

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften
ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde
Nr. 60

**Kovarianzfunktionen
der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in der Ebene ¹⁾**

von

W. Keller und S. Meier

1) Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen von Untersuchungen zur Dreidimensionalen Geodäsie an der Sektion Geodäsie und Kartographie der Technischen Universität Dresden. Dem Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde (ZIPE), Potsdam, Herrn Prof. H. Kautzleben, sei gedankt, daß die Ergebnisse in die Veröffentlichungen des ZIPE aufgenommen werden konnten.

Herausgeber: Der Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde Potsdam

Als Manuskript gedruckt Potsdam 1980

I/16/46 FG 037/17/80

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassungen

Verzeichnis der Symbole

0. Einleitung

1. Überblick zur Transformation von Kovarianzfunktionen im Schwerefeld

1.1. Transformationsmöglichkeiten

1.2. Voraussetzungen und Modellfunktionen

2. Kovarianzfunktionen der 1. Ableitungen des Schwerepotentials (T_x, T_y, T_z)

2.1. Lotabweichungsvektor

2.2. Anomaler Schwerevektor

2.3. Modell-Beispiele

3. Kovarianzfunktionen der 2. Ableitungen des Schwerepotentials

($T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, T_{xz}, T_{yz}, T_{zz}$)

3.1. Niveauflächenkrümmung und Torsion des astronomischen Meridians

3.2. Horizontaler Schweregradient

3.3. Vertikaler Schweregradient

3.4. Kreuzkovarianzfunktionen zwischen den 2. Ableitungen

4. Vollständiges Schema der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials

4.1. Kreuzkovarianzfunktionen zwischen den 1. und 2. Ableitungen

4.2. Modell-Beispiele

4.3. Varianz-Kovarianz-Schemata

5. Ergänzende Betrachtungen

5.1. Höhere Ableitungen des Schwerepotentials

5.2. Räumliche Kovarianzfunktionen

5.3. Nicht-differenzierbare Modelle

Anhang

I Kovarianzfortpflanzung bei Faltungsoperationen

II Ebenes STOKES-Problem

III Differentiationsformeln

IV Fortsetzung ebener Prozesse in den Raum

Literatur

Abbildungen

Zusammenfassung

Ausgehend von der Kovarianzfunktion der Schwere (Schwereanomalie) und aufbauend auf den Arbeiten von GRAFAREND (1971, a-d, 1972, 1975), JORDAN (1972) und MORITZ (1974, 1975, 1976) werden die Autokovarianzfunktionen (AKF) der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials (Störpotentials) sowie sämtliche Kreuzkovarianzfunktionen (KKF) zwischen ihnen mit den Regeln der Kovarianzfortpflanzung in ebenen, homogenen, isotropen und differenzierbaren Zufallsfeldern abgeleitet. Das quadratische, bezüglich der Hauptdiagonale (AKF) symmetrische AKF-KKF-Schema umfaßt $9 \times 9 = 81$ Funktionen: 9 AKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials und 72 KKF zwischen ihnen. Davon sind 44 Funktionen (8 AKF, 36 KKF) durch Transformationen zu gewinnen. Als Ausgangsmodelle werden verallgemeinerte HIRVONEN-Modelle (MORITZ-, HIRVONEN- und POISSON-Modelle), das GAUSS-Modell sowie als Schwingungstyp die Spaltfunktion benutzt. Die abgeleiteten Funktionen lassen sich, in Polarkoordinaten-Schreibweise, als Skalarprodukte von Vektoren gewisser entfernungsabhängiger und winkelabhängiger Kompositionsfunktionen darstellen. Sie sind, anwendungsorientiert, in Tabellen zusammengefaßt. Die entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen sind für alle Modelle graphisch dargestellt. Im Grenzfall verschwindender Entfernungsdifferenz ergeben sich vollständige Varianz-Kovarianz-Schemata für einunddenselben Punkt der Ebene. Die benutzten mathematischen Grundlagen der Kovarianzfortpflanzung im (ebenen) Schwerefeld sind im Anhang behandelt.

Summary

Deriving from the covariance function of gravity (gravity anomaly) and based on the works by GRAFAREND (1971, 1972, 1975), JORDAN (1972), and MORITZ (1974, 1975, 1976) the autocovariance functions (AKF) of 1st and 2nd derivations of the gravity potential (disturbing potential) as well as all cross covariance functions (KKF) between them are derived by means of rules of the covariance propagation in plane, homogeneous, isotropic, and differentiable random arrays. The square AKF-KKF scheme, which is symmetrically concerning the principal diagonal (AKF), includes $9 \times 9 = 81$ functions: 9 AKF of 1st and 2nd derivations of the gravity potential and 72 KKF between them. 44 functions of them (8 AKF, 36 KKF) are to be obtained by transformation. As initial models generalized HIRVONEN models (MORITZ, HIRVONEN, and POISSON models), the GAUSSIAN model, and as a mode of oscillation the split function are used. The derived functions may be presented in polar coordinate writing, as skalar products of vectors of certain distance- and angle-dependent composition functions. They are compiled in tables concerning applications. The distance-dependent compositions functions are represented for all models graphically. In borderline case of disappearing distance difference it results complete variance-covariance schemes for one and the same point of the plane. The used mathematical foundations of covariance propagations in (plane) gravity field are described in the annex.

Résumé

Partant de la fonction de covariance de la pesanteur (anomalie de pesanteur) et sur la base des travaux de GRAFAREND (1971, 1972, 1975), de JORDAN (1972) et de MORITZ (1974, 1975, 1976), on déduit les fonctions d'autocovariance (AKF) des 1^{ère} et 2^è dérivées du potentiel gravitationnel (potentiel anormal) et l'ensemble des fonctions de covariance mutuelle (KKF) entre elles suivant les règles de la propagation de covariances dans des champs aléatoires plans, homogènes, isotropes et différenciables. Le schéma des AKF-KKF est quadratique, et symétrique par rapport à la diagonale principale (AKF); il contient $9 \times 9 = 81$ fonctions: 9 AKF des 1^{ère} et 2^è dérivées du potentiel gravitationnel et 72 KKF entre elles. Parmi les fonctions (8 AKF, 36 KKF), 44 sont obtenues par voie de transformation. Les modèles de départ utilisés sont des modèles généralisés de HIRVONEN (modèles de MORITZ, de HIRVONEN et de POISSON), le modèle de GAUSS et, comme mode d'oscillation, la fonction de fente. Les fonctions déduites peuvent être représentées en symbolisme des coordonnées polaires comme produits scalaires des vecteurs de certaines fonctions de composition dépendant de distances et d'angles. Elles sont réunies dans des tables en vue de leur application. Les fonctions de composition dépendant des distances sont représentées graphiquement pour tous les modèles. Dans le cas limite d'une différence de distance disparaissante, on obtient des schémas variance-covariance complets pour un et le même point dans le plan. Les concepts mathématiques utilisés pour la propagation de covariances dans le champ gravitationnel (plan) sont traités en annexe.

Резюме

Исходя из ковариантной функции силы тяжести (аномалии силы тяжести) и основываясь на работах GRAFAREND (1971, 1972, 1975 гг.), JORDAN (1972) и MORITZ (1974, 1975, 1976 гг.), выводятся автоковариантные функции (AKF) 1-го и 2-го выводов потенциала силы тяжести (потенциала помех), а также все перекрёстные ковариантные функции (KKF) между ними с правилами распространения ковариантности в плоских, однородных, изотропных и определённых случайных полях. Квадратическая, симметричная по отношению к основной диагонали (AKF) схема AKF-KKF объединяет $9 \times 9 = 81$ функций: 9 AKF 1-го и 2-го выводов потенциала помех и 72 KKF между ними. 44 функции из них (8 AKF, 36 KKF) можно получить при помощи трансформаций. В качестве исходных моделей используются обобщённые модели HIRVONEN (модели HIRVONEN, MORITZ, POISSON), модель Гаусса, а также в качестве типа колебания — функция расщепления. Выведенные функции могут быть изображены при помощи полярных координат в качестве продуктов шкалы векторов определённых, зависящих от расстояния и угла композиционных функций. С ориентированием на применение они объединены в таблицы. Зависящие от расстояния композиционные функции графически изображены для всех моделей. В случае исчезающей разницы расстояния получаются полные схемы вариантности-ковариантности для одного и того же пункта плоскости. В приложении обсуждаются использованные математические основы распространения ковариантности в (плоском) поле силы тяжести.

Symbole

a) Lateinisches Alphabet

A	Feldgröße
a	
B	Feldgröße, Beta-Funktion
b	
C	Kovarianzfunktion
c	
D	
d	Korrelationslänge (Halbwertsbreite), (Abkling-)Konstante
E	Erwartungswert
e	Einheitsvektor
F	Hypergeometrische Reihe, nichtnegative integrierbare Funktion
f	(Kompositions-, Hilfs-, Gewichts-)Funktion
G	
g	Schwere (Δg Schwereanomalie), Hilfsfunktion
H	
h	Hilfsfunktion
I	BESSEL-Funktion einer rein imaginären Variablen
i	Index
J	BESSEL-Funktion
j	Index
K	MACDONALDsche Funktion, Kompaktum des \mathbb{R}^6
k	Index, Wellenzahl
M	positive Konstante
m	Exponent, Index
N	
n	natürliche Zahl
O	LANDAUsches Symbol
o	
P	Punkt, POISSON-Kern, Wahrscheinlichkeitsmaß
p	
R	Korrelationsfunktion, Radius
r	(ebene)Entfernung (Entfernungsdifferenz)
S	Spaltfunktion
s	Lotabweichungskomponente (ξ oder η)
T	Störpotential
t	Koordinate
U	
u	Koordinate
W	Schwerepotential
w	
X	
x	Koordinate (Koordinatendifferenz)
Y	
y	Koordinate (Koordinatendifferenz)
Z	
z	Koordinate (Koordinatendifferenz)

b) Griechisches Alphabet

- α Winkel, Multi-Index
- β Multi-Index
- Γ Gamma-Funktion
- γ Normalschwere (mittlere Schwere, Trend)
- ξ Koordinate
- η Lotabweichungskomponente (Ost), Koordinate, Funktion aus \mathcal{D} , stationärer Prozeß
- Θ Kompositionsfunktion
- λ Wellenlänge
- μ positives endliches Maß
- ξ Lotabweichungskomponente (Nord), Koordinate, stationärer Prozeß
- Υ Fläche des Einheitskreises
- Σ Summe
- σ Varianz, Kovarianz, verallgemeinerte Lotabweichungskomponente
- ζ normierte Entfernungsdifferenz
- Φ Kompositionsfunktion (Korrelationsfunktion der Schwereanomalie)
- Ψ Azimut, Funktion aus \mathcal{D}
- Ψ Kompositionsfunktion (Querkorrelation)
- Ψ Funktion aus \mathcal{D}
- Ω Kompositionsfunktion (Längskorrelation), Ereignisraum
- ω Kreiswellenzahl, Element von Ω

c) Fraktur

- \mathfrak{A} Ereignisalgebra über Ω
- \mathfrak{f} Vektor von Kompositionsfunktionen

d) Sonderzeichen

- \mathbb{R}^n Vektorraum der reellen n-Tupel
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ Menge der auf \mathbb{R}^n beliebig oft differenzierbaren, finiten Funktionen
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$
- \mathcal{D}' Menge der linearen, stetigen Funktionale auf \mathcal{D}
- \mathcal{E} Menge der linearen, stetigen Funktionale auf \mathcal{D} mit kompaktem Träger
- \mathcal{F}' Menge der schwach wachsenden verallgemeinerten Funktionen
- $\mathcal{L}_2(\Omega)$ HILBERTraum der bezüglich P auf Ω quadratisch integrierbaren Funktionen
- ∂_i partielle Ableitung nach der i-ten Komponente des Arguments
- $\frac{\partial}{\partial n}$ Richtungsableitung in Richtung der äußeren (bzw. inneren) Normalen
- $*$ Faltungssymbol
- \sim Symbol für FOURIERtransformierte

0. Einleitung

Im Konzept der Kollokation nach kleinsten Quadraten ist es möglich, verschiedenartige Meßgrößen gemeinsam zu verarbeiten, im Schwerefeld z. B. Schwereanomalien, Lotabweichungen, Schweregradienten, Niveauflächen- und Lotkrümmungen. Das Verfahren hat sich u. a. bei Prädiktionen im Schwere- und Lotabweichungsfeld, bei Geoidbestimmungen und in der Flug- und Satellitengradiometrie bewährt. Zu seiner Anwendung müssen die stochastischen Eigenschaften der Zufallsfelder, aus denen die Meßgrößen stammen, sowie ihre gegenseitige Abhängigkeit bekannt sein und sich als Signalkovarianzen darstellen lassen.

In der Geodäsie ist es im Hinblick auf das zur Verfügung stehende Datenmaterial üblich, aus der Autokovarianzfunktion (AKF) eines Ausgangsfeldes die AKFs verwandter Felder und die Kreuzkovarianzfunktionen zwischen ihnen mittels Transformation nach den Regeln der Kovarianz-Fortpflanzung (KF) herzuleiten. Im Falle der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in der Ebene kann das Ausgangsfeld das Schwerepotential selbst, das Störpotential oder die Geoidhöhe, aber auch die Schwere bzw. Schwereanomalie sein (Abschnitt 1.1.). Das Transformationsproblem wurde im wesentlichen durch die Arbeiten von GRAFAREND (1971 a-d, 1972, 1975), JORDAN (1972) und MORITZ (1974, 1975, 1976) gelöst. Kombinationen verschiedener Lösungswege sind möglich. Die Verfasser hielten es für notwendig, die Existenz der formalen Lösungen zu sichern. Dazu müssen Elemente der Theorie verallgemeinerter Funktionen (Distributionen) und der verallgemeinerten FOURIER-Transformation herangezogen werden. Um den Text zu entlasten und leicht lesbar zu halten, wird die mathematische Fundierung im Anhang gebracht.

Hauptziel der Arbeit ist, die AKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in der Ebene sowie sämtliche KKF zwischen ihnen für ausgewählte Modelle herzuleiten. Ausgangsfeld ist die Schwere oder die Schwereanomalie. Das quadratische, bezüglich der Hauptdiagonale (in der die AKF stehen) symmetrische AKF-KKF-Schema umfaßt $9 \times 9 = 81$ Funktionen: 3 AKF der 1. Ableitungen, 6 AKF der 2. Ableitungen des Schwerepotentials, 72 KKF zwischen ihnen. Davon sind aus Symmetriegründen je Modell 44 Funktionen durch Transformation (mit Hilfe von Integraltafeln) zu gewinnen: 8 AKF, $\binom{9}{2} = 36$ KKF. Sie sind in Polarkoordinaten dargestellt. In dieser Schreibweise treten typische Winkelabhängigkeiten isotroper und anisotroper Verhältnisse deutlich hervor. Ferner lassen sich damit alle Funktionen in gewisse entfernungsabhängige und winkelabhängige Bausteine, hier Kompositionsfunktionen genannt, zerlegen und als Skalarprodukte von Vektoren rein entfernungsabhängiger und rein winkelabhängiger Kompositionsfunktionen schreiben. Die Ergebnisse sind in Tabellen zusammengefaßt. Eine zusätzliche Übersichtstabelle erleichtert das Auffinden der jeweils gesuchten Funktion.

Im Text werden nach einer Übersicht der Transformationsmöglichkeiten (Abschnitt 1.1.) und Angabe der Voraussetzungen (Abschnitt 1.2.) die AKF und KKF der 1. Ableitungen (Abschnitt 2.), der 2. Ableitungen (Abschnitt 3.) sowie die KKF zwischen 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials (Abschnitt 4.) hergeleitet. Der Rechengang wird in groben Zügen skizziert; ein Beispiel wird jeweils angegeben.

Auf besondere Eigenschaften der Modelle und Lösungen wird in Form von Bemerkungen hingewiesen. Ergänzende Betrachtungen (Abschnitt 5.) stellen den Bezug zu räumlichen Funktionen her und bringen ein Beispiel der AKF höherer Ableitungen des Schwerepotentials in der Ebene.

Die Verfasser betrachten die vorliegende Arbeit als anwendungsorientierte Ergänzung zu den im Literaturverzeichnis angegebenen Originalarbeiten der KF im ebenen Schwerfeld. Die vollständigen AKF-KKF-Schemata mit der graphischen Darstellung der entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen sollen den Überblick erleichtern, wie sich gewisse Eigenschaften des Ausgangsfeldes im Zuge der Transformation fortpflanzen oder in den verwandten Feldern abbilden. Möglicherweise werden damit bei praktischen Aufgaben Genauigkeitsvoranschläge und die Entscheidung, ob man mit einer Modell-Transformation auskommt oder zur numerischen Transformation übergehen sollte, erleichtert.

Die Verfasser danken den Herren Prof. RIEDRICH, Dresden und Dr. SCHWAHN, Potsdam für hilfreiche Diskussionen.

1. Überblick zur Transformation von Kovarianzfunktionen im Schwerfeld

1.1. Transformationsmöglichkeiten

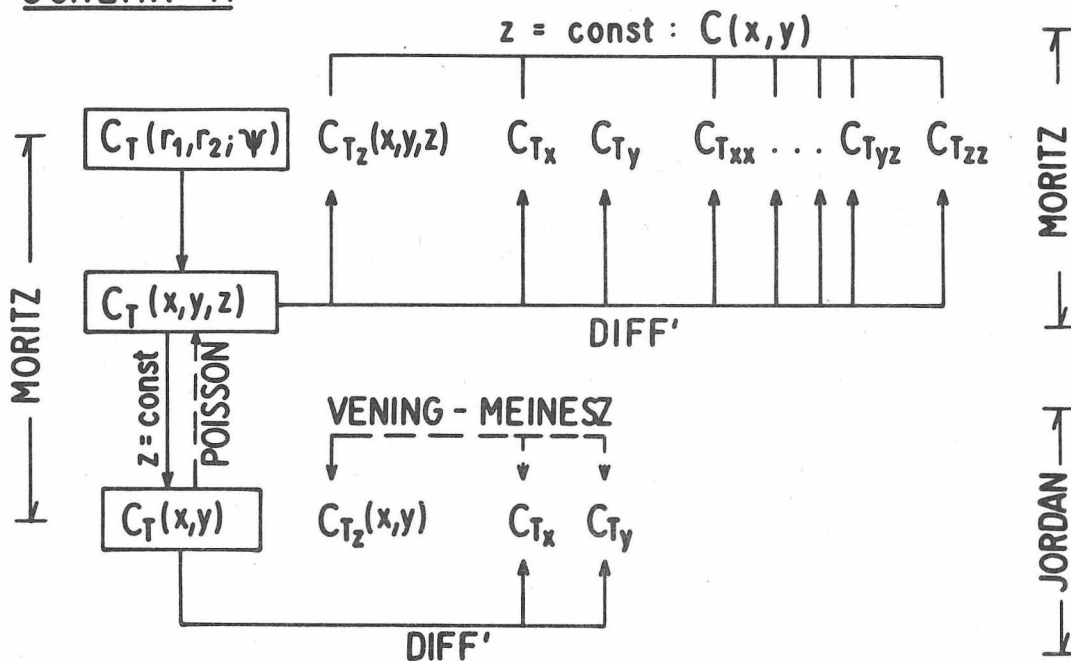
Je nach Aufgabenstellung sowie Quantität und Qualität der Datenmenge, aus der AKFs mit erforderlicher statistischer Sicherheit geschätzt werden können (oder bereits vorliegen), kann das skalare Ausgangsfeld das des Schwerepotentials (Abb. 1, Schema A) oder das der Schwere (Abb. 1, Schema B) sein.

MORITZ (1976, S. 3-7, S. 34-51) zeigt, wie man ausgehend von einer rotationssymmetrischen AKF $C_T(r_1, r_2; \Psi)$, wo r_1, r_2 die Radiusvektoren zweier Raumpunkte P_1, P_2 und Ψ ihr sphärischer Abstand sind, zu einer AKF $C_T(x, y, z)$ im rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem $\{x, y, z\}$ gelangen kann ("planar equivalent"). Wendet man auf $C_T(x, y, z)$ die Differentiationsregeln der KF (Anhang III) an, erhält man die AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Störpotentials als Funktionen von x, y, z und mit $z = \text{const}$ (Beispiel: konstante Flughöhe) die dazugehörigen Funktionen in einer festen Ebene. Der Vorteil des Verfahrens ist das einheitliche, leicht schematisierbare Vorgehen (MORITZ, 1974, 1975): nur ein Operationstyp, die Differentiation, kommt vor. Allerdings muß man bei den AKF und KKF der 2. Ableitungen viermal differenzieren; auf die Vorzeichenregeln ist ganz besonders zu achten. Die Verebnung geschieht im stochastischen Modell.

Werden nur Funktionen in der Ebene benötigt, kann man mit $z = \text{const}$ von $C_T(x, y, z)$ sofort zu $C_T(x, y)$ übergehen. Umgekehrt kann $C_T(x, y)$ mit Hilfe des POISSON-Integrals (sofern es existiert) in den oberen Halbraum fortgesetzt werden (MORITZ, 1976, S. 5-7, BELLAIRE, 1977). $C_T(x, y)$ ist der Ausgangspunkt der ebenen Transformation bei JORDAN (1972). Ebenfalls mit den Differentiationsregeln der KF erhält man die AKF/KKF der Lotabweichungskomponenten und der KKF zwischen letzteren und Störpotential bzw. Geoidhöhe. Zur Ableitung der AKF der Schwereanomalie sowie der KKF zwischen Schwereanomalie und Lotabweichungskomponenten, Schwereanomalie und Störpotential bzw. Geoidhöhe benötigt man die verebneten Integralformeln von STOKES und VENING-MEINESZ. Die Verebnung erfolgt hier bereits im funktionalen Modell. Die Transformation gelingt mit Hilfe der spektralen Darstellungsweise. Es treten diverse Existenzprobleme der entsprechenden FOURIER-Integrale auf.

Eine elegante Darstellung des ebenen Transformationsproblems gibt GRAFAREND (1971, b-d, 1972, 1975). Ausgangspunkt ist die AKF der Schwere (-anomalie), vgl. Abb. 1, Schema B. Mit Hilfe der verebneten VENING-MEINESZ-Formel, der ebenen FOURIER-Transformation und des Faltungstheorems gewinnt GRAFAREND das AKF-KKF-Schema des Schwerevektors. In der vorliegenden Arbeit folgen wir dem Vorgehen GRAFARENDs und erweitern das AKF-KKF-Schema auf die 2. Ableitungen, indem wir die ebene Integral-Transformation mit Schema A kombinieren: Anwendung der Differentiationsregeln der KF auf die Komponenten des Schwerevektors liefert AKF/KKF der 2. Ableitungen, mit Ausnahme der AKF des vertikalen Schweregradienten (und einiger KKF). Letztere gewinnen wir mit Anwendung der KF auf die LAPLACE-Gleichung (im Außenraum). Unabhängig davon kann die AKF der Schwere in den oberen Halbraum fortgesetzt werden, nach der Höhe differenziert und schließlich mit $z = \text{const}$ die AKF der vertikalen Schweregradienten gewonnen werden (Rechenkontrolle).

SCHEMA A



SCHEMA B

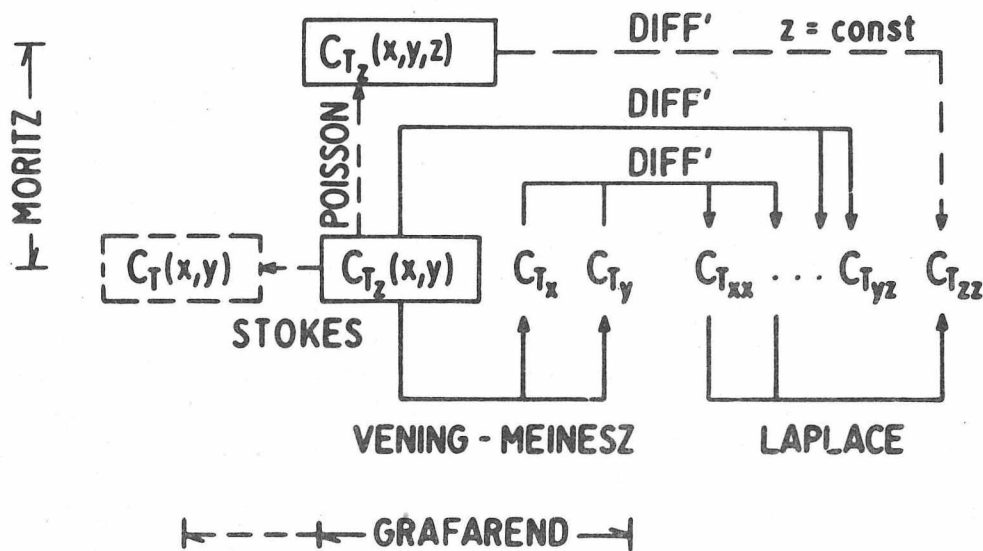


Abb. 1

Der Vorteil des Verfahrens ist, daß man mit zweimaliger Differentiation auskommt. Sofern die AKF/KKF der 1. Ableitungen des Störpotentials mit Hilfe von Integraltafeln ausgerechnet werden können, liegt in der ebenen Integraltransformation kein entscheidender Nachteil.

Wünschenswert (und für gewisse praktische Aufgaben notwendig) ist die Ergänzung des AKF-KKF-Schemas der 1. und 2. Ableitung durch die 0. Ableitung (Störpotential), indem man entweder die KF auf die verebnete STOKES-Formel anwendet (Transformation im Wellenzahlraum; GRAFAREND 1971 c, 1975) oder die Differentialbeziehungen zwischen T und T_x , T_y ausnutzt (Transformation im Ortsbereich). Mit C_T als Ausgangsmodell könnte dann, gemäß Schema A, die Rechnung in Schema B unabhängig kontrolliert werden.

Die Verträglichkeit der STOKES-Formel mit der Stationarität der Prozesse T und T_z konnte von den Verfassern nicht nachgewiesen und daher die Transformation im Wellenzahlraum nicht durchgeführt werden (Anhang II). Die Transformation im Ortsbereich ist genau dann möglich, wenn

$$\frac{\partial}{\partial y} C_{T_x T_x} = \frac{\partial}{\partial x} C_{T_x T_y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} C_{T_y T_y} = \frac{\partial}{\partial y} C_{T_y T_x}.$$

Diese Bedingungen sind im homogenen und isotropen Lotabweichungsfeld (Abschnitt 2.1.) erfüllt, jedoch stößt die praktische Rechnung auf erhebliche Schwierigkeiten. Sollte die AKF des Störpotentials und die KKF zwischen ihm und seinen Ableitungen benötigt werden, dürfte daher der Rechenweg in Schema A vorzuziehen sein.

1.2. Voraussetzungen und Modellfunktionen

Skalares Ausgangsfeld der Transformation sei das ebene, homogene, isotrope und differenzierbare Schwerefeld

$$(1) \quad g(x,y) = \bar{\sigma} + \Delta g(x,y)$$

mit dem Erwartungswert

$$(2) \quad E\{g\} = E\{\bar{\sigma}\} + E\{\Delta g\}, \quad E\{\bar{\sigma}\} = \bar{\sigma}, \quad E\{\Delta g\} = 0$$

und der AKF

$$(3) \quad C_{gg}(x,y) = C_{\Delta g \Delta g}(x,y) = C_{\Delta g \Delta g}(r), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Als Modellfunktionen benutzen wir verallgemeinerte HIRVONEN-Modelle

$$(4) \quad C_{\Delta g \Delta g}(r) = \sigma_{\Delta g}^2 \left[1 + (r/d)^2 \right]^{-m}, \quad \sigma_{\Delta g}^2 = C_{\Delta g \Delta g}(0),$$

insbesondere

- m = 1/2 : MORITZ-Modell,
- m = 1 : HIRVONEN-Modell,
- m = 3/2 : POISSON-Modell,

das GAUSS-Modell

$$(5) \quad C_{\Delta g \Delta g}(r) = \sigma_{\Delta g}^2 \exp \left[-(r/d)^2 \right]$$

und das Modell der Spaltfunktion

$$(6) \quad C_{\Delta g \Delta g}(r) = \sigma_{\Delta g}^2 (\omega r)^{-1} \sin \omega r.$$

Von den Funktionen (4) besitzen die mit $m = 1/2, 3/2$ (und nur diese) ein globales Äquivalent (MORITZ 1976, S. 34-43). Die zu $m = 1/2$ gehörende globale Funktion bezeichnet man in der angelsächsischen Literatur als "reciprocal distance covariance function", eine ins Deutsche nicht sehr glücklich zu übersetzende Bezeichnung. Da diese Funktion von MORITZ gründlich untersucht wurde, nennen wir (4) mit $m = 1/2$ MORITZ-Modell.

Die Konstante d ist ein Maß für das Abklingen der AKF, im Falle $m = 1$ identisch mit der Korrelationslänge (Halbwertsbreite): $C(r)/C(0) = 1/2$ für $r = d$.

Das GAUSS-Modell verhält sich ähnlich wie das HIRVONEN-Modell und ist in der Umgebung von $r = 0$ fast identisch mit der sog. logarithmischen AKF (MORITZ 1976, S. 31 u. 43-50), welche ebenfalls ein globales Äquivalent besitzt. Da das Verhalten der Ausgangsfunktion in der Nähe des Nullpunktes das Abklingen der differenzierten Funktionen in den praktisch interessierenden Entfernungsbereichen bestimmt (MORITZ 1976, S. 22-23) und sich das GAUSS-Modell sehr leicht transformieren läßt, mag es als Ersatz-Modell für die logarithmische AKF brauchbar sein.

Als einfaches Schwingungsmodell benutzen wir die Spaltfunktion (6). Derartige AKF der Schwere können von stochastisch verteilten geologischen Störkörpern verursacht sein (SCHWAHN 1975). $\omega = 2\pi/\lambda$ ist die Kreiswellenzahl, λ die Wellenlänge.

Die AKF (4) bis (6) hängen nach Voraussetzung (3) nur vom gegenseitigen Abstand r zweier Punkte der Ebene ab und sind beliebig oft differenzierbar.

Bemerkungen zur Notation:

Die benutzten Symbole sind im Symbolverzeichnis zusammengestellt. Im Schwerfeld und seinen Ableitungen sind x, y rechtwinklig-kartesische Koordinaten, wobei x (wie die Lotabweichungskomponente ξ) nördlich, y (wie die Lotabweichungskomponente η) östlich orientiert sind. r ist der ebene Punktabstand vom Ursprung. In den zugehörigen AKF/KKF bedeuten x, y Koordinatendifferenzen und r in diesem Zusammenhang die Entfernungsdifferenz zweier Punkte in der Ebene (Verschiebungsparameter). Abkürzend schreiben wir im Text die AKF $C_{T_x T_x} = C_{x,x}$, $C_{T_{xx} T_{xx}} = C_{xx,xx}$ usf., die KKF $C_{T_x T_y} = C_{x,y}$, $C_{T_{xx} T_{yy}} = C_{xx,yy}$ usf.; n -malige Differentiation nach r wird, insbesondere in den Tabellen, mit n -maliger Punktierung, nach $\tau = r/d$ (normierte Entfernungsdifferenz) mit n -maliger Apostrophierung notiert.

2. Kovarianzfunktionen der 1. Ableitungen des Schwerepotentials (T_x, T_y, T_z)

2.1. Lotabweichungsvektor

Nach GRAFAREND (1971 b-d, 1972) transformiert man die AKF der Schwere (-anomalie) in die AKF/KKF der Lotabweichungskomponenten mit Hilfe der verebneten VENING-WEINESZ-Formel

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\} = - \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta g}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} dx dy,$$

Anwendung der ebenen FOURIER-Transformation und des Faltungstheorems; vgl. Anhang I.

$$(8) \quad \begin{array}{l} \tilde{C}_{\xi\xi} = -\tilde{f}_{\xi} \tilde{f}_{\xi} \tilde{C}_{gg} \\ \tilde{C}_{\xi\eta} = -\tilde{f}_{\xi} \tilde{f}_{\eta} \tilde{C}_{gg} \\ \tilde{C}_{\eta\eta} = -\tilde{f}_{\eta} \tilde{f}_{\eta} \tilde{C}_{gg} \end{array}$$

sind die FOURIER-Transformierten der AKF/KKF der Lotabweichungskomponenten ξ, η . Man hat zunächst $C_{gg}(x, y) = C_{gg}(r, \varphi)$ nach FOURIER in den Wellenzahlraum zu transformieren, nach (8) mit den FOURIER-Transformierten der Gewichtsfunktionen

$$(9) \quad f_{\left\{ \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\}} = - \frac{1}{2\pi\gamma} \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} / r^3$$

zu multiplizieren, schließlich die FOURIER-Transformierten AKF/KKF von ξ, η in den Ortsbereich zurückzutransformieren:

$$(10) \quad \begin{array}{l} C_{\xi\xi}(r, \varphi) = \frac{\sigma \Delta g^2}{2\gamma^2} \left\{ \psi(r) + [\Omega(r) - \psi(r)] \cos^2 \varphi \right\} \\ C_{\xi\eta}(r, \varphi) = C_{\eta\xi}(r, \varphi) = \frac{\sigma \Delta g^2}{2\gamma^2} [\Omega(r) - \psi(r)] \sin \varphi \cos \varphi \\ C_{\eta\eta}(r, \varphi) = \frac{\sigma \Delta g^2}{2\gamma^2} \left\{ \psi(r) + [\Omega(r) - \psi(r)] \sin^2 \varphi \right\}. \end{array}$$

$\psi(r), \Omega(r)$ sind entfernungsabhängige (Kompositions-)Funktionen mit der Eigenschaft von Korrelationsfunktionen. Ω heißt auch Längskorrelation, ψ Querkorrelation. Die Beziehung (10) bezeichnet man als TAYLOR-KARMAN-Relation. Wegen

$$(11) \quad T_x = -\gamma \xi, \quad T_y = -\gamma \eta$$

lauten die AKF/KKF der 1. Ableitungen T_x, T_y

$$(12) \quad C_{x,x} = \gamma^2 C_{\xi\xi}, \quad C_{x,\eta} = \gamma C_{\xi\eta}, \quad C_{y,y} = \gamma^2 C_{\eta\eta}.$$

Ergebnis der GRAFAREND-Transformation:

Ist das ebene, anomale Schwerfeld homogen und isotrop, so ist der Lotabweichungsvektor ein homogener, isotroper Vektor. Die AKF/KKF seiner Komponenten mit TAYLOR-KARMAN-Struktur (10) bilden einen zweistufigen, symmetrischen Tensor mit der Spur

$$(13) \quad C_{\xi\xi} + C_{\eta\eta} = \sigma_{\Delta g}^2 (\Omega + \Psi)/2\gamma^2 \equiv C_{gg}/\gamma^2.$$

Mit $\Phi = C_{gg}/\sigma_{\Delta g}^2$ gilt ferner

$$(14) \quad (\Omega + \Psi)/2 = \Phi \quad \text{und wegen } T_z = -\Delta g, \quad C_{z,z} = C_{gg}$$

$$(15) \quad C_{x,x} + C_{y,y} = C_{z,z}.$$

Die Invarianten gegenüber orthogonalen Koordinatentransformationen (13) und (14), (15) werden in den weiteren Ableitungen von großem Nutzen sein.

2.2. Anomaler Schwerevektor

Im AKF/KKF-Schema der Komponenten $\Delta g, \xi, \eta$ des anomalen Schwerevektors bzw. der 1. Ableitungen T_x, T_y, T_z fehlen nun noch die KKF zwischen Δg und ξ, η bzw. T_z und T_x, T_y . Analog (8) gilt (GRAFAREND 1975, vgl. auch Anhang I):

$$(16) \quad \tilde{C}_{g\xi} = -\tilde{f}_\xi \tilde{C}_{gg}, \quad \tilde{C}_{g\eta} = -\tilde{f}_\eta \tilde{C}_{gg}.$$

Nach FOURIER-Transformation von C_{gg} , Multiplikation in (16) und Rücktransformation ergibt sich

$$(17) \quad C_{g\xi}(r, \varphi) = -C_{\xi g}(r, \varphi) = -\frac{\sigma_{\Delta g}^2}{\gamma} \Theta(r) \cos \varphi$$

$$C_{g\eta}(r, \varphi) = -C_{\eta g}(r, \varphi) = -\frac{\sigma_{\Delta g}^2}{\gamma} \Theta(r) \sin \varphi$$

Mit $\Theta(r)$ als entfernungsabhängiger Kompositionsfunktion. Wegen (11) und (17) ist

$$(18) \quad C_{z,x} = -C_{x,z} = \gamma C_{g\xi}, \quad C_{z,y} = -C_{y,z} = \gamma C_{g\eta}.$$

Damit ist das quadratische 3 x 3-Schema der AKF/KKF der 1. Ableitungen vollständig. Zur besseren Übersicht über alle AKF/KKF der 1. und 2. Ableitungen sind in Tabelle 2 bereits die der 1. Ableitungen wie folgt angeschrieben:

Ω, Ψ, Θ sind Komponenten eines entfernungsabhängigen Vektors $f(r)$, die Glieder mit φ in (10), (17) Komponenten von winkelabhängigen Vektoren $f_{i,j}(\varphi)$. Der erstere ist für alle AKF/KKF der 1. Ableitungen gleich; seine Komponenten hängen vom konkreten Modell C_{gg} ab und sind für jedes Modell zu berechnen. Dagegen gibt es für jede AKF/KKF $C_{T_i T_j} = C_{i,j}$ ($i, j = x, y$) einen Vektor $f_{i,j}(\varphi)$, der für jedes Modell gleich bleibt. Die AKF/KKF der 1. Ableitungen sind dann dem Skalarprodukt von $f(r)$, $f_{i,j}(\varphi)$ proportional. Zur Darstellung von $C_{z,z}$ haben wir die Invariante (15) benutzt.

Bemerkung zur Symmetrie der KKF:

In der Polkoordinaten-Schreibweise $C_{\xi\eta}(r,\varphi)$, $C_{g\xi}(r,\varphi)$, $C_{g\eta}(r,\varphi)$ ist bei Vertauschung der Feldgrößen $\xi\eta \rightarrow \eta\xi$, $g\xi \rightarrow \xi g$, $g\eta \rightarrow \eta g$ das Azimut φ durch das Gegenazimut $\varphi + \pi$ zu ersetzen, so daß

$$\begin{aligned} C_{\eta\xi}(r,\varphi+\pi) &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2\gamma^2} [\Omega(r) - \Psi(r)] \sin(\varphi+\pi) \cos(\varphi+\pi) = C_{\eta\xi}(r,\varphi) = C_{\xi\eta}(r,\varphi), \\ C_{\xi g}(r,\varphi+\pi) &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{\gamma} \Theta(r) \cos(\varphi+\pi) = -C_{\xi g}(r,\varphi) = C_{g\xi}(r,\varphi), \\ C_{\eta g}(r,\varphi+\pi) &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{\gamma} \Theta(r) \sin(\varphi+\pi) = -C_{\eta g}(r,\varphi) = C_{g\eta}(r,\varphi), \end{aligned}$$

vgl. (10), (17). Bei Vorzeichengleichheit ist die Summe der Potenzen der winkelabhängigen Kompositionsfunktionen gerade, bei Vorzeichenwechsel ungerade (vgl. Tab. 2). Wegen $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$, $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$ ist daher das AKF-KKF-Schema der 1. Ableitungen bezüglich der Hauptdiagonalen (AKF) symmetrisch.

2.3. Modell-Beispiele

Für die Modelle (4), (5), (6) wurden die ortsabhängigen Funktionen Ω, Ψ, Θ mit Hilfe der Integral-Tafeln von RYSHIK und GRADSTEIN (1957) berechnet (Tab. 9 bis 11).

Die Lösungen vom MORITZ- und POISSON-Modell, d. h. derjenigen Modelle von (4), die nach MORITZ (1976) ein globales Äquivalent besitzen, sind elementare Funktionen. Bemerkenswert ist eine gewisse Verwandtschaft der Lösungen beider Modelle (vgl. Tab. 9):

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{POISSON}} &\equiv \frac{2}{\tau} \Theta_{\text{POISSON}} - \Omega_{\text{POISSON}} \equiv \\ \Omega_{\text{MORITZ}} &\equiv \frac{2}{\tau} \Theta_{\text{MORITZ}} \equiv \Psi_{\text{MORITZ}} \Phi_{\text{MORITZ}} \quad (\tau = r/d). \end{aligned}$$

Beim HIRVONEN-, GAUSS- und Spaltmodell kommen als Lösungen auch höhere Funktionen vor. Dazu die folgenden Bemerkungen:

1. Beim HIRVONEN-Modell (Tab. 10) erhält man zunächst die Lösungen

$$(19) \quad \Psi(\tau) = F(1,1,2; -\tau^2), \quad \Omega(\tau) = 2\Phi(\tau) - \Psi(\tau).$$

Die hypergeometrische Reihe $F(1,1,2; -\tau^2)$ konvergiert absolut für $\tau^2 < 1$ und wird zur elementaren Funktion

$$(20) \quad \Psi(\tau) = \tau^{-2} \ln(1+\tau^2).$$

Mit Hilfe einer GAUSSschen Rekursionsformel (RYSHIK und GRADSTEIN 1957) formen wir (19) in die äquivalente Reihe

$$(21) \quad \Psi(\tau) = F(1,1,2; -\tau^2) = \frac{2}{2+\tau^2} F\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \left[\frac{\tau^2}{2+\tau^2}\right]^2\right\}$$

um, die für $[\tau^2/(2+\tau^2)]^2 < 1$, d. h. für alle τ und wegen $\tau = r/d$ auch für alle r

mit $-\infty < \tilde{r}, r < +\infty$ absolut konvergiert. Benutzt man ferner die Beziehung

$$F\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \left[\frac{\tilde{r}^2}{2+\tilde{r}^2}\right]^2\right\} = \frac{2+\tilde{r}^2}{2\tilde{r}^2} \ln \left[\frac{1+\frac{\tilde{r}^2}{2+\tilde{r}^2}}{1-\frac{\tilde{r}^2}{2+\tilde{r}^2}} \right],$$

so wird die rechte Seite von (21) identisch mit (20). Daher gilt (20) auf der gesamten \tilde{r} - bzw. r -Achse.

Analog wendet man Rekursionsformeln auf die Lösung von $\Theta(\tilde{r})$ an und sichert die Konvergenz auf der gesamten \tilde{r} - bzw. r -Achse:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \Theta(\tilde{r}) &= \tilde{r} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2; -\tilde{r}^2\right) = \frac{\tilde{r}}{(1+\tilde{r}^2)^{3/2}} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2; \frac{\tilde{r}^2}{1+\tilde{r}^2}\right) \\ (22) \quad &= \frac{\tilde{r}}{(1+\tilde{r}^2)^{3/2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2; \frac{\tilde{r}^2}{1+\tilde{r}^2}\right). \end{aligned}$$

Die umgeformten Reihen konvergieren absolut für $\tilde{r}^{-2}(1+\tilde{r}^2) < 1$, d. h. für alle \tilde{r} und r mit $-\infty < \tilde{r}, r < +\infty$. Sie lassen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken, sondern müssen gliedweise berechnet werden.

2. Beim GAUSS-Modell (Tab. 11) treten in der Lösung für $\Theta(\tilde{r})$ BESSEL-Funktionen einer rein imaginären Variablen $I_n(\tilde{r}^2/2)$, $n = 0, n = 1$ auf. Sie werden mit Tabellen höherer Funktionen (JAHNKE, EWDE, LÖSCH 1966) berechnet.

3. Beim Spaltmodell (Tab. 11) erhält man als Lösung für $\Theta(\alpha)$, $\alpha = \omega r$ zunächst

$$(23) \quad \Theta(\alpha) = \int_0^1 \frac{x \mathfrak{J}_1(\alpha x)}{(1-x^2)^{1/2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B(n+3/2, 1/2)}{n!(n+1)! 2^{2(n+1)}} \alpha^{2n+1}$$

mit der BESSEL-Funktion erster Ordnung und Gattung \mathfrak{J}_1 und der Beta-Funktion

$$(24) \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

mit $p = n + 3/2$, $q = 1/2$. Einsetzen von (24) in (23) ergibt

$$(25) \quad \Theta(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+3/2) \Gamma(1/2)}{n!(n+1)! \Gamma(n+2) 2^{2(n+1)}} \alpha^{2n+1}.$$

Berücksichtigt man die Eigenschaften der Gammafunktion Γ , so findet man die für die gliedweise numerische Rechnung günstigere rekursive Darstellung

$$(26) \quad \Theta(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^{2n+1}, \quad a_{n+1} = -\frac{a_n}{4} \frac{(n+3/2)}{(n+1)(n+2)^2}, \quad a_0 = \pi/8.$$

Die entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen $\Phi, \Omega, \Psi, \Theta$ der Modelle (4) bis (6) sind in den Abbildungen 2 bis 6 dargestellt. Φ, Ω, Ψ sind gerade. Sie besitzen die Eigenschaften von Autokorrelationsfunktionen. Θ ist ungerade und besitzt die Eigenschaften einer Kreuzkorrelationsfunktion. In den Modellen (4), (5), Abb. 2 bis 5, sind Φ, Ψ überall positiv. Die Längskorrelation Ω schwingt unter die \tilde{r} - bzw. r -Achse. GRAFAREND (1971 d, 1972) hat diesen Sachverhalt experimentell bestätigt. Beim Spalt-Modell (6);

Abb. 6, bildet sich die Wellenstruktur von Φ ebenfalls in Ω, Ψ, Θ , und zwar mit gering verschobenen Nullstellen, Maxima und Minima ab. Φ, Ω, Θ , schwingen um die r-Achse, während die Querkorrelation Ψ überall ≥ 0 bleibt. Die alternierende Reihe (25) bzw. (26) ergibt tatsächlich eine schwingende, mit wachsendem r gedämpfte Funktion.

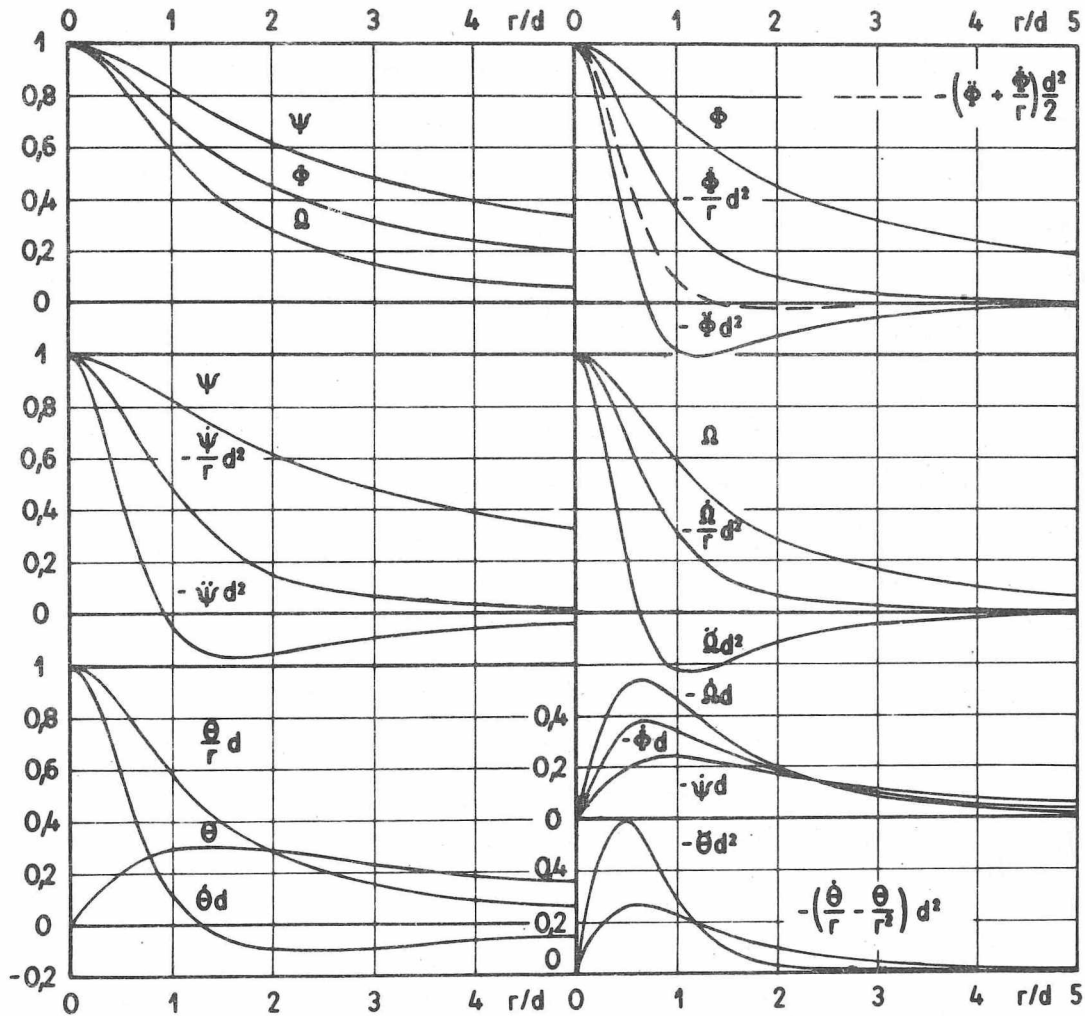


Abb. 2

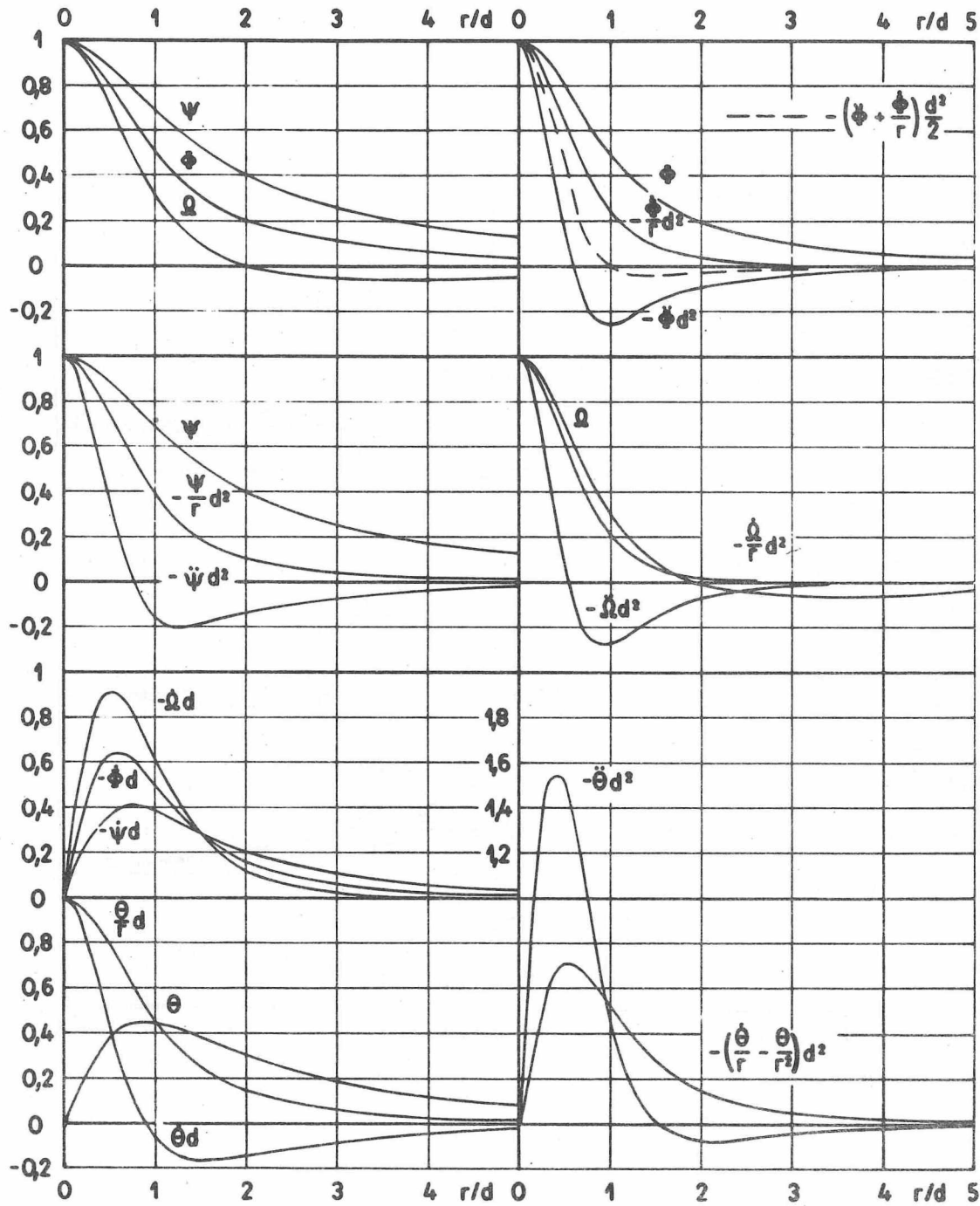


Abb. 3

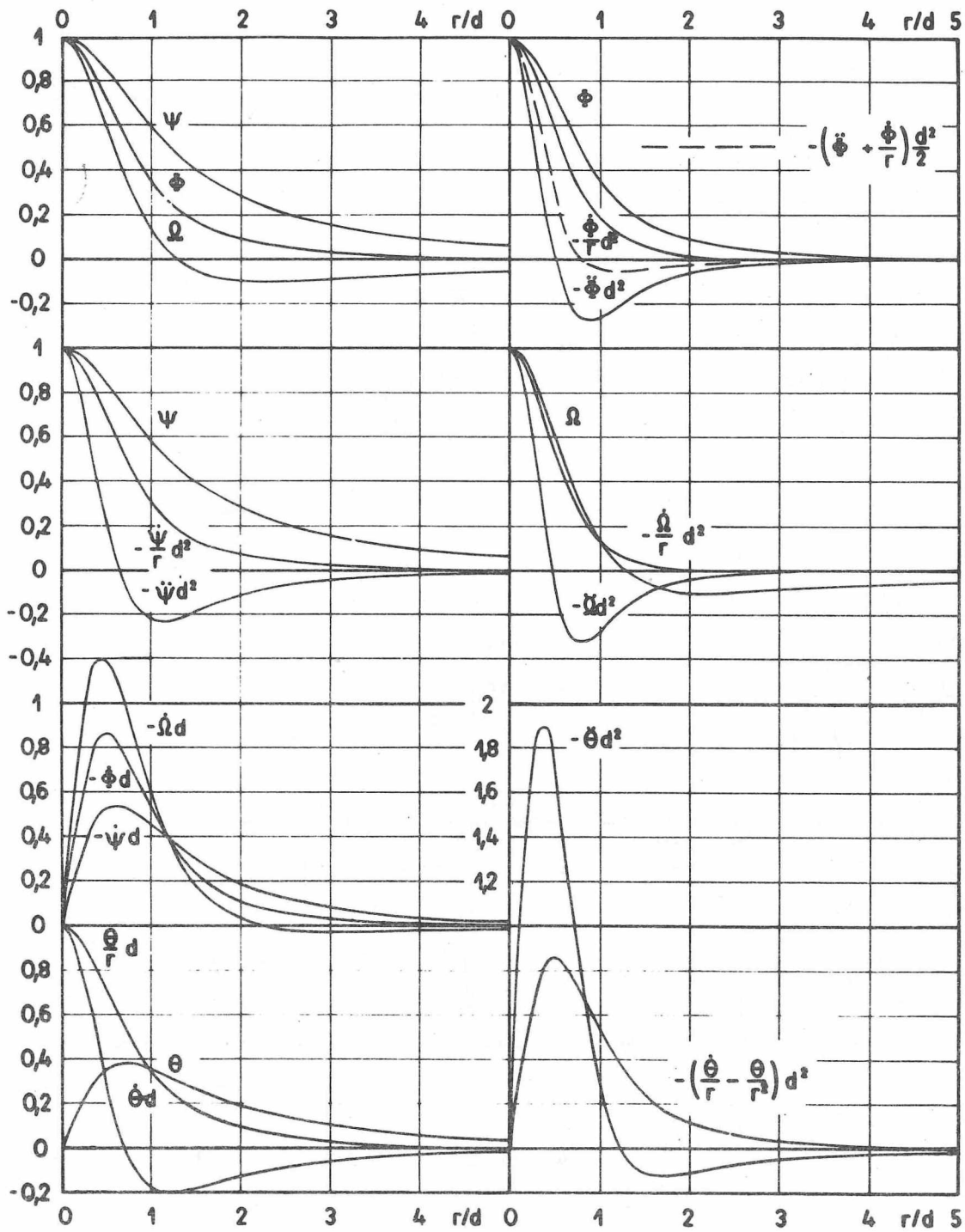


Abb. 4

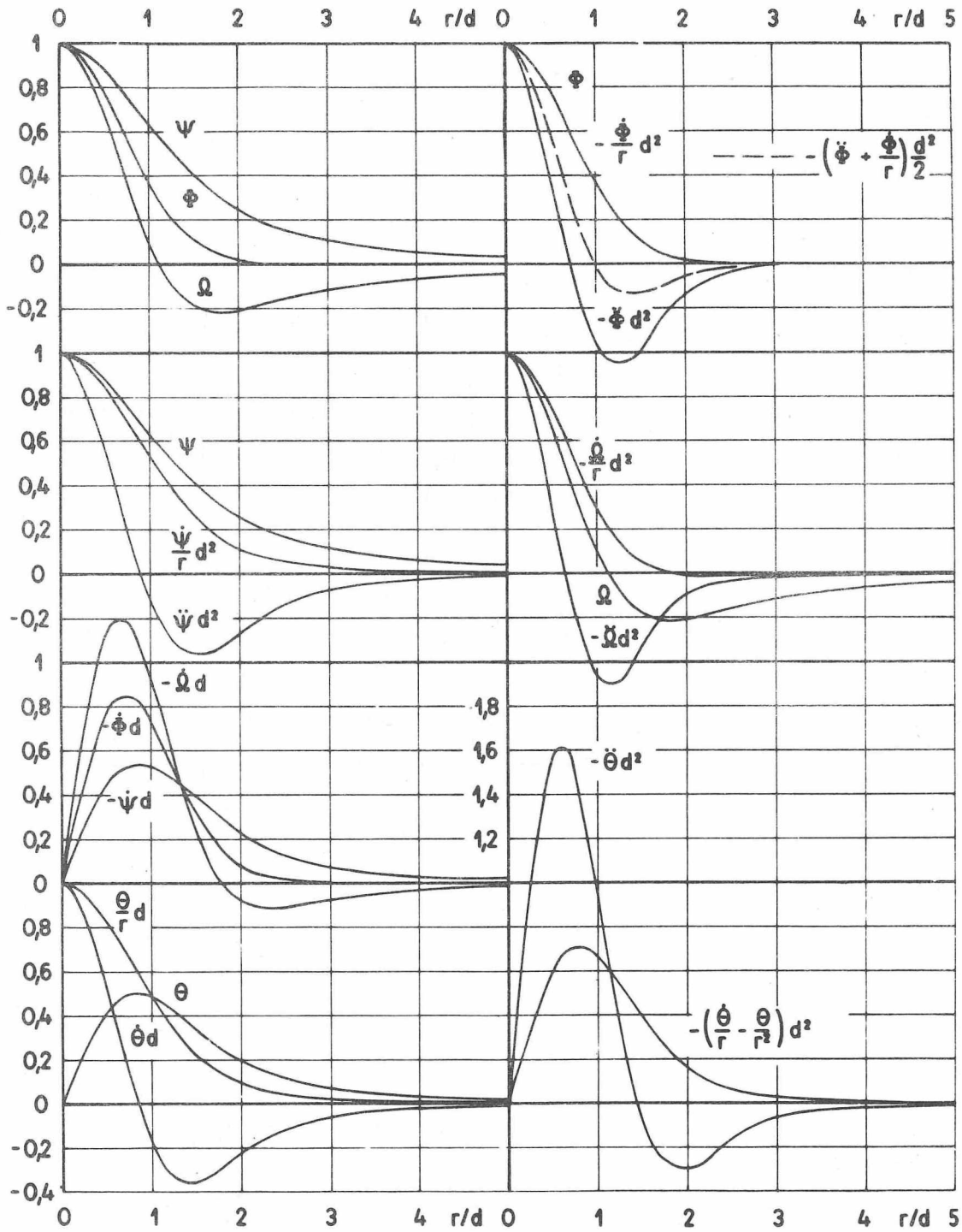


Abb. 5

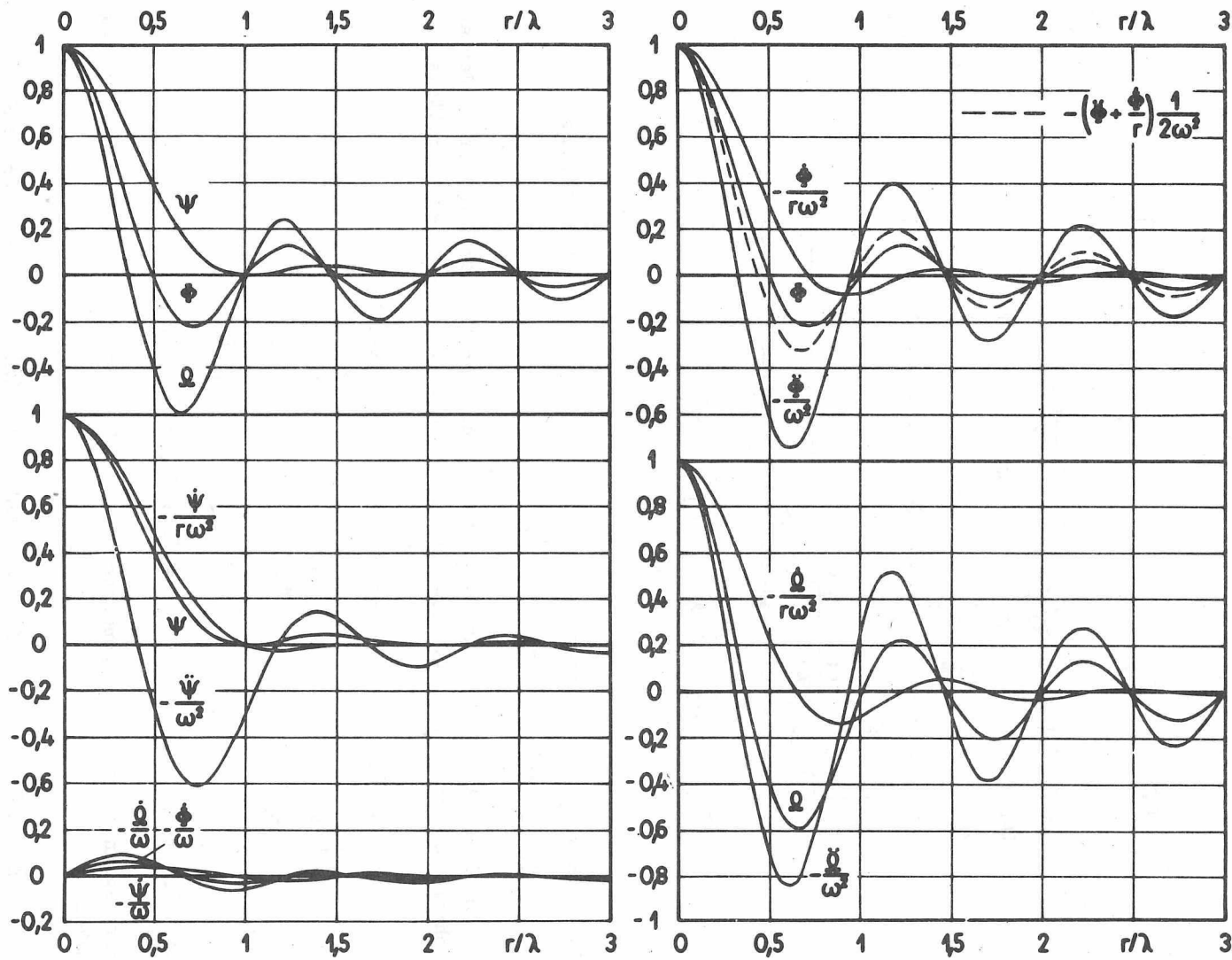


Abb. 6

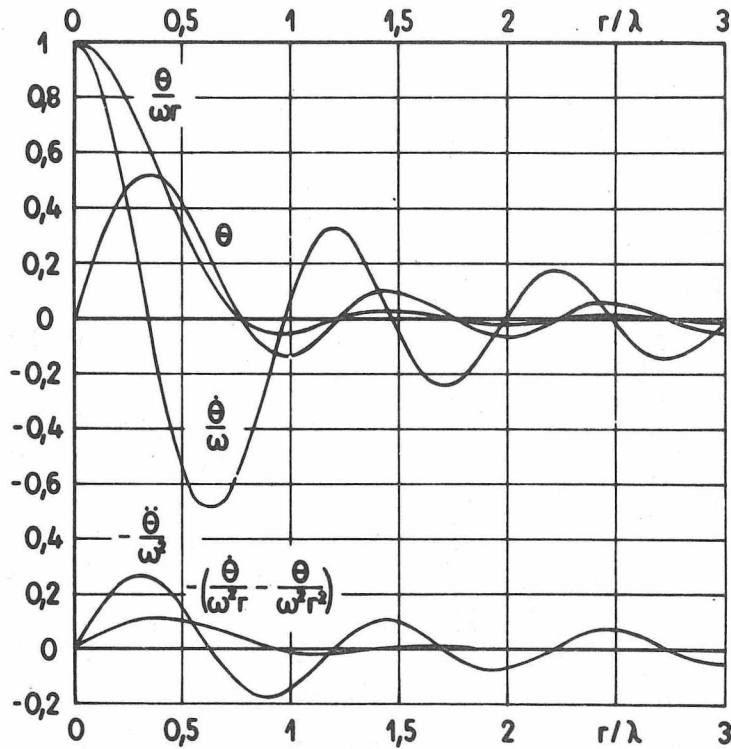


Abb. 6

3. Kovarianzfunktionen der 2. Ableitungen des Schwerepotentials
 ($T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, T_{xz}, T_{yz}, T_{zz}$)

In diesem Abschnitt transformieren wir die AKF/KKF der Komponenten des anomalen Schwerevektors (der 1. Ableitungen) in die der 2. Ableitungen vermittels

$$(27) \quad \begin{array}{ccc} \text{grad } T_x = & \text{grad } T_y = & \text{grad } T_z = \\ \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{yx} \\ T_{yy} \\ T_{yz} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{zx} \\ T_{zy} \\ T_{zz} \end{bmatrix} \end{array}$$

mit $T_{xy} = T_{yx}$, $T_{xz} = T_{zx}$, $T_{yz} = T_{zy}$, $T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0$.

Wir beginnen mit den Komponenten von $\text{grad } T_x$, $\text{grad } T_y$, die nur x,y als Index enthalten.

3.1. Niveauflächenkrümmung und Torsion des astronomischen Meridians

Es wird das 3 x 3-Schema der AKF/KKF von T_{xx} , T_{xy} , T_{yy} angegeben. Nach den Differentiationsregeln der KF (vgl. Anhang III) sind das die AKF

$$\begin{aligned}
 c_{xx,xx} &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{x,x}, & c_{yy,yy} &= -\frac{\partial^2}{\partial y^2} c_{y,y} \\
 (28) \quad c_{xy,xy} &= c_{yx,yx} = c_{xy,yx} = c_{yx,xy} = \\
 &-\frac{\partial^2}{\partial y^2} c_{x,x} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{y,y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_{x,y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_{y,x}
 \end{aligned}$$

und die KKF

$$\begin{aligned}
 c_{xx,xy} &= c_{xy,xx} = c_{xx,yx} = c_{yx,xx} = \\
 &-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_{x,x} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{x,y} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{y,x}, \\
 (29) \quad c_{yy,xy} &= c_{xy,yy} = c_{yy,yx} = c_{yx,yy} = \\
 &-\frac{\partial^2}{\partial y^2} c_{y,x} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} c_{x,y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_{yy}, \\
 c_{xx,yy} &= c_{yy,xx} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_{x,y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_{y,x} \quad \text{mit} \\
 (30) \quad c_{xx,yy} &= c_{yy,xx} = c_{xy,xy} = c_{yx,yx}.
 \end{aligned}$$

Als Beispiel berechnen wir die AKF von T_{xx} :

$$\begin{aligned}
 (31) \quad c_{xx,xx} &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{x,x} = -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{\xi\xi} = -\frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \psi + [\Omega - \psi] \cos^2 \varphi \right\} \text{ mit} \\
 \psi &= \psi[r(x,y)], \quad \Omega = \Omega[r(x,y)], \quad \varphi = \varphi(x,y), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\
 r &= x/\cos \varphi = y/\sin \varphi, \quad \varphi = \arccos(x/r) = \arcsin(y/r).
 \end{aligned}$$

Als ersten Schritt wenden wir das vollständige Differential zweiter Ordnung auf $c_{x,x}$ an und finden

$$\begin{aligned}
 (32) \quad -c_{xx,xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{x,x} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} c_{x,x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} c_{x,x} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} c_{x,x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \\
 &+ \frac{\partial}{\partial r} c_{x,x} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} c_{x,x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.
 \end{aligned}$$

Als zweiten Schritt berechnen wir die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} c_{x,x} &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2} \left\{ \dot{\psi} + [\dot{\Omega} - \dot{\psi}] \cos^2 \varphi \right\}, & \frac{\partial^2}{\partial r^2} c_{x,x} &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2} \left\{ \ddot{\psi} + [\ddot{\Omega} - \ddot{\psi}] \cos^2 \varphi \right\}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} c_{x,x} &= -\sigma_{\Delta g}^2 [\dot{\Omega} - \dot{\psi}] \sin \varphi \cos \varphi, \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} c_{x,x} &= -\sigma_{\Delta g}^2 [\Omega - \psi] \sin \varphi \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} c_{x,x} = 6\Delta g^2 [\Omega - \Psi] (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi),$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2},$$

setzen sie, im dritten Schritt, in (32) ein und finden

$$(33) \quad c_{xx,xx} = -\frac{6\Delta g^2}{2} \left\{ \ddot{\Psi} \cos^2 \varphi + [\ddot{\Omega} - \ddot{\Psi}] \cos^4 \varphi + \frac{\dot{\Psi}}{r} \sin^2 \varphi + \frac{5}{r} [\dot{\Omega} - \dot{\Psi}] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2}{r^2} [\Omega - \Psi] \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi) \right\}$$

mit den entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen Ψ/r^2 , $\dot{\Psi}/r$, $\ddot{\Psi}$, Ω/r^2 , $\dot{\Omega}/r$, $\ddot{\Omega}$. Analog leitet man alle weiteren AKF (28) und die KKF (29) ab.

Vergleicht man danach die Funktionen der Identität (30), so findet man die Beziehung

$$(34) \quad [\Omega - \Psi]/r^2 = \dot{\Psi}/r,$$

ferner, indem man (34) nach r differenziert

$$(35) \quad [\dot{\Omega} - \dot{\Psi}]/r = \ddot{\Psi} + \dot{\Psi}/r.$$

Mit (34) und (35) können die AKF (28) und die KKF (29) entscheidend vereinfacht werden. Es treten nun nur noch drei entfernungsabhängige Kompositionsfunktionen, nämlich $\ddot{\Omega}$, $\ddot{\Psi}$, $\dot{\Psi}/r$ auf. Beispielsweise vereinfacht sich (33) zu

$$(36) \quad c_{xx,xx} = -\frac{6\Delta g^2}{2} \left\{ \ddot{\Omega} \cos^4 \varphi + 6 \ddot{\Psi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 3 \frac{\dot{\Psi}}{r} \sin^4 \varphi \right\}.$$

Wie die AKF/KKF der 1. Ableitungen (Abschnitt 2.2., Tab. 2) schreiben wir die der 2. Ableitungen (28), (29) ebenfalls als Skalarprodukte von Vektoren entfernungsabhängiger und winkelabhängiger Kompositionsfunktionen (Tab. 3).

3.2. Horizontaler Schweregradient

Die AKF/KKF des horizontalen Schweregradienten bzw. der 2. Ableitungen T_{xz} , T_{yz} lauten (analog (28))

$$(37) \quad c_{xz,xz} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} c_{z,z}, \quad c_{yz,yz} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} c_{z,z}, \quad c_{xz,yz} = c_{yz,xz} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_{z,z}$$

mit $c_{z,z} = c_{gg} = 6\Delta g^2 \Phi(r)$. Anwendung des vollständigen Differentials zweiter Ordnung auf $c_{z,z}$ liefert

$$(38) \quad -c_{xz,xz} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} c_{z,z} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial r} c_{z,z} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$-c_{xz,yz} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} c_{z,z} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial r} c_{z,z} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$$

$$-c_{yz,yz} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} c_{z,z} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial r} c_{z,z} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}.$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}$$

folgt aus (38)

$$(39) \quad \begin{aligned} C_{xz, xz} &= -\sigma_{\Delta g}^2 \left\{ \dot{\Phi} / r + \left[\ddot{\Phi} - \dot{\Phi} / r \right] \cos^2 \varphi \right\} \\ C_{xz, yz} &= C_{yz, xz} = -\sigma_{\Delta g}^2 \left[\ddot{\Phi} - \dot{\Phi} / r \right] \sin \varphi \cos \varphi \\ C_{yz, yz} &= -\sigma_{\Delta g}^2 \left\{ \dot{\Phi} / r + \left[\ddot{\Phi} - \dot{\Phi} / r \right] \sin^2 \varphi \right\}. \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch mit Hilfe der Invarianten (15), der AKF $C_{xx, xx}$, $C_{xy, xy}$, $C_{yy, yy}$ und der KKF $C_{xx, xy}$, $C_{yy, xy}$. Wendet man nämlich auf

$$C_{x, x} + C_{y, y} = C_{z, z}$$

nacheinander $-\partial^2 / \partial x^2$, $-\partial^2 / \partial x \partial y$, $-\partial^2 / \partial y^2$ an, erhält man mit Rücksicht auf die Regeln der KF die Identitäten

$$(40) \quad \begin{aligned} C_{xx, xx} + C_{xy, xy} &= C_{xz, xz} \\ C_{xx, xy} + C_{yy, xy} &= C_{xz, yz} \\ C_{xy, xy} + C_{yy, yy} &= C_{yz, yz}, \end{aligned}$$

ausgeschrieben in Tab. 3. Wegen (14) $\Omega + \Psi = 2\dot{\Phi}$, gelten auch

$$(41) \quad \dot{\Omega} + \dot{\Psi} = 2\ddot{\Phi}, \quad \ddot{\Omega} + \ddot{\Psi} = 2\ddot{\Phi}.$$

Aus den linken Seiten von (40) mit den in Tab. 3 angeschriebenen Funktionen $C_{xz, xz}$, $C_{xz, yz}$, $C_{yz, yz}$, sowie (35) und (41) folgt (39). Abschließend vergleichen wir (39) mit (10) und formulieren das Ergebnis:

Ist das ebene, anomale Schwerfeld homogen und isotrop, so ist der horizontale Schweregradient ein homogener, isotroper Vektor. Die AKF/KKF seiner Komponenten mit TAYLOR-KARMAN-Struktur (39) bilden (wie die des Lotabweichungsvektors (10)) einen zweistufigen, symmetrischen Tensor mit der Spur

$$(42) \quad C_{xz, xz} + C_{yz, yz} = -\sigma_{\Delta g}^2 \left[\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} / r \right],$$

der Längskorrelation $-\ddot{\Phi}(r) / \ddot{\Phi}(0)$ und der Querkorrelation $-\dot{\Phi}(r) / r \dot{\Phi}(0)$ (vgl. MORITZ 1976, S. 9-11).

3.3. Vertikaler Schweregradient

MORITZ (1976, S. 10) zeigte, daß (42) mit der AKF des vertikalen Gradienten T_{zz} identisch ist:

$$(43) \quad C_{xz,xz} + C_{yz,yz} = C_{zz,zz} .$$

Dieser Sachverhalt folgt ohne weiteres aus den bisherigen Ableitungen. Addiert man nämlich die erste und letzte Gleichung von (40), so folgt

$$(44) \quad C_{xx,xx} + 2 C_{xy,xy} + C_{yy,yy} = C_{xz,xz} + C_{yz,yz} .$$

Wendet man ferner die KF auf die LAPLACE-Gleichung

$$(45) \quad - (T_{xx} + T_{yy}) = T_{zz}$$

an, so wird

$$(46) \quad C_{xx,xx} + 2 C_{xx,yy} + C_{yy,yy} = C_{zz,zz} .$$

Wegen $C_{xx,yy} = C_{xy,xy}$, vgl. (30), sind die linken Seiten von (44), (46) identisch; also gilt (43) und das Ergebnis :

Ist das ebene, anomale Schwerefeld homogen und isotrop, so ist der vertikale Schweregradient (in der Ebene) ein homogenes, isotropes und skalares Feld, dessen AKF gleich der Summe der AKF der horizontalen Gradienten in Richtung der ebenen Koordinatenachsen ist.

3.4. Kreuzkovarianzfunktionen zwischen den 2. Ableitungen

Soweit im Konzept der bisherigen Ableitungen möglich, wurden bereits gewisse KKF angegeben (Tab. 3). Wir haben jetzt das 6 x 6-Schema der AKF/KKF der 2. Ableitungen zu vervollständigen und beginnen mit den KKF $C_{xx,zz}$, $C_{xy,zz}$, $C_{yy,zz}$, die mit Hilfe der LAPLACE-Gleichung (45) gewonnen werden:

$$(47) \quad C_{xx,zz} = C_{zz,xx} = - E \left\{ T_{xx} (T_{xx} + T_{yy}) \right\} = - E \left\{ T_{xx} T_{xx} \right\} - E \left\{ T_{xx} T_{yy} \right\} \\ = - C_{xx,xx} - C_{xx,yy} .$$

Analog findet man

$$(48) \quad C_{xy,zz} = C_{zz,xy} = - C_{xx,xy} - C_{yy,xy} , \\ C_{yy,zz} = C_{zz,yy} = - C_{yy,yy} - C_{xx,yy} .$$

Ergebnisse siehe Tab. 3.

Im folgenden werden wir wieder von den Differentiationsregeln der KF (Anhang III) Gebrauch machen, ohne dies ferner zu bemerken. Wir vervollständigen weiter mit

$$(49) \quad C_{xx,xz} = E \left\{ T_{xx} T_{xz} \right\} = E \left\{ \frac{\partial}{\partial x} T_x \frac{\partial}{\partial x} T_z \right\} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{x,z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{z,x},$$

wobei nach (17), (18) $C_{z,x} = - \sigma_{\Delta g}^2 \Theta(r) \cos \varphi$. Anwendung des vollständigen Differentials zweiter Ordnung, Ausrechnen der partiellen Ableitungen und Einsetzen wie in 3.1. liefert

$$(50) \quad - C_{xx,xz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{z,x} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_{z,x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} C_{z,x} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} C_{z,x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial r} C_{z,x} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} C_{z,x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sigma_{\Delta g}^2 \left\{ \ddot{\Theta} \cos^3 \varphi + \left[\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2 \right] \sin^2 \varphi \cos \varphi \right\}$$

mit den entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen $\ddot{\Theta}$, $\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2$. Analog leitet man $C_{xx,yz}$, $C_{xy,xz}$, $C_{xy,yz}$, $C_{yy,xz}$, $C_{yy,yz}$ ab. Schließlich wird gemäß (47)

$$(51) \quad C_{zz,xz} = - E \left\{ (T_{xx} + T_{yy}) T_{xz} \right\} = - E \left\{ T_{xx} T_{xz} \right\} - E \left\{ T_{yy} T_{xz} \right\} = - C_{xx,xz} - C_{yy,xz},$$

$$C_{zz,yz} = - C_{xx,yz} - C_{yy,yz}$$

und wegen $C_{x,z} = - C_{z,z}$, $C_{y,z} = - C_{z,y}$ gilt

$$(52) \quad C_{xx,xz} = - C_{xz,xx}, C_{xx,yz} = - C_{yz,xx}, \dots, C_{zz,yz} = - C_{yz,zz}.$$

Der Vorzeichenwechsel in (52) hebt sich auf, indem die Summe der Potenzen der winkelabhängigen Kompositionsfunktionen ungerade ausfällt (vgl. Tab. 4). Mit Tab. 3, 4 ist das symmetrische AKF-KKF-Schema der 2. Ableitungen vollständig.

4. Vollständiges Schema der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials

4.1. Kreuzkovarianzfunktionen zwischen des 1. und 2. Ableitungen

In diesem Abschnitt vervollständigen wir das AKF-KKF-Schema der 1. und 2. Ableitungen insgesamt, indem wir die KKF zwischen den 1. und 2. Ableitungen zusammenstellen.

$$(53) \quad C_{x,xz} = E \left\{ T_x T_{xz} \right\} = E \left\{ T_x \left(\frac{\partial}{\partial x} T_z \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial x} C_{x,z},$$

$$(54) \quad C_{xz,x} = E \left\{ T_{xz} T_x \right\} = E \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_z \right) T_x \right\} = - \frac{\partial}{\partial x} C_{z,x} = \frac{\partial}{\partial x} C_{x,z}.$$

Daraus folgt

$$(55) \quad C_{xz,x} = C_{x,xz} = \frac{\partial}{\partial r} C_{x,z} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} C_{x,z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sigma_{\Delta g}^2 \left\{ \Theta/r + \left[\dot{\Theta} - \Theta/r \right] \cos^2 \varphi \right\}$$

mit den entfernungsabhängigen $\dot{\Theta}$, Θ/r . Analog findet man $C_{x,yz} = C_{yz,x}$, $C_{y,xz} = C_{xz,y}$, $C_{y,yz} = C_{yz,y}$, $C_{z,xx} = C_{xx,z}$, $C_{z,xy} = C_{xy,z}$, $C_{z,yy} = C_{yy,z}$; ferner

$$(56) \quad C_{z,zz} = -E \left\{ T_z (T_{xx} + T_{yy}) \right\} = -E \left\{ T_z T_{xx} \right\} - E \left\{ T_z T_{yy} \right\}$$

$$= -C_{z,xx} - C_{z,yy} = -C_{xx,z} - C_{yy,z}$$

$$C_{zz,z} = -E \left\{ (T_{xx} + T_{yy}) T_z \right\} = -E \left\{ T_{xx} T_z \right\} - E \left\{ T_{yy} T_z \right\}$$

$$= -C_{xx,z} - C_{yy,z} = C_{z,zz}$$

Die KKF (53) bis (56) sind in Tab. 5 zusammengestellt. Daraus liest man mit Rücksicht auf (10) ab: Die KKF

$$\left\{ C_{x,xz}, C_{x,yz} = C_{y,xz}, C_{y,yz} \right\} \text{ sowie } \left\{ C_{z,xx}, C_{z,xy}, C_{z,yy} \right\}$$

besitzen TAYLOR-KARMAN-Struktur mit der Längskorrelation $\dot{\Theta}(r)/\dot{\Theta}(0)$ und der Querkorrelation $\Theta(r)/r \Theta(0)$. Man überzeugt sich in den Tabellen 9 bis 11 sehr leicht, daß diese normierten Funktionen tatsächlich die Eigenschaften von Korrelationsfunktionen besitzen.

$$(57) \quad C_{z,xz} = E \left\{ T_x T_{xz} \right\} = E \left\{ T_z \left(\frac{\partial}{\partial x} T_z \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial x} C_{zz}$$

$$(58) \quad C_{xz,z} = E \left\{ T_{xz} T_z \right\} = E \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_z \right) T_z \right\} = -\frac{\partial}{\partial x} C_{zz} \text{ . Daraus folgt}$$

$$(59) \quad C_{z,zz} = -C_{xz,z} = \frac{\partial}{\partial r} C_{z,z} \frac{\partial r}{\partial x} = \sigma_{\Delta g}^2 \dot{\Phi} \cos \varphi = \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2} (\dot{\Omega} + \dot{\Psi}) \cos \varphi \text{ .}$$

Analog (57) bis (59) findet man

$$(60) \quad C_{z,yz} = -C_{yz,z} = \frac{\partial}{\partial r} C_{z,z} \frac{\partial r}{\partial y} = \sigma_{\Delta g}^2 \dot{\Phi} \sin \varphi = \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2} (\dot{\Omega} + \dot{\Psi}) \sin \varphi \text{ ;}$$

ferner die KKF

$$C_{x,zz} = -C_{zz,x}, \quad C_{y,zz} = -C_{zz,y}$$

$$C_{x,xx} = -C_{xx,x}, \quad C_{x,xy} = -C_{xy,x}, \quad C_{x,yy} = -C_{yy,x}$$

$$C_{y,xx} = -C_{xx,y}, \quad C_{y,xy} = -C_{xy,y}, \quad C_{y,yy} = -C_{yy,y}$$

Sämtliche KKF ab (57) stehen in Tab. 6. Beim Vertauschen der Feldgrößen ist wieder Azimut durch Gegenazimut zu ersetzen, so daß der Vorzeichenwechsel die Symmetrie der KKF garantiert.

Mit Hilfe der Tabellen 2 bis 6 kann nun das vollständige 9×9 -Schema der AKF/KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in der Ebene aufgestellt werden. Zum Aufsuchen einer speziellen Funktion dient die Übersicht Tab. 1. Aus Platzgründen geben wir das quadratische Schema lediglich für die Sonderfälle $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ (Tab. 7, 8) an, d. h. für Feldgrößen entlang von Profilen parallel der x- bzw. y-Achse. Die AKF/KKF hängen bei $\varphi = \text{const}$ nur vom gegenseitigen Abstand r ab.

4.2. Modell-Beispiele

Wir kehren nun wieder zu den Modellen (4) bis (6) zurück, deren Eigenschaften bezüglich der AKF/KKF des anomalen Schwerevektors bereits im Abschnitt 2.3. diskutiert wurden. Im vollständigen AKF/KKF-Schema treten neben den entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen $\Phi, \Omega, \Psi, \Theta$ ihre 1. und 2. Ableitungen nach r auf bzw. sind zu berechnen (Tab. 9 bis 11). Dazu betr. $\dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$ die folgenden

Bemerkungen:

1. Beim HIRVONEN-Modell treten, wenn man $\dot{\Theta} = d^{-1} \Theta'$, $\ddot{\Theta} = d^{-2} \Theta''$ berechnet, u. a. die Ableitungen F', F'' der hypergeometrischen Reihe F auf. Es gilt

$$(61) \quad F'(\alpha, \beta, \gamma; g(\tau)) = \alpha \beta g'(\tau) F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; g(\tau)) / \tau.$$

Die neue Reihe auf der rechten Seite von (61) ist anschließend, wie in Abschnitt 2.3. erläutert, mit Hilfe gewisser GAUSSscher Rekursionsformeln derart umzuformen, daß ihre Konvergenz auf der gesamten τ - bzw. r -Achse gesichert ist. Auf diese Weise verfährt man für $\dot{\Theta}$ und $\ddot{\Theta}$ und erhält die in Tab. 10 angegebenen Funktionen. F', F'' sind gliedweise numerisch zu berechnen.

2. Beim GAUSS-Modell (Tab. 11) benutzt man zur Ableitung von Θ die Funktionalgleichungen

$$I_n'(g(\tau)) = g'(\tau) \left[I_{n-1}(g(\tau)) - n I_n(g(\tau)) / g(\tau) \right],$$

$$I_{n-1}(g(\tau)) - I_{n+1}(g(\tau)) = 2n I_n(g(\tau)) / g(\tau),$$

$$(g(\tau) = \tau^2/2, \quad g'(\tau) = \tau; \quad n = 0, 1).$$

$I_0(\tau^2/2)$, $I_1(\tau^2/2)$ entnimmt man Tabellen höherer Funktionen (JAHNKE, EMDE, LÖSCH 1966).

3. Beim Spaltmodell (Tab. 11) ist die alternierende Reihe für Θ gliedweise zu differenzieren. Die numerische Berechnung der Reihen erfordert (ebenso wie die vom HIRVONEN-Modell) gesonderte Konvergenzuntersuchungen.

Sämtliche entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen, nämlich $\Phi, \Omega, \Psi, \Theta$ sowie ihre 1. und 2. Ableitungen nach r einschließlich gewisser Funktionen dieser Ableitungen, sind für die Modelle (4) bis (6) in den Abbildungen 2 bis 6 (normiert) dargestellt. Die Funktionen $-\dot{\Phi}/r, -\ddot{\Phi}, -\dot{\Psi}/r, -\ddot{\Psi}, -\dot{\Omega}/r, -\ddot{\Omega}$ sind (wie Φ, Ψ, Ω) gerade. Normiert auf $[-1, +1]$ besitzen sie die Eigenschaften von Autokorrelationsfunktionen. Gleiches gilt für $\dot{\Theta}, \Theta/r$. Die Funktionen $-\dot{\Phi}, -\dot{\Psi}, -\dot{\Omega}$, ferner $-\ddot{\Theta}$,

- $(\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2)$ sind ungerade und besitzen die Eigenschaften von Kreuzkorrelationsfunktionen, wobei die maximale Kreuzkorrelation nicht bei $r = 0$, sondern in einem gewissen Abstand $r = r_0 > 0$ liegt. Aus Abb. 2 bis 6 erkennt man, wie sich die Eigenschaften der Ausgangsfunktion Φ bzw. die von $\dot{\Phi}$, Ψ , Ω , Θ in den abgeleiteten Funktionen abbilden und kann u. a. Korrelationslängen, Nulldurchgänge, Lage der relativen Extrema der Auto- und Kreuzkorrelationen abgreifen und sie für verschiedene Funktionen einunddesselben Modells oder der gleichen Funktion verschiedener Modelle vergleichen. Dazu das folgende

Beispiel:

Die Korrelationslängen der 1. und 2. Ableitung des Schwerepotentials nach der Höhe ($R_{z,z} = R_{gg} = \dot{\Phi}$, $R_{zz,zz}$) verhalten sich wie folgt: MORITZ-Modell 1 : 0,29; HIRVONEN-Modell 1 : 0,50; POISSON-Modell 1 : 0,53; GAUSS-Modell 1 : 0,71; SPALT-Modell 1 : 0,90. Beim letzteren ist das Amplitudenverhältnis von $R_{z,z}$, $R_{zz,zz}$ etwa 1 : 1,6. Allgemein unterscheiden sich bei gegen Null abklingenden Modellen wie (4), (5), mit $\dot{\Phi} > 0$ für alle r mit $-\infty < r < +\infty$, $R_{z,z}$ und $R_{zz,zz}$ deutlich voneinander, während sie bei schwingungsförmigen Modellen nahe beieinander liegen und in numerischen Rechnungen, ja nach statistischer Sicherheit der Ausgangsfunktion, $R_{zz,zz}$ durch $R_{z,z}$ ersetzt werden kann.

HEIN (1977) berechnete u. a. AKF von Freiluftanomalien der Schwere und des anomalen vertikalen Schweregradienten (Testgebiet Odenwald, N - S- und E - W - Profile). Die empirischen AKF sind quasischwingungsförmig. Die Korrelationslängen und die Amplituden des ersten Minimums von $R_{z,z}$ und $R_{zz,zz}$ verhalten sich im Mittel über 8 Funktionen (HEIN 1977, S. 101, 113) etwa wie 1 : 1,1; womit die obige Aussage empirisch bestätigt wird.

4.3. Varianz-Kovarianz-Schemata

Läßt man in den AKF $r \rightarrow 0$ gehen, so ergeben sich die Varianzen der zugehörigen Feldgrößen; läßt man in den KKF $r \rightarrow 0$ gehen, so ergeben sich die Kovarianzen zwischen den zugehörigen Feldgrößen in einunddemselben Punkt der Ebene. Aus welcher Richtung Ψ man sich auch dem Ursprung nähert: die Grenzwerte $r \rightarrow 0$ müssen jeweils die gleichen endlichen Werte ergeben, d. h. die Glieder mit Ψ müssen verschwinden. Stehen A und B stellvertretend für die 1. und 2. Ableitungen, so gilt

$$(63) \quad \lim_{r \rightarrow 0} C_{A,A}(r, \Psi) = C_{A,A}(0) = \sigma_A^2 \quad (\text{Varianz}) \quad \text{mit} \quad 0 < \sigma_A^2 < +\infty,$$

$$(64) \quad \lim_{r \rightarrow 0} C_{A,B}(r, \Psi) = C_{A,B}(0) = \sigma_{A,B} \quad (\text{Kovarianz}) \quad \text{mit} \quad -\infty < \sigma_{A,B} < +\infty.$$

Die Grenzwerte $r \rightarrow 0$ der entfernungsabhängigen Kompositionsfunktionen der Modelle (4) bis (6) findet man mit Hilfe der Hauptsätze über Grenzwerte von Funktionen. Sie sind in Tab. 12 bereitgestellt. Schließlich berechnet man die Varianzen (63) und die Kovarianzen (64) der Modelle aus den AKF und KKF der Tabellen 2 bis 6 und der Hilfstabelle 12. Sie sind als quadratische Schemata in den Tabellen 13 bis 17 angeschrieben. Dazu die folgenden Bemerkungen:

1. In Tab. 13 bis 17 liest man sofort ab, welche Feldgrößen in einunddemselben Punkt der Ebene korrelationsfreie Zufallsgrößen sind: $\{T_x, T_y\}$, $\{T_x, T_z\}$, $\{T_x, T_{yz}\}$, ... $\{T_{xy}, T_{yy}\}$.
2. Varianzen und Kovarianzen des anomalen Schwerevektors sind in allen Modellen gleich, weil $\Phi(0) = 1$, $\Psi(0) = 1$, $\Omega(0) = 1$, $\Theta(0) = 0$, unabhängig von der Wahl eines speziellen Modells.
3. Die ähnliche Form von HIRVONEN- und GAUSS-Modell bildet sich auch in Tab. 14, 16 ab. Mit Ausnahme von $\sigma_{x,xz}$, $\sigma_{y,yz}$, $\sigma_{z,zz}$, $\sigma_{z,xy}$, $\sigma_{z,yy}$ sind sämtliche Varianzen und Kovarianzen identisch.
4. Da sich MORITZ-, HIRVONEN- und POISSON-Modell nur um die Potenz m im Verhältnis $1 : 2 : 3$ unterscheiden, tritt ihre Verwandtschaft auch in Tab. 13, 14, 15 auf. Insbesondere verhalten sich die Varianzen der 2. Ableitungen ebenfalls wie $1 : 2 : 3$.
5. Die Varianzen verhalten sich $\sim d^{-2}$ (im Spaltmodell $\sim \omega^2 \sim \lambda^{-2}$) die Kovarianzen $\sim d^{-1}$, $\sim d^{-2}$ (im Spaltmodell $\sim \omega \sim \lambda^{-1}$, $\sim \omega^2 \sim \lambda^{-2}$), d. h., je rascher die AKF der Schwere abfällt, umso größer sind die Varianzen der 2. Ableitungen und gewisse Kovarianzen zwischen den 2. sowie zwischen den 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials.
6. Schließlich erkennt man die Invarianten (15) und ihre Folgerungen (40) und (43). Das insbesondere

$$\sigma_{zz}^2 = \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 = 2\sigma_{xz}^2 = 2\sigma_{yz}^2 = 2\sigma_{rz}^2$$

ist seit langem (größenordnungsmäßig) in der angewandten Geophysik bekannt. So schreibt H. HAALCK (1942, S. 109):

"Die maximale Wirkung einer im Untergrund eingelagerten Massenungleichheit ist an der Erdoberfläche größer auf den Vertikal- als auf den Horizontalgradienten, und zwar nach Form des Massenkörpers etwa $1 - 2\frac{1}{2}$ mal, im Durchschnitt wohl fast doppelt so groß." Ohne den Begriff "maximale Wirkung auf den Vertikal- oder Horizontalgradienten" statistisch genau definieren zu wollen (Trendbeseitigung; Anisotropie wäre zu berücksichtigen; eine Näherung könnte etwa 3σ sein!) ist das Varianzverhältnis tatsächlich genau $1 : 2$ im homogenen und isotropen Schwerefeld.

5. Ergänzende Betrachtungen

5.1. Höhere Ableitungen des Schwerepotentials

Analog wie die AKF/KKF der 2. Ableitungen lassen sich auch die AKF/KKF von höheren Ableitungen gewinnen. Als Beispiel berechnen wir die AKF der 3. Ableitung des Schwerepotentials nach der Höhe (2. Ableitung der Schwere nach der Höhe), die in der angewandten Geophysik eine gewisse Rolle spielt:

$$(65) \quad T_{zzz} = - (T_{xxz} + T_{yyz}) = - (T_{zxx} + T_{zyy}),$$

$$\begin{aligned}
 (66) \quad C_{zzz,zzz} &= E \left\{ (T_{xxz} + T_{yzy})^2 \right\} = E \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{xz} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x} T_{xz} \frac{\partial}{\partial y} T_{yz} + \left(\frac{\partial}{\partial y} T_{yz} \right)^2 \right\} \\
 &= - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{xz,xz} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C_{xz,yz} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} C_{yz,yz} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} C_{z,z} .
 \end{aligned}$$

Ohne die schreibaufwendigen Differentiationen in (66) im einzelnen durchzuführen, geben wir das Ergebnis an:

$$(67) \quad C_{zzz,zzz} = \sigma_{\Delta g}^2 \left\{ \ddot{\Phi} + 2 \ddot{\Phi} / r - \ddot{\Phi} / r^2 + \dot{\Phi} / r^3 \right\} .$$

Das skalare, ebene Feld T_{zzz} ist homogen und isotrop mit der AKF (67), wenn T_z , T_{zz} homogen und isotrop sind.

(67) erhält man auch unmittelbar durch einen Analogieschluß. Nach (42) bis (46), ferner (35) und (41) ist

$$\begin{aligned}
 (68) \quad C_{zz,zz} &= - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_{x,x} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C_{x,y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} C_{y,y} \right\} \\
 &= - \sigma_{\Delta g}^2 \left(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} / r \right) = - \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2} \left(\ddot{\Omega} + 2 \dot{\Omega} / r - \dot{\Psi} / r \right) .
 \end{aligned}$$

(66) und (68) sind von gleicher Struktur, wenn man beachtet, daß die AKF/KKF

$$\left\{ C_{xz,xz}, C_{xz,yz}, C_{yz,yz} \right\} \quad \text{sowie} \quad \left\{ C_{x,x}, C_{x,y}, C_{y,y} \right\}$$

jeweils einer TAYLOR-KARMAN-Beziehung genügen; vgl. (39) mit (10), (12), worin $\dot{\Omega}/2$ mit $-\dot{\Phi}$, $\dot{\Psi}/2$ mit $-\dot{\Phi}/r$ formal identisch sind. Man hat daher in (68) $\ddot{\Omega}/2$ durch $-\ddot{\Phi}$, $\dot{\Omega}/r$ durch $-2\dot{\Phi}/r$, $\dot{\Psi}/2r$ durch

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\Phi}}{r} \right) = -\frac{\dot{\Phi}}{r^2} + \frac{\dot{\Phi}}{r^3}$$

zu ersetzen und findet (67).

Wir geben die recht umfangreichen Ausdrücke (67) für die Modelle (4) bis (6) hier nicht an, sondern beschränken uns auf die Varianzen von T_{zzz} ,

$$\sigma_{zzz}^2 = \lim_{r \rightarrow 0} C_{zzz,zzz} ,$$

zusammengestellt in Tab. 18. Man ersieht daraus, daß σ_{zzz}^2 (ebenso wie σ_{zz}^2) umso mehr zunimmt, je rascher die AKF der Schwere abklingt.

In Abb. 7 ist die normierte AKF $R_{zzz,zzz}$ des HIRVONEN-Modells, in Abb. 8 die des Spalt-Modells, jeweils im Vergleich mit $R_{zz,zz}$ und $R_{z,z} = R_{gg} = \dot{\Phi}$, dargestellt. Beim HIRVONEN-Modell ist das Verhältnis der Korrelationslängen von $R_{z,z}$, $R_{zz,zz}$, $R_{zzz,zzz}$ 1 : 0,42 : 0,27, beim Spalt-Modell 1 : 0,98 : 0,95. Bei gegen Null abklingenden Modellen, d. h. $\dot{\Phi}(r) \geq 0$ für alle r , z. B. (4) und (5), unter-

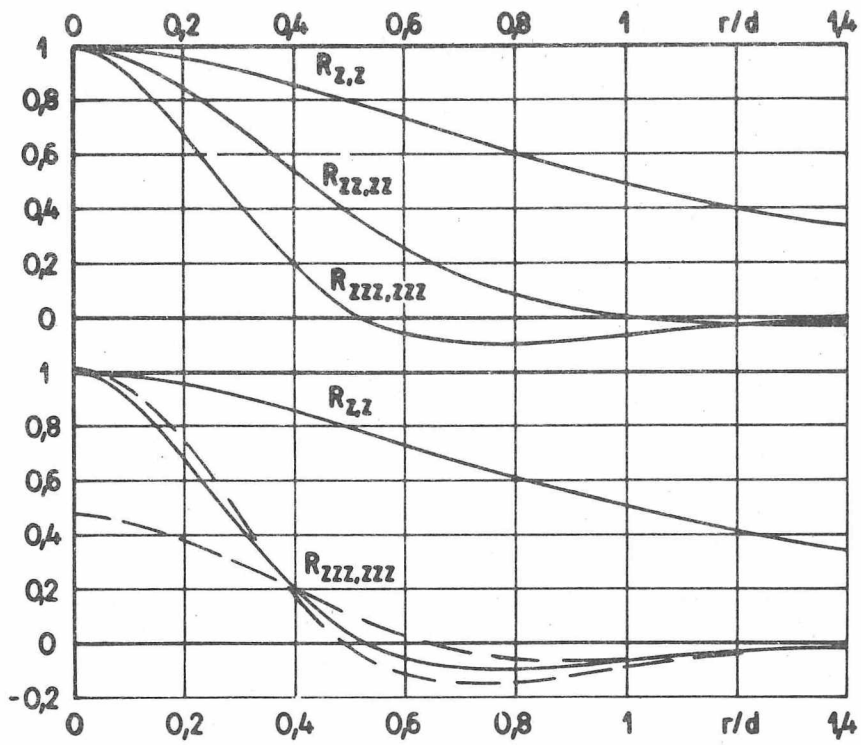


Abb. 7

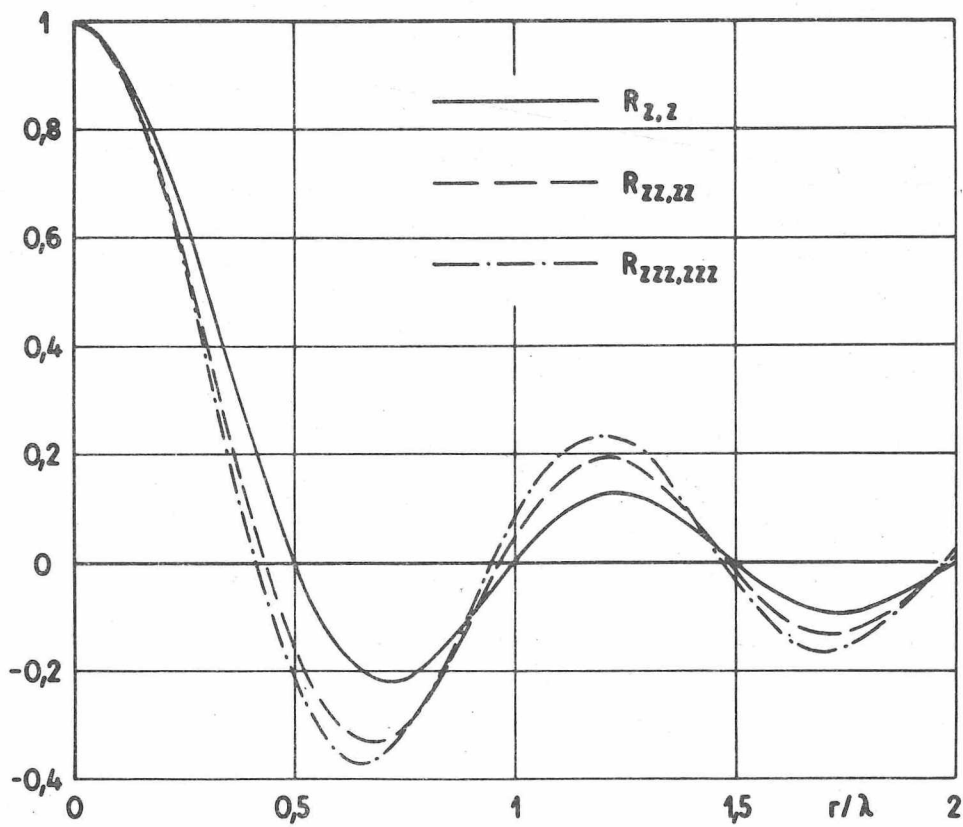


Abb. 8

scheiden sich die Autokorrelationsfunktionen der 1., 2. und 3. Ableitung des Schwerepotentials nach der Höhe deutlich voneinander; bei unterschwingenden Modellen, besonders bei ausgeprägten Schwingungstypen wie (6) liegen sie nahe beieinander, so daß in numerischen Rechnungen $R_{zzz,zzz}$ durch $R_{zz,zz}$, möglicherweise auch durch $R_{z,z}$ ersetzt werden kann (je nach statistischer Sicherheit der Ausgangsfunktion; vgl. Abschnitt 4.2.).

V. VYSKOČIL (1969) berechnete die AKF $C_{zzz,zzz}$ der 2. Ableitung der Schwere nach der Höhe $\partial^2 g / \partial z^2$ durch lineare Transformation der Ausgangsfunktion $C_{z,z}$ (HIRVONEN-Modell: $\sigma_{\Delta g}^2 = 1 \text{ mGal}^2$, $d = 5 \text{ km}$) mit Hilfe von Schätzformeln der angewandten Geophysik. In Abb. 7 (unten) ist der Bereich der von VYSKOČIL gefundenen "empirischen" AKF in Einheiten von $0,1 \text{ mGal}^2 \text{ km}^{-4}$ angegeben. Für die nach (67) abgeleitete "theoretische" AKF des HIRVONEN-Modells wird (vgl. Tab. 18)

$$\sigma_{zzz}^2 = 64 \sigma_{\Delta g}^2 d^{-4} = 0,10 \text{ mGal}^2 \text{ km}^{-4},$$

d. h., die "empirischen" AKF stimmen im oberen Grenzbereich (Schätzformeln von BARANOV, GROSSE, HENDERSON-ZIETZ, ROSENBACH; vgl. VYSKOČIL 1969) mit der theoretischen Beziehung (67) befriedigend überein. Im unteren Grenzbereich (Schätzformeln von ELKINS) werden im Bereich $r/d < 0,4$ ($0,4 < r/d < 1$) zu kleine (zu große) Kovarianzen erhalten.

5.2. Räumliche Kovarianzfunktionen

Alle integrierbaren Kovarianzfunktionen ebener, homogener und isotroper Prozesse können in den oberen Halbraum fortgesetzt werden (Anhang IV). MORITZ (1976, S. 5-7, S. 34-43) zeigte, daß von den verallgemeinerten HIRVONEN-Modellen (4) die Modelle $m = 1/2$, $3/2$ (und nur diese) eine räumliche Fortsetzung von gleicher Form wie das zugehörige ebene Modell besitzen. Mit Hilfe der Lösung in Anhang IV und den Integraltafeln von RYSHIK und GRADSTEIN (1957) findet man für das MORITZ-Modell ($m = 1/2$) und das POISSON-Modell ($m = 3/2$)

$$(69) \quad C_{z,z}(r,z) = \sigma_{\Delta g}^2 \left[(1 + z/d)^2 + (r/d)^2 \right]^{-1/2}$$

$$(70) \quad C_{z,z}(r,z) = \sigma_{\Delta g}^2 (1 + z/d) \left[(1 + z/d)^2 + (r/d)^2 \right]^{-3/2}$$

mit $z = z_1 + z_2$, $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$. Für $z_1 = z_2 = 0$ gehen (69), (70) in die ebenen Modelle (4) über. Die räumliche AKF der 2. Ableitung T_{zz} lautet dann

$$(71) \quad C_{zz,zz}(r,z) = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} C_{z,z}(r, z_1 + z_2) \quad \text{und die ebene AKF}$$

$$(72) \quad C_{zz,zz}(r) = \lim_{\substack{z_1 \rightarrow 0 \\ z_2 \rightarrow 0}} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} C_{z,z}(r, z_1 + z_2) .$$

Berechnet man (72) für (69), (70), so erhält man das gleiche Ergebnis wie mit der ebenen Transformation in Abschnitt 3.3. (Tab. 3, 9). Damit sind für das MORITZ- und das POISSON-Modell nicht nur $C_{zz,zz}$, sondern auch die AKF, die in 3.3. zur Ableitung von $C_{zz,zz}$ benutzt wurden, nämlich $C_{xx,xx}$, $C_{xy,xy}$, $C_{yy,yy}$, $C_{xz,xz}$, $C_{yz,yz}$ auf unabhängigen Wege verprobt! Weiter kann man zeigen, daß auch die räumlichen Fortsetzungen des HIRVONEN-, GAUSS- und Spalt-Modells existieren, jedoch können wir dafür keine explizite Lösung angeben.

5.3. Nicht-differenzierbare Modelle

Zur Berechnung der AKF/KKF der 2. Ableitungen ist die Differenzierbarkeit der Ausgangsmodelle C_{gg} eine notwendige Voraussetzung. Werden nur die AKF/KKF der 1. Ableitungen, z. B. in der Lotabweichungsprädiktion, benötigt, kann diese Voraussetzung fallengelassen werden. Als Beispiel betrachten wir den zweidimensionalen MARKOV-Prozeß in der Ebene (GRAFAREND 1971 b):

$$\Phi(\tau) = \tau K_1(\tau) \quad (\tau = r/d)$$

$$(73) \quad \Psi(\tau) = 4/\tau^2 - 2 K_0(\tau) - 4 K_1(\tau)/\tau$$

$$\Omega(\tau) = -4/\tau^2 + 2 K_0(\tau) + 4 K_1(\tau)/\tau + 2\tau K_1(\tau)$$

mit den MACDONALDschen Funktionen $K_n(\tau)$, $n = 0, 1$. Es ist

$$-\Phi'(\tau) = \tau K_0(\tau) \quad \text{und} \quad -\Phi''(\tau) = K_0(\tau) - \tau K_1(\tau) = K_0(\tau) - \Phi(\tau).$$

Wegen $\Phi(0) = 1$, $K_0(0) = +\infty$ wird

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (-\Phi'') = \lim_{\tau \rightarrow 0} (-\Phi'/\tau) = +\infty.$$

Analog findet man

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (-\Psi'') = \lim_{\tau \rightarrow 0} (-\Psi'/\tau) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} (-\Omega'') = \lim_{\tau \rightarrow 0} (-\Omega'/\tau) = +\infty.$$

Damit ist (63), (64) verletzt und der Gebrauch von (73) auf die 1. Ableitungen beschränkt. Um das AKF-KKF-Schema des anomalen Schwerevektors zu vervollständigen, geben wir eine Lösung für $\Theta(\tau)$ an:

$$(74) \quad \Theta(\tau) = \frac{\pi}{4} \tau \cdot {}_1F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2; \frac{\tau^2}{4}\right) + \frac{2}{3} \tau^2 \cdot {}_1F_2\left(2, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\tau^2}{4}\right).$$

${}_1F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2; \frac{\tau^2}{4}\right)$ und ${}_1F_2\left(2, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\tau^2}{4}\right)$ sind verallgemeinerte hypergeometrische Reihen (RYSHIK und GRADSTEIN 1957).

Tabelle 1. Übersicht (Tabellen-Nachweis) sämtlicher AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in der Ebene (T ... Tabelle)

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	T2			T5		T6			
y				T6		T5			
z				T3				T4	
xz	T5	T6	T3			T4			
yz	T6			T5		T3			
zz	T6			T5		T3			
xx	T6			T5		T3			
xy	T6			T5		T3			
yy	T6			T5		T3			

Tabelle 2. AKF und KKF der 1. Ableitungen T_x, T_y, T_z

$$c_{T_i, T_j}(r, \varphi) = \frac{G \Delta g^2}{2} f(r) f_{i,j}(\varphi)$$

$$\text{mit } f(r) = \{f_k(r)\}, \quad f_{i,j}(\varphi) = \{f_{i,j}^k(\varphi)\}; \quad i, j = x, y;$$

$k = 1, 2, 3$. Erläuterungen im Text.

	f_1	f_2	f_3
$f_k(r)$	ψ	Ω	Θ
$f^k(\varphi)$	f^1	f^2	f^3
$f_{x,x}$	$\sin^2 \varphi$	$\cos^2 \varphi$	0
$f_{x,y} = f_{y,x}$	$-\sin \varphi \cos \varphi$	$\sin \varphi \cos \varphi$	0
$f_{x,z} = -f_{z,x}$	0	0	$2 \cos \varphi$
$f_{y,y}$	$\cos^2 \varphi$	$\sin^2 \varphi$	0
$f_{y,z} = -f_{z,y}$	0	0	$2 \sin \varphi$
$f_{z,z}$	1	1	0

Tabelle 3. AKF und KKF der 2. Ableitungen $T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, T_{zz}$ sowie der 2. Ableitungen T_{xz}, T_{yz}

$$C_{T_{ij}, T_{ij}}(r, \varphi) = -\frac{\sigma_{ag}^2}{2} f(r) f_{ij, ij}(\varphi)$$

mit $f(r) = \{f_k(r)\}$, $f_{ij, ij}(\varphi) = \{f_{ij, ij}^k(\varphi)\}$;

$i, j = x, y, z$; $k = 1, 2, 3$. Erläuterungen im Text.

	f_1	f_2	f_3
$f_k(r)$	$\ddot{\Theta}$	$\ddot{\Psi}$	$\ddot{\Psi}/r$
$f^k(\varphi)$	f^1	f^2	f^3
$f_{xx,xx}$	$\cos^4\varphi$	$6 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$	$3 \sin^4\varphi$
$f_{xx,xy}$	$\sin\varphi \cos^3\varphi$	$3 \sin\varphi \cos\varphi (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$	$-3 \sin^3\varphi \cos\varphi$
$f_{xx,yy} = f_{xy,xy}$	$\sin^2\varphi \cos^2\varphi$	$1 - 6 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$	$3 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$
$f_{yy,xy}$	$\sin^3\varphi \cos\varphi$	$3 \sin\varphi \cos\varphi (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$	$-3 \sin\varphi \cos^3\varphi$
$f_{yy,yy}$	$\sin^4\varphi$	$6 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$	$3 \cos^4\varphi$
$f_{xx,zz} = -f_{xz,xx}$	$-\cos^2\varphi$	-1	$-3 \sin^2\varphi$
$f_{xy,zz} = -f_{xz,zy}$	$-\sin\varphi \cos\varphi$	0	$3 \sin\varphi \cos\varphi$
$f_{yy,zz} = -f_{yz,yy}$	$-\sin^2\varphi$	-1	$-3 \cos^2\varphi$
$f_{zz,zz}$	1	2	3

Tabelle 4. KKF zwischen den 2. Ableitungen T_{xz}, T_{yz} und den 2. Ableitungen $T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, T_{zz}$

$$C_{T_{ij}, T_{ij}}(r, \varphi) = -\sigma_{ag}^2 f(r) f_{ij, ij}(\varphi)$$

mit $f(r) = \{f_k(r)\}$, $f_{ij, ij}(\varphi) = \{f_{ij, ij}^k(\varphi)\}$; $i, j = x, y, z$; $k = 1, 2$.

Erläuterungen im Text.

	f_1	f_2
$f_k(r)$	$\ddot{\Theta}$	$\ddot{\Theta}/r - \ddot{\Theta}/r^2$
$f^k(\varphi)$	f^1	f^2
$f_{xx,zz} = -f_{xz,xx}$	$\cos^3\varphi$	$3 \sin^2\varphi \cos\varphi$
$f_{xy,zz} = -f_{xz,xy} = f_{xx,yz} = -f_{yz,xx}$	$\sin\varphi \cos^2\varphi$	$\sin\varphi (1 - 3 \cos^2\varphi)$
$f_{yy,zz} = -f_{xz,yy} = f_{xy,yz} = -f_{yz,xy}$	$\cos\varphi \sin^2\varphi$	$\cos\varphi (1 - 3 \sin^2\varphi)$
$f_{yy,yz} = -f_{yz,yy}$	$\sin^3\varphi$	$3 \cos^2\varphi \sin\varphi$
$f_{zz,zz} = -f_{xz,zz}$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$f_{zz,yz} = -f_{yz,zz}$	$-\sin\varphi$	$-\sin\varphi$

Tabelle 5. KKF zwischen den 1. Ableitungen T_x, T_y und den 2. Ableitungen T_{xz}, T_{yz} sowie zwischen der 1. Ableitung T_z und den 2. Ableitungen $T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, T_{zz}$

$$C_{T_i, T_{ij}}^{(r, \varphi)} = - \sigma_{\Delta g}^2 f(r) f_{i, ij}(\varphi)$$

mit $f(r) = \{f_k(r)\}$, $f_{i, ij}(\varphi) = \{f_{i, ij}^k(\varphi)\}$; $i, j = x, y, z$; $k = 1, 2$.
Erläuterungen im Text.

	f_1	f_2
$f_k(r)$	\ominus	\ominus / r
$f^k(\varphi)$	r^1	r^2
$-f_{x, xz} = f_{z, xx}$	$\cos^2 \varphi$	$\sin^2 \varphi$
$-f_{x, yz} = -f_{y, xz} = f_{z, xy}$	$\sin \varphi \cos \varphi$	$-\sin \varphi \cos \varphi$
$-f_{y, yz} = f_{z, yy}$	$\sin^2 \varphi$	$\cos^2 \varphi$
$f_{z, zz}$	-1	-1

Tabelle 6. KKF zwischen den 1. Ableitungen T_x, T_y und den 2. Ableitungen $T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, T_{zz}$ sowie zwischen der 1. Ableitung T_z und den 2. Ableitungen T_{xz}, T_{yz}

$$C_{T_i, T_{ij}}^{(r, \varphi)} = - \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2} f(r) f_{i, ij}(\varphi)$$

mit $f(r) = \{f_k(r)\}$, $f_{i, ij}(\varphi) = \{f_{i, ij}^k(\varphi)\}$; $i, j = x, y, z$; $k = 1, 2$.
Erläuterungen im Text.

	f_1	f_2
$f_k(r)$	Ω	$\dot{\psi}$
$f^k(\varphi)$	r^1	r^2
$-f_{x, xx} = f_{xx, x}$	$\cos^3 \varphi$	$3 \sin^2 \varphi \cos \varphi$
$-f_{x, xy} = f_{xy, x} = -f_{y, xx} = f_{xx, y}$	$\sin \varphi \cos^2 \varphi$	$\sin \varphi (1 - 3 \cos^2 \varphi)$
$-f_{x, yy} = f_{yy, x} = -f_{y, xy} = f_{xy, y}$	$\sin^2 \varphi \cos \varphi$	$\cos \varphi (1 - 3 \sin^2 \varphi)$
$-f_{y, yy} = f_{yy, y}$	$\sin^3 \varphi$	$3 \sin \varphi \cos^2 \varphi$
$f_{x, zz} = -f_{zz, x} = -f_{z, xz} = f_{xz, z}$	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$
$f_{y, zz} = f_{zz, y} = -f_{z, yz} = f_{yz, z}$	$\sin \varphi$	$\sin \varphi$

Tabelle 7. AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials für $\Psi = 0$, in Einheiten von σ_{Ag}^2 . Erläuterungen im Text.

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	$\Omega/2$	0	Θ	$\dot{\Theta}$	0	$-\dot{\Phi}$	$\dot{\Omega}/2$	0	$\dot{\Psi}/2$
y		$\Psi/2$	0	0	Θ/r	0	0	$\dot{\Psi}/2$	0
z			Φ	$\dot{\Phi}$	0	$\dot{\Theta} + \Theta/r$	$-\dot{\Theta}$	0	$-\Theta/r$
xz				$-\ddot{\Phi}$	0	$-(\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}/r - \Theta/r^2)$	$\ddot{\Theta}$	0	$\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2$
yz					$-\dot{\Phi}/r$	0	0	$\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2$	0
zz						$-(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}/r)$	$\ddot{\Phi}$	0	$\dot{\Phi}/r$
xx							$-\ddot{\Omega}/2$	0	$-\dot{\Psi}/2$
xy								$-\ddot{\Psi}/2$	0
yy									$-3\dot{\Psi}/2r$

Tabelle 8. AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials für $\Psi = \pi/2$, in Einheiten von σ_{Ag}^2 . Erläuterungen im Text.

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	$\Psi/2$	0	0	Θ/r	0	0	0	$\dot{\Psi}/2$	0
y		$\Omega/2$	Θ	0	$\dot{\Theta}$	$-\dot{\Phi}$	$\dot{\Psi}/2$	0	$\dot{\Omega}/2$
z			Φ	0	$\dot{\Phi}$	$\dot{\Theta} + \Theta/r$	$-\Theta/r$	0	$-\dot{\Theta}$
xz				$-\dot{\Phi}/r$	0	0	0	$\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2$	0
yz					$-\ddot{\Phi}$	$-(\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}/r - \Theta/r^2)$	$\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2$	0	$\ddot{\Theta}$
zz						$-(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}/r)$	$\dot{\Phi}/r$	0	$\ddot{\Phi}$
xx							$-3\dot{\Psi}/2r$	0	$-\dot{\Psi}/2$
xy								$-\ddot{\Psi}/2$	0
yy									$-\dot{\Omega}/2$

Tabelle 9. Entfernungsabhängige Kompositionsfunktionen der AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerpotentials. MORITZ- und POISSON-Modell. $\tilde{r} = r/d$

$f(r)$	MORITZ-Modell	POISSON-Modell
Φ	$(1 + \tilde{r}^2)^{-1/2}$	$(1 + \tilde{r}^2)^{-3/2}$
$-\dot{\Phi}$	$d^{-1} \tilde{r} (1 + \tilde{r}^2)^{-3/2}$	$3d^{-1} \tilde{r} (1 + \tilde{r}^2)^{-5/2}$
$-\ddot{\Phi}$	$d^{-2} (1 - 2\tilde{r}^2) (1 + \tilde{r}^2)^{-5/2}$	$3d^{-2} (1 - 4\tilde{r}^2) (1 + \tilde{r}^2)^{-7/2}$
Ψ	$2\tilde{r}^{-2} [(1 + \tilde{r}^2)^{1/2} - 1]$	$2\tilde{r}^{-2} [1 - (1 + \tilde{r}^2)^{-1/2}]$
$-\dot{\Psi}$	$2d^{-1} \tilde{r}^{-3} (1 + \tilde{r}^2)^{-1/2} [2 + \tilde{r}^2 - 2(1 + \tilde{r}^2)^{1/2}]$	$2d^{-1} \tilde{r}^{-3} (1 + \tilde{r}^2)^{-3/2} [2(1 + \tilde{r}^2)^{3/2} - 3\tilde{r}^2 - 2]$
$-\ddot{\Psi}$	$2d^{-2} \tilde{r}^{-4} (1 + \tilde{r}^2)^{-3/2} [6(1 + \tilde{r}^2)^{3/2} - 2\tilde{r}^4 - 9\tilde{r}^2 - 6]$	$6d^{-2} \tilde{r}^{-4} (1 + \tilde{r}^2)^{-5/2} [2 + 5\tilde{r}^2 + 4\tilde{r}^4 - 2(1 + \tilde{r}^2)^{5/2}]$
Ω	$2\tilde{r}^{-2} [1 - (1 + \tilde{r}^2)^{-1/2}]$	$2(1 + \tilde{r}^2)^{-3/2} - 2\tilde{r}^{-2} [1 - (1 + \tilde{r}^2)^{-1/2}]$
$-\dot{\Omega}$	$2d^{-1} \tilde{r}^{-3} (1 + \tilde{r}^2)^{-3/2} [2(1 + \tilde{r}^2)^{3/2} - 3\tilde{r}^2 - 2]$	$2d^{-1} \tilde{r}^{-3} (1 + \tilde{r}^2)^{-5/2} [2 + 5\tilde{r}^2 + 6\tilde{r}^4 - 2(1 + \tilde{r}^2)^{5/2}]$
$-\ddot{\Omega}$	$6d^{-2} \tilde{r}^{-4} (1 + \tilde{r}^2)^{-5/2} [2 + 5\tilde{r}^2 + 4\tilde{r}^4 - 2(1 + \tilde{r}^2)^{5/2}]$	$6d^{-2} \tilde{r}^{-4} (1 + \tilde{r}^2)^{-7/2} [2(1 + \tilde{r}^2)^{7/2} - 8\tilde{r}^6 - 8\tilde{r}^4 - 7\tilde{r}^2 - 2]$
Θ	$\tilde{r}^{-1} [1 - (1 + \tilde{r}^2)^{-1/2}]$	$\tilde{r} (1 + \tilde{r}^2)^{-3/2}$
$\dot{\Theta}$	$d^{-1} \tilde{r}^{-2} (1 + \tilde{r}^2)^{-3/2} [1 + 2\tilde{r}^2 - (1 + \tilde{r}^2)^{3/2}]$	$d^{-1} (1 + \tilde{r}^2)^{-5/2} (1 - 2\tilde{r}^2)$
$-\ddot{\Theta}$	$d^{-2} \tilde{r}^{-3} (1 + \tilde{r}^2)^{-5/2} [2 + 5\tilde{r}^2 + 6\tilde{r}^4 - 2(1 + \tilde{r}^2)^{5/2}]$	$3d^{-2} \tilde{r} (1 + \tilde{r}^2)^{-7/2} (3 - 2\tilde{r}^2)$

Tabelle 10. Entfernungsabhängige Kompositionsfunktionen der AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials. HIRVONEN-Modell. $\tilde{\tau} = r/d$

$f(r)$	HIRVONEN-Modell
Φ	$(1 + \tilde{\tau}^2)^{-1}$
$-\dot{\Phi}$	$2d^{-1} \tilde{\tau} (1 + \tilde{\tau}^2)^{-2}$
$-\ddot{\Phi}$	$2d^{-2} (1 - 3\tilde{\tau}^2) (1 + \tilde{\tau}^2)^{-3}$
Ψ	$\tilde{\tau}^{-2} \ln(1 + \tilde{\tau}^2)$
$-\dot{\Psi}$	$2d^{-1} [\tilde{\tau}^{-3} \ln(1 + \tilde{\tau}^2) - \tilde{\tau}^{-1} (1 + \tilde{\tau}^2)^{-1}]$
$-\ddot{\Psi}$	$2d^{-2} [(5 + 3\tilde{\tau}^{-2})(1 + \tilde{\tau}^2)^{-2} - 3\tilde{\tau}^{-4} \ln(1 + \tilde{\tau}^2)]$
Ω	$2(1 + \tilde{\tau}^2)^{-1} - \tilde{\tau}^{-2} \ln(1 + \tilde{\tau}^2)$
$-\dot{\Omega}$	$2d^{-1} [\tilde{\tau}^{-1} (1 + \tilde{\tau}^2)^{-1} + 2\tilde{\tau} (1 + \tilde{\tau}^2)^{-2} - \tilde{\tau}^{-3} \ln(1 + \tilde{\tau}^2)]$
$-\ddot{\Omega}$	$2d^{-2} [3\tilde{\tau}^{-4} \ln(1 + \tilde{\tau}^2) - (4 + 3\tilde{\tau}^{-2})(1 + \tilde{\tau}^2)^{-2} - 4\tilde{\tau}^2 (1 + \tilde{\tau}^2)^{-3}]$
Θ	hF
$\dot{\Theta}$	$d^{-1} [h'F + hg'F']$
$\ddot{\Theta}$	$d^{-2} [h''F + (2h'g' + hg'')F' + hg'^2F'']$
F	$F(3/2, 1/2, 2; g)$
g	$\tilde{\tau}^2 (1 + \tilde{\tau}^2)^{-1}$
h	$\tilde{\tau} (1 + \tilde{\tau}^2)^{-3/2}$
F'	$3F(3/2, 1/2, 3; g)/g(1-g)$
g'	$2\tilde{\tau} (1 + \tilde{\tau}^2)^{-2}$
h'	$(1 - 2\tilde{\tau}^2)(1 + \tilde{\tau}^2)^{-5/2}$
F''	$15F(3/2, 1/2, 4; g)/32(1-g)^2$
g''	$2(1 - 3\tilde{\tau}^2)(1 + \tilde{\tau}^2)^{-3}$
h''	$3\tilde{\tau} (2\tilde{\tau}^2 - 3)(1 + \tilde{\tau}^2)^{-7/2}$

Tabelle 11. Entfernungsabhängige Kompositionsfunktionen der AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials. GAUSS- und Spalt-Modell.

$$\tau = r/d, S(\alpha) = \alpha^{-1} \sin \alpha, \quad \alpha = \omega r = 2 \tilde{r} r / \lambda$$

f(r)	GAUSS - Modell	Spalt - Modell
Φ	$\exp(-\tau^2)$	$S(\alpha)$
$-\dot{\Phi}$	$2d^{-1} \tau \exp(-\tau^2)$	$\omega \alpha^{-1} [S(\alpha) - \cos \alpha]$
$-\ddot{\Phi}$	$2d^{-2} (1 - 2\tau^2) \exp(-\tau^2)$	$\omega^2 \alpha^{-2} [(\alpha^2 - 2)S(\alpha) + 2\cos \alpha]$
Ψ	$\tau^{-2} [1 - \exp(-\tau^2)]$	$S^2(\alpha/2)$
$-\dot{\Psi}$	$2d^{-1} \tau^{-3} [(1 + \tau^2) \exp(-\tau^2) - 1]$	$2 \omega \alpha^{-1} S(\alpha/2) [S(\alpha/2) - \cos(\alpha/2)]$
$-\ddot{\Psi}$	$2d^{-2} \tau^{-4} [(3 + 3\tau^2 + 2\tau^4) \exp(-\tau^2) - 3]$	$2 \omega^2 \alpha^{-2} [4S(\alpha) - 3S^2(\alpha/2) - \cos \alpha]$
Ω	$2 \exp(-\tau^2) - \tau^{-2} [1 - \exp(-\tau^2)]$	$2 \alpha^{-2} [\alpha^2 S(\alpha) + \cos \alpha - 1]$
$-\dot{\Omega}$	$2d^{-1} \tau^{-3} [(2\tau^4 + \tau^2 + 1) \exp(-\tau^2) - 1]$	$2 \omega \alpha^{-1} [S(\alpha) + S(\alpha/2) \cos(\alpha/2) - S^2(\alpha/2) - \cos \alpha]$
$-\ddot{\Omega}$	$2d^{-2} \tau^{-4} [3 - (4\tau^6 + 3\tau^2 + 3) \exp(-\tau^2)]$	$2 \omega^2 \alpha^{-2} [(\alpha^2 - 6)S(\alpha) + 3S^2(\alpha/2) + 3\cos \alpha]$
Θ	$[I_0(\tau^2/2) - I_1(\tau^2/2)] \exp(-\tau^2/2)$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^{2n+1} (a_0 = \pi/8, a_{n+1} = -a_n(n+3/2)/4(n+1)(n+2))$
$\dot{\Theta}$	$d^{-1} [(1 - 2\tau^2) I_0(\tau^2/2) + (1 + 2\tau^2) I_1(\tau^2/2)] \exp(-\tau^2/2)$	$\omega \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n \alpha^{2n}$
$-\ddot{\Theta}$	$d^{-2} \tau^{-1} [4\tau^2(1 - \tau^2) I_0(\tau^2/2) + 2(2\tau^4 + 1) I_1(\tau^2/2)] \exp(-\tau^2/2)$	$-2\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(2n+1) a_n \alpha^{2n-1}$

Tabelle 12. Grenzwerte $r \rightarrow 0$ entfernungsabhängiger Kompositionsfunctionen der AKF und KKF der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials

$f(r)$	MORITZ	HIRVONEN	POISSON	GAUSS	$f(r)$	Spalt-F.
Φ	1	1	1	1	Φ	1
$-\dot{\Phi}_d$	0	0	0	0	$-\dot{\Phi}/\omega$	0
$-\dot{\Phi}_d^2/r$	1	2	3	2	$-\dot{\Phi}/\omega^2 r$	1/3
$-\ddot{\Phi}_d^2$	1	2	3	2	$-\ddot{\Phi}/\omega^2$	1/3
Ψ	1	1	1	1	Ψ	1
$-\dot{\Psi}_d$	0	0	0	0	$-\dot{\Psi}/\omega$	0
$-\dot{\Psi}_d^2/r$	1/2	1	3/2	1	$-\dot{\Psi}/\omega^2 r$	1/6
$-\ddot{\Psi}_d^2$	1/2	1	3/2	1	$-\ddot{\Psi}/\omega^2$	1/6
Ω	1	1	1	1	Ω	1
$-\dot{\Omega}_d$	0	0	0	0	$-\dot{\Omega}/\omega$	0
$-\dot{\Omega}_d^2/r$	3/2	3	9/2	3	$-\dot{\Omega}/\omega^2 r$	1/2
$-\ddot{\Omega}_d^2$	3/2	3	9/2	3	$-\ddot{\Omega}/\omega^2$	1/2
Θ	0	0	0	0	Θ	0
$\Theta d/r$	1/2	$\tilde{\pi}/4$	1	$(\tilde{\pi}/4)^{1/2}$	$\Theta/\omega r$	$\tilde{\pi}/8$
$\dot{\Theta}_d$	1/2	$\tilde{\pi}/4$	1	$(\tilde{\pi}/4)^{1/2}$	$\dot{\Theta}/\omega$	$\tilde{\pi}/8$
$(\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2)d^2$	0	0	0	0	$(\dot{\Theta}/r - \Theta/r^2)/\omega^2$	0
$\ddot{\Theta}_d^2$	0	0	0	0	$\ddot{\Theta}/\omega^2$	0

Tabelle 13. Varianzen und Kovarianzen der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in einunddemselben Punkt der Ebene in Einheiten von $\sigma_{\Delta g}^2$ (MORITZ-Modell)

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	1/2	0	0	1/2d	0	0	0	0	0
y		1/2	0	0	1/2d	0	0	0	0
z			1	0	0	1/d	-1/2d	0	-1/2d
xz				1/d ²	0	0	0	0	0
yz					1/d ²	0	0	0	0
zz						2/d ²	-1/d ²	0	-1/d ²
xx							3/4d ²	0	1/4d ²
xy								1/4d ²	0
yy									3/4d ²

Tabelle 14. Varianzen und Kovarianzen der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in einunddemselben Punkt der Ebene in Einheiten von $\sigma_{\Delta g}^2$ (HIRVONEN-Modell)

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	1/2	0	0	$\tilde{\pi}/4d$	0	0	0	0	0
y		1/2	0	0	$\tilde{\pi}/4d$	0	0	0	0
z			1	0	0	$\tilde{\pi}/2d$	$-\tilde{\pi}/4d$	0	$-\tilde{\pi}/4d$
xz				2/d ²	0	0	0	0	0
yz					2/d ²	0	0	0	0
zz						4/d ²	-2/d ²	0	-2/d ²
xx							3/2d ²	0	1/2d ²
xy								1/2d ²	0
yy									3/2d ²

Tabelle 15. Varianzen und Kovarianzen der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in einunddemselben Punkt der Ebene in Einheiten von $\sigma_{\Delta g}^2$ (POISSON-Modell)

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	1/2	0	0	1/d	0	0	0	0	0
y		1/2	0	0	1/d	0	0	0	0
z			1	0	0	2/d	-1/d	0	-1/d
xz				$3/d^2$	0	0	0	0	0
yz					$3/d^2$	0	0	0	0
zz						$6/d^2$	$-3/d^2$	0	$-3/d^2$
xx							$9/4d^2$	0	$3/4d^2$
xy								$3/4d^2$	0
yy									$9/4d^2$

Tabelle 16. Varianzen und Kovarianzen der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in einunddemselben Punkt der Ebene in Einheiten von $\sigma_{\Delta g}^2$ (GAUSS-Modell)

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	1/2	0	0	$\sqrt{3}/2d$	0	0	0	0	0
y		1/2	0	0	$\sqrt{3}/2d$	0	0	0	0
z			1	0	0	$\sqrt{3}/d$	$-\sqrt{3}/2d$	0	$-\sqrt{3}/2d$
xz				$2/d^2$	0	0	0	0	0
yz					$2/d^2$	0	0	0	0
zz						$4/d^2$	$-2/d^2$	0	$-2/d^2$
xx							$3/2d^2$	0	$1/2d^2$
xy								$1/2d^2$	0
yy									$3/2d^2$

Tabelle 17. Varianzen und Kovarianzen der 1. und 2. Ableitungen des Schwerepotentials in einunddemselben Punkt der Ebene in Einheiten von $\sigma_{\Delta g}^2$ (Spalt-Modell)

	x	y	z	xz	yz	zz	xx	xy	yy
x	1/2	0	0	$\omega\tilde{h}/8$	0	0	0	0	0
y		1/2	0	0	$\omega\tilde{h}/8$	0	0	0	0
z			1	0	0	$\omega\tilde{h}/4$	$-\omega\tilde{h}/8$	0	$-\omega\tilde{h}/8$
xz				$\omega^2/3$	0	0	0	0	0
yz					$\omega^2/3$	0	0	0	0
zz						$2\omega^2/3$	$-\omega^2/3$	0	$-\omega^2/3$
xx							$\omega^2/4$	0	$\omega^2/12$
xy								$\omega^2/12$	0
yy									$\omega^2/4$

Tabelle 18. Varianzen der ersten drei Ableitungen des Schwerepotentials nach der Höhe (in Einheiten von $\sigma_{\Delta g}^2$)

Modell	T_z	T_{zz}	T_{zzz}
MORITZ	1	$2/d^2$	$24/d^4$
HIRVONEN	1	$4/d^2$	$64/d^4$
POISSON	1	$6/d^2$	$120/d^4$
GAUSS	1	$4/d^2$	$32/d^4$
Spalt-Fkt.	1	$2\omega^2/3$	$8\omega^4/15$

Anhang I. Kovarianzfortpflanzung bei Faltungsoptionen

1. Bezeichnung und Definitionen

Es sei f eine auf \mathbb{R}^2 LEBESGUE-integrierbare Funktion. Das LEBESGUE-Integral der Funktion f über \mathbb{R}^2 werde mit

$$(75) \quad \int f(x) dx$$

bezeichnet. Als Symbol für die Menge der in \mathbb{R}^2 beliebig oft differenzierbaren, finiten Funktionen sei \mathcal{D} gewählt. Unter \mathcal{D}' sei die Menge der auf \mathcal{D} linearen, stetigen Funktionale zu verstehen. Die Anwendung eines $f \in \mathcal{D}'$ auf ein $\varphi \in \mathcal{D}$ werde (f, φ) geschrieben. Mit \mathcal{E}' sei die Menge der Distributionen mit kompaktem Träger bezeichnet und unter \mathcal{Y}' verstehe man die Menge der Distributionen schwachen Wachstums.

Man sagt, eine Folge $\{\eta_k\} \subset \mathcal{D}$ konvergiere gegen 1 auf \mathbb{R}^2 , wenn für ein beliebiges Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ eine Zahl N derart existiert, daß $\eta_k(x) = 1$ für alle $x \in K$ und $k \geq N$ gilt und die η_k nebst allen Ableitungen in \mathbb{R}^2 gleichmäßig beschränkt sind.

Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein vollständiger, σ -endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Mit $\mathcal{L}_2(\Omega)$ sei der Hilbertraum der bezüglich P auf Ω quadratisch integrierbaren Funktionen bezeichnet. Eine Abbildung $\Delta g: \Omega \rightarrow \mathcal{D}'$ werde schwach meßbar genannt, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{D}$ und für jede BOREL-Menge B reeller Zahlen die Menge $\{\omega \in \Omega: (\Delta g(\omega), \varphi) \in B\}$ bezüglich P meßbar ist. Eine schwach meßbare Abbildung $\Delta g: \Omega \rightarrow \mathcal{D}'$ heiße verallgemeinerter stochastischer Prozeß (VSP). Die Distribution $m \in \mathcal{D}'$ werde Mittelwert des VSP Δg genannt, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(76) \quad (m, \varphi) = E(\Delta g, \varphi)$$

gilt und ferner heiße der VSP homogen, wenn dieser Mittelwert gleich der Nulldistribution ist. Ein auf $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ bilineares, stetiges, positiv semidefinites Funktional C , für das

$$(77) \quad C(\varphi, \psi) = E \left\{ (\Delta g, \varphi) (\Delta g, \psi) \right\} ; \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

gilt, werde als Kovarianzfunktional des homogenen VSP Δg bezeichnet. Der VSP heiße stationär, wenn ein positiv semidefinites $C \in \mathcal{D}'$ existiert, so daß

$$(78) \quad (C, \varphi * \psi^*) = E \left\{ (\Delta g, \varphi) (\Delta g, \psi) \right\} ; \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

gilt. Unter $\varphi * \psi^*$ werde dabei die Funktion

$$(79) \quad \varphi * \psi^*(x) := \int \varphi(t-x) \psi(t) dt$$

verstanden.

2. Aufgabenstellungen

Es sei $\Delta g: \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ein homogener, stationärer, GAUSSscher Prozeß (im klassischen Sinne) mit der stetigen, integrierbaren Kovarianzfunktion $C_{\Delta g \Delta g}$. (Der Index $\Delta g \Delta g$ soll, da dadurch keine Verwechslungen entstehen können, im Folgenden der Bequemlichkeit halber weggelassen werden). Die Prozesse der Lotabweichungskomponenten s_i ($S_1 = \xi$ in nördlicher, $S_2 = \eta$ in östlicher Richtung orientiert) sind als Faltung mit der Funktion $f_i(x) = -x_i |x|^{-3} (2\pi\gamma)^{-1}$ definiert.

$$(80) \quad s_i := f_i * \Delta g$$

(f_1 entspricht f_ξ und f_2 entspricht f_η . Vgl. 2.1.).

Es sei folgende Aufgabe vorgelegt:

(A) Untersuche die Existenz der Faltung (80) im klassischen Sinne und bestimme gegebenenfalls den Tensor C_{ij} der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen. Vermöge der Beziehungen

$$(81) \quad \begin{aligned} (\Delta g, \psi) &:= \int \Delta g(\omega, x) \psi(x) dx \\ (C, \psi) &:= \int C(x) \psi(x) dx \\ (f_i, \psi) &:= \frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^\infty r^{-1} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} (r \cos \alpha, r \sin \alpha) d\alpha dr \\ \psi(x) &= \psi(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

(dabei ist im letzten Integral $\cos \alpha$ für $i = 1$ und $\sin \alpha$ für $i = 2$ zu lesen) kann Δg als VSP und können C, f_i als Elemente von \mathcal{D}' angesprochen werden.

Wenn für jede auf \mathbb{R}^4 gegen 1 konvergierende Folge $\{\eta_k\}$ und für jedes $\psi \in \mathcal{D}$ der Grenzwert

$$(82) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (f_i(x), (\Delta g(\omega, y), \eta_k(x, y) \psi(x+y))) =: (\sigma_i, \psi)$$

im Sinne der \mathcal{L}_2 Norm existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $\{\eta_k\}$ ist, nennt man den durch diesen Grenzwert definierten VSP σ_i distributionelle Faltung von f_i mit Δg .

Da es schwierig ist, Aussagen über die Existenz der Faltung (80) im klassischen Sinne zu machen, löst man zunächst die Ersatzaufgabe:

(E) Untersuche die Existenz der distributionellen Faltung (82) und bestimme gegebenenfalls den Tensor C_{ij} der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionale.

3. Vorbereitende Hilfssätze

Es erscheint zweckmäßig, dem Beweis einer Existenzaussage für die verallgemeinerten Prozesse der Lotabweichungskomponenten σ_1 drei Lemmata voranzustellen.

Lemma 1: Es existieren ein $f_1^0 \in \mathcal{E}'$ und eine auf \mathbb{R}^2 stetige, quadratisch integrierbare Funktion f_1^+ , so daß

$$(f_1, \varphi) = (f_1^0, \varphi) + (f_1^+, \varphi) ; \quad \varphi, \varphi \in \mathcal{D} .$$

Beweis: Offenbar ist die Funktion

$$f_1^+(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } |x| > R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \quad R > 0$$

auf \mathbb{R}^2 stetig und quadratisch integrierbar. Da die Abbildung

$$f_1 : \varphi \rightarrow \frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty r^{-1} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \varphi(r \cos \alpha, r \sin \alpha) d\alpha dr ; \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

aus \mathcal{D}' ist, gehört die Abbildung

$$f_1^0 : \varphi \rightarrow \frac{1}{2\pi r} \int_0^R r^{-1} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \varphi(r \cos \alpha, r \sin \alpha) d\alpha dr ; \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

zu \mathcal{E}' . Offenbar gilt aber

$$\begin{aligned} (f_1^0, \varphi) + (f_1^+, \varphi) &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty r^{-1} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \varphi(r \cos \alpha, r \sin \alpha) d\alpha dr \\ &= (f_1, \varphi) . \end{aligned}$$

Lemma 2: Die Folge $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$ habe folgende Eigenschaften:

(i) Es gibt ein $\varphi \in \mathcal{D}$, so daß für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^6$ ein Index k_0 derart existiert, daß

$$\varphi_k(x, y, z) = \varphi(x+y+z)$$

für $(x, y, z) \in K$ und $k \geq k_0$ gilt.

(ii) $\{\varphi_k\}$ ist gleichmäßig beschränkt auf \mathbb{R}^6 und es gilt

$$\text{supp } \varphi_k(x, y, z) \subset \text{supp } \varphi(x+y+z) ,$$

Dann existiert die Faltung $f_1 * f_j * C$ und es gilt für $k \rightarrow \infty$

$$(83) \quad (C(z), (f_1(x), (f_j(y), \varphi_k(x, y, z)))) \rightarrow (f_1 * f_j * C, \varphi) .$$

Beweis: Es sei $\eta \in \mathcal{D}$ mit $\eta(x) = 1$ für x aus einer Umgebung von $\text{supp } f_j^0$.
Aufgrund von Lemma 1 gilt dann:

$$\begin{aligned} & (C(z), (f_i(x), (f_j(y), \Psi_k(x, y, z)))) = (C(z), (f_i^0(x), (f_j^0(y), \Psi_k(x, y, z)))) \\ & + (C(z), (f_i^+(x), (f_j^+(y), \Psi_k(x, y, z)))) + (C(z), (f_i^0(x), (f_j^+(y), \Psi_k(x, y, z)))) \\ & + (C(z), (f_i^+(x), (f_j^0(y), \Psi_k(x, y, z)))) . \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden sollen jetzt der Reihe nach betrachtet werden.

$$(\alpha) \quad (C(z), (f_i^0(x), (f_j^0(y), \Psi_k(x, y, z))))$$

Die Eigenschaft (i) bewirkt die punktweise Konvergenz von

$$C(z)(f_i^0(x), (f_j^0(y), \Psi_k(x, y, z)))$$

gegen

$$C(z)(f_i^0(x), (f_j^0(y), \eta(x) \eta(y) \Psi(x+y+z)))$$

auf R^2 . Wegen der Stetigkeit von f_i^0 auf \mathcal{D} und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $\{\Psi_k\}$ auf R^6 existiert ein $M > 0$ mit:

$$|C(z)(f_i^0(x), (f_j^0(y), \Psi_k(x, y, z)))| \leq M |C(z)| .$$

Der Satz von LEBESGUE liefert dann für $k \rightarrow \infty$ die Limesbeziehung

$$(C(z), (f_i^0(x), (f_j^0(y), \Psi_k(x, y, z)))) \rightarrow (C(z), (f_i^0(x), (f_j^0(y), \eta(x) \eta(y) \Psi(x+y+z)))) .$$

$$(\beta) \quad (C(z), (f_i^+(x), (f_j^+(y), \Psi_k(x, y, z))))$$

Da C integrierbar und f_i^+ quadratisch integrierbar ist, kann man unter Zuhilfenahme der HÖLDERSchen Ungleichung nachweisen, daß das Faltungsprodukt $|f_i^+| * |f_j^+| * C$ existiert und lokal integrierbar ist. Für ein beliebiges $\Psi \in \mathcal{D}$ existiert daher

$$\int (|f_i^+| * |f_j^+| * C)(x) |\Psi(x)| dx = \iiint |f_i^+(x-y) f_j^+(y-z) C(z) \Psi(x)| dz dy dx .$$

Die Funktion $f_i^+(x-y) f_j^+(y-z) C(z) \Psi(x)$ ist daher auf R^6 integrierbar und der Satz von FUBINI läßt die Vertauschung der Integrationsreihenfolge zu.

$$\int (|f_i^+| * |f_j^+| * C)(x) |\Psi(x)| dx = \iiint |f_i^+(x) f_j^+(y) C(z) \Psi(x+y+z)| dx dy dz .$$

Die ist gleichbedeutend mit der Integrierbarkeit von $|f_i^+(x) f_j^+(y) C(z) \Psi(x+y+z)|$ auf R^6 .

Es ist ferner

$$(84) \quad (C(z), (f_1^+(x), (f_j^+(y), \varphi_k(x, y, z)))) = \iiint C(z) f_1^+(x) f_j^+(y) \varphi(x, y, z) dx dy dz .$$

Wegen (ii) existiert ein $\bar{\Psi} \in \mathcal{D}$ mit:

$$|C(z) f_1^+(x) f_j^+(y) \varphi_k(x, y, z)| \leq |C(z) f_1^+(x) f_j^+(y) \bar{\Psi}(x+y+z)| .$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist nach oben Gesagtem integrierbar. Der Integrand auf der rechten Seite von (84) konvergiert wegen (i) punktweise gegen

$$C(z) f_1^+(x) f_j^+(y) \varphi(x+y+z)$$

auf R^6 . Mit Hilfe der Sätze von FUBINI und LEBESGUE folgt:

$$(C(z), (f_1^+(x), (f_j^+(y), \varphi_k(x, y, z)))) \rightarrow (C(z), (f_1^+(x), (f_j^+(y), \varphi(x+y+z)))) .$$

$$(8) \quad (C(z), (f_1^+(x), (f_j^0(y), \varphi_k(x, y, z))))$$

Da C integrierbar und f_1^+ quadratisch integrierbar ist, existiert das Faltungsprodukt $|f_1^+| * C$ und ist quadratisch integrierbar. Deshalb existiert für beliebiges $\Psi \in \mathcal{D}$

$$\int (|f_1^+| * C)(x) |\Psi(x)| dx = \iint |f_1^+(x-y) C(y) \Psi(x)| dy dx .$$

Die Funktion $|f_1^+(x-y) C(y) \Psi(x)|$ ist daher auf R^4 integrierbar und die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist erlaubt.

$$\int (|f_1^+| * C)(x) |\Psi(x)| dx = \iint |f_1^+(x) C(y) \Psi(x+y)| dx dy .$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Integrierbarkeit der Funktion $|f_1^+(x) C(y) \Psi(x+y)|$ über R^4 .

Es ist ferner

$$(85) \quad (C(z), (f_1^+(x), (f_j^0(y), \varphi_k(x, y, z)))) = \iint f_1^+(x) C(z) (f_j^0(y), \varphi_k(x, y, z)) dx dz .$$

Offenbar ist $(f_j^0(y), \varphi_k(x, y, z)) \in \mathcal{D}(R^4)$ und wegen (ii) gilt

$$\text{supp}(f_j^0(y), \varphi_k(x, y, z)) \subset \text{supp}(f_j^0(y), \varphi(x, y, z)) .$$

Da $\{\varphi_k\}$ gleichmäßig beschränkt und f_j^0 stetig auf \mathcal{D} ist, ist auch $\{(f_j^0(y), \varphi_k(x, y, z))\}$ gleichmäßig beschränkt. Aus diesen Gründen gibt es ein $\bar{\Psi} \in \mathcal{D}$, so daß

$$|C(z)f_1^+(x)(f_j^0(y), \varphi_k(x,y,z))| \leq |C(z)f_1^+(x)\bar{\psi}(x+z)|$$

gilt. Die rechte Seite dieser Ungleichung ist integrierbar. Mit Hilfe der Voraussetzung (i) läßt sich die punktweise Konvergenz von

$$C(z)f_1^+(x)(f_j^0(y), \varphi_k(x,y,z)) \text{ gegen } C(z)f_1^+(x)(f_j^0(y), \eta(y)\varphi(x+y+z))$$

auf \mathbb{R}^4 zeigen. Die Sätze von FUBINI und LEBESGUE liefern

$$(C(z), (f_1^+(x), (f_j^0(y), \varphi_k(x,y,z)))) \rightarrow (C(z), (f_1^+(x), (f_j^0(y), \eta(y)\varphi(x+y+z)))).$$

$$(\delta) \quad (C(z), (f_1^0(x), (f_j^+(y), \varphi_k(x,y,z)))) .$$

Wegen der Kommutativität des direkten Produkts folgt aus (γ)

$$(C(z), (f_1^0(x), (f_j^+(y), \varphi_k(x,y,z)))) \rightarrow (C(z), (f_1^0(x), \eta(x)(f_j^+(y), \varphi(x+y+z)))).$$

für $k \rightarrow \infty$.

Aus (α)-(δ) und aus Lemma 1 folgt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (C(z), (f_1(x), (f_j(y), \varphi_k(x,y,z)))) = (C(z), (f_1(x), (f_j(y), \varphi(x+y+z)))).$$

Es sei $\{\eta_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$ eine auf \mathbb{R}^6 gegen 1 konvergierende Folge. Dann erfüllt

$\varphi_k'(x,y,z) := \eta_k(x,y,z)\varphi(x+y+z)$ die Voraussetzungen von Lemma 2. Es existiert damit das dreifache Faltungsprodukt $f_1 * f_j * C$.

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} (f_1 * f_j * C, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (C(z), (f_1(x), (f_j(y), \eta_k(x,y,z)\varphi(x+y+z)))) \\ &= (C(z), (f_1(x), (f_j(y), \varphi(x+y+z)))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (C(z), (f_1(x), (f_j(y), \varphi_k(x,y,z)))). \end{aligned}$$

Lemma 3: Die Distributionen $f_1, C \in \mathcal{D}'$ seien dieselben wie in Lemma 2. Dann gilt:

$$f_1 * f_j * C \in \mathcal{Y}'.$$

Beweis: (α) $f_1^0 * f_j^0 * C \in \mathcal{Y}'$

Da die Faltungen $f_1^0 * C, f_1^0 * f_j^0$ sowie $f_1^0 * f_j^0 * C$ existieren, gilt das Assoziationsgesetz

$$f_1^0 * f_j^0 * C = f_1^0 * (f_j^0 * C).$$

Für $f_i^0 \in \mathcal{E}, g \in \mathcal{Y}'$ ist die Operation $g \rightarrow f_i^0 * g$ stetig aus \mathcal{Y}' in \mathcal{Y}' .

Auf Grund der Integrierbarkeit von $C \in \mathcal{Y}'$ folgt die Behauptung $f_i^0 * f_j^0 * C \in \mathcal{Y}'$.

Die Anwendung von $f_i^0 * f_j^0 * C$ auf ein $\varphi \in \mathcal{Y}$ läßt sich darstellen als:

$$(f_i^0 * f_j^0 * C, \varphi) = (C(z), (f_i^0(x), (f_j^0(y), \eta(x) \eta(y) \varphi(x+y+z)))) .$$

$$(\beta) \quad f_i^+ * f_j^+ * C \in \mathcal{Y}'$$

Man betrachte für $m \geq 3$ die Funktion

$$|f_i^+(x-y)f_j^+(y-z)C(z)(1+|x|)^{-m}| .$$

Da $(1+|x|)^{-m}$ integrierbar und $|f_i^+(x-y)|$ bezüglich x quadratisch integrierbar ist, folgt aus der HÖLDERSchen Ungleichung die Existenz von

$$\int |f_i^+(x-y)f_j^+(y-z)C(z)(1+|x|)^{-m}| dx = |f_j^+(y-z)C(z)| (|f_i^+| * (1+|x|)^{-m})(y),$$

und weiterhin folgt daraus die quadratische Integrierbarkeit von $(|f_i^+| * (1+|x|)^{-m})$.

Mit Hilfe der gleichen Argumentation zeigt man die Existenz von

$$\iint |f_i^+(x-y)f_j^+(y-z)C(z)(1+|x|)^{-m}| dx dz = (|f_j^+| * C)(y) (|f_i^+| * (1+|x|)^{-m})(y)$$

und die quadratische Integrierbarkeit von $(|f_j^+| * C)$.

Aus der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ folgt die Existenz von

$$\begin{aligned} & \int (|f_j^+| * C)(y) (|f_i^+| * (1+|x|)^{-m})(y) dy \\ &= \iiint |f_i^+(x-y)f_j^+(y-z)C(z)(1+|x|)^{-m}| dx dz dy . \end{aligned}$$

Der Integrand auf der rechten Seite dieser Gleichung ist daher auf \mathbb{R}^6 integrierbar und der Satz von FUBINI ermöglicht die Vertauschung der Integrationsreihenfolge. Es existiert somit:

$$\int \left(\int \int |f_i^+(x-y)f_j^+(y-z)C(z)| dz dy \right) (1+|x|)^{-m} dx = \int |f_i^+ * f_j^+ * C|(x) (1+|x|)^{-m} dx .$$

Dies bedeutet: $f_i^+ * f_j^+ * C \in \mathcal{Y}'$.

$$(\gamma) \quad f_i^+ * f_j^0 * C \in \mathcal{Y}'$$

Es existiert die Faltung $f_i^+ * f_j^0 * C$ und es bestehen die Beziehungen $f_j^0 * C \in \mathcal{Y}'$, $f_j^0 * f_i^+ \in \mathcal{Y}'$. Da für $m \geq 3$ die Funktion $(1+|x|)^{-m}$ integrierbar und f_i^+ quadratisch integrierbar ist, zeigt man mit Hilfe der HÖLDERSchen Ungleichung die Existenz von

$$\int |f_i^+(x-z)C(z)(1+|x|)^{-m}| dx = |C(z)| (|f_i^+| * (1+|x|)^{-m})(z)$$

und die quadratische Integrierbarkeit von $(|f_i^+| * (1+|x|)^{-m})$. Ebenfalls über die HÖLDERsche Ungleichung folgt hieraus die Existenz von

$$\iint |f_i^+(x-z)C(z)(1+|x|)^{-m}| dx dz .$$

Der Integrand ist deshalb integrierbar auf R^4 und der Satz von FUBINI ermöglicht die Vertauschung der Integrationsreihenfolge. Es existiert somit:

$$\iint |f_i^+(x-z)C(z)dz| (1+|x|)^{-m} dx = \int (f_i^+ * C)(x)(1+|x|)^{-m} dx .$$

Dies bedeutet: $f_i^+ * C \in \mathcal{P}'$.

Damit läßt sich die Assoziativität des Faltungsproduktes ausnutzen:

$$f_i^+ * f_j^0 * C = f_i^+ * (f_j^0 * C) = (f_i^+ * C) * f_j^0 .$$

Das letzte Glied dieser Gleichungskette ist (vgl. α) aus \mathcal{P}' . Ferner gilt die Darstellung:

$$(f_i^+ * f_j^0 * C, \varphi) = (f_j^0, \eta(y) \int (f_i^+ * C)(\xi) \varphi(y+\xi) d\xi) .$$

$$(\delta) \quad f_i^0 * f_j^+ * C \in \mathcal{P}'$$

Diese Behauptung folgt aus (γ) wegen der Kommutativität und Assoziativität des Faltungsproduktes.

Aus (α) - (δ) folgt die Behauptung des Lemmas.

4. Existenzaussage

Satz 1: Es sei Δg der in (83) definierte VSP und ferner seien die $f_i, C \in \mathcal{D}'$ ebenfalls durch (83) festgelegt.

Dann existieren die durch distributionelle Faltungen definierten VSP der Lotabweichungskomponenten $\sigma_i = f_i * \Delta g$.

Beweis: Es ist für $\varphi \in \mathcal{D}$ und $\{\eta_n\} \rightarrow 1$ auf $\mathcal{D}(R^4)$

$$\begin{aligned} & E \left[(f_i(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z))) - (f_i(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z) \varphi(y+z))) \right]^2 \\ &= E(f_i(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z)))^2 + E(f_i(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z) \varphi(y+z)))^2 \\ &\quad - 2E \left[(f_i(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z))) (f_i(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z) \varphi(y+z))) \right] . \end{aligned}$$

Alle drei Summanden auf der rechten Seite sind " vom Typ "

$$E \left[(f_i(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z))) (f_i(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z) \varphi(y+z))) \right] .$$

Es genügt daher, diesen Ausdruck zu diskutieren. Wegen der Kommutativität des direkten Produktes gilt:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[(f_1(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z)\psi(x+z)))(f_1(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(\omega, z)\psi(y+z)))] \\
 &= (C(z), (f_1(x), \eta_n(x, z)\psi(x+z)) * (f_1(y), \eta_m(y, z)\psi(y+z))^*) \\
 &= (C(z), \int (f_1(x), (f_1(y), \eta_n(x, \xi - z)\eta_m(y, \xi)\psi(x+\xi - z)\psi(y+\xi))) d\xi) \\
 (86) \quad &= - (C(z), \int (f_1(x), (f_1(y), \eta_n(-x, \xi - y - z)\eta_m(y, \xi - y)\psi(\xi - (x+y+z))\psi(\xi))) d\xi) .
 \end{aligned}$$

Bei (86) wurde die Eigenschaft

$$(f_1(-x), \psi(x)) := (f_1(x), \psi(-x)) = - (f_1(x), \psi(x))$$

ausgenutzt. Die Funktion

$$\eta_n(-x, \xi - y - z) \eta_m(y, \xi - y) \psi(\xi - (x+y+z)) \psi(\xi)$$

ist aus $\mathcal{D}(R^6)$. Man kann deshalb (86) als direktes Produkt ansprechen und dessen Kommutativität ausnutzen.

$$\begin{aligned}
 & - (C(z), \int (f_1(x), (f_1(y), \eta_n(-x, \xi - y - z)\eta_m(y, \xi - y)\psi(\xi - (x+y+z))\psi(\xi)) d\xi) \\
 &= - (C(z), (f_1(x), (f_1(y), \int \eta_n(-x, \xi - y - z)\eta_m(y, \xi - y)\psi(\xi - (x+y+z))\psi(\xi) d\xi))).
 \end{aligned}$$

Um Lemma 2 anwenden zu können, müssen die Eigenschaften der Folge

$$(87) \quad \left\{ \int \eta_n(-x, \xi - y - z) \eta_m(y, \xi - y) \psi(\xi - (x+y+z)) \psi(\xi) d\xi \right\}$$

bestimmt werden. Da wegen der Finitheit von ψ das Integral (87) nur über einen beschränkten ξ -Bereich erstreckt zu werden braucht, sind für alle (x, y, z) aus einem Kompaktum $K \subset R^6$ die Größen $-x, \xi - z - y, y, \xi - y$ beschränkt. Es existieren daher Indices m_0, n_0 , so daß

$$\int \eta_n(-x, \xi - y - z) \eta_m(y, \xi - y) \psi(\xi - (x+y+z)) \psi(\xi) d\xi = \psi * \psi^*(x+y+z)$$

für $(x, y, z) \in K$ und $m, n \geq m_0, n_0$.

Alle Glieder der Folge (87) liegen offenbar in $\mathcal{D}(R^6)$. Da das Integral nur über einen beschränkten ξ -Bereich erstreckt zu werden braucht, ist die Folge (87) gleichmäßig auf R^6 beschränkt.

Aus Lemma 2 folgt dann für $m, n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[(f_1(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z)\psi(x+z)))(f_1(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z)\psi(y+z)))] \\
 & \rightarrow (f_1 * f_1 * C, \psi * \psi^*) .
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned} & \left| E \left[(f_1(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z))) - (f_1(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z) \varphi(y+z))) \right]^2 \right. \\ & \leq \left| E(f_1(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z)))^2 - (f_1 * f_1 * C, \varphi * \varphi^*) \right| \\ & + \left| E(f_1(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z) \varphi(y+z)))^2 - (f_1 * f_1 * C, \varphi * \varphi^*) \right| \\ & + 2 \left| E(f_1(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z))) (f_1(y), (\Delta g(\omega, z), \eta_m(y, z) \varphi(y+z))) \right. \\ & \left. - (f_1 * f_1 * C, \varphi * \varphi^*) \right|. \end{aligned}$$

Daraus folgert man, daß die Folge

$$\left\{ (f_1(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_n(x, z) \varphi(x+z))) \right\}$$

im Sinne der \mathcal{L}_2 -Norm eine CAUCHY-Folge ist. Die Behauptung des Satzes folgt somit aus der Vollständigkeit des \mathcal{L}_2 .

5. Kovarianzfortpflanzung bei Faltungsoperationen

Es kommt nunmehr darauf an, die Auto- und Kreuzkovarianzfunktionale C_{ij} der als existent nachgewiesenen VSP der Lotabweichungskomponenten σ_i zu berechnen.

Satz 2: Für die in (82) definierten VSP der Lotabweichungskomponenten σ_i gilt:

$$(88) \quad E \left\{ (\sigma_i, \varphi) (\sigma_j, \psi) \right\} = (-f_i * f_j * C, \varphi * \psi^*) =: (C_{ij}, \varphi * \psi^*)$$

$$(89) \quad E \left\{ (\sigma_i, \varphi) (\Delta g, \psi) \right\} = (-f_i * C, \varphi * \psi^*) =: (C_i, \varphi * \psi^*).$$

Beweis: Der Beweis von (88) erfolgt wiederum mit Lemma 2 und kann fast wörtlich aus dem Beweis von Satz 1 übernommen werden.

Es ist für $\eta_k \rightarrow 1$ auf R^4

$$\begin{aligned} E \left\{ (\sigma_i, \varphi) (\Delta g, \psi) \right\} &= E \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} (f_1(x), (\Delta g(\omega, z), \eta_k(x, z) \varphi(x+z))) (\Delta g(\omega, z), \psi(z)) \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (C(z), (f_1(x), \eta_k(x, z) \varphi(x+z)) * \psi(z)^*) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} - (C(z), (f_1(x), \int \eta_k(-x, \xi - z) \varphi(\xi - (x+z)) \psi(\xi) d\xi)). \end{aligned}$$

Analog zum Vorgehen in Lemma 2 beweist man die Richtigkeit des Grenzüberganges

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} - (C(z), (f_1(x), \int \eta_k(-x, \xi - z) \varphi(\xi - (x+z)) \psi(\xi) d\xi)) \\ &= (-f_1 * C, \varphi * \psi^*) \end{aligned}$$

6. Zusammenhang der Aufgaben (A) und (E)

Die Aufgabe (E) wurde in den Abschnitten 4. und 5. gelöst. Jetzt soll gezeigt werden, daß die Lösung der Aufgabe (E) in einem allgemeineren Sinn auch die Aufgabe (A) löst. Dazu sollen die Kovarianzfunktionale C_{ij} und C_i einer FOURIER-Transformation unterworfen werden.

Die Existenz der FOURIER-Transformation \tilde{C}_{ij} folgt aus Lemma 3 und der Faltungssatz liefert:

$$\begin{aligned} (\tilde{C}_{ij}, \Psi) &= - (f_i \ast f_j \ast C, \Psi) \\ &= - (f_i^{\circ} \ast f_j^{\circ} \ast C, \Psi) - (f_i^{+} \ast f_j^{+} \ast C, \Psi) \\ &\quad - (f_i^{\circ} \ast f_j^{+} \ast C, \Psi) - (f_i^{+} \ast f_j^{\circ} \ast C, \Psi) \\ &= - \int \tilde{f}_i^{\circ}(k) \tilde{f}_j^{\circ}(k) \tilde{C}(k) \Psi(k) dk - \int \tilde{f}_i^{+}(k) \tilde{f}_j^{+}(k) \tilde{C}(k) \Psi(k) dk \\ &\quad - \int \tilde{f}_i^{\circ}(k) \tilde{f}_j^{+}(k) \tilde{C}(k) \Psi(k) dk - \int \tilde{f}_i^{+}(k) \tilde{f}_j^{\circ}(k) \tilde{C}(k) \Psi(k) dk \\ &= - \int \tilde{f}_i(k) \tilde{f}_j(k) \tilde{C}(k) \Psi(k) dk . \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$(\tilde{C}_i, \Psi) = - \int \tilde{f}_i(k) \tilde{C}(k) \Psi(k) dk .$$

Die FOURIER-Transformierten \tilde{f}_i sollen nun explizit angegeben werden.

$$\tilde{f}_i(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} x_i \exp(i k_i x_i) \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-3} \exp(i k_j x_j) dx_j dx_i$$

wobei $i = 1, 2; j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 2 \\ 2 & \text{für } i = 1 \end{cases}$ ist. Man betrachte zunächst das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-3} \exp(i k_j x_j) dx_j = 2 \int_0^{\infty} |x|^{-3} \cos(k_j x_j) dx_j = -2 k_j K_1(x_i k_j) x_i^{-1} .$$

Hierbei bezeichne K_1 die MACDONALDsche Funktion. Es folgt dann weiter

$$(90) \quad \tilde{f}_i(k) = 4 k_j \int_0^{\infty} K_1(x_i k_j) \sin(k_i x_i) dx_i = \frac{i k_i}{\gamma |k|} .$$

Es ist also:

$$(91) \quad \tilde{C}_{ij}(k) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{k_i k_j}{|k|^2} \tilde{C}(k) .$$

Analog erhält man wieder:

$$(92) \quad \tilde{C}_i(k) = - \frac{i}{\gamma} \frac{k_i}{|k|} C(k) .$$

Aus (91) lassen sich wesentliche Schlußfolgerungen ziehen. Zunächst ist einmal wegen

$|\tilde{f}_i| \leq \gamma^{-1}$ die Funktion \tilde{C}_{ij} integrierbar und daher wird C_{ij} von einer stetigen beschränkten Funktion erzeugt.

$$(93) \quad (C_{ij}, \varphi * \psi^*) = \iint C_{ij}(s-t) \varphi(s) \psi(t) ds dt; \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

Da ferner C eine positiv semidefinite stetige Funktion ist, kann sie gemäß des Satzes von BOCHNER als FOURIER-Transformierte $\tilde{\mu}$ eines positiven endlichen Maßes dargestellt werden.

$$(C, \varphi) = (\tilde{\mu}, \varphi) = (\mu, \tilde{\varphi}) = \int \tilde{\varphi}(k) d\mu(k).$$

Da μ positiv und endlich ist, existiert eine nichtnegative Funktion F mit:

$$(94) \quad \int \tilde{\varphi}(k) d\mu(k) = \int \tilde{\varphi}(k) F(k) dk = \iint e^{ik^T x} \varphi(x) F(k) dx dk.$$

Andererseits ist aber

$$(C, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{C}(k) e^{-ik^T x} \varphi(x) dx dk = \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{C}(-k) e^{ik^T x} \varphi(x) dx dk.$$

Vergleicht man dies mit (94), so folgt $\tilde{C} \geq 0$. Da damit auch $\tilde{C}_{ii} \geq 0$, so folgt wiederum aus dem Satz von BOCHNER die positive Semidefinitheit von C_{ij} . Es gibt dann einen eindeutig (bis auf Äquivalent) bestimmten, stetigen GAUSSschen Prozeß $\tilde{\sigma}_i$ mit der Kovarianzfunktion C_{ij} . Dieser Prozeß erzeugt vermöge

$$(\tilde{\sigma}_i, \varphi) = \int \tilde{\sigma}_i(\omega, x) \varphi(x) dx$$

den VSP der Lotabweichungskomponenten $\tilde{\sigma}_i$.

Falls nun die Faltung $s_i = f_i * \Delta g$ im klassischen Sinne existiert und einen stetigen GAUSSschen Prozeß definiert, so gilt:

$$(\tilde{\sigma}_i, \varphi) = \int s_i(\omega, x) \varphi(x) dx.$$

In diesem Fall folgt aus dem Lemma von DU'BOIS - REYMOND die Beziehung $E(\tilde{\sigma}_i(\omega, x) - s_i(\omega, x))^2 = 0$ fast überall. Deshalb ist $\tilde{\sigma}_i$ eine verallgemeinerte Lösung der Aufgabe (A).

7. Umkehrung der FOURIER-Transformation

Im Abschnitt 6 werden die FOURIER-Transformierten $\tilde{C}_{ij}, \tilde{C}_i$ der Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen C_{ij}, C_i der stetigen GAUSSschen Prozesse $\tilde{\sigma}_i, \Delta g$ angegeben. Um die Berechnung der C_{ij}, C_i abschließen zu können, muß noch auf die Umkehrung der FOURIER-Transformation eingegangen werden. Vorher sei bemerkt, daß auf Grund der Isotropie der Funktion C die FOURIER-Transformation in die HANKEL-Transformation übergeht.

$$\tilde{C}(|k|) = 2\pi \int_0^{\infty} r C(r) J_0(|k|r) dr \quad (J_0 \text{ BESSEL Funktion})$$

Zur Umkehrung der FOURIER-Transformation

$$(95) \quad C_{ij}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int \tilde{C}_{ij}(k) e^{-ix^T k} dk$$

führt man Polarkoordinaten ein. Es sei $r = |x|$.

$$x_1 = r \cos \psi; \quad x_2 = r \sin \psi;$$

wobei ψ den Winkel zwischen x und einer beliebigen, aber festen Polarachse darstellt. Ferner sei φ der Winkel zwischen x und k . Dann gilt:

$$k_1 = \frac{|k|}{r} [x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi]$$

$$k_2 = \frac{|k|}{r} [x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi]$$

$$x^T k = |k| r \cos \varphi.$$

Aus (95) wird dann

$$(96) \quad \left. \begin{array}{l} C_{12} \\ C_{11} \\ C_{22} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi^2 r^2} \int \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1 - x_2^2}{2r^2} \sin 2\varphi + \frac{x_1 x_2}{r^2} \cos 2\varphi \\ \frac{x_1^2}{r^2} \cos^2 \varphi - \frac{x_1 x_2}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{x_2^2}{r^2} \sin^2 \varphi \\ \frac{x_1^2}{r^2} \sin^2 \varphi + \frac{x_1 x_2}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{x_2^2}{r^2} \cos^2 \varphi \end{array} \right\} |k| \tilde{C}(|k|) e^{-i|k|r \cos \varphi} d\varphi |k|.$$

Man betrachte zunächst das innere Integral. Dies kann überführt werden in

$$(97) \quad 2 \int_0^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} x_1 x_2 [\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi] \\ \frac{x_1^2}{r^2} \cos^2 \varphi + \frac{x_2^2}{r^2} \sin^2 \varphi \\ \frac{x_1^2}{r^2} \sin^2 \varphi + \frac{x_2^2}{r^2} \cos^2 \varphi \end{array} \right\} e^{-i|k|r \cos \varphi} d\varphi.$$

Es sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\Omega(r) = \frac{1}{\pi^2 r^2 \sigma_{4g}^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi |k| \tilde{C}(|k|) e^{-i|k|r \cos \varphi} d\varphi dr,$$

$$\Psi(r) = \frac{1}{\pi^2 r^2 \sigma_{4g}^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi |k| \tilde{C}(|k|) e^{-i|k|r \cos \varphi} d\varphi dr,$$

wobei $\sigma_{4g}^2 = C(0)$ ist.

Dann folgt aus (96), (97)

$$\begin{aligned} C_{12} = C_{21} &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2\gamma^2} [\Omega(r) - \Psi(r)] \frac{x_1 x_2}{r^2} \\ C_{11} &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2\gamma^2} \left\{ \Psi(r) + [\Omega(r) - \Psi(r)] \frac{x_1^2}{r^2} \right\} \\ C_{22} &= \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2\gamma^2} \left\{ \Psi(r) + [\Omega(r) - \Psi(r)] \frac{x_2^2}{r^2} \right\} \end{aligned}$$

oder in verkürzter Schreibweise

$$(98) \quad C_{ij} = \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2\gamma^2} \left\{ \Psi(r) \delta_{ij} + [\Omega(r) - \Psi(r)] \frac{x_i x_j}{r^2} \right\}.$$

Der Wert der von $C = C_{ij} e_i e_j$ erzeugten Bilinearform, angewandt auf $u = u_i e_i$, $v = v_j e_j$ läßt sich darstellen als

$$C_{ij} u_i v_j = \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2\gamma^2} \Psi u^T v + \frac{\sigma_{\Delta g}^2}{2\gamma^2} \left[\frac{\Omega - \Psi}{r^2} \right] (x^T u)(x^T v).$$

Da sowohl Ψ, Ω als auch die Skalarprodukte $u^T v$, $x^T u$, $x^T v$ gegenüber der Gruppe der orthogonalen Koordinatentransformationen invariant sind, stellt $C = (C_{ij})$ ein zweistufiges stationäres isotropes Tensorfeld in der Ebene dar.

Nachdem der Tensor $C = (C_{ij})$ durch Anwendung der inversen FOURIER-Transformation auf $\tilde{C} = (\tilde{C}_{ij})$ bestimmt worden ist, soll die gleiche Vorgehensweise auf \tilde{C}_i angewandt werden.

$$\left. \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\} = \frac{-i}{4\pi^2\gamma} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{r} \cos \varphi - \frac{x_2}{r} \sin \varphi \\ \frac{x_1}{r} \sin \varphi + \frac{x_2}{r} \cos \varphi \end{array} \right\} e^{-i|k|r \cos \varphi} |k| d\varphi d|k|$$

Die Betrachtung der inneren Integrale liefert:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{r} \cos \varphi - \frac{x_2}{r} \sin \varphi \\ \frac{x_1}{r} \sin \varphi + \frac{x_2}{r} \cos \varphi \end{array} \right\} e^{-i|k|r \cos \varphi} d\varphi &= \left[\begin{array}{l} 2x_1 \\ \frac{2x_2}{r} \end{array} \right] \int_0^\pi \cos \varphi e^{-i|k|r \cos \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{2i\pi}{r} J_1(|k|r) \left[\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$C_i(x) = \frac{-x_i}{2\pi r^2} \int_0^\infty |k| J_1(|k|r) \tilde{C}(|k|) dk$$

Mit der Bezeichnung

$$\sigma_{\Delta g}^2 \Theta(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |k| J_1(|k|r) \tilde{C}(|k|) dk$$

gilt dann

$$C_i(x) = \frac{-\sigma_{\Delta g}^2}{r} \Theta(r) \frac{x_i}{r}$$

Das einstufige Tensorfeld $C_i(x)e_i$ ist ebenfalls stationär und isotrop.

Anhang II: Ebenes STOKES-Problem

Die obere Halbebene des \mathbb{R}^3 sei mit $G := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ bezeichnet. Der Rand von G heiße S ; $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$. Es sei $T: \Omega \times (G \cup S) \rightarrow \mathbb{R}^1$ ein stationärer Prozeß mit folgenden Eigenschaften:

$$\Delta T = 0 \text{ in } G$$

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x_3} = \Delta g$$

mit einem auf $\Omega \times S$ definierten stationären Prozeß Δg . Wenn G den Außenraum einer Kugel bildet, wird der Zusammenhang zwischen T und Δg durch die Formel von STOKES vermittelt. Es ist naheliegend zu fragen, ob im ebenen Fall T aus Δg vermittels einer Verebnung der Formel von STOKES berechnet werden kann.

Gilt also

$$(99) \quad T(\omega; x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|x-y|} \Delta g(\omega, y) dy ?$$

Es soll zunächst die Gültigkeit von (99) angenommen werden. Unter $H(R)$ soll folgende Halbkugel verstanden werden:

$$H(R) := \{x \in G \cup S : |x| \leq R\}.$$

Der Rand $\partial H(R)$ von $H(R)$ läßt sich als Vereinigung zweier Mengen $A(R)$ und $B(R)$ darstellen:

$$\partial H(R) = A(R) \cup B(R),$$

wobei

$$A(R) := \{x \in S : |x| \leq R\}; \quad B(R) := \{x \in G : |x| = R\}.$$

Aus dem GREENSchen Darstellungssatz folgt nun:

$$\begin{aligned} T(\omega, 0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial H(R)} \left\{ \frac{1}{|y|} \frac{\partial T}{\partial n}(y) - T(y) \frac{\partial \left(\frac{1}{|y|}\right)}{\partial n} \right\} d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{A(R)} \frac{1}{|y|} \Delta g(\omega, y) dy - \frac{1}{4\pi} \int_{B(R)} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial n}(y) + \frac{1}{R^2} T(y) \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Man betrachte die Beziehung für $R \rightarrow \infty$. Es ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{A(R)} \frac{1}{|y|} \Delta g(\omega, y) dy = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|y|} \Delta g(\omega, y) dy = T(\omega, 0).$$

Daher muß gelten:

$$(100) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{B(R)} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial n}(y) + \frac{1}{R^2} T(y) \right\} d\sigma = 0.$$

Die Beziehung (2) ist sicher erfüllt, wenn $T(y) = O(|y|^{-1})$ für $|y| \rightarrow \infty$ vorausgesetzt wird. Diese Bedingung ist aber mit der vorausgesetzten Stationarität nicht verträglich.

Den Verfassern ist es weder gelungen, die Gültigkeit von (100) ohne Zuhilfenahme der obigen asymptotischen Beziehung zu beweisen, noch konnten sie ein Gegenbeispiel angeben.

Anhang III. Differentiationsformeln

Es seien $\xi(t)$ und $\eta(t)$ zwei homogene, stationäre Prozesse, deren Kovarianzfunktion C hinreichend oft differenzierbar sei. Die Kreuzkovarianzfunktion C'

$$C'(s-t) := E \{ \xi(s) \eta(t) \}$$

sei ebenfalls als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt und hängt ebenfalls nur von der Differenz der Parameter ab.

Ein Prozeß $\partial_i \xi(t)$ heiße partielle Ableitung erster Ordnung des Prozesses ξ , sofern für alle t

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ \partial_i \xi(t) - \frac{1}{h} (\xi(t + e_i h) - \xi(t)) \right\}^2 = 0$$

gilt. Hierbei bezeichne e_i den i -ten Einheitsvektor $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ wobei die 1 in der i -ten Komponente auftritt.

Lemma 1: Es existieren die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\partial_i \xi$, $\partial_i \eta$ der Prozesse ξ , η .

Beweis: ($\partial_i \xi$) Es sei $\{h_n\}$ eine reelle Nullfolge und e_i bezeichne den i -ten Einheitsvektor. Es besteht die Beziehung

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \frac{1}{h_n} (\xi(t+e_i h_n) - \xi(t)) - \frac{1}{h_m} (\xi(t+e_i h_m) - \xi(t)) \right\}^2 \\
&= \frac{1}{h_n^2} E \left\{ \xi(t+e_i h_n) - \xi(t) \right\}^2 + \frac{1}{h_m^2} E \left\{ \xi(t+e_i h_m) - \xi(t) \right\}^2 \\
&\quad - \frac{2}{h_n h_m} E \left\{ [\xi(t+e_i h_n) - \xi(t)] [\xi(t+e_i h_m) - \xi(t)] \right\}.
\end{aligned}$$

Man betrachte zunächst:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_n h_m} E \left\{ [\xi(t+e_i h_n) - \xi(t)] [\xi(t+e_i h_m) - \xi(t)] \right\} \\
&= \frac{1}{h_n^2} E \left\{ \xi(t+e_i h_n) - \xi(t) \right\}^2 + \frac{1}{h_m^2} E \left\{ \xi(t+e_i h_m) - \xi(t) \right\}^2 \\
&\quad - \frac{2}{h_n h_m} E \left\{ [\xi(t+e_i h_n) - \xi(t)] [\xi(t+e_i h_m) - \xi(t)] \right\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \frac{1}{h_n} (\xi(t+e_i h_n) - \xi(t)) - \frac{1}{h_m} (\xi(t+e_i h_m) - \xi(t)) \right\}^2 \\
&= C(0) \left(\frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_n^2} - \frac{2}{h_n h_m} \right) + \sum_{p=0}^3 O(h_n^{p-1} h_m^{2-p}) \\
&\leq C(0) \left(\frac{1}{h_n^2} - \frac{1}{h_m^2} \right) + \sum_{p=0}^3 O(h_n^{p-1} h_m^{2-p}).
\end{aligned}$$

Aus der letzten Beziehung erkennt man, daß die Folge $\left\{ \frac{1}{h_n} (\xi(t+e_i h_n) - \xi(t)) \right\}$ eine CAUCHY-Folge ist. Aus diesem Grunde existiert der Grenzwert dieser Folge und damit die behauptete partielle Ableitung. Ersetzt man in $(\partial_i \xi)$ das Symbol ξ durch η , so erhält man den Beweis für diese Teilbehauptung.

Lemma 2: Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
E \left\{ \partial_i \xi(t) \eta(s) \right\} &= - \partial_i C'(s-t) \\
E \left\{ \xi(t) \partial_i \eta(s) \right\} &= \partial_i C'(s-t).
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
E \left\{ \partial_i \xi(t) \eta(s) \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E \left\{ (\xi(t+e_i h) - \xi(t)) \eta(s) \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ C'(s-t+e_i h) - C'(s-t) \right\} = - \partial_i C'(s-t) \\
E \left\{ \xi(t) \partial_i \eta(s) \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E \left\{ \xi(t) (\eta(s+e_i h) - \eta(s)) \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ C'(s-t+e_i h) - C'(s-t) \right\} = \partial_i C'(s-t).
\end{aligned}$$

Es sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Vektor mit den nichtnegativen ganzzahligen Komponenten α_j . Mit $D^\alpha f(x)$ werde der Differentialquotient der Ordnung

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

bezeichnet.

Satz: Es gilt

$$E \left\{ D^\alpha \xi(t) D^\beta \xi(s) \right\} = (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha+\beta} C(s-t).$$

Beweis: Der Beweis der Behauptung erfolgt durch vollständige Induktion. Für $|\alpha| = |\beta| = 0$ ist die Behauptung trivialerweise gültig. Die Aussage gelte nun für $|\alpha| = n-1$ und $|\beta| = m$. Vorgelegt sei ein α' mit $|\alpha'| = n$, das heißt, es existiert ein Index i , so daß $\alpha'_j = \alpha_j$ für $j \neq i$ und $\alpha'_i = \alpha_i + 1$.

Mit Hilfe von Lemma 2 erhält man:

$$E \left\{ D^{\alpha'} \xi(t) D^\beta \xi(s) \right\} = E \left\{ \partial_i (D^\alpha \xi(t)) D^\beta \xi(s) \right\}$$

$$= (-1) \partial_i E \left\{ D^\alpha \xi(t) D^\beta \xi(s) \right\} = (-1)^{|\alpha'|} D^{\alpha'+\beta} C(s-t).$$

Die Behauptung gilt dann also sogar für $|\alpha| = n$. Analog verfährt man im zweiten Fall. Es sei die Gültigkeit der Behauptung für $|\alpha| = n$ und $|\beta| = m-1$ vorausgesetzt und es sei ein β' mit $|\beta'| = m$ vorgelegt. Es existiert wiederum ein Index i , so daß $\beta'_j = \beta_j$ für $j \neq i$ und $\beta'_i = \beta_i + 1$.

Mit Hilfe von Lemma 2 erhält man wiederum

$$E \left\{ D^\alpha \xi(t) D^{\beta'} \xi(s) \right\} = E \left\{ D^\alpha \xi(t) \partial_i (D^\beta \xi(s)) \right\}$$

$$= \partial_i E \left\{ D^\alpha \xi(t) D^\beta \xi(s) \right\} = (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha+\beta'} C(s-t).$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Anhang IV. Fortsetzung ebener Prozesse in den Raum

Es sei $\xi : \mathbb{D} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ein stationärer Prozeß mit einer integrierbaren und stetig differenzierbaren Kovarianzfunktion C . Die Funktion

$$P : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \{z \in \mathbb{R}^1 : z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^1 \\ (x, z) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

heiße POISSON-Kern.

Da die Funktionen C und P über \mathbb{R}^2 integrierbar sind, existiert das dreifache Faltungsprodukt $P * P * C$ und folglich der Prozeß

$$(101) \quad \eta(\omega; x, z) := (P(\cdot, z) * \xi(\cdot))(x) \\ = \frac{1}{2\pi} \int \frac{z}{((x-y)^2 + z^2)^{3/2}} \xi(\omega; y) dy .$$

Der Punkt steht hierbei für das Argument, über das die Faltung vollzogen wird, während das andere Argument festgehalten wird.

Aussage: Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$(i) \quad C(x-y, z_1+z_2) := E \left\{ \eta(\omega; x, z_1) \eta(\omega; y, z_2) \right\} \\ = (P(\cdot, z_1+z_2) * C(\cdot))(x-y) \\ = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(z_1+z_2)C(u)du}{[((x-y)-u)^2 + (z_1+z_2)^2]^{3/2}} .$$

$$(ii) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \eta(\omega; x, z) = \xi(\omega, x)$$

$$(iii) \quad \lim_{z_1+z_2 \rightarrow 0} C(x-y, z_1+z_2) = C(x-y)$$

Dem Beweis dieser drei Aussagen sollen zwei Lemmata vorausgehen.

Bei BELLAIRE (1977) findet sich die folgende Beziehung.

Lemma 1:

$$(P(\cdot, z_1) * P(\cdot, z_2) * C(\cdot))(x-y) = (P(\cdot, z_1+z_2) * C(\cdot))(x-y)$$

Lemma 2: Es sei $\varphi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ stetig differenzierbar und erfülle die Forderung $\varphi(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Dann gilt:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{zR}{(R^2+z^2)^{3/2}} \varphi(R) dR = \varphi(0)$$

Beweis: Es sei

$$\Phi_z(R) := \int_0^R \frac{zr dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = 1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}} .$$

Nun gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{zR}{(R^2+z^2)^{3/2}} \varphi(R) dR = \int_0^{\infty} \Phi_z(R) \varphi(R) dR = - \int_0^{\infty} \Phi_z(R) \varphi'(R) dR .$$

Die Funktion ψ' ist integrierbar und beschränkt, während die Funktionen Φ_z integrierbar und für alle $z > 0$ gleichmäßig beschränkt sind. Damit ist der Satz von LEBESGUE anwendbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} - \int_0^{\infty} \Phi_z(R) \psi'(R) dR &= - \int_0^{\infty} \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_z(R) \psi'(R) dR \\ &= - \int_0^{\infty} \psi'(R) dR = \psi(0) . \end{aligned}$$

Also:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \psi(R) dR = \psi(0) .$$

Jetzt ist man in der Lage, obige Behauptung zu verifizieren.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad E \left\{ \eta(\omega; x, z_1) \eta(\omega; y, z_2) \right\} &= E \left\{ (P(\cdot, z_1) * \xi(\omega, \cdot))(x) (P(\cdot, z_2) * \xi(\omega, \cdot))(y) \right\} \\ &= (P(\cdot, z_1) * P(\cdot, z_2) * C(\cdot))(x-y) \\ &= (P(\cdot, z_1 + z_2) * C(\cdot))(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(z_1 + z_2) C(u) du}{[(x-y-u)^2 + (z_1 + z_2)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{z_1 + z_2 \rightarrow 0} C(x-y, z_1 + z_2) = \lim_{z_1 + z_2 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{z r}{(r^2 + (z_1 + z_2)^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} C(\sqrt{|x-y|^2 + r^2 - 2r|x-y|\cos\psi}) d\psi dr$$

Die Funktion

$$\int_0^{2\pi} C(\sqrt{|x-y|^2 + r^2 - 2r|x-y|\cos\psi}) d\psi$$

hat die Eigenschaften, die von der Funktion ψ in Lemma 2 gefordert werden. Deshalb gilt:

$$\lim_{z_1 + z_2 \rightarrow 0} C(x-y, z_1 + z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(|x-y|) d\psi = C(x-y) .$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \lim_{z_1 + z_2 \rightarrow 0} E \left\{ \eta(\omega; x, z_1) - \eta(\omega; x, z_2) \right\} &= \lim_{z_1 + z_2 \rightarrow 0} \left\{ C(0, 2z_1) + C(0, 2z_2) - 2C(0, z_1 + z_2) \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daher existiert:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \eta(\omega; x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{z r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \xi(\omega; \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \psi}) d\psi dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\omega; x) d\psi = \xi(\omega, x) . \end{aligned}$$

Die praktische Berechnung der in (i) gegebenen Kovarianzfunktion erfolgt über den Umweg der FOURIER-Transformation. Da die Funktionen P und C integrierbar sind, sind diese sowie deren dann existierende Faltung $P * C$ FOURIER-transformierbar. Die Anwendung des Faltungssatzes liefert

$$\tilde{C}(k, z_1 + z_2) = \tilde{P}(k, z_1 + z_2) \tilde{C}(|k|) .$$

Die FOURIER-Transformierte des POISSON-Kerns läßt sich angeben:

$$\tilde{P}(|k|, z_1 + z_2) = e^{-(z_1 + z_2)|k|} .$$

Wegen der Integrierbarkeit von P und C läßt sich die Umkehrung der FOURIER-Transformation auf $\tilde{C}(|k|, z_1 + z_2)$ anwenden und so ist

$$C(r, z_1 + z_2) = \int_0^{\infty} |k| J_0(|k|r) \tilde{C}(|k|) e^{-(z_1 + z_2)|k|} dk .$$

Literatur

- BELLAIRE, R.G.: Correlation functions on the upper half space
Bull. Géod., Paris 51 (1977) 2, S. 149-161
- GEL'FAND, I.M.; ŠILOV, G.E.: Obobščennye funkcii, Vyp 1. isd. 2
Moskva: Fizmatgiz 1959
- GEL'FAND, I.M.; VILENKIN, N.Ja.: Nekotorye primenenija garmoničeskogo analiza.
Osnaščennye gil'bertovy prostranstva, Obobščennye funkcii, vyp. 4
Moskva: Fizmatgiz 1961
- GRAFAREND, E.: The Gaussian structure of the gravity field
Studia Geophys. et Geod., Praha 14 (1970), S. 159-167
- GRAFAREND, E.: Statistische Modelle zur Prädiktion von Lotabweichungen
Vermessungstechnik, Berlin 19 (1971) 2, S. 66-68 (1971 a)
- GRAFAREND, E.: Korrelationslängen von Schwereanomalien und Lotabweichungen
Z. Vermessungswesen, Stuttgart 96 (1971) 4, S. 132-138 (1971 b)
- GRAFAREND, E.: A combined gravimetric-astrogeodetic method for telluroid and vertical deflection analysis
In: Beiträge der Bundesrepublik Deutschland zur Vorlage bei der XV. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik vom 30. Juli bis 14. August 1971 in Moskau. DGK, Reihe B, Nr. 188, München 1971 (1971 c)
- GRAFAREND, E.: Isotropietests von Lotabweichungsverteilungen in Westdeutschland. I./II.
Z. Geophysik, Würzburg 37(1971) 4, S. 719-733 (1971 d), 38 (1972) 2, S. 243-255
- GRAFAREND, E.: Geodetic stochastic processes
In: Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, Bd. 14, S. 1-27, Mannheim, Wien, Zürich: B. I. - Wissenschaftsverlag 1975
- HAALCK, H.: Die Frage der Messung des vertikalen Schweregradienten
Beitr. angew. Geophysik 2 (1942) 2, S. 107-120
- HEIN, G.: Die Berechnung von anomalen vertikalen Schweregradienten hoher Präzision
DGK, Reihe C, Nr. 234, München 1977
- HEISKANEN, W.A.; MORITZ, H.: Physical geodesy
San Francisco: Freeman 1967
- JAHNKE, E.; EMDE, F.; LÖSCH, F.: Tafeln höherer Funktionen
7. Aufl., Stuttgart: B.G. Teubner 1966
- JORDAN, K.S.: Self-consistent statistical models for the gravity anomaly, vertical deflections, and undulation of the geoid
J. Geophys. Res. 77 (1972) 2, S. 3660-3670
- KOLMOGOROV, A.N.; FOMIN, S.V.: Elementy teorii funkcii i funkcional'nogo analiza
Moskva: Nauka 1972
- MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers
5. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953
- MORITZ, H.: Advanced least squares methods
Rep. No. 175, Dept. Geod. Sci., Ohio State Univ., 1972
- MORITZ, H.: Some first accuracy estimates for aerial
Rep. No. 209, Dept. Geod. Sci., Ohio State Univ., 1974
- MORITZ, H.: Combination of aerial gravimetry and gradiometry
Rep. No. 223, Dept. Geod. Sci., Ohio State Univ., 1975
- MORITZ, H.: Covariance Functions in least-squares collocation
Rep. No. 240, Dept. Geod. Sci., Ohio State Univ., 1976

- MORRISON, F.: Azimuth - dependent statistics for interpolating geodetic data
Bull. géod., Paris 51 (1977) 2, S. 105-118
- OBUCHOW, A.M.: Statistische Beschreibung stetiger Felder
In: Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz (Hrsg.: H. Goering),
Berlin: Akademie-Verlag 1958, S. 1-42
- RYSHIK, I.M.; GRADSTEIN, I.S.: Summen-, Produkt- und Integraltafeln
(Übers. a. d. Russ.), Berlin: Dt. Verlag d. Wiss. 1957
- SCHWAHN, W.: Beziehungen zwischen den Autokovarianzfunktionen der Schwere und der
Dichte und deren Anwendung bei der Tiefenbestimmung der Quellen, demonstriert
anhand von zwei Profilen über Schweden
Gerlands Beitr. Geophysik, Leipzig 84 (1975) 3/4, S. 281-296
- SCHWARZ, K.-P.: Geodetic accuracies obtainable from measurements of first and
second order gravitational gradients
Rep. No. 242, Dept. Geod. Sci., Ohio State Univ., 1976
- VLADIMIROV, V.S.: Obobscennye funkicii v matematicheskoi fizike
Moskva: Nauka 1976
- VYSCOCIL, V.: Statistical characteristics of linear transformations of gravity
anomalies
Studia Geophys. et Geod., Praha 13 (1969) 3, S. 252-258

