichte um den Betrag $-\varrho_1\Delta$ zur Folge; hier ist ϱ_1 die Dichte der Standarderde und Δ die Volumendilatation, also die relative Änderung des Volumenelements. Δ ist bei Volumenvergrößerung positiv. Der gesamte Anteil der elastischen Punktverschiebungen an der Dichteänderung ist daher

$$\varrho_2 = -\varrho_1\Delta - u\,\frac{d\varrho_1}{dr} \, . \tag{202}$$

Hinzu tritt noch die Dichteänderung ϱ_3 auf Grund von Unterschiedlichkeiten der chemischen Eigenschaften des Materials; dieser Anteil ist von den Punktverschiebungen unabhängig. Es folgt

$$\xi = \varrho_2 + \varrho_3 \, . \tag{203}$$

Die Dichte der deformierten Erde, ϱ, setzt sich zusammen aus der Dichte der Standarderde, ϱ_1, und den Dichteanomalien ξ :

$$\varrho = \varrho_1 + \xi \, ; \tag{204}$$

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_3 - \varrho_1\Delta - u\,\frac{d\varrho_1}{dr} \, . \tag{205}$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Während am Unterrand, $r = R_u$, kein Dichtesprung vorhanden ist und somit eine Deformation der Kugelschale ε dort keine gravimetrische Wirkung nach sich zieht, tritt an der äußeren Begrenzung, $r = R_o$, eine Diskontinuität der Dichte und damit ein Gravitationseffekt auf.

Die radiale Punktverschiebung an der Erdoberfläche ist

$$(u)_{r=R_o} = u_o$$

und die Dichte ϱ_1 der Standarderde an der Erdoberfläche

$$(\varrho_1)_{r=R_o} = \varrho_{1.o} \; . \tag{206}$$

Die an der Erdoberfläche verteilte Flächenbelegung σ_y, die mit den Rechenvorschriften der vorstehenden Kapitel ermittelt wurde, kann daher in zwei Teile zergliedert werden. Der erste Anteil, $\sigma_{y.1}$, wird durch die elastische Deformation der Erde an ihrer Oberfläche hervorgerufen:

$$\sigma_{y.1} = \varrho_{1.o}\, u_o \; . \tag{207}$$

Der restliche Betrag $\sigma_{y.2}$ ist die eigentliche an der Erdoberfläche verteilte zusätzliche Flächenbelegung, deren Masse additiv zur Masse der oberen Schichten der Standarderde hinzukommt und damit eine zusätzliche Druckbelastung auf die tieferen Bereiche ausübt:

$$\sigma_{y.2} = \sigma_y - \sigma_{y.1} = \sigma_y - \varrho_{1.o}\, u_o \; . \tag{208}$$

Für die Punktverschiebungen u, v, w werden analytische Entwicklungen in Abhängigkeit von den räumlichen Polarkoordinaten r, δ, λ eingeführt. Es werden zwei spezielle Typen von Punktverschiebungen, der sphäroidale und der torsionale Typ, betrachtet; dadurch gewinnt man, wie sich im Laufe der Deduktionen zeigen wird, den Vorteil, nicht drei Funktionen für die drei Punktverschiebungen u, v, w einführen zu müssen, sondern statt dessen nur zwei unabhängige Funktionen.

Der Ansatz für den sphärischen Typ lautet (vgl. [1])

$$u_s = \sum_n \sum_m \left[U_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + U_{2.n.m}(r) \sin m\lambda \right] \bar{P}_{n.m} (\cos\delta) \; , \tag{209}$$

$$v_s = \sum_n \sum_m \left[V_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + V_{2.n.m}(r) \sin m\lambda \right] \frac{\partial \bar{P}_{n.m} (\cos\delta)}{\partial \delta} \; , \tag{210}$$

$$w_s = \sum_n \sum_m \frac{1}{\sin\delta} \bar{P}_{n.m} (\cos\delta) \frac{\partial}{\partial\lambda} \left[V_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + V_{2.n.m}(r) \sin m\lambda \right] . \tag{211}$$

Für w_s gilt auch

$$w_s = \sum_n \sum_m \frac{m}{\sin\delta} \left[-V_{1.n.m}(r) \sin m\lambda + V_{2.n.m}(r) \cos m\lambda \right] \bar{P}_{n.m} (\cos\delta) \; . \tag{212}$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Beim sphäroidalen Typ verschwindet die radiale Komponente der Rotation des Verschiebungsvektors:

(213) $\quad (\text{rot}\ \underline{\underline{u}}_s)\ \underline{\underline{e}}_r = 0 .$

Für die Gleichungen (209) - (211) kann man auch abkürzend schreiben

(214) $\quad u_s = \sum_n U_n(r)\ S_n(\delta, \lambda) ,$

(215) $\quad v_s = \sum_n V_n(r) \frac{\partial}{\partial \delta} S_n(\delta, \lambda) ,$

(216) $\quad w_s = \sum_n V_n(r) \frac{1}{\sin\delta} \frac{\partial}{\partial \lambda} S_n(\delta, \lambda) .$

Hier steht $S_n(\delta, \lambda)$ für die beiden Ausdrücke

(217) $\quad S_n(\delta, \lambda) = \bar{P}_{n.m}\ (\cos\delta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} .$

Beim torsionalen Typ der Punktverschiebung $\underline{\underline{u}}_t$ verschwinden die Volumendilatation,

$$\Delta = 0 ,$$

und die radiale Komponente der Punktverschiebung,

(218) $\quad u_t = 0 .$

Die Punktverschiebungen erfolgen nur in horizontalen Richtungen; wegen der radialen Schichtung der Dichte tritt daher beim torsionalen Typ kein Gravitationseffekt auf, $\varrho_2 = 0$. Es gilt (s. [1])

(219) $\quad u_t = 0 ,$

(220) $\quad v_t = \sum_n \sum_m \frac{1}{\sin\delta} \bar{P}_{n.m}\ (\cos\delta) \frac{\partial}{\partial\lambda} [W_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + W_{2.n.m}(r) \sin m\lambda] ,$

(221) $\quad w_t = -\sum_n \sum_m [W_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + W_{2.n.m}(r) \sin m\lambda] \frac{\partial \bar{P}_{n.m}\ (\cos\delta)}{\partial\delta} .$

Für (220) kann man auch schreiben

(222) $\quad v_t = \sum_n \sum_m \frac{m}{\sin\delta} [-W_{1.n.m}(r) \sin m\lambda + W_{2.n.m}(r) \cos m\lambda]\ \bar{P}_{n.m}\ (\cos\delta) .$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

In abkürzender Schreibweise erhält man mit (217) für (219) - (221)

(223) $u_t = 0$,

(224) $v_t = W_n(r) \frac{1}{\sin\delta} \frac{\partial}{\partial\lambda} S_n(\delta, \lambda)$,

(225) $w_t = -W_n(r) \frac{\partial}{\partial\delta} S_n(\delta, \lambda)$.

Faßt man die sphäroidalen und die torsionalen Verschiebungskomponenten zusammen, dann folgt

(226) $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_s + \underline{\underline{u}}_t$;

(227) $u = \sum_n \sum_m \left[U_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + U_{2.n.m}(r) \sin m\lambda \right] \bar{P}_{n.m} (\cos\delta)$,

(228)
$$v = \sum_n \sum_m \left[\left\{ V_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + V_{2.n.m}(r) \sin m\lambda \right\} \frac{\partial \bar{P}_{n.m} (\cos\delta)}{\partial\delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{m}{\sin\delta} \left\{ -W_{1.n.m}(r) \sin m\lambda + W_{2.n.m}(r) \cos m\lambda \right\} \bar{P}_{n.m} (\cos\delta) \right] ,$$

(229)
$$w = \sum_n \sum_m \left[\frac{m}{\sin\delta} \left\{ -V_{1.n.m}(r) \sin m\lambda + V_{2.n.m}(r) \cos m\lambda \right\} \bar{P}_{n.m} (\cos\delta) - \right.$$
$$\left. - \left\{ W_{1.n.m}(r) \cos m\lambda + W_{2.n.m}(r) \sin m\lambda \right\} \frac{\partial \bar{P}_{n.m} (\cos\delta)}{\partial\delta} \right] .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

8. Grundgleichungen für das elastische Gleichgewicht

Bei der allgemeinen Formulierung der Beziehung für das Gleichgewicht der Elastomechanik wird eine Relation zwischen den inneren Kräften, die durch die elastische Verformung entstehen, und den Feldkräften hergestellt. Die Feldkräfte sind im vorliegenden Fall die Gravitationskräfte der Standarderde und die der Dichteanomalien in der Kugelschale ε, einschließlich der Gravitationskräfte der topographischen Massen und ihrer Kompensation. Weil es sich im vorliegenden Falle nicht um einen zeitlich veränderlichen Vorgang, sondern um eine statische Erscheinung handelt, sind die Komponenten u, v, w des Verschiebungsvektors $\underline{\underline{u}}$ als zeitlich konstante Größen zu betrachten. Dabei wird der Spannungstensor Θ der deformierten Erde benötigt:

$$(230) \quad \Theta = \begin{bmatrix} \bar{\vartheta}_{rr} & \bar{\vartheta}_{r\delta} & \bar{\vartheta}_{r\lambda} \\ \bar{\vartheta}_{r\delta} & \bar{\vartheta}_{\delta\delta} & \bar{\vartheta}_{\delta\lambda} \\ \bar{\vartheta}_{r\lambda} & \bar{\vartheta}_{\delta\lambda} & \bar{\vartheta}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix};$$

schreibt man ihn als Dyade, dann folgt

$$(231) \quad \Theta = \underline{\underline{e}}_r \underline{\underline{e}}_r \bar{\vartheta}_{rr} + \underline{\underline{e}}_r \underline{\underline{e}}_\delta \bar{\vartheta}_{r\delta} + \underline{\underline{e}}_r \underline{\underline{e}}_\lambda \bar{\vartheta}_{r\lambda} + \underline{\underline{e}}_\delta \underline{\underline{e}}_r \bar{\vartheta}_{r\delta} + \underline{\underline{e}}_\delta \underline{\underline{e}}_\delta \bar{\vartheta}_{\delta\delta} +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_\delta \underline{\underline{e}}_\lambda \bar{\vartheta}_{\delta\lambda} + \underline{\underline{e}}_\lambda \underline{\underline{e}}_r \bar{\vartheta}_{r\lambda} + \underline{\underline{e}}_\lambda \underline{\underline{e}}_\delta \bar{\vartheta}_{\delta\lambda} + \underline{\underline{e}}_\lambda \underline{\underline{e}}_\lambda \bar{\vartheta}_{\lambda\lambda} .$$

Ferner tritt der Gradient ∇ in seiner Darstellung durch räumliche Polarkoordinaten r, δ, λ auf:

$$(232) \quad \nabla = \underline{\underline{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{\underline{e}}_\delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \delta} + \underline{\underline{e}}_\lambda \frac{1}{r \sin \delta} \frac{\partial}{\partial \lambda} .$$

Der Vektor der Feldkräfte sei $\underline{\underline{d}}$. Er ist der Gradient der Gravitationspotentiale. Diese sind das Potential der sphärisch geschichteten Standarderde, $f(M_e/r)$, ferner die Potentiale A und B der topographischen Massen und ihrer Kompensation und die Potentiale X und Y der a priori unbekannten Dichteanomalien ξ und der Flächenbelegung σ_y. Es folgt

$$(233) \quad \underline{\underline{d}} = \nabla \left(f \frac{M_e}{r}\right) + \nabla (A + B + X + Y) .$$

Ist ϱ die Dichte der elastisch deformierten Kugelschale, dann gilt die folgende grundlegende Beziehung für das Gleichgewicht der Elastomechanik [20]:

$$(234) \quad \nabla \cdot \Theta + \varrho \underline{\underline{d}} = 0 .$$

Für Θ ist hier die Spannungsdyade gemäß (231) einzusetzen, diese ist skalar mit dem Gradienten zu multiplizieren.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Bevor die Gleichung (234) den Besonderheiten des hier behandelten elastischen Modells angepaßt wird, sollen einige allgemeine Entwicklungen über die Spannungsdyade und über ihre skalare Multiplikation mit dem Gradienten vorangestellt werden. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wird dabei die Spannungsdyade im räumlichen Polarkoordinatensystem wie folgt geschrieben:

$$(235) \qquad \Theta = \sum_i \sum_k \underline{\underline{e}}_i \, \underline{\underline{e}}_k \, p_{i.k}, \qquad p_{i.k} = p_{k.i}; \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Für den Gradienten gilt dann

$$(236) \qquad \nabla = \underline{\underline{e}}_1 \frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \underline{\underline{e}}_2 \frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \underline{\underline{e}}_3 \frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial u_3};$$

u_1, u_2, u_3 sind die sphärischen Polarkoordinaten ($u_1 = r$, $u_2 = \delta$, $u_3 = \lambda$) und g_1, g_2, g_3 die Elemente in der Hauptdiagonalen des Maßtensors dieses Orthogonalsystems:

$$(237) \qquad \| g_{i.k} \| = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix};$$

$$(238) \qquad g_1 = 1, \qquad g_2 = r, \qquad g_3 = r \sin\delta .$$

Der Verschiebungsvektor $\underline{\underline{u}}$ sei

$$(239) \qquad \underline{\underline{u}} = \sum_i \underline{\underline{e}}_i \, v_i .$$

Im weiteren werden die Ableitungen der Basisvektoren (Einheitsvektoren) $\underline{\underline{e}}_1$, $\underline{\underline{e}}_2$, $\underline{\underline{e}}_3$ in räumlichen sphärischen Polarkoordinaten benötigt. Dazu werden diese durch die Basisvektoren $\underline{\underline{i}}$, $\underline{\underline{j}}$, $\underline{\underline{k}}$ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten dargestellt [8]:

$$(240) \qquad \underline{\underline{e}}_1 = \sin\delta \cos\lambda \; \underline{\underline{i}} + \sin\delta \sin\lambda \; \underline{\underline{j}} + \cos\delta \; \underline{\underline{k}} ,$$

$$(241) \qquad \underline{\underline{e}}_2 = \cos\delta \cos\lambda \; \underline{\underline{i}} + \cos\delta \sin\lambda \; \underline{\underline{j}} - \sin\delta \; \underline{\underline{k}} ,$$

$$(242) \qquad \underline{\underline{e}}_3 = -\sin\delta \sin\lambda \; \underline{\underline{i}} + \sin\delta \cos\lambda \; \underline{\underline{j}} .$$

Durch Differentiation folgt

$$(243) \qquad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_1}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_1}{\partial u_2} = \underline{\underline{e}}_2, \qquad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_1}{\partial u_3} = \sin\delta \; \underline{\underline{e}}_3,$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{e}}_2}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_2}{\partial u_2} = -\underline{\underline{e}}_1, \qquad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_2}{\partial u_3} = \cos\delta \; \underline{\underline{e}}_3,$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{e}}_3}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_3}{\partial u_2} = 0, \qquad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_3}{\partial u_3} = -\sin\delta \; \underline{\underline{e}}_1 - \cos\delta \; \underline{\underline{e}}_2 .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Entwickelt man die Ableitungen der Basisvektoren $\underline{\underline{e}}_1$, $\underline{\underline{e}}_2$, $\underline{\underline{e}}_3$ nach den Elementen des allgemeinen Maßtensors $g_{i.k}$, dann erhält man (s. [20])

$$(244)\quad \frac{\partial \underline{\underline{e}}_1}{\partial u_1} = -(\underline{\underline{e}}_2 \frac{1}{g_2}\frac{\partial g_1}{\partial u_2} + \underline{\underline{e}}_3 \frac{1}{g_3}\frac{\partial g_1}{\partial u_3}) ,$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{e}}_2}{\partial u_2} = -(\underline{\underline{e}}_3 \frac{1}{g_3}\frac{\partial g_2}{\partial u_3} + \underline{\underline{e}}_1 \frac{1}{g_1}\frac{\partial g_2}{\partial u_1}) ,$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{e}}_3}{\partial u_3} = -(\underline{\underline{e}}_1 \frac{1}{g_1}\frac{\partial g_3}{\partial u_1} + \underline{\underline{e}}_2 \frac{1}{g_2}\frac{\partial g_3}{\partial u_2}) ;$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{e}}_i}{\partial u_k} = \underline{\underline{e}}_k \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_k}{\partial u_i} , \qquad i \neq k .$$

Aus (244) ergibt sich mit (238) wieder (243).

Vor dem Spannungstensor Θ sollen zunächst der Verzerrungstensor und die Verzerrungsdyade, Φ , behandelt und in räumlichen Polarkoordinaten dargestellt werden. Der Verzerrungstensor sei

$$(245)\quad \Phi = \| q_{i.k} \| , \qquad i, k = 1, 2, 3 ;$$

$$(246)\quad \Phi = \begin{vmatrix} q_{1.1} & q_{1.2} & q_{1.3} \\ q_{1.2} & q_{2.2} & q_{2.3} \\ q_{1.3} & q_{2.3} & q_{3.3} \end{vmatrix} .$$

Für die Verzerrungsdyade ergibt sich dann

$$(247)\quad \Phi = \sum_i \sum_k \underline{\underline{e}}_i \underline{\underline{e}}_k q_{i.k} , \qquad q_{i.k} = q_{k.i} .$$

Nun gilt per definitionem (vgl. [20])

$$(248)\quad \Phi = \frac{1}{2} [\nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}})^T] ,$$

wobei das hochgesetzte Zeichen T die Transposition bedeutet. Mit (236) und (239) folgt

$$(249)\quad \nabla \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{e}}_1 \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial u_1} + \underline{\underline{e}}_2 \frac{1}{g_2}\frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial u_2} + \underline{\underline{e}}_3 \frac{1}{g_3}\frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial u_3} .$$

Differenziert man entsprechend der Kettenregel, dann findet man die Dyade

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(250)\quad \nabla \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{e}}_1\,\underline{\underline{e}}_1\,\frac{\partial v_1}{\partial r} + \underline{\underline{e}}_1\,\underline{\underline{e}}_2\,\frac{\partial v_2}{\partial r} + \underline{\underline{e}}_1\,\underline{\underline{e}}_3\,\frac{\partial v_3}{\partial r} +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_2\,\underline{\underline{e}}_1\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \delta} - \frac{1}{r}v_2\right] + \underline{\underline{e}}_2\,\underline{\underline{e}}_2\left[\frac{1}{r}v_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \delta}\right] + \underline{\underline{e}}_2\,\underline{\underline{e}}_3\,\frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial \delta} +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_3\,\underline{\underline{e}}_1\left[\frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} - \frac{1}{r}v_3\right] + \underline{\underline{e}}_3\,\underline{\underline{e}}_2\left[\frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial v_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{r}\cot\delta\;\, v_3\right] +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_3\,\underline{\underline{e}}_3\left[\frac{1}{r}v_1 + \frac{1}{r}\cot\delta\;\, v_2 + \frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial v_3}{\partial \lambda}\right] .$$

Die Elemente der symmetrischen Verzerrungsdyade Φ nach (247) werden daher mit (248) und (250) gleich

$$(251)\quad \begin{aligned} q_{1.1} &= \frac{\partial v_1}{\partial r} ,\\ q_{1.2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \delta} - \frac{1}{r}v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial r}\right] ,\\ q_{1.3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} - \frac{1}{r}v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial r}\right] ,\\ q_{2.2} &= \frac{1}{r}v_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \delta} ,\\ q_{2.3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial v_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{r}\cot\delta\;\, v_3 + \frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial \delta}\right] ,\\ q_{3.3} &= \frac{1}{r}v_1 + \frac{1}{r}\cot\delta\;\, v_2 + \frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial v_3}{\partial \lambda} . \end{aligned}$$

Verbindet man den Gradienten und den Vektor der Punktverschiebung durch das skalare Produkt, dann folgt die Divergenz des Vektors $\underline{\underline{u}}$:

$$(252)\quad \nabla \underline{\underline{u}} = \operatorname{div} \underline{\underline{u}} = \Phi_1 = \Delta = \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{2}{r}v_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \delta} + \frac{1}{r}\cot\delta\;\, v_2 + \frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial v_3}{\partial \lambda} .$$

Die Divergenz ist gleich der Spur des Verzerrungstensors Φ aus (246) und gleich der Volumendilatation Δ ,

$$(253)\quad \operatorname{div} \underline{\underline{u}} = q_{1.1} + q_{2.2} + q_{3.3} ;$$

sie ist damit gleich der skalaren Invarianten erster Ordnung Φ_1 des Verzerrungstensors Φ . Die Invarianz bezieht sich auf Ähnlichkeitstransformationen dieser Matrix.

Aus dem Verzerrungstensor ergibt sich der Spannungstensor Θ gemäß (230), (235):

$$(254)\quad \Theta = 2\mu\Phi + \lambda\Phi_1\, I .$$

I ist der Einheitstensor, λ und μ sind die LAMÉschen Parameter für die elastischen Eigenschaften der Materie. Mit (235) und (247) folgt

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$
\begin{aligned}
(255)\qquad p_{1.1} &= 2\,\mu\, q_{1.1} + \lambda\,\Phi_1\,,\\
p_{2.2} &= 2\,\mu\, q_{2.2} + \lambda\,\Phi_1\,,\\
p_{3.3} &= 2\,\mu\, q_{3.3} + \lambda\,\Phi_1\,;\\
p_{1.2} &= 2\,\mu\, q_{1.2}\,,\\
p_{1.3} &= 2\,\mu\, q_{1.3}\,,\\
p_{2.3} &= 2\,\mu\, q_{2.3}\,.
\end{aligned}
$$

Mit den vorstehenden Gleichungen (251) und (255) sind die Elemente des Spannungstensors und der Spannungsdyade durch die Punktverschiebungen v_1, v_2, v_3 ausgedrückt.

Es gilt jetzt, das in Gleichung (234) benötigte skalare Produkt des Gradienten ∇ und der Spannungsdyade Θ abzuleiten. Mit (235) und (236) ergibt sich

$$
(256)\qquad \nabla\cdot\Theta = \frac{1}{g_1}\,\underline{\underline{e}}_1 \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\underline{\underline{e}}_i\,\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k}\right) + \frac{1}{g_2}\,\underline{\underline{e}}_2 \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\underline{\underline{e}}_i\,\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k}\right) + \frac{1}{g_3}\,\underline{\underline{e}}_3 \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\underline{\underline{e}}_i\,\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k}\right).
$$

Anstelle von (256) kann man setzen

$$
(257)\qquad \nabla\cdot\Theta = \sum_l \frac{1}{g_l}\,\underline{\underline{e}}_l \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\underline{\underline{e}}_i\,\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k}\right); \qquad i,\,k,\,l = 1,\,2,\,3.
$$

Für die Glieder mit dem Index $l = 1$ in Gleichung (257) erhält man im einzelnen folgende Entwicklung:

$$
\underline{\underline{e}}_1 \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\underline{\underline{e}}_i\,\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k}\right) = \sum_i \sum_k \left(\underline{\underline{e}}_1\,\frac{\partial \underline{\underline{e}}_i}{\partial u_1}\right)\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k} + \sum_i \sum_k \left(\underline{\underline{e}}_1\,\underline{\underline{e}}_i\right)\frac{\partial \underline{\underline{e}}_k}{\partial u_1}\cdot p_{i.k} + \sum_i \sum_k \left(\underline{\underline{e}}_1\,\underline{\underline{e}}_i\right)\underline{\underline{e}}_k\,\frac{\partial p_{i.k}}{\partial u_1}.
$$

Wegen (243) verschwinden die Ausdrücke $\partial \underline{\underline{e}}_i/\partial u_1$; damit sind das erste und das zweite Glied auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung gleich Null. Im dritten Glied muß man wegen der Orthogonalität der Basisvektoren $i = 1$ setzen. Es folgt

$$
(258)\qquad \underline{\underline{e}}_1 \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\underline{\underline{e}}_i\,\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k}\right) = \sum_k \underline{\underline{e}}_k\,\frac{\partial p_{1.k}}{\partial u_1} = \underline{\underline{e}}_1\,\frac{\partial p_{1.1}}{\partial u_1} + \underline{\underline{e}}_2\,\frac{\partial p_{1.2}}{\partial u_1} + \underline{\underline{e}}_3\,\frac{\partial p_{1.3}}{\partial u_1}.
$$

In analoger Weise leitet man die für die Indizes $l = 2$ und $l = 3$ gültigen anderen beiden Teile der rechten Seite der Gleichung (257) ab. Für $l = 2$ findet man

$$
\underline{\underline{e}}_2 \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\underline{\underline{e}}_i\,\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k}\right) = \sum_i \sum_k \left(\underline{\underline{e}}_2\,\frac{\partial \underline{\underline{e}}_i}{\partial u_2}\right)\underline{\underline{e}}_k\,p_{i.k} + \sum_i \sum_k \left(\underline{\underline{e}}_2\,\underline{\underline{e}}_i\right)\frac{\partial \underline{\underline{e}}_k}{\partial u_2}\,p_{i.k} + \sum_i \sum_k \left(\underline{\underline{e}}_2\,\underline{\underline{e}}_i\right)\underline{\underline{e}}_k\,\frac{\partial p_{i.k}}{\partial u_2}.
$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Nach Vergleich mit (243) erhält man daraus

$$(259)\quad \sum_k \underline{\underline{e}}_k\, p_{1.k} + \underline{\underline{e}}_2\, p_{2.1} - \underline{\underline{e}}_1\, p_{2.2} + \sum_k \underline{\underline{e}}_k \frac{\partial p_{2.k}}{\partial u_2} \,.$$

Für $l = 3$ gilt schließlich

$$\underline{\underline{e}}_3 \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial u_3} (\underline{\underline{e}}_i\, \underline{\underline{e}}_k\, p_{i.k}) = \sum_i \sum_k (\underline{\underline{e}}_3 \frac{\partial \underline{\underline{e}}_i}{\partial u_3})\, \underline{\underline{e}}_k\, p_{i.k} +$$

$$+ \sum_i \sum_k (\underline{\underline{e}}_3\, \underline{\underline{e}}_i)(\frac{\partial \underline{\underline{e}}_k}{\partial u_3} p_{i.k} + \underline{\underline{e}}_k \frac{\partial p_{i.k}}{\partial u_3}) \,.$$

Mit (243) entwickelt sich die rechte Seite folgendermaßen:

$$(260)\quad \sin\delta \sum_k \underline{\underline{e}}_k\, p_{1.k} + \cos\delta \sum_k \underline{\underline{e}}_k\, p_{2.k} + \sin\delta\ \underline{\underline{e}}_3\, p_{3.1} + \cos\delta\ \underline{\underline{e}}_3\, p_{3.2} -$$

$$- \sin\delta\ \underline{\underline{e}}_1\, p_{3.3} - \cos\delta\ \underline{\underline{e}}_2\, p_{3.3} + \sum_k \underline{\underline{e}}_k \frac{\partial p_{3.k}}{\partial u_3} \,.$$

Die Beziehungen (257) - (260) ergeben schließlich mit (238)

$$(261)\quad \nabla \cdot \Theta = \underline{\underline{e}}_1 \left[(p_{1.1})_1 + \frac{2}{r} p_{1.1} + \frac{1}{r} (p_{1.2})_2 + \frac{1}{r} \cot\delta\ p_{1.2} - \frac{1}{r} p_{2.2} - \frac{1}{r} p_{3.3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r \sin\delta} (p_{1.3})_3 \right] +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_2 \left[(p_{1.2})_1 + \frac{3}{r} p_{1.2} + \frac{1}{r} (p_{2.2})_2 + \frac{1}{r} \cot\delta\ p_{2.2} - \frac{1}{r} \cot\delta\ p_{3.3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r \sin\delta} (p_{2.3})_3 \right] +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_3 \left[(p_{1.3})_1 + \frac{3}{r} p_{1.3} + \frac{1}{r} (p_{2.3})_2 + \frac{2}{r} \cot\delta\ p_{2.3} + \frac{1}{r \sin\delta} (p_{3.3})_3 \right] .$$

Bezeichnet man die Elemente des Spannungstensors wieder mit denselben Symbolen wie in Gleichung (230) und setzt man für die räumlichen Polarkoordinaten wieder r, δ, λ, dann gilt mit (261) (s. [18])

$$(262)\quad \nabla \cdot \Theta = \underline{\underline{e}}_r \left[\frac{\partial \bar{\vartheta}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\vartheta}_{r\delta}}{\partial \delta} + \frac{1}{r \sin\delta} \frac{\partial \bar{\vartheta}_{r\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} (2\, \bar{\vartheta}_{rr} - \bar{\vartheta}_{\delta\delta} - \bar{\vartheta}_{\lambda\lambda} + \right.$$

$$\left. + \cot\delta\ \bar{\vartheta}_{r\delta}) \right] +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_\delta \left[\frac{\partial \bar{\vartheta}_{r\delta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\delta\delta}}{\partial \delta} + \frac{1}{r \sin\delta} \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\delta\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \left\{ 3\, \bar{\vartheta}_{r\delta} + \cot\delta\ (\bar{\vartheta}_{\delta\delta} - \bar{\vartheta}_{\lambda\lambda}) \right\} \right] +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_\lambda \left[\frac{\partial \bar{\vartheta}_{r\lambda}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\delta\lambda}}{\partial \delta} + \frac{1}{r \sin\delta} \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\lambda\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} (3\, \bar{\vartheta}_{r\lambda} + 2 \cot\delta\ \bar{\vartheta}_{\delta\lambda}) \right] .$$

Mit (255) werden die Elemente des Spannungstensors Θ durch die des Verzerrungstensors Φ ausgedrückt:

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(263)\quad \nabla\cdot\Theta = \underline{\underline{e}}_r \left[\frac{\partial}{\partial r}(2\mu\ q_{1.1} + \lambda\Phi_1) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial q_{1.2}}{\partial\vartheta} + \frac{2\mu}{r\sin\vartheta}\frac{\partial q_{1.3}}{\partial\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}(4\mu\ q_{1.1} - 2\mu\ q_{2.2} - 2\mu\ q_{3.3} + \cot\vartheta\ 2\mu\ q_{1.2})\right] +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_\vartheta \left[\frac{\partial}{\partial r}(2\mu\ q_{1.2}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(2\mu\ q_{2.2} + \lambda\Phi_1) + \frac{2\mu}{r\sin\vartheta}\frac{\partial q_{2.3}}{\partial\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\left\{6\mu\ q_{1.2} + \cot\vartheta\ 2\mu\ (q_{2.2} - q_{3.3})\right\}\right] +$$

$$+ \underline{\underline{e}}_\lambda \left[\frac{\partial}{\partial r}(2\mu\ q_{1.3}) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial q_{2.3}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\lambda}(2\mu\ q_{3.3} + \lambda\Phi_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}(6\mu\ q_{1.3} + 4\mu\ \cot\vartheta\ q_{2.3})\right] .$$

Weil der Vektor $\nabla\cdot\Theta$ durch die Verzerrung des elastischen Körpers ausgedrückt werden soll, müssen in (263) die Elemente $q_{i.k}$ durch die Gleichungen (251) substituiert werden. Zunächst empfiehlt es sich aber, in (251) die Verschiebungskomponenten v_1, v_2, v_3 durch die unbekannten Funktionen $U_{1.n.m}$, $U_{2.n.m}$, $V_{1.n.m}$, $V_{2.n.m}$, $W_{1.n.m}$, $W_{2.n.m}$ mittels der Gleichungen (227) - (229) zu ersetzen; dabei ist $u = v_1$, $v = v_2$, $w = v_3$. Die Beziehungen (251) für den Verzerrungstensor erhalten dann folgende Gestalt, wenn man noch in den Ausdrücken für u, v und w die abkürzende Bezeichnung einführt, die auch bei den Gleichungen (214) - (216) benutzt wurde:

$$(264)\quad q_{i.k} = \sum_n q_{n.i.k} ;$$

$$(265)\quad q_{n.1.1} = U_n'\ S_n ,$$

$$q_{n.2.2} = \frac{1}{r}U_n\ S_n - \frac{1}{r}V_n\ \cot\vartheta\ (S_n)_\vartheta - \frac{1}{r}V_n\left[n\ (n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] S_n +$$

$$+ \frac{1}{r}W_n\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[-\cot\vartheta\ S_n + (S_n)_\vartheta\right] ,$$

$$q_{n.3.3} = \left[\frac{1}{r}U_n - m^2\frac{1}{r}V_n\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right]S_n + \frac{1}{r}V_n\ \cot\vartheta\ (S_n)_\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{r}W_n\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\cot\vartheta\ S_n - (S_n)_\vartheta\right] ,$$

$$q_{n.1.2} = \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{r}U_n - \frac{1}{r}V_n + V_n'\right\}(S_n)_\vartheta + \left\{-\frac{1}{r\sin\vartheta}W_n + \frac{1}{\sin\vartheta}W_n'\right\}(S_n)_\lambda\right] ,$$

$$q_{n.1.3} = \frac{1}{2}\left[\left\{-\frac{1}{r}W_n + W_n'\right\}(S_n)_\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\left\{\frac{1}{r}U_n - \frac{1}{r}V_n + V_n'\right\}(S_n)_\lambda\right] ,$$

$$q_{n.2.3} = \frac{1}{2}\left[\left\{n\ (n+1) - 2\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right\}\frac{1}{r}W_n\ S_n + 2\frac{1}{r}\cot\vartheta\ W_n\ (S_n)_\vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{r}\frac{\cot\vartheta}{\sin\vartheta}V_n\ (S_n)_\lambda + 2\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\vartheta}V_n\ (S_n)_{\vartheta\lambda}\right] .$$

Bei der Ableitung der vorstehenden Gleichungen (265) wurde die Differentialgleichung der Kugelfunktionen verwendet:

$$(266)\quad (\bar{P}_{n.m})_{\vartheta\vartheta} + \cot\vartheta\ (\bar{P}_{n.m})_\vartheta + \left[n\ (n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]\bar{P}_{n.m} = 0 ;$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

ferner die Beziehung

$$(267) \qquad (S_n)_{\lambda\lambda} = \overline{P}_{n.m} \begin{Bmatrix} -m^2 \cos m\lambda \\ -m^2 \sin m\lambda \end{Bmatrix} = -m^2 S_n .$$

Substituiert man die Gleichungen (265) in den Relationen (255), dann erhält man die Elemente des Spannungstensors, der den Einfluß der Punktverschiebungen u, v, w auf den Spannungszustand beschreibt. Man wird bei der Betrachtung der Änderungen der Spannungen zu dem Tensor Ξ geführt:

$$(268) \qquad \Xi = \begin{bmatrix} \vartheta_{rr} & \vartheta_{r\delta} & \vartheta_{r\lambda} \\ \vartheta_{r\delta} & \vartheta_{\delta\delta} & \vartheta_{\delta\lambda} \\ \vartheta_{r\lambda} & \vartheta_{\delta\lambda} & \vartheta_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} .$$

Die Elemente des Tensors Ξ werden in Abhängigkeit von den Funktionen U, V, W wie folgt dargestellt:

$$(269) \qquad \vartheta_{rr} = \sum_n [\lambda \frac{2}{r} U_n + (2\mu + \lambda) U'_n - \lambda \frac{1}{r} n (n+1) V_n] S_n ,$$

$$\vartheta_{\delta\delta} = \sum_n [\{(\mu+\lambda) \frac{2}{r} U_n + \lambda U'_n - ((2\mu+\lambda) \frac{1}{r} n (n+1) - 2\mu \frac{1}{r} \frac{m^2}{\sin^2\delta}) V_n\} S_n - 2\mu \frac{1}{r} \cot\delta \; V_n (S_n)_\delta + 2\mu \frac{1}{r} \frac{1}{\sin\delta} W_n \frac{\partial}{\partial\lambda} \{-\cot\delta \; S_n + (S_n)_\delta\}] ,$$

$$\vartheta_{\lambda\lambda} = \sum_n [\{(\mu+\lambda) \frac{2}{r} U_n + \lambda U'_n - \frac{1}{r} (\lambda n (n+1) + 2\mu \frac{m^2}{\sin^2\delta}) V_n\} S_n + 2\mu \frac{1}{r} \cot\delta \; V_n (S_n)_\delta + 2\mu \frac{1}{r \sin\delta} W_n \frac{\partial}{\partial\lambda} (\cot\delta \; S_n - (S_n)_\delta)] ,$$

$$\vartheta_{r\delta} = \mu \sum_n [\{\frac{1}{r} U_n - \frac{1}{r} V_n + V'_n\} (S_n)_\lambda + \frac{1}{\sin\delta} \{-\frac{1}{r} W_n + W'_n\} (S_n)_\lambda] ,$$

$$\vartheta_{r\lambda} = \mu \sum_n [\{\frac{1}{r} W_n - W'_n\} (S_n)_\delta + \frac{1}{\sin\delta} \{\frac{1}{r} U_n - \frac{1}{r} V_n + V'_n\} (S_n)_\lambda] ,$$

$$\vartheta_{\delta\lambda} = \mu \sum_n [\frac{1}{r} \{n (n+1) - 2 \frac{m^2}{\sin^2\delta}\} W_n S_n + \frac{2}{r} \cot\delta \; W_n (S_n)_\delta - \frac{2}{r} \frac{\cot\delta}{\sin\delta} V_n (S_n)_\lambda + \frac{2}{r} \frac{1}{\sin\delta} V_n (S_n)_{\delta\lambda}] .$$

Für die Volumendilatation Δ folgt mit (252) und (253)

$$(270) \qquad \Phi_1 = \Delta = \sum_n [\frac{2}{r} U_n + U'_n - \frac{1}{r} n (n+1) V_n] S_n .$$

Setzt man (264) und (265) in (263) oder (269) in (262) ein, dann erhält man den Vektor $\nabla \cdot \Xi$. Die Komponente dieses Vektors in Richtung des Basisvektors $\underline{e}_r$ ergibt sich mit einigen Umformungen:

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(271)\quad (\nabla \cdot \Xi)\, \underline{\underline{e}}_r = \sum_n S_n \left[U_n'' (2\mu + \lambda) + U_n' \left(4\mu \frac{1}{r} + 2\lambda \frac{1}{r} + 2\mu' + \lambda'\right) + \right.$$

$$+ U_n \left(-\mu \frac{1}{r^2}\{4 + n(n+1)\} - 2\lambda \frac{1}{r^2} + 2\lambda' \frac{1}{r}\right) -$$

$$\left. - V_n' (\mu + \lambda) \frac{1}{r} n(n+1) + V_n n (n+1) \frac{1}{r} \left(3\mu \frac{1}{r} + \lambda \frac{1}{r} - \lambda'\right) \right] .$$

In entsprechender Weise leitet man die Komponente in Richtung des Basisvektors $\underline{\underline{e}}_\delta$ ab:

$$(272)\quad (\nabla \cdot \Xi)\, \underline{\underline{e}}_\delta = \sum_n (S_n)_\delta \left[U_n' \frac{1}{r} (\mu + \lambda) + U_n \frac{1}{r} \left(\mu' + 4\mu \frac{1}{r} + 2\lambda \frac{1}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + V_n'' \mu + V_n' \left(\mu' + 2\mu \frac{1}{r}\right) - V_n \frac{1}{r} \left\{\mu' + \frac{1}{r} (2\mu + \lambda) n (n+1)\right\} \right] +$$

$$+ \sum_n (S_n)_\lambda \frac{1}{\sin \delta} \left[W_n'' \mu + W_n' \left(2\mu \frac{1}{r} + \mu'\right) - \right.$$

$$\left. - W_n \frac{1}{r} \left\{\mu \frac{1}{r} n (n+1) + \mu'\right\} \right] .$$

Mit den Beziehungen (271) und (272) sind die Voraussetzungen gegeben, um die Grundgleichung (234) den besonderen Bedingungen des vorliegenden Falles anpassen zu können. Dabei soll berücksichtigt werden, daß der Spannungstensor Θ, die Dichte ϱ und die Feldkraft $\underline{\underline{d}}$ der deformierten Erde in erster Näherung gleich den für die Standarderde gültigen Werten sind. Diese auf die Standarderde bezogenen Größen seien Θ_1, ϱ_1 und

$$\nabla \left(f \frac{M_e}{r}\right) = \begin{pmatrix} -g_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Abweichungen der wirklichen Größen von denen der Standarderde sind relativ klein und können als differentielle Beträge aufgefaßt werden. Daher werden in (234) die folgenden Substitutionen eingeführt:

$$(273)\quad \Theta = \Theta_1 + \Xi$$

und mit (204)

$$(274)\quad \varrho = \varrho_1 + \xi ,$$

$$(275)\quad \underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} -g_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla Q ;$$

Q ist die Summe der 4 zusätzlichen Potentiale aus (22), (29), (39), (40), (41):

$$(276)\quad Q = A + B + X + Y .$$

Die Struktur des Tensors Ξ ist mit (268) und (269) gegeben; der Tensor Θ_1 gilt für eine hydrostatisch geschichtete Erde, bei der das Spannungsellipsoid eine Kugel ist:

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(277)\quad \Theta_1 = \begin{pmatrix} -P_1 & 0 & 0 \\ 0 & -P_1 & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 \end{pmatrix}.$$

P_1 ist positiv. Die negativen Vorzeichen ergeben sich, weil der hydrostatische Druck P_1 nach innen gerichtet ist.

Faßt man Θ_1 und Ξ als Dyade auf, dann gilt

$$(278)\quad \nabla \cdot \Theta = \nabla \cdot \Theta_1 + \nabla \cdot \Xi .$$

Aus (262) entnimmt man

$$(279)\quad \nabla \cdot \Theta_1 = -\frac{\partial P_1}{\partial r}\,\underline{\underline{e}}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial P_1}{\partial \delta}\,\underline{\underline{e}}_\delta - \frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial P_1}{\partial \lambda}\,\underline{\underline{e}}_\lambda .$$

Setzt man (236) und (238) in (275) ein, dann folgt

$$(280)\quad \underline{\underline{d}} = \left(-g_1 + \frac{\partial Q}{\partial r}\right)\underline{\underline{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \delta}\,\underline{\underline{e}}_\delta + \frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\,\underline{\underline{e}}_\lambda .$$

Der Spannungstensor $\underline{\underline{p}}$ ergibt sich als skalares Produkt des nach außen zeigenden Vektors der Flächennormale $\underline{\underline{f}}$ und der Spannungsdyade:

$$(281)\quad \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{f}} \cdot \Theta = \underline{\underline{f}} \cdot \Theta_1 + \underline{\underline{f}} \cdot \Xi .$$

Ferner ist noch der hydrostatische Druck zu transformieren. Der nach innen gerichtete hydrostatische Druck ist a priori im Aufpunkt r, δ, λ gleich P_1. Durch die elastische Deformation gelangt das Volumenelement, das a priori um den Vektor $-\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ vom Aufpunkt entfernt war, an diesen Punkt. Der in den Tensor Θ_1 einzusetzende hydrostatische Druck beträgt daher a posteriori

$$(282)\quad P = P_1 - \frac{\partial P_1}{\partial r}\,u = P_1 + \varrho\, g\, u .$$

Zu diesen Spannungen treten die Spannungsänderungen durch die Deformation entsprechend dem Tensor Ξ.

Die Grundgleichung (234) für das elastische Gleichgewicht führt daher nach der Zerlegung in die einzelnen Komponenten zu folgendem Gleichungssystem:

$$(283)\quad -\frac{\partial P}{\partial r} + (\nabla \cdot \Xi)\,\underline{\underline{e}}_r + (\varrho_1 + \xi)\left(-g_1 + \frac{\partial Q}{\partial r}\right) = 0 ,$$

$$(284)\quad -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \delta} + (\nabla \cdot \Xi)\,\underline{\underline{e}}_\delta + (\varrho_1 + \xi)\,\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \delta} = 0 ,$$

$$(285)\quad -\frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial P}{\partial \lambda} + (\nabla \cdot \Xi)\,\underline{\underline{e}}_\lambda + (\varrho_1 + \xi)\,\frac{1}{r\sin\delta}\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0 .$$

Aus (282) und (283) folgt

$$(286)\quad -\frac{\partial P_1}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r}(\varrho\, g\, u) + (\nabla \cdot \Xi)\,\underline{\underline{e}}_r - \varrho_1\, g_1 - \xi\, g_1 + \varrho_1 \frac{\partial Q}{\partial r} = 0 ;$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

und weil

$$(287)\qquad 0 = \frac{\partial P_1}{\partial r} + \varrho_1\, g_1 \,,$$

ergibt sich schließlich

$$(288)\qquad -(\varrho\, g\, u)_r + (\nabla \cdot \Xi)\, \underline{\underline{e}}_r - \xi g + \varrho \frac{\partial Q}{\partial r} = 0 \,,$$

$$(289)\qquad -\frac{1}{r}\, \varrho\, g \frac{\partial u}{\partial \delta} + (\nabla \cdot \Xi)\, \underline{\underline{e}}_\delta + \frac{1}{r}\, \varrho \frac{\partial Q}{\partial \delta} = 0 \,,$$

$$(290)\qquad -\frac{1}{r \sin \delta}\, \varrho\, g \frac{\partial u}{\partial \lambda} + (\nabla \cdot \Xi)\, \underline{\underline{e}}_\lambda + \frac{1}{r \sin \delta}\, \varrho \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0 \,.$$

Diese drei Differentialgleichungen gelten für das Innere der Kugelschale ε, also für den Bereich $R_u \leqq r \leqq R_o$. An den Randflächen dieser Kugelschale, $r = R_u$ und $r = R_o$, treten jeweils noch drei bestimmte Bedingungsgleichungen für die Spannungen auf, so daß mit diesen sechs Randbedingungen die sechs Integrationskonstanten der drei Differentialgleichungen 2. Ordnung ermittelt werden können. Das System wird dann eindeutig bestimmt.

In den Gleichungen (288) - (290) sollen noch die Komponenten der Punktverschiebung u, v, w mittels der Beziehungen (227) - (229) durch die Funktionen $U_n(r)$, $V_n(r)$, $W_n(r)$ ersetzt werden. Zunächst findet man

$$(\varrho\, g\, u)_r = (\varrho\, g)_r\, u + \varrho\, g \frac{\partial u}{\partial r}$$

und mit (227)

$$u = \sum_n U_n S_n \,, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_n U_n' S_n \,,$$

also

$$(291)\qquad (\varrho\, g\, u)_r = (\varrho\, g)' \sum_n U_n S_n + \varrho\, g \sum_n U_n' S_n \,,$$

$$(292)\qquad (\varrho\, g\, u)' = \sum_n \left[(\varrho\, g)'\, U_n + \varrho\, g\, U_n' \right] S_n \,.$$

Ferner gilt für das Produkt ξg mit (12)

$$(293)\qquad \xi = \sum_n X_n S_n \,,$$

$$(294)\qquad \xi g = \sum_n X_n\, g\, S_n \,.$$

Für das Potential Q wird ebenfalls eine Kugelfunktionsentwicklung eingeführt:

$$(295)\qquad Q = \sum_n Q_n(r)\, S_n(\delta, \lambda) \,,$$

$$(296)\qquad Q' = \sum_n Q_n'(r)\, S_n(\delta, \lambda) \,.$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Substituiert man die Beziehungen (292), (294), (296) in (288), dann folgt

$$(297) \qquad 0 = \sum_n \left[-(\varrho\, g)'\, U_n - \varrho\, g\, U_n' - g\, X_n + \varrho\, Q_n' \right] S_n + (\nabla \cdot \Xi)\, \underline{\underline{e}}_r \,.$$

Nimmt man noch (271) hinzu, dann resultiert die erste Differentialgleichung 2. Ordnung für die Funktionen U_n und V_n:

$$(298) \qquad 0 = U_n'' (2\mu + \lambda) + U_n' \left(4\mu \frac{1}{r} + 2\lambda \frac{1}{r} + 2\mu' + \lambda' - \varrho g\right) +$$

$$+ U_n \left[-\mu \frac{1}{r^2} \{4 + n(n+1)\} - 2\lambda \frac{1}{r^2} + 2\lambda' \frac{1}{r} - (\varrho g)' \right] -$$

$$- V_n' \, n(n+1) \frac{1}{r} (\mu + \lambda) + V_n \, n(n+1) \frac{1}{r} \left(3\mu \frac{1}{r} + \lambda \frac{1}{r} - \lambda'\right) -$$

$$- g\, X_n + \varrho\, Q_n' \,.$$

In analoger Weise folgt die zweite Differentialgleichung aus (272) und (289):

$$(299) \qquad 0 = \sum_n (S_n)_\vartheta \left[U_n' \frac{1}{r} (\mu + \lambda) + U_n \frac{1}{r} \left(\mu' + 4\mu \frac{1}{r} + 2\lambda \frac{1}{r} - \varrho g\right) + \right.$$

$$+ V_n'' \mu + V_n' \left(\mu' + 2\mu \frac{1}{r}\right) - V_n \frac{1}{r} \left\{\mu' + \frac{1}{r} (2\mu + \lambda)\, n(n+1)\right\} + \left. \frac{1}{r} \varrho\, Q_n \right] +$$

$$+ \sum_n (S_n)_\lambda \frac{1}{\sin\vartheta} \left[W_n'' \mu + W_n' \left(\mu' + 2\mu \frac{1}{r}\right) - W_n \frac{1}{r} \left\{\mu' + \mu \frac{1}{r}\, n(n+1)\right\} \right] .$$

Aus (290) folgt eine weitere Differentialgleichung, die der Gleichung (299) sehr ähnlich ist; sie unterscheidet sich von dieser nur dadurch, daß die vom Radius abhängigen Koeffizienten bei $(S_n)_\vartheta$ und $(S_n)_\lambda \frac{1}{\sin\vartheta}$ vertauscht sind. Die Gleichungen (289) und (290) sind also beide erfüllt, wenn in (299) die in den beiden eckigen Klammern stehenden Koeffizienten bei den Funktionen $(S_n)_\vartheta$ und $(S_n)_\lambda \frac{1}{\sin\vartheta}$ beide gleich Null sind. Es folgt

$$(300) \qquad W_n'' \mu + W_n' \left(\mu' + 2\mu \frac{1}{r}\right) - W_n \frac{1}{r} \left\{\mu' + \mu \frac{1}{r}\, n(n+1)\right\} = 0 \,.$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Sie ist immer erfüllt, wenn

$$(301) \qquad W_n = 0 \,.$$

Die beiden anderen inhomogenen und simultanen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Funktionen $U_n(r)$ und $V_n(r)$ lauten

$$(302) \qquad U_n'' c_1 + U_n' c_2 + U_n c_3 + V_n' c_4 + V_n c_5 + c_o = 0 \,,$$

$$(303) \qquad U_n' c_6 + U_n c_7 + V_n'' c_8 + V_n' c_9 + V_n c_{10} + c_{oo} = 0 \,.$$

Die Koeffizienten in diesen Differentialgleichungen sind im einzelnen

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(304)\quad c_o = \varrho Q_n' - g X_n , \qquad c_{oo} = \varrho \frac{1}{r} Q_n ;$$

$$c_1 = 2\mu + \lambda ,$$

$$c_2 = 2\frac{1}{r}(2\mu + \lambda) + 2\mu' + \lambda' - \varrho g ,$$

$$c_3 = -\mu\frac{1}{r^2}[4 + n(n+1)] - 2\lambda\frac{1}{r^2} + 2\lambda'\frac{1}{r} - (\varrho g)' ,$$

$$c_4 = -\frac{1}{r}(\lambda + \mu)\, n\,(n+1) ,$$

$$c_5 = \frac{1}{r}(3\mu\frac{1}{r} + \lambda\frac{1}{r} - \lambda')\, n\,(n+1) ,$$

$$c_6 = \frac{1}{r}(\lambda + \mu) ,$$

$$c_7 = \frac{1}{r}[2\frac{1}{r}(2\mu + \lambda) + \mu' - \varrho g] ,$$

$$c_8 = \mu ,$$

$$c_9 = 2\mu\frac{1}{r} + \mu' ,$$

$$c_{1o} = -\frac{1}{r}[\frac{1}{r}(2\mu + \lambda)\, n\,(n+1) + \mu'] .$$

Ausführlicher werden die Gleichungen (302) und (303) mit (227) - (229) folgendermaßen geschrieben:

$$(305)\quad U''_{1.n.m}\, c_1 + U'_{1.n.m}\, c_2 + U_{1.n.m}\, c_3 + V'_{1.n.m}\, c_4 + V_{1.n.m}\, c_5 + c_o = 0 ,$$

$$(306)\quad U'_{1.n.m}\, c_6 + U_{1.n.m}\, c_7 + V''_{1.n.m}\, c_8 + V'_{1.n.m}\, c_9 + V_{1.n.m}\, c_{1o} + c_{oo} = 0 ,$$

$$(307)\quad U''_{2.n.m}\, c_1 + U'_{2.n.m}\, c_2 + U_{2.n.m}\, c_3 + V'_{2.n.m}\, c_4 + V_{2.n.m}\, c_5 + c_o = 0 ,$$

$$(308)\quad U'_{2.n.m}\, c_6 + U_{2.n.m}\, c_7 + V''_{2.n.m}\, c_8 + V'_{2.n.m}\, c_9 + V_{2.n.m}\, c_{1o} + c_{oo} = 0 .$$

Die einzelnen Funktionen $U_{1.n.m}$, $U_{2.n.m}$, $V_{1.n.m}$, $V_{2.n.m}$ lassen sich also jeweils getrennt und unabhängig voneinander bestimmen. Dadurch wird ihre Berechnung sehr erleichtert. Die Koeffizienten c_1, c_2, ..., c_{1o} variieren zwischen diesen Funktionen nur mit der Ordnungszahl n, nicht aber mit dem Index m. Bei den Inhomogenitäten c_o und c_{oo} ist in entsprechender Weise für Q_n und X_n zu setzen $Q_{1.n.m}$, $Q_{2.n.m}$, $X_{1.n.m}$, $X_{2.n.m}$.

Schließlich soll noch auf die Berechnung der Inhomogenitäten c_o und c_{oo} eingegangen werden. Es handelt sich um Funktionen vom Radius r, die ebenso wie die Funktionen c_1, c_2, ..., c_{1o} bekannt sind.

Die im Ausdruck für c_o vorkommenden Funktionen $X_{1.n.m}(r)$ und $X_{2.n.m}(r)$ sind die Koeffizienten in der Kugelfunktionsentwicklung für die Dichteanomalien $\xi = \xi(r)$ gemäß (12). Sie ermitteln sich aus dem System der linearen Gleichungen (101) - (104), (107) - (110) und (192)- (196); dort ergeben sich die konstanten Koeffizienten $X_{1.n.m.i}$ und $X_{2.n.m.i}$ $(i = 0, 1, 2, ..., \tau)$, aus ihnen folgen die Potenzreihen für $X_{1.n.m}(r)$ und $X_{2.n.m}(r)$ nach (47) und (48).

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Für die mit den Gleichungen (276), (295), (296) beschriebenen Funktionen Q und Q' sollen noch die expliziten Entwicklungen angegeben werden. Es handelt sich bei Q um eine Potentialfunktion, die von r, δ und λ abhängig ist.

Die Summe der ersten beiden Teilpotentiale A und B im Inneren der Kugelschale ε ist mit Gleichung (38) bekannt. Für das Potential Y gilt entsprechend die Beziehung (40). Das vierte Potential X ist im Inneren der Kugelschale ε durch die Kugelfunktionsentwicklung (78) dargestellt. Faßt man diese vier Potentiale A, B, X, Y zusammen, dann ergibt sich nach Gleichung (295) in der abkürzenden Schreibweise

$$(309) \quad Q_n = 4\pi f R_o \frac{1}{2n+1} \Big[\Big(\frac{r}{R_o}\Big)^n Y_n + \sum_i X_{n.i} \{\gamma_3(t;n,i) + \gamma_4(t;n,i)\} -$$

$$- \varrho^o (n-1)\Big(\frac{r}{R_o}\Big)^n \frac{T}{R_o}\Big(1 + \frac{n}{2}\frac{T}{R_o}\Big) A_n - \varrho^o \xi \Big(\frac{r}{R_o}\Big)^n A_n \Big] ;$$

$$n = 2, 3, 4, \dots; \qquad i = 0, 1, 2, \dots, \tau ; \qquad t = R_o - r .$$

Die Funktionen $\gamma_3(t; n, i)$ und $\gamma_4(t; n, i)$ sind mit den Gleichungen (72) und (77) gegeben.

Schließlich muß noch für die Ableitung Q_n', die dieselbe Dimension wie die Schwere hat, eine Darstellung gewonnen werden. Mit

$$Q_n'(r) = \frac{dQ_n}{dr} = -\frac{dQ_n}{dt} ,$$

$$\gamma_3'(t;n,i) = \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3(t;n,i) = -\frac{\partial}{\partial r}\gamma_3 ,$$

$$\gamma_4'(t;n,i) = \frac{\partial}{\partial t}\gamma_4(t;n,i) = -\frac{\partial}{\partial r}\gamma_4$$

folgt

$$(310) \quad Q_n' = 4\pi f \frac{1}{2n+1} \Big[n \Big(\frac{r}{R_o}\Big)^{n-1} Y_n - R_o \sum_i X_{n.i} \{\gamma_3'(t;n,i) + \gamma_4'(t;n,i)\} -$$

$$- \varrho^o n (n-1)\Big(\frac{r}{R_o}\Big)^{n-1} \frac{T}{R_o}\Big(1 + \frac{n}{2}\frac{T}{R_o}\Big) A_n - \varrho^o \xi n \Big(\frac{r}{R_o}\Big)^{n-1} A_n \Big] ;$$

$$(311) \quad \gamma_3'(t;n,i) = \frac{1}{R_o}(n+1)\Big(1 - \frac{t}{R_o}\Big)^{-1} \gamma_3(t;n,i) -$$

$$- \Big(1 - \frac{t}{R_o}\Big)^{-(n+1)} t^i \Big[1 - (n+2)\frac{t}{R_o} +$$

$$+ \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\Big(\frac{t}{R_o}\Big)^2 - \frac{1}{6} n (n+1)(n+2)\Big(\frac{t}{R_o}\Big)^3 +$$

$$+ \frac{1}{24}(n-1) n (n+1)(n+2)\Big(\frac{t}{R_o}\Big)^4 - + \dots \Big] ,$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(312)\quad \gamma_4'(t;\, n,\, i) = -\frac{1}{R_o}\, n\, (1 - \frac{t}{R_o})^{-1}\, \gamma_4(t;\, n,\, i) +$$

$$+ (1 - \frac{t}{R_o})^n\, t^i\, [1 + (n - 1)(\frac{t}{R_o}) + \frac{1}{2}\, n\, (n - 1)(\frac{t}{R_o})^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\, (n + 1)\, n\, (n - 1)(\frac{t}{R_o})^3 +$$

$$+ \frac{1}{24}\, (n + 2)(n + 1)\, n\, (n - 1)(\frac{t}{R_o})^4 + \ldots] \,.$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

9. Randbedingungen

Zur eindeutigen Integration der Differentialgleichungen (300), (302), (303) für die Funktionen $U_n(r)$, $V_n(r)$ und $W_n(r)$ müssen zusätzliche Bedingungsgleichungen in Form von Randbedingungen eingeführt werden. Die Gleichungen für das elastische Gleichgewicht lassen sich eindeutig integrieren, wenn in den Punkten der Randfläche entweder die Punktverschiebung oder die Oberflächenspannung vorgegeben ist. Bei drei Funktionen und bei Differentialgleichungen 2. Ordnung sind sechs Randbedingungen zur Elimination der sechs Integrationskonstanten notwendig. Weil mit Gleichung (301) die Funktionen W_n verschwinden, werden diese sechs Randbedingungen nur vier unabhängige Bedingungsgleichungen darstellen.

Diese sechs Bedingungsgleichungen leiten sich aus der Forderung ab, daß entlang der Oberfläche der Kugelschale ε, also entlang den Kugelflächen $r = R_o$ und $r = R_u$, auf kein Element dieser Flächen eine Spannung wirken darf. Der räumliche Vektor der Spannungskraft zerlegt sich in drei Komponenten, aus denen sich jeweils eine Bedingungsgleichung ableitet. Auf diese Weise ergeben sich die notwendigen sechs Randbedingungen, indem drei elastische Randbedingungen für die äußere Begrenzung, $r = R_o$, aufgestellt werden und drei weitere für die innere Begrenzung der Kugelschale, $r = R_u$.

Ist der Einheitsvektor $\underline{\underline{f}}$ die nach außen weisende Flächennormale der Kugelschale und ist Θ die Spannungsdyade, dann gilt mit (235) für die Komponenten der Spannungskräfte an der Oberfläche des elastischen Körpers allgemein die folgende Beziehung:

$$(313)\qquad \underline{\underline{f}} \cdot \Theta = \underline{\underline{f}} \cdot \sum_i \sum_k \underline{\underline{e}}_i \, \underline{\underline{e}}_k \, p_{i.k} = E_1 \, \underline{\underline{e}}_1 + E_2 \, \underline{\underline{e}}_2 + E_3 \, \underline{\underline{e}}_3 \; ; \qquad i, k = 1, 2, 3 \, .$$

Die Ausdrücke E_1, E_2, E_3 sind in (313) Ortsfunktionen für die einzelnen Komponenten des Spannungsvektors.

Im vorliegenden Fall läßt sich der Vektor $\underline{\underline{f}}$ leicht angeben. Entlang der äußeren Begrenzung der Kugelschale ε, $r = R_o$, ist der Normalenvektor $\underline{\underline{f}}$ gleich dem ersten Basisvektor $\underline{\underline{e}}_1 = \underline{\underline{e}}_r$. Entlang der inneren Begrenzung, $r = R_u$, ist

$$\underline{\underline{f}} = -\underline{\underline{e}}_1 = -\underline{\underline{e}}_r \; ; \qquad r = R_u \, .$$

Damit folgt für $r = R_o$:

$$\underline{\underline{f}} \cdot \Theta = \underline{\underline{e}}_1 \cdot \Theta = \underline{\underline{e}}_1 \cdot \sum_i \sum_k \underline{\underline{e}}_i \, \underline{\underline{e}}_k \, p_{i.k} \, ,$$

$$\sum_k \underline{\underline{e}}_k \, p_{1.k} = E_1 \, \underline{\underline{e}}_1 + E_2 \, \underline{\underline{e}}_2 + E_3 \, \underline{\underline{e}}_3 \; ;$$

$$p_{1.1} = E_1 \, , \qquad p_{1.2} = E_2 \, , \qquad p_{1.3} = E_3 \; ; \qquad r = R_o \, .$$

Analog findet man für $r = R_u$

$$\underline{\underline{f}} \cdot \Theta = -\underline{\underline{e}}_1 \cdot \Theta = -\underline{\underline{e}}_1 \cdot \sum_i \sum_k \underline{\underline{e}}_i \, \underline{\underline{e}}_k \, p_{i.k} \, ,$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$-\sum_k \underline{\underline{e}}_k\, p_{i.k} = E_1\, \underline{\underline{e}}_1 + E_2\, \underline{\underline{e}}_2 + E_3\, \underline{\underline{e}}_3 \;;$$

$$p_{1.1} = -E_1 \,, \quad p_{1.2} = -E_2, \quad p_{1.3} = -E_3 \;; \qquad r = R_u \,.$$

Im vorliegenden Falle interessieren die zusätzlichen Spannungen, die durch den Tensor Ξ nach (268) beschrieben werden. Sie lassen sich für $r = R_o$ wie folgt darstellen:

$$(314) \quad \vartheta_{rr} = E_r(\delta, \lambda) \,, \quad \vartheta_{r\delta} = E_\delta(\delta, \lambda) \,, \quad \vartheta_{r\lambda} = E_\lambda(\delta, \lambda) \;; \qquad r = R_o \,.$$

Für $r = R_u$ gilt

$$(315) \quad \vartheta_{rr} = -E_r(\delta, \lambda) \,, \quad \vartheta_{r\delta} = -E_\delta(\delta, \lambda) \,, \quad \vartheta_{r\lambda} = -E_\lambda(\delta, \lambda) \;; \qquad r = R_u \,.$$

Für die elastischen Randbedingungen (314) und (315) sollen zwei verschiedene Varianten eingeführt werden.

Bei der ersten Variante handelt es sich um freie Randbedingungen. Die Oberfläche des elastischen Körpers kann sich entsprechend den elastischen Kräften deformieren. Die Funktionen E_r, E_δ, E_λ wären dann in allen Punkten der Oberfläche gleich Null. Im vorliegenden Falle muß aber noch berücksichtigt werden, daß die Flächenbelegungen an der Erdoberfläche, $r = R_o$, neben ihrem Anteil an der Feldkraft $\underline{\underline{d}}$ entsprechend der Gravitation weiterhin noch einen Druck auf die darunterliegenden Schichten ausüben. Es handelt sich um die Flächenbelegung der Topographie und ihrer Kompensation gemäß (21),(28):

$$\sigma_a + \sigma_b = -\varrho^o\, a \xi \,,$$

und um die Flächenbelegung σ_y aus (16). Während die radiale elastische Deformation an der Erdoberfläche um den Betrag u_o keinen zusätzlichen Druck ausübt, sind bei den Randbedingungen die restlichen Beträge wirksam. Es handelt sich also mit (208) um die Flächenbelegung

$$\sigma_y - \varrho_{1.o}\, u_o + \sigma_a + \sigma_b \qquad \text{oder} \qquad \sigma_y - \varrho_{1.o}\, u_o - \varrho^o\, a \xi = \varrho_{1.o}\, u_{oo} \,.$$

Ihr entspricht eine materielle Schicht von der Stärke u_{oo} und der Dichte $\varrho_{1.o}$. Ermittelt man den Druck, mit dem diese Schicht auf der Erdoberfläche lastet, dann kann man sie genähert als eine plastische materielle Schicht auffassen, die auf die Unterlage mit dem Druck $g_o\, \varrho_{1.o}\, u_{oo}$ wirkt. Diese näherungsweise Auffassung hält einer strengeren Kritik stand, denn es gilt im Bereich der Schicht mit der Stärke u_{oo} wegen (234)

$$\nabla \cdot \Theta + \varrho\, \underline{\underline{d}} = 0 \,.$$

Integriert man über die Stärke dieser Schicht, dann folgt

$$\int_{r=R_o}^{R_o+u_{oo}} [\nabla \cdot \Theta + \varrho\, \underline{\underline{d}}]\, dr = 0 \,, \qquad \nabla \cdot \Theta\, u_{oo} + \varrho\, \underline{\underline{d}}\, u_{oo} = 0 \,.$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Die horizontalen Komponenten der Vektoren $\nabla \cdot \Theta$ und $\varrho \underline{\underline{d}}$ sind linear in den Verschiebungsbeträgen u, v, w und deren Ableitungen. In der obigen Gleichung sollen Ausdrücke, die quadratisch in u, v, w sind, und gemischte Glieder vernachlässigt werden, so daß nur die radiale Komponente der Vektorgleichung übrig bleibt:

$$(\nabla \cdot \Theta\, u_{oo})\, \underline{\underline{e}}_r = -(\varrho\, \underline{\underline{d}}\, u_{oo})\, \underline{\underline{e}}_r = g_o\, \varrho_{1.o}\, u_{oo} .$$

Mit (277) - (279) folgt

$$(\nabla \cdot \Theta)\, u_{oo}\, \underline{\underline{e}}_r = -\frac{\partial P_1}{\partial r}\, u_{oo} + (\nabla \cdot \Xi)\, u_{oo}\, \underline{\underline{e}}_r .$$

Im Rahmen der Vernachlässigungen gilt

$$-\frac{\partial P_1}{\partial r}\, u_{oo} = -[(P_1)_{r=R_o+u_{oo}} - (P_1)_{r=R_o}] = (P_1)_{r=R_o} = g_o\, \varrho_{1.o}\, u_{oo} .$$

P_1 ist hier der Druck, der auf die Schicht mit der Stärke u_{oo} bei $r = R_o$ von unten nach oben ausgeübt wird; P_1 ist hier also gleich dem Druck, der auf die darunterliegenden Schichten von oben nach unten wirkt. Es folgt

(317) $\quad E_r = -g_o\, \varrho_{1.o}\, u_{oo}, \qquad r = R_o .$

Die drei elastischen Bedingungsgleichungen für die Erdoberfläche, $r = R_o$, lauten daher mit (314), (316), (317)

(318) $\quad \vartheta_{rr} = -g_o\, \sigma_y + g_o\, \varrho_{1.o}\, u_o + g_o\, \varrho^o\, a \xi ,$

(319) $\quad \vartheta_{r\delta} = 0 ,$

(320) $\quad \vartheta_{r\lambda} = 0 .$

Es sind ferner die analogen Bedingungen für den Unterrand der Kugelschale, $r = R_u$, aufzustellen. Hier tritt zwar kein Dichtesprung auf, im Gegensatz zur Erdoberfläche kann man jedoch in erster Näherung annehmen, daß die tieferen Schichten $(r < R_u)$ sich im hydrostatischen Gleichgewicht befinden, jedenfalls bei Langzeitbeanspruchungen. Damit ändert sich der Druck im Bereich des Unterrandes $r = R_u$ auf Grund der Variation des hydrostatischen Drucks mit der Tiefe. Eine Deformation des Unterrandes bewirkt also eine Änderung des Oberflächendrucks auf den Unterrand der Kugelschale ε. Ist u_u negativ, dann ist E_r am Unterrand positiv. Damit wird für (315)

(320a) $\quad E_r = -g_u\, \varrho_{1.u}\, u_u ;$

(321) $\quad \vartheta_{rr} = g_u\, \varrho_{1.u}\, u_u ,$

(322) $\quad \vartheta_{r\delta} = 0 ,$

(323) $\quad \vartheta_{r\lambda} = 0 ;$

g_u, $\varrho_{1.u}$, u_u sind die Werte für die Schwere, die Dichte und die radiale Punktverschiebung am Unterrand der Kugelschale, $r = R_u$.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Man kann in einer zweiten Variante rigorosere Bedingungen einführen und vorschreiben, daß die Geometrie des Unterrandes der Kugelschale, $r = R_u$, durch die elastische Deformation keine Veränderung erfahren soll, es gilt dann

$$(324) \quad u = v = w = 0 \; ; \qquad r = R_u .$$

Daraus folgt mit (227) - (229)

$$(325) \quad U_{1.n.m}(R_u) = U_{2.n.m}(R_u) = 0 ,$$

$$(326) \quad V_{1.n.m}(R_u) = V_{2.n.m}(R_u) = 0 .$$

Außerdem müssen natürlich bei dieser zweiten Variante die elastischen Bedingungen (318) - (320) für die Erdoberfläche und die Bedingungen (315) in der folgenden Form erfüllt sein:

$$(327) \quad \vartheta_{rr} = \vartheta_{r\delta} = \vartheta_{r\lambda} = 0 , \qquad r = R_u .$$

Zu diesen Gleichungen (324), (318), (319), (320), (327) wird man geführt, wenn man berücksichtigt, daß die Erde unterhalb der Tiefe D im hydrostatischen Gleichgewicht bleiben und gegenüber der Standarderde keine Veränderungen erfahren soll; denn dann wird auch die Randfläche $r = R_u$ nicht deformiert. Man hat dann einen stetigen Übergang in der Tiefe $t = D$ nicht nur für die Dichte, sondern auch für die elastische Punktverschiebung.

Die zusätzlichen Bedingungen (324) können aber nicht mehr im Rahmen der Integration der Differentialgleichungen für die Funktionen U_n und V_n durch eine Variation der Integrationskonstante befriedigt werden. Diese Möglichkeit wurde schon durch die Bedingungen (318) - (320) und (327) ausgeschöpft. Zur Erfüllung der Gleichungen (324) müssen daher tiefergreifende Bedingungen eingeführt und es muß vorgesehen werden, daß die Dichteanomalien ξ und die Flächenbelegung σ_y über ihre Bestimmung nach den Gleichungen (101) – (104), (107) - (110), (192) - (196) hinaus durch zusätzliche Bedingungen verändert werden, bis die Gleichungen (324) erfüllt sind.

Die zweite Variante wird daher einen wesentlich größeren rechentechnischen Aufwand nach sich ziehen als die erste. Diese bei der zweiten Variante anzuwendenden Rechenverfahren werden später in Kapitel 12 behandelt. Die erste Variante ist mit erheblich weniger rechentechnischem Aufwand verbunden und dürfte im Rahmen der vorliegenden Aufgabenstellung, nämlich bei der Abschätzung der Größenordnung der Dichteanomalien und der daraus zu folgernden Spannungsunterschiede, allen praktischen Anforderungen im wesentlichen genügen.

Die besprochenen Randbedingungen für die erste und die zweite Variante sollen noch ausführlich nach den Funktionen $U_{1.n.m}$, $U_{2.n.m}$, $V_{1.n.m}$, $V_{2.n.m}$ entwickelt werden. Mit (269) folgt für die Randbedingungen (318) - (323) der ersten Variante

$$(328) \quad -g\,Y_n + g\,\varrho_1\,U_n + g\,\varrho^0\,\xi\,A_n = U_n'\,(2\mu + \lambda) + U_n\,\lambda\,\frac{2}{R_o} - V_n\,\lambda\,\frac{1}{R_o}\,n\,(n+1),$$

$$r = R_o \; ;$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

(329) $0 = U_n \frac{1}{R_o} + V_n' - V_n \frac{1}{R_o}, \quad r = R_o;$

(330) $g \rho_1 U_n = U_n' (2\mu + \lambda) + U_n \lambda \frac{2}{R_u} - V_n \lambda \frac{1}{R_u} n (n+1), \quad r = R_u;$

(331) $0 = U_n \frac{1}{R_u} + V_n' - V_n \frac{1}{R_u}, \quad r = R_u.$

Hier stehen Y_n und A_n wieder für $Y_{1.n.m}$, $Y_{2.n.m}$, $A_{1.n.m}$, $A_{2.n.m}$.

Bei der Betrachtung der zweiten Variante können die Bedingungen (328) und (329) für die Erdoberfläche von der ersten Variante übernommen werden. Für die Tiefe D findet man bei der zweiten Variante, daß die Gleichungen (325) - (327) erfüllt werden, wenn gesetzt wird

(332) $U_n = 0, \quad r = R_u;$

(333) $U_n' = 0, \quad r = R_u;$

(334) $V_n = 0, \quad r = R_u;$

(335) $V_n' = 0, \quad r = R_u.$

Die hydrostatisch geschichtete Erde soll - entsprechend der Arbeitshypothese - in Tiefen mit einem geozentrischen Radius $r < R_u$ über sehr lange Zeiträume keine Scherkräfte mehr aufnehmen können; in diesem Bereich wäre dann der Langzeitwert des elastischen Parameters μ gleich Null. Um im Randbereich $r = R_u$ einen stetigen Übergang für die elastischen Parameter zu haben, wird es sich empfehlen, den für die Kugelschale ε gültigen Langzeitwert des Parameters μ bei Annäherung an den Unterrand der Kugelschale ε gegen Null gehen zu lassen:

(336) $\mu \to 0, \quad$ wenn $\quad t \to D \quad$ bei $\quad t \in D.$

In diesem Falle verschwinden die Spannungen $\vartheta_{r\delta}$ und $\vartheta_{r\lambda}$, wie man dem System (269) entnimmt. In der Gleichung für ϑ_{rr} werden die Koeffizienten bei der Funktion S_n gleich

$$\lambda \left[\frac{2}{r} U_n + U_n' - \frac{1}{r} n (n+1) V_n \right].$$

Dies ist aber mit (270) der Ausdruck für die Volumendilatation Δ, multipliziert mit λ. Verschwindet also die radiale Komponente der Oberflächenspannung und ist $\mu = 0$, dann ist auch $\Delta = 0$.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

10. Integration der Differentialgleichungen

Für die Integration der Differentialgleichungen (302) und (303) bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. Hier sollen für die Funktionen U_n und V_n Potenzreihenentwicklungen nach der Tiefe t gewählt werden:

$$(337) \quad U_n = \sum_k x_{1.n.k}\, t^k ,$$

$$(338) \quad V_n = \sum_k x_{2.n.k}\, t^k ; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma , \qquad 0 \leqq t \leqq D .$$

Die konstanten Koeffizienten $x_{1.n.k}$ und $x_{2.n.k}$ sind die Unbekannten. Es folgt

$$(339) \quad U_n' = \frac{dU_n}{dr} = -\sum_k k\, x_{1.n.k}\, t^{k-1} ,$$

$$(340) \quad U_n'' = \frac{d^2U_n}{dr^2} = \sum_k k\,(k-1)\, x_{1.n.k}\, t^{k-2} ;$$

$$(341) \quad V_n' = \frac{dV_n}{dr} = -\sum_k k\, x_{2.n.k}\, t^{k-1} ,$$

$$(342) \quad V_n'' = \frac{d^2V_n}{dr^2} = \sum_k k\,(k-1)\, x_{2.n.k}\, t^{k-2} .$$

Die Gleichungen (337) – (342) werden in die Differentialgleichungen (302) und (303) eingesetzt; es ergibt sich

$$(343) \quad c_1 \sum_k k\,(k-1)\, x_{1.n.k}\, t^{k-2} - c_2 \sum_k k\, x_{1.n.k}\, t^{k-1} + c_3 \sum_k x_{1.n.k}\, t^k -$$
$$- c_4 \sum_k k\, x_{2.n.k}\, t^{k-1} + c_5 \sum_k x_{2.n.k}\, t^k + c_o = 0 ,$$

$$(344) \quad -c_6 \sum_k k\, x_{1.n.k}\, t^{k-1} + c_7 \sum_k x_{1.n.k}\, t^k + c_8 \sum_k k\,(k-1)\, x_{2.n.k}\, t^{k-2} -$$
$$-c_9 \sum_k k\, x_{2.n.k}\, t^{k-1} + c_{10} \sum_k x_{2.n.k}\, t^k + c_{oo} = 0 .$$

Die Entwicklungen (343) und (344) werden nach den unbekannten Konstanten $x_{1.n.k}$ und $x_{2.n.k}$ geordnet; man erhält ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten:

$$(345) \quad \Pi_{n.1} = \sum_k \varkappa_{1.k}\, x_{1.n.k} + \sum_k \varkappa_{2.k}\, x_{2.n.k} + c_o = 0 ,$$

$$(346) \quad \Pi_{n.2} = \sum_k \varkappa_{3.k}\, x_{1.n.k} + \sum_k \varkappa_{4.k}\, x_{2.n.k} + c_{oo} = 0 ;$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma .$$

Die Koeffizienten $\varkappa_{1.k}, \varkappa_{2.k}, \varkappa_{3.k}, \varkappa_{4.k}$ bei den Unbekannten ermitteln sich nach Rekursionsformeln:

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$\varkappa_{1.0} = c_3 ,$$
$$\varkappa_{1.1} = t\, c_3 - c_2 ,$$
$$\varkappa_{1.2} = t^2\, c_3 - 2\, t\, c_2 + 2\, c_1 ,$$
$$\varkappa_{1.3} = t^3\, c_3 - 3\, t^2\, c_2 + 6\, t\, c_1 ,$$
$$\ldots ;$$

(347) $$\varkappa_{1.k} = t^k\, c_3 - k\, t^{(k-1)}\, c_2 + k\,(k-1)\, t^{(k-2)}\, c_1 ,$$

$$\varkappa_{2.0} = c_5 , \quad \varkappa_{2.1} = -c_4 + t\, c_5 , \quad \varkappa_{2.2} = -2\, t\, c_4 + t^2\, c_5 , \quad \ldots ;$$

(348) $$\varkappa_{2.k} = -k\, t^{(k-1)}\, c_4 + t^k\, c_5 ,$$

$$\varkappa_{3.0} = c_7 , \quad \varkappa_{3.1} = t\, c_7 - c_6 , \quad \varkappa_{3.2} = t^2\, c_7 - 2\, t\, c_6 , \quad \ldots ;$$

(349) $$\varkappa_{3.k} = t^k\, c_7 - k\, t^{(k-1)}\, c_6 ;$$

(350) $$\varkappa_{4.k} = k\,(k-1)\, t^{(k-2)}\, c_8 - k\, t^{(k-1)}\, c_9 + t^k\, c_{10} ;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma .$$

Die Koeffizienten $\varkappa_{1.k}$, $\varkappa_{2.k}$, $\varkappa_{3.k}$, $\varkappa_{4.k}$ und die Inhomogenitäten c_o und c_{oo} hängen vom Radius r ab und sind bekannt. Zur Bestimmung der Unbekannten müssen die Gleichungen (345) und (346) für verschiedene Stützpunkte, d.h. für verschiedene Werte des Radius r, $R_u \leqq r \leqq R_o$, berechnet werden. Insgesamt beträgt die Anzahl der Unbekannten $x_{1.n.k}$ und $x_{2.n.k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma)$ $2\sigma + 2$. Zu den Gleichungen (345) und (346) treten bei der ersten Variante noch die vier Randbedingungen (328) – (331). Damit die Anzahl der Gleichungen gleich derjenigen der Unbekannten ist, müssen bei $2\sigma + 2$ Unbekannten die Gleichungen (345) und (346) wenigstens für $\sigma - 1$ Stützpunkte berechnet werden.

In diesem Zusammenhang müssen die Entwicklungen (337) – (342) in die genannten Randbedingungen eingesetzt werden. Es gilt

$$U_n = x_{1.n.o} , \quad t = 0 ; \qquad U'_n = -x_{1.n.1} , \quad t = 0 ;$$

$$V_n = x_{2.n.o} , \quad t = 0 ; \qquad V'_n = -x_{2.n.1} , \quad t = 0 .$$

Damit erhält man die Entwicklung der Bedingungsgleichungen (328) und (329) nach den Unbekannten $x_{1.n.k}$ und $x_{2.n.k}$:

(351) $$\Pi_{n.3} = 0 = \left(\lambda \frac{2}{R_o} - g_o\, \varrho_{1.o}\right) x_{1.n.o} - (2\mu + \lambda)\, x_{1.n.1} - \lambda \frac{1}{R_o}\, n\,(n+1)\, x_{2.n.o} + g_o\, Y_n - g_o\, \varrho^o\, \xi\, A_n , \quad r = R_o ;$$

(352) $$\Pi_{n.4} = 0 = x_{1.n.o} - x_{2.n.o} - R_o\, x_{2.n.1} , \quad r = R_o .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Für den Unterrand $r = R_u$ folgt mit (337) - (341)

$$U_n = \sum_k x_{1.n.k} D^k, \quad t = D; \qquad U'_n = -\sum_k k\, x_{1.n.k} D^{k-1}, \quad t = D;$$

$$V_n = \sum_k x_{2.n.k} D^k, \quad t = D; \qquad V'_n = -\sum_k k\, x_{2.n.k} D^{k-1}, \quad t = D.$$

Aus den Gleichungen (330) und (331) wird daher

$$(353) \quad 0 = (\lambda \frac{2}{R_u} - g\, \varrho_1) \sum_k x_{1.n.k} D^k - (2\mu + \lambda) \sum_k k\, x_{1.n.k} D^{k-1} - \\ - \lambda \frac{1}{R_u} n\,(n+1) \sum_k x_{2.n.k} D^k, \quad r = R_u;$$

$$(354) \quad 0 = \sum_k x_{1.n.k} D^k - \sum_k x_{2.n.k} D^k - R_u \sum_k k\, x_{2.n.k} D^{k-1}, \quad r = R_u.$$

Ordnet man nach den Unbekannten $x_{1.n.k}$, $x_{2.n.k}$, so resultiert für die erste Variante

$$(355) \quad \Pi_{n.5} = 0 = \sum_k x_{1.n.k} \left[(\lambda \frac{2}{R_u} - g\, \varrho_1) D^k - k\,(2\mu + \lambda) D^{k-1} \right] - \\ - \sum_k x_{2.n.k} \lambda \frac{1}{R_u} n\,(n+1) D^k, \quad r = R_u;$$

$$(356) \quad \Pi_{n.6} = 0 = \sum_k x_{1.n.k} D^k - \sum_k x_{2.n.k} \left[D^k + k\, R_u D^{k-1} \right]; \quad r = R_u.$$

Der Index k durchläuft die Folge

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma.$$

Der Index n steht wieder für die Wertetripel 1.n.m und 2.n.m.

Als Bedingungsgleichungen der zweiten Variante am Unterrand $r = R_u$ findet man mit (332) - (335)

$$(357) \quad \Pi_{n.7} = 0 = \sum_k x_{1.n.k} D^k, \quad r = R_u;$$

$$(358) \quad \Pi_{n.8} = 0 = \sum_k k\, x_{1.n.k} D^{k-1}, \quad r = R_u;$$

$$(359) \quad \Pi_{n.9} = 0 = \sum_k x_{2.n.k} D^k, \quad r = R_u;$$

$$(360) \quad \Pi_{n.10} = 0 = \sum_k k\, x_{2.n.k} D^{k-1}, \quad r = R_u;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma.$$

Bei der Integration der Differentialgleichungen für die elastischen Punktverschiebungen nach der ersten Variante sind damit die Gleichungen für $\Pi_{n.1}$, $\Pi_{n.2}$, $\Pi_{n.3}$, $\Pi_{n.4}$, $\Pi_{n.5}$, $\Pi_{n.6}$ aufzulösen. Die Gleichungen $\Pi_{n.1}$ und $\Pi_{n.2}$ sind dabei für jeweils $\sigma - 1$ Stützpunkte aufzustellen. Die geozentrischen Radien dieser Stützpunkte haben die Werte

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

r_h ; $h = 0, 1, 2, \ldots, \sigma - 2$; $R_u \leqq r_h \leqq R_o$.

Damit erhält man für die erste Variante die folgenden Gleichungen:

(361) $\pi_{n.1.h} = 0 = \sum_k \varkappa_{1.k}(r_h)\, x_{1.n.k} + \sum_k \varkappa_{2.k}(r_h)\, x_{2.n.k} + c_o(r_h)$;

(362) $\pi_{n.2.h} = 0 = \sum_k \varkappa_{3.k}(r_h)\, x_{1.n.k} + \sum_k \varkappa_{4.k}(r_h)\, x_{2.n.k} + c_{oo}(r_h)$;

(363) $\pi_{n.3} = \pi_{n.4} = \pi_{n.5} = \pi_{n.6} = 0$;

$h = 0, 1, 2, \ldots, \sigma - 2$; $k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma$; $n \longrightarrow 1.n.m,\ 2.n.m$.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

11. Ermittlung der Spannungen und der Spannungsunterschiede

In Kap. 6 wurde eine Näherungsformel zur Ermittlung der Spannungsunterschiede in der Kugelschale ε angegeben. Es sollen jetzt die Formeln zur strengen Berechnung dieser Werte entwickelt werden.

Mit den Gleichungen (101), (103), (107), (109), (192) und (194) findet man die Unbekannten $X_{1.n.m.i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \tau)$ und $Y_{1.n.m}$. Aus dem linearen Gleichungssystem (102), (104), (108), (110), (193), (195) resultieren die Unbekannten $X_{2.n.m.i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \tau)$ und $Y_{2.n.m}$ in analoger Weise. Dabei wird der Parameter ξ als fester Wert eingeführt, und die linearen Gleichungssysteme werden für mehrere Varianten des Wertes von ξ aufgelöst. Der spezielle Wert von ξ, für den die Summe Σ nach (112) ein Minimum hat, kann als optimal angesehen werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Gleichungen (101) - (104), (107) - (110), (192) - (196) in einem Guß aufzulösen und die Unbekannten $X_{1.n.m.i}$, $X_{2.n.m.i}$, $Y_{1.n.m}$, $Y_{2.n.m}$, ξ gleichzeitig zu bestimmen. Nach den Gleichungen (47) und (48) folgen die Funktionen $X_{1.n.m}(r)$ und $X_{2.n.m}(r)$, $R_u \leqq r \leqq R_o$, aus den Konstanten $X_{1.n.m.i}$ und $X_{2.n.m.i}$.

Damit sind auch alle Parameter bekannt, die für die Ermittlung der Funktionen $Q_{1.n.m}(r)$, $Q_{2.n.m}(r)$ und $Q'_{1.n.m}(r)$, $Q'_{2.n.m}(r)$ $(R_u \leqq r \leqq R_o)$ nach (309) und (310) benötigt werden. Folglich hat man auch die Inhomogenitäten c_o und c_{oo} in ihrer Abhängigkeit vom geozentrischen Radius r gemäß (304) gefunden.

Im Anschluß erhält man die Unbekannten $x_{1.1.n.m.k}$, $x_{1.2.n.m.k}$ und $x_{2.1.n.m.k}$, $x_{2.2.n.m.k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \sigma)$ durch die Auflösung des linearen Systems der Gleichungen (361), (362), (351), (352), (355) und (356) nach der ersten Variante.

Somit sind alle Voraussetzungen gegeben, um die Funktionen $U_{1.n.m}(r)$, $U_{2.n.m}(r)$, $V_{1.n.m}(r)$, $V_{2.n.m}(r)$, $U'_{1.n.m}(r)$, $U'_{2.n.m}(r)$, $V'_{1.n.m}(r)$, $V'_{2.n.m}(r)$ mittels der Gleichungen (337) - (339) und (341) in Abhängigkeit vom Radius zu ermitteln. Schließlich findet man aus den Funktionen U_n, V_n, U'_n, V'_n und mit den Gleichungen (269) die Elemente des Tensors der zusätzlichen Spannungen, Ξ.

Der Tensor Ξ beschreibt vollständig den Spannungszustand innerhalb der Kugelschale ε. Er gestattet daher auch die Ermittlung der Spannungsunterschiede. Diese werden definiert als die stets positive Differenz zwischen der größten und der kleinsten Hauptspannung, die sich nach der Hauptachsentransformation ergeben.

Mit dem Spannungstensor Ξ nach (268) stellt man die charakteristische Gleichung

$$(364) \quad \begin{vmatrix} \vartheta_{rr} - \Psi & \vartheta_{r\delta} & \vartheta_{r\lambda} \\ \vartheta_{r\delta} & \vartheta_{\delta\delta} - \Psi & \vartheta_{\delta\lambda} \\ \vartheta_{r\lambda} & \vartheta_{\delta\lambda} & \vartheta_{\lambda\lambda} - \Psi \end{vmatrix} = 0$$

auf. Sie ist eine kubische Gleichung für Ψ:

$$(365) \quad \Psi^3 - \Xi_1 \Psi^2 + \Xi_2 \Psi - \Xi_3 = 0 .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Die Ausdrücke Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 sind die Invarianten 1., 2. und 3. Ordnung der Matrix Ξ; sie sind invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen dieser Matrix:

$$(366)\qquad \Xi_1 = \vartheta_{rr} + \vartheta_{\delta\delta} + \vartheta_{\lambda\lambda} ,$$

$$(367)\qquad \Xi_2 = \begin{vmatrix} \vartheta_{\delta\delta} & \vartheta_{\delta\lambda} \\ \vartheta_{\delta\lambda} & \vartheta_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vartheta_{rr} & \vartheta_{r\lambda} \\ \vartheta_{r\lambda} & \vartheta_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vartheta_{rr} & \vartheta_{r\delta} \\ \vartheta_{r\delta} & \vartheta_{\delta\delta} \end{vmatrix} ,$$

$$(368)\qquad \Xi_3 = \begin{vmatrix} \vartheta_{rr} & \vartheta_{r\delta} & \vartheta_{r\lambda} \\ \vartheta_{r\delta} & \vartheta_{\delta\delta} & \vartheta_{\delta\lambda} \\ \vartheta_{r\lambda} & \vartheta_{\delta\lambda} & \vartheta_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} .$$

Die drei Invarianten lassen sich auch durch die drei Hauptspannungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ausdrücken:

$$(369)\qquad \Xi_1 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 ,$$

$$(370)\qquad \Xi_2 = \vartheta_2\,\vartheta_3 + \vartheta_3\,\vartheta_1 + \vartheta_1\,\vartheta_2 ,$$

$$(371)\qquad \Xi_3 = \vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3 ;$$

$$(372)\qquad \vartheta_1 \geqq \vartheta_2 \geqq \vartheta_3 .$$

Nach der Hauptachsentransformation hat der Tensor Ξ die Form

$$(373)\qquad \Xi = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix} .$$

Aus der kubischen Gleichung (365) ergeben sich drei Werte für Ψ, dies sind die drei Hauptspannungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Der gesuchte Spannungsunterschied ist gleich $\vartheta_1 - \vartheta_3$. Die Auflösung von (365) erfolgt nach bekannten Verfahren. Es empfiehlt sich hier der folgende Formelapparat:

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0 ,$$

$$x = y - \frac{a}{3} ,$$

$$y^3 + 3\,p\,y + 2\,q = 0 ,$$

$$3\,p = -\frac{a^2}{3} + b, \qquad 2\,q = \frac{2}{27}\,a^3 - \frac{a\,b}{3} + c ;$$

es liegen drei reelle Lösungen vor, wenn

$$q^2 + p^3 \leqq 0 .$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Daraus folgt, daß $p < 0$. Mit

$$\cos\varphi = \frac{-q}{\underset{+}{\sqrt{-p^3}}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{-q^2 - p^3}}{\sqrt{-p^3}}$$

folgt

$$y_1 = 2 \underset{+}{\sqrt{-p}} \cos\frac{\varphi}{3},$$

$$y_2 = -2 \underset{+}{\sqrt{-p}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right),$$

$$y_3 = -2 \underset{+}{\sqrt{-p}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right);$$

der Winkel φ liegt im I. oder II. Quadranten, je nachdem, ob $q < 0$ oder $q > 0$.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

12. Unterrand der Schichtung ohne elastische Deformation durch den Effekt der Dichteanomalien

Bei der in Kap. 9 und 10 betrachteten zweiten Variante des Verfahrens zur Bestimmung der Dichteanomalien verändert der Unterrand der Kugelschale ε nicht seine sphärische Gestalt. Es gilt hier also die Randbedingung, daß die drei Punktverschiebungen bei $r = R_u$ verschwinden. Weil die Schichten unterhalb der Tiefe $t = D$ im hydrostatischen Gleichgewicht bleiben sollen, darf auf die Fläche $r = R_u$ auch kein Spannungsvektor wirken. Es kommen also noch drei weitere, für den Unterrand gültige Randbedingungen hinzu; sie bewirken, daß dort die drei Komponenten des Spannungsvektors verschwinden. Schließlich ist die Oberfläche der Erde eine freie Randfläche, auf der aber als zusätzliche Belastung die Flächenbelegungen σ_y, σ_a und σ_b verteilt sind. An der Oberfläche $r = R_o$ treten also drei weitere Randbedingungen für die drei Komponenten des Spannungsvektors auf. Nun lassen sich die Differentialgleichungen für das elastische Gleichgewicht eindeutig integrieren und als Randwertproblem lösen, wenn entlang der Oberfläche des Körpers Randbedingungen gegeben sind in der Form, daß entweder die drei Komponenten des Spannungsvektors oder die drei Komponenten der Punktverschiebung vorgeschrieben sind. Am Unterrand $r = R_u$ liegen somit drei überschüssige Bedingungen vor; sie können nicht im Rahmen der Lösung des Randwertproblems bei gegebenen Dichteanomalien befriedigt werden, sie müssen vielmehr schon eingeführt werden, wenn die Dichteanomalien so bestimmt werden, daß das Integral über ihre Quadrate gemäß (112), (129) zu einem Minimum wird. Bei der zweiten Variante müssen also die Bedingungen (361), (362), (351), (352), (357) - (360) für $\pi_{n.1.h}$, $\pi_{n.2.h}$, $\pi_{n.3}$, $\pi_{n.4}$, $\pi_{n.7}$, $\pi_{n.8}$, $\pi_{n.9}$, $\pi_{n.10}$ erfüllt sein.

Die Bedingungen $\pi_{n.7}$ und $\pi_{n.9}$ für die Punktverschiebungen werden aus den Randbedingungen herausgenommen und dem Ausdruck Γ als zusätzliche Nebenbedingungen beim Aufsuchen des Minimums hinzugefügt. Mit (337) und (338) hat man daher in abkürzender Bezeichnungsweise die linearen Funktionen

$$(374) \qquad U_n = L_{1.n}(x_j) ,$$

$$(375) \qquad V_n = L_{2.n}(x_j) .$$

Die Werte x_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ sind die konstanten Koeffizienten bei den Potenzreihenentwicklungen für die Funktionen U_n und V_n.

Löst man jetzt die Differentialgleichungen (302) und (303) als Randwertproblem nach der ersten Variante, also mit den Randbedingungen (363) $\pi_{n.3}$, $\pi_{n.4}$, $\pi_{n.5}$, $\pi_{n.6}$, dann erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter x_j aus den Inhomogenitäten dieser Gleichungen (361) - (363). Man findet

$$(376) \qquad \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{l}} = 0$$

mit

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

$$(377)\quad \underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \\ x_j \\ \cdots \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{l}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \cdots \\ \\ l_s \\ \cdots \end{bmatrix}; \qquad j = 1, 2, 3, \ldots; \qquad s = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Inhomogenitäten l_s sind mit (361), (362), (351), (304) die Ausdrücke

$$c_o(r_h), \qquad c_{oo}(r_h), \qquad g_o Y_n - g_o \rho^o \xi A_n.$$

Diese sind linear in den Unbekannten der Minimumaufgabe des Kap. 5,

$$(378)\quad X_{n.i}, \quad Y_n, \xi; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tau .$$

Der Index n steht hier wieder für die Wertetripel $1.n.m$ und $2.n.m$. Die Gesamtheit der Unbekannten werde mit

$$y_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots,$$

bezeichnet. Die Inhomogenitäten l_s sind lineare Funktionen von den Parametern y_α,

$$(379)\quad l_s = L_{3.s}(y_\alpha) .$$

Aus (376) folgt

$$(380)\quad \underline{\underline{x}} = (\underline{\underline{F}})^{-1}\, \underline{\underline{l}}$$

und mit (377) und (379)

$$(381)\quad x_j = L_{4.j}(y_\alpha) .$$

Die Linearisierung von (374) für $t = D$ ergibt mit (357)

$$(382)\quad 0 = \Omega_{n.5} = U_n = L_{1.n}(x_j) = L_{1.n}(0) + \sum_\alpha y_\alpha \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} L_{1.n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} L_{4.j}\right) .$$

Dafür kann gesetzt werden

$$(383)\quad 0 = \Omega_{n.5} = U_{n.o} + \sum_i U_{n.1.i}\, X_{n.i} + U_{n.2}\, Y_n + U_{n.3}\, \xi .$$

Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L_{1.n}, \qquad \frac{\partial}{\partial y_\alpha} L_{4.j}$$

kann man auch in der Rechenmaschine als Differenzenquotienten erhalten. Die lineare Bedingungsgleichung

$$(384)\quad 0 = \Omega_{n.6} = V_{n.o} + \sum_i V_{n.1.i}\, X_{n.i} + V_{n.2}\, Y_n + V_{n.3}\, \xi$$

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

wird analog wie (383) gewonnen. Nunmehr kann das Minimum der Funktion Σ nach (129) unter Beachtung der sechs verschiedenen Arten von Nebenbedingungen

$$\Omega_{n.\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, 6)$$

ermittelt werden.

(385) $$\Sigma + \sum_n \sum_\beta K_{n.\beta} \, \Omega_{n.\beta} \longrightarrow \text{Minimum.}$$

Die Differentiation dieses Ausdrucks nach den Unbekannten y_α und die Gleichungen $\Omega_{n.\beta}$ ergeben das System zur Bestimmung der Unbekannten y_α. Die Differentiation liefert

(386) $$8\pi R_o^2 \frac{1}{m_o^2} \sum_i \left[\gamma_5(i, k) + \nu_2 \gamma_5(i, k+2)\right] X_{n.i} + \gamma_1(n, k) K_{n.1} +$$
$$+ \gamma_2(n, k) K_{n.2} + D^k K_{n.3} + k D^{k-1} K_{n.4} + U_{n.1.k} K_{n.5} + V_{n.1.k} K_{n.6} = 0 ,$$

(387) $$8\pi R_o^2 T_y \frac{1}{m_y^2} Y_n + K_{n.1} + K_{n.2} + U_{n.2} K_{n.5} + V_{n.2} K_{n.6} = 0 .$$

Die Ableitung nach ξ umfaßt alle Kugelfunktionen

(388) $$\sum_n \sum_m \sum_p \left[A_{p.n.m} \sum_q K_{p.n.m.q} + U_{p.n.m.3} K_{p.n.m.5} + V_{p.n.m.3} K_{p.n.m.6}\right] = 0 ;$$
$$p, q = 1, 2 .$$

Aus der Gesamtheit der Gleichungen (386) - (388) zusammen mit den Bedingungsgleichungen

$$\Omega_{n.\beta} \qquad (\beta = 1, 2, 3, \ldots, 6)$$

ergibt sich das lineare System zur Bestimmung der Unbekannten y_α. Aus ihnen gewinnt man die Punktverschiebungen, den Spannungstensor und die Spannungsunterschiede.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Literatur

[1] ALTERMAN, Z.; JAROSCH, H.; PEKERIS, C.L.: Oscillations of the Earth.
Proc. roy. Soc., London A 252 (1959), S. 80-95

[2] ANDERSON, D.L.: Latest information from seismic observations.
In: The Earth's mantle, ed. by T.F. GASKELL.
London, New York: Academic Press 1967; 509 S.

[3] ARKANI-HAMED, J.: Lateral variations of density in the mantle.
Geophys. J. roy. astron. Soc., Oxford 20 (1970), S. 431-455

[4] ARNOLD, K.: Methoden der Satellitengeodäsie.
Berlin: Akademie-Verlag 1970; 231 S.

[5] ARNOLD, K.: The low velocity layer as a source of the discrepancy between the dynamic and static flattening of the Earth.
Gerlands Beitr. Geophysik, Leipzig 82 (1973) 6, S. 477-481

[6] BALMINO, G.; LAMBECK, K.; KAULA, W.M.: A spherical harmonic analysis of the Earth's topography.
J. geophys. Res., Richmond 78 (1973) 2, S. 478-481

[7] DOORNBOS, D.J.: Characteristics of lower mantle inhomogeneities from scattered waves.
Geophys. J. roy. astron. Soc., Oxford 44 (1976), S. 447-470

[8] FLÜGGE, S.: Handbuch der Physik, Bd. 2: Mathematische Methoden II.
Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1955; 520 S.

[9] GAPOSCHKIN, E.M.: 1973 Smithsonian Standard Earth III.
Shmithsonian Institution, Astrophys. Obs., Cambridge (Mass.), Spec. Rep. 353 (1973); 388 S.

[10] HIDE, R.; HORAI, K.: On the topography of the core--mantle interface.
Phys. Earth and planet. Interiors, Amsterdam 1 (1968), S. 305-308

[11] HIGBIE, J.; STACEY, F.D.: Depth of density variations responsible for features of the satellite geoid.
Phys. Earth and planet. Interiors, Amsterdam 4 (1970), S. 145-148

[12] JEFFREYS, H.: The stress-differences in the Earth's shell.
Monthly Not. roy. astron. Soc., Geophys. Suppl., Oxford 5 (1943) 3, S. 71-89

[13] JEFFREYS, H.: The Earth, 5th ed.
Cambridge: University Press 1970; 525 S.

[14] KAULA, W.M.: Elastic models of the mantle corresponding to variations in the external gravity field.
J. geophys. Res., Richmond 68 (1963) 17, S. 4967-4978

[15] KOCH, K.R.: Geophysical interpretation of density anomalies of the Earth computed from satellite observations and gravity measurements.
Z. Geophysik, Würzburg 38 (1972), S. 75-84

[16] LEDERSTEGER, K.: Astronomische und Physikalische Geodäsie.
In: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 5, ed. JORDAN/EGGERT/KNEISSL.
Stuttgart: Metzlersche Verlagsbuchhandlung 1969; 871 S.

[17] McKENZIE, D.P.: Some remarks on heat flow and gravity anomalies.
J. geophys. Res., Richmond 72 (1967) 24, S. 6261-6273

[18] MELCHIOR, P.: Physique et dynamique planétaire, Bd. 3.
Bruxelles: Vander 1972; 268 S.

[19] MORITZ, H.: Ellipsoidal mass distributions.
Department of Geodetic Science, Ohio State Univ., Rep. No. 206 (1973); 55 S.

[20] MÜLLER, W.: Theorie der elastischen Verformung.
Leipzig: Akadem. Verl.-Ges. Geest & Portig 1959; 327 S.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

[21] O'KEEFE, J.A.: Discussion of paper by W.A. HEISKANEN, "The latest achievements of physical Geodesy".
J. geophys. Res., Richmond 66 (1961) 6, S. 1992-1993

[22] RAPP, R.H.: The gravitational potential of the Earth to degree 36 from terrestrial gravity data.
Vorgelegt auf der 16. Generalversammlung der Internat. Union f. Geodäsie und Geophysik, Grenoble 1975; 12 S.

[23] ROBERTSON, E.C.: The nature of the solid Earth.
New York: McGraw-Hill 1972; 677 S.

[24] SCHICK, R.; SCHNEIDER, G.: Physik des Erdkörpers.
Stuttgart: Enke 1973; 267 S.

[25] TAKEUCHI, H.: On the Earth tide of the compressible Earth of variable density and elasticity.
Trans. amer. geophys. Un., Richmond 31 (1950) 5, S. 651-689

[26] TOKSÖZ, M.N.; ARKANI-HAMED, J.; KNIGHT, C.A.: Geophysical data and long-wave heterogeneities of the mantle.
J. geophys. Res., Richmond 74 (1969) 15, S. 3751-3770

[27] WYLLIE, P.J.: The dynamic Earth: Textbook in geosciences.
New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons 1971; 416 S.

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Liste der Publikationsreihe

"Veröffentlichungen des Zentralinstituts

für Physik der Erde"

Nr. 1 + WALZER, UWE: Untersuchungen der Polarisation und anderer Eigenschaften der langperiodischen Mikroseismik. Potsdam 1969

Nr. 2 + HÄNSEL, HORST; WILKE, HANS-JOACHIM: Durchführung spezieller geophysikalischer Analogieexperimente und ihre Deutung. Potsdam 1969

Nr. 3 + ELSTNER, CLAUS: Zur Einwirkung der Stativelastizität auf Amplituden und Phasen von Schwerependeln. Potsdam 1969

Nr. 4 FRÖLICH, FRIEDRICH: Beiträge zum Erkundungsprogramm: Materieparameter im Bereich der Erdkruste, Teil II: Ergänzende festkörperphysikalische und physikochemische Untersuchungen, Auswertung. Potsdam 1970

Nr. 5 + ROTHER, KLAUS: Gesteins- und paläomagnetische Untersuchungen an Gesteinsproben vom Territorium der DDR aus dem Präkambrium bis zum Tertiär und Folgerungen für die Veränderungen des geomagnetischen Hauptfeldes sowie für geologisch-geotektonische Interpretationsmöglichkeiten. Potsdam 1971

Nr. 6 WÄSCH, RICHARD: Untersuchungen über den Einfluß eines homogenen Magnetfeldes auf das orientierte Wachstum von Magnetit und Hämatit unterhalb der CURIE- bzw. NEEL-Temperatur. Potsdam 1971

Nr. 7 + ARNOLD, KURT: Das Geoid aus Beobachtungen der Satellitenaltimetrie. Potsdam 1972

Nr. 8 + ARNOLD, KURT u. a.: Die Bestimmung des Richtungsvektors Riga-Sofia aus Beobachtungen des Satelliten "Echo 2". Potsdam 1971

Nr. 9 + BORMANN, PETER: Statistische Untersuchungen zur Ortung teleseismischer Ereignisse aus Raumwellenregistrierungen der Station Moxa. Potsdam 1971

Nr. 10 SCHÜLER, RUDI u. a.: Absolute Schweremessungen mit Reversionspendeln in Potsdam 1968-1969. Potsdam 1971

Nr. 11 + HÖPFNER, JOACHIM: Analyse der Beobachtungsergebnisse der astronomisch-geodätischen Längenbestimmung Borowiec-Dresden-Potsdam aus dem Jahre 1966. Potsdam 1971

Nr. 12 + TEUPSER, CHRISTIAN: Die kurzperiodischen Seismographen Typ VSJ-II und HSJ-II. Potsdam 1971

Nr. 13 + ARNOLD, KURT: Zur geodätischen Nutzung der Entfernungs- und Radiointerferenzmessungen nach entfernten kosmischen Objekten. Potsdam 1972

Nr. 14 + ... Stockwerkbau und Felderteilung. Symposium 25 Jahre geotektonische Forschung an der Akademie der Wissenschaften der DDR. Potsdam 1973

Nr. 15 MAREK, KARL-HEINZ: Photographische Positionsbestimmung künstlicher Erdsatelliten mit einer Tracking-Kamera. Potsdam 1973

Nr. 16 .... Physikalische Parameter und seismische Geschwindigkeiten. Vorträge von der Sitzung der Arbeitsgruppe "Seismologie und Physik der extremen Bedingungen" der CSE vom 25.-27.5.1970 in Potsdam. Potsdam 1972

Nr. 17 .... Einige Ergebnisse zum thermischen und elektrischen Verhalten von Mineralen und Gesteinen. Potsdam 1972

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Nr. 18 MAAZ, RICHARD: Papers presented at the meeting "Statistical and tectonophysical aspects of seismicity" of the CSE Working Group Statistical Methods, Jena, May 1972. Potsdam 1972

Nr. 19 ARNOLD, KURT: Die Niveauflächen der Erde nach der Integralgleichung für das gravimetrische Zusatzglied und anderen Verfahren. Potsdam 1973

Nr. 20 LÜTZNER, JÜRGEN u. a.: Tabellarische Dokumente klastischer Sedimente.
\+ Potsdam 1974

Nr. 21 .... Geodynamische Probleme. Potsdam 1973
\+

Nr. 22 .... Physikalische Eigenschaften von Gesteinen und Mineralen unter hohen Drücken und Temperaturen. Potsdam 1974

Nr. 23 MUNDT, WOLFGANG: Der Charakter der geomagnetischen Säkularvariation in Europa im Zeitraum von 1950 bis 1970. Potsdam 1973

Nr. 24 MALISCHEWSKY, PETER: Ausbreitung von seismischen Oberflächenwellen in
\+ Medien mit vertikalen Diskontinuitäten. Potsdam 1973

Nr. 25 UNTERREITMEIER, ERHARD: Zur Erhöhung der Störfreiheit langperiodischer Seismographensysteme. Potsdam 1973

Nr. 26 RAUHUT, JOACHIM; KÜHNE, KONRAD: Ein Interferometer für geodätische Basismessungen nach dem VÄISÄLÄ-Prinzip. Potsdam 1975

Nr. 27 LIEBERT, JOACHIM: Beiträge zur Untersuchung des Babelsberger Meridiankreises. Potsdam 1973

Nr. 28 VOIT, THEA: Bibliographie 1922-1973. 50 Jahre Seismologische Forschung in Jena. Potsdam 1974

Nr. 29 .... Aufgaben und Ergebnisse der Forschungsarbeiten des Zentralinstituts
\+ für Physik der Erde. Potsdam 1974

Nr. 30 .... 2nd International Symposium Geodesy and Physics of the Earth. Potsdam,
\+ May 7th-11th, 1973. Teil 1 u. 2, Proceedings. Potsdam 1974

Nr. 31 .... Seismology and Solid-Earth-Physics. International Symposium on the
\+ occasion of 50 years of seismological research and 75 years of seismic registration at Jena, april 1 to 6, 1974. Teil 1 u. 2, Proceedings. Potsdam 1975

Nr. 32 HÖPFNER, JOACHIM: Sternkoordinatenkorrektionen für den FK4 aus Beobachtungsmaterial am Astrolab Danjon. Potsdam 1975

Nr. 33 WENDLAND, FOLKWART: Zur Strukturentwicklung schwach dislozierter Salinarstrukturen in Nordostmecklenburg, Strukturen Grimmen und Reinkenhagen (Beiträge zur Mächtigkeitsanalyse von Salinaren). Potsdam 1976

Nr. 34 .... Physikalische Eigenschaften von Gesteinen und Mineralen unter hohen Drücken und Temperaturen. Vorträge, gehalten auf der Sitzung der Arbeitsgruppe 1.11 der KAPG "Physikalische Eigenschaften von Gesteinen und Mineralen bei hohen thermodynamischen Parametern" vom 25.6.-27.6.1973 in Jena. Potsdam 1975

Nr. 35 JOCHMANN, HORST: Der Einfluß von Luftmassenbewegungen in der Atmosphäre
\+ auf die Polbewegung. Die Jahresperiode und CHANDLER-Periode der Polbewegung (1923-1959). Potsdam 1976

Nr. 36 DITTRICH, JOHANNES: Über thermisch bedingte Einflüsse bei Transitbeobachtungen im Meridian. Potsdam 1976

Nr. 37 MEINIG, MANFRED: Sternkatalog für das Potsdamer PZT. Potsdam 1976

Nr. 38 .... Bibliographie 1890-1969 der Mitarbeiter des Geomagnetischen Instituts Potsdam, zusammengestellt von F. Frölich und K. Lengning. Potsdam 1977

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048

Nr. 39 MENNING, MANFRED: Die nachträgliche Orientierung von Bohrkernen unter besonderer Berücksichtigung des Paläomagnetismus. Potsdam 1976
+

Nr. 40 .... Arbeiten zur Satellitengeodäsie. Potsdam 1976

Nr. 41 ULLMANN, WOLFGANG; PAN'KOV, V.L.: A new structure of the equation of state and its application in high-pressure physics and geophysics. Potsdam 1976
+

Nr. 42
++

Nr. 43
+++

Nr. 44/I Probleme der Variszіden in Mitteleuropa und im Gebiet der UdSSR. Potsdam 1977
+

Nr. 44/II
+++

Nr. 45 HÖPFNER, JOACHIM: Auswertung der Zeitbestimmungen des geodätisch-astronomischen Observatoriums Potsdam als Längenbestimmungen im System BIH 1968 und daraus erhaltene erste Untersuchungsergebnisse. Potsdam 1976

Nr. 46
++

Nr. 47
+++

Nr. 48 ARNOLD, KURT: Dichteanomalien in den oberen Schichten der Erde. Potsdam 1978

Nr. 49 MEINIG, MANFRED; JOCHMANN, HORST: Zeit- und Breitenbestimmungen mit dem photographischen Zenitteleskop des Zentralinstituts für Physik der Erde. Potsdam 1976

Nr. 50
++

Nr. 51 TEUPSER, CHRISTIAN; UNTERREITMEIER, ERHARD: Der elektronische Dreikomponentenseismograph EDS 1. Theorie, Aufbau und Wirkungsweise. Potsdam 1977

Nr. 52 .... 3rd International Symposium Geodesy and Physics of the Earth, GDR, Weimar, October 25th-31st, 1976, Teil 1-3, Proceedings. Potsdam 1977

Nr. 53
+++

\+ vergriffen

++ im Druck

+++ in Vorbereitung

DOI: http://doi.org/10.2312/ZIPE.1978.048