

10.30

4535, 4668

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften
ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde

Nr. 52, Teil 3

**3rd International Symposium
Geodesy and Physics of the Earth**

GDR Weimar, October 25th - 31st, 1976

II

Proceedings

Part 3

Edited by the Scientific Committee
H. Kautzleben (GDR), A. Massevitch (USSR),
E. Tengström (Sweden), E. Buschmann (GDR)

Als Manuskript gedruckt

Potsdam 1977

III-12-12 A 4204/77

C o n t e n t s
I n h a l t s v e r z e i c h n i s

Part 3

Teil 3

	Page Seite
Use of Satellite Observations	
SEHNAL, L., The Aerodynamic Lift in the Satellite Dynamics	691
ILL, M., Über die Nord-Süd Asymmetrie der hohen Atmosphäre	695
ИЛЛЕИ-АЛМАР, Е., Анализ изменения плотности верхней атмосферы с 27-дневным циклом	719
КУГАЕНКО, Б.В., Оценка возможного повышения точности расчета положения ИСЗ при использовании прогнозируемых значений индексов геомагнитной возмущенности и солнечной активности	727
ALMÁR, I.; HORVÁTH, A.; ILLES-ALMÁR, E., New Results Concerning the Geomagnetic Effect in the Upper Atmosphere	739
VORBRICH, K., Some Results of the Examination of the SBG Camera at Borowiec	753
ГЕОРГИЕВ, Н., Использование промежуточной орбиты ИСЗ при решении геодезических задач	763
ŽATKA, JAN, The Determination of the Earth Gravity Field by use of Satellite Gradiometry	785
HAIHE, SEPPO J.; PAUNONEN, MATTI; SHARMA, A.B.R.; KAKKURI, JUHANI; KALLIOMÄKI, KARI (Presented by T.J. KUKKAMÄKI), The Satellite Laser of Finland	791
NEUBERT, REINHART; FISCHER, HARALD, Improvement of the Potsdam Laser Ranging Equipment	795
SCHILLAK, S.; WNUK, E., Satellite Laser Ranging Station at Borowiec	803
HIRŠL, P.; KRAJÍČEK, V.; PFEIFER, M., Event Timer for the Second Generation Laser Radar	813
WILSON, P.; SEEGER, H.; NOTTARP, K., The new Nd-YAG Laser-Ranging System for the Satellite Observation Station at Wettzell	823
HOVORKA, F.; KONRÁD, M.; UTĚKAL, J., Satellite Laser Ranging at Hradec Králové	853
MIHÁLY, SZ., Possibilities in Improving Classical Networks by Satellite Geodesy	859
БАТРАКОВ, Ю.В.; НИКОЛЬСКАЯ, Т.К., Об оптимальных условиях определения координат станций полудинамическим методом	871

STANGE, L.; SWIATEK, K., On the Derivation of Long Terrestrial Distances from Laser Observations of Artificial Satellites	877
ADAM, J., Determination of Station Coordinates from Laser Observations	885
GORAL, WLADYSLAW, Iterative Methods of Determination of Station Co-ordinates and Orbital Satellite Elements from DOPPLER Observations	913
HAIMOS, F.; SZÁDECZKY-KARDOSS, Gy., Computation of Geodesics from Chord-Lengths	921
MAREK, K.-H.; REHSE, H., A Technology of Stellar Triangulation by Means of Balloon-Borne Beacons	931
КАБЕЛАЧ, ЙОСЕФ, Триангуляция на высокие цели с помощью самолетов, если измеряются направления и расстрояния	945
ХОРВАТ, А.; ХОРВАТ, П.; ПЕТЕР, И., Дигитвизуальный телескоп для наблюдения ИСЗ	953
MAASE, E., Fernsehaufnahmesystem für die Ortung von Satelliten	959
STUPAK, T.; VORBRICH, K.; WIECKOWSKI, J., Some Experiments with Satellite-Navigation Doppler Receivers Magnavox 'MX-902' and 'ITT-6001'	967
ЖАГАР, Ю.Х., Применение промежуточных орбит для прогнозирования движения ИСЗ	989
АКСЁНОВ, Е.П.; ВАЛКОВЬЯК, С.Н.; ЕМЕЛЬЯНОВ, Н.В., Определение орбит по оптическим и лазерным наблюдениям	1007
KOSTALECKÝ, J., Tidal Movement of Satellite Stations	1019
KLOKOSNIK, JAROSLAW, Determination of the Lumped Coefficients of 14th-Order from the Inclination Changes of the Interkosmos 9 and 10 Satellites	1027
ПРИЛЕПИН, М.Т.; ЗАБОЛОТНЫЙ, Н.С., Уточнение поправок за влияние атмосферы при изучении колебаний полюса Земли	1029
SWIERKOWSKA, STANISLAWA, Stellar Testing Catalogue	1037
KURZYŃSKA, KRYSZYNA, The Influence of Refraction on Positional Observations of Earth's Artificial Satellites	1045
КАСИМЕНКО, Т.В.; ЯНКОВСКАЯ, И.А., Исследование вариаций плотности атмосферы Земли по торможению спутника "Ореол"	1047
ADAM, J., Accuracy Investigation of Simultaneous Photographic and Laser Observations of Artificial Satellites	1059
HIRŠL, PETR, Retroreflector Shape - One of the Sources of Errors	1075
Gesamtinhaltsverzeichnis	1078

Use of Satellite Observations

The Aerodynamic Lift in the Satellite Dynamics

by

L. SEHNAL¹⁾

Summary

The influence of the atmospherical lift on the motion of the oriented artificial satellites is estimated. The changes of the radius-vector of the satellite orbit are computed and compared to those caused by drag.

Резюме

Определяется влияние атмосферического подъема на движение ориентированного искусственного спутника. Вычислены изменения радиус-вектора орбиты спутника и сравнены с изменением вызванным сопротивлением атмосферы.

The atmospherical lift force might be a rather important effect in case of an oriented satellite with solar paddles, moving within the Earth atmosphere [1], [2].

The lift force can be written in the same form as that of the drag:

$$(1) \quad \vec{F} = \frac{1}{2} C_L \frac{A}{m} \rho v \cdot \vec{v},$$

where A/m is the satellite area-to-mass ratio, ρ is the density of the atmosphere and \vec{v} is the velocity of the satellite. The lift coefficient C_L is variable; its value depends on the angle of the incident molecules with the plane of the paddles, η . Considering either diffuse or specular reflection, we have [3]:

$$C_L (\text{diffuse}) = \frac{2}{3} \sqrt{1 - \alpha} \sin 2\eta$$

$$C_L (\text{specular}) = 2 \sin \eta \sin 2\eta,$$

¹⁾ Astronomical Institut of Czechoslovak Academy of Sciences.
Ondrejov, Observatory

where α is the accommodation coefficient, which defines the adjustment of the energy of the reemitted molecules to the temperature of the surface. However, since the angle of incidence can change its sign according to the oriented plane of incidence, we have to use for the coefficient C_L an odd function of the angle η , so that

$$C_L (\text{specular}) = 2 \sqrt{1 - \cos^2 \eta} \sin 2\eta$$

The density of the atmosphere ρ will be considered as a spherical one:

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\frac{(r_0 - r)}{H} \right],$$

where r is the radius-vector and H is the density scale height.

We shall make use of the exocentric anomaly E as the time-variable, then we express the right side of the eq. (1) in terms of E and substitute into the LAGRANGIAN equations.

Since the disturbing force is perpendicular to the velocity vector, the change of the semi-major axis vanishes. Moreover, we suppose the disturbing force to act in the orbital plane, so that the changes of the inclination and of the ascending node vanish, too. Thus we shall pay the attention to the changes of the excentricity, of the argument of perigee and of the radius-vector. We have e.g. for the change of the radius-vector r

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{F_L}{n^2} \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)^{3/2} (1 + e \cos E)^{-1/2} \cos E \sin E + ae \sin E,$$

where n is the mean motion of the satellite. After substitution of the expression for F , we develop the right sides into the series to the fourth power of the excentricity e and the typical term we get in the form:

$$\exp(z \cos E) \cos E \sin^k E,$$

where $z = ae/H$ and k equals 1 or 0.

To integrate the equations, we develop the right sides into the FOURIER series, the coefficients of which will contain BESSEL functions of the imaginary argument $I_j(z)$. After performing the integration, the changes of the radius-vector will be as

$$\Delta r = - \frac{1}{3} a^2 \sqrt{1 - e^2} \frac{A}{H} \rho_p \exp(-z) \left[\sum_{j=0}^2 E(j) I(j) nt + \sum_{p=1}^P \frac{1}{p} \sum_{j=0}^2 \frac{1}{z} F(j) I(j,p) \cos pE + \sum_{p=1}^P \frac{1}{p} \sum_{j=0}^2 G(j) I(j,p) \sin pE \right]$$

where the coefficients $E(j)$, $F(j)$ and $G(j)$ are the functions of e and of the angle γ , which is made by the plane of the solar paddles and the radius-vector. If the satellite is Earth-oriented, the angle γ is constant.

The change of the other elements appear in the same form, except the coefficients $E(j)$, $F(j)$ and $G(j)$ are different.

The results show us the secular changes are of several orders less than that caused by the drag, whereas the shortperiodic changes are of the same order or just a little smaller. We can see on Fig. 1 how the situation looks like in case of a satellite, having $A/m = 0.1 \text{ cm}^2/\text{g}$, the height of perigee of 450 km and almost circular orbit, $e = 0.0032$. That orbit corresponds to the assumed orbit of a proposed satellite AUOS-Z [4].

On Fig. 1, the separate perturbations of the radius-vector are shown, caused by drag and lift force, individually for specular reflection and diffuse reflection ($\alpha = 0.9$). The Drag and Lift curve gives the sum of drag and specular lift perturbations; the substantial change of the radius-vector during one revolution is clearly seen. On the right side of the Figure, the values of the secular changes are given.

References

- [1] G.E. COOK, Planet. Space Sci., 12, 1009, (1964)
- [2] F. HECHLER and M.C. ECKSTEIN, ESRO Report SR-14 (1970)
- [3] R. SCHAMBERG, Rand Research Memorandum RM-2313 (1959)
- [4] J. KLOKOCNIK et al., Observations of Art. Sat. of the Earth, 14, 539 (1974)
Bucuresti

ÜBER DIE NORD-SÜD ASYMMETRIE DER HOHEN
ATMOSPHERE.

M. Ill, Sternwarte der Ungarischen AdW.

Abstract: The paper deals with north-south asymmetry phenomena in the upper atmosphere between 300-1200 km. The analysis of the asymmetrical distribution neutral density is based on C-O curves representing the differences between density values given by the J-71 model, and densities published by the SAO. The mean result of this analysis is that the mentioned north-south asymmetry is detectable during all 4 seasons of different years. The winter asymmetry have been analysed in detail.

Unter den Resultaten der letzten Jahre gibt es mehrere Zeichen dafür, dass die hohe Atmosphäre eine gewisse Nord - Süd Asymmetrie aufweist. Bemerkenswert sind folgende feststellungen:

1./ Die Temperaturmessungen des Satelliten OCO-6 zeigen, dass die südliche Hemisphäre im Allgemeinen wärmer, als die nördliche ist [1].

2./ Aus Bahnanalysen von mehreren Ballonsatelliten konnten Keating et al. Heliumkonzentrationen ableiten. Es stellte sich heraus, dass auf höheren Breiten die Heliumkonzentration im Sommer auf der südlichen Hemisphäre bedeutend niedriger ist, als auf der nördlichen [2].

3./ Nach französischen Untersuchungen zeigt die Verteilung

des atomaren Sauerstoffs in 200 km Höhe einen jahreszeitlichen Charakter, wobei auf der südlichen Halbkugel immer grössere Werte gefunden wurden, als auf der nördlichen [3].

4./ Bei der Verteilung der von aus beobachteten Luftdichtewerten abgeleiteten Windgeschwindigkeiten zeigt sich ebenfalls eine ausgeprägte Asymmetrie, die in erster Linie durch den meridionalen Windkomponenten hervorgerufen wird. Die Existenz von starken, nächtlichen transequatorialen Winden zur Zeit des Frühlingsequinoctiums ist auch ein Zeichen dieser Asymmetrie [4].

5./ Ein auf Grund von 12000 Vermessungen herabgeleitetes Luftdichtemodell hat auffallende, asymmetrische Züge. In diesem Modell liegt z.B. der Punkt maximaler Luftdichte zur Zeit des Frühlingsequinoctiums nicht auf dem Equator, wie zu erwarten wäre, sondern auf südlichen Breiten [5].

Diese erwähnten Asymmetrie-Erscheinungen veranlassten uns zu versuchen, auch in der Verteilung der neutralen Luftdichtewerte eine Nord-Süd Asymmetrie nachzuweisen. Dazu analysierten wir die Abweichungen von beobachteten Luftdichten gegenüber Modellwerten, die für genau dieselben Umstände aus dem Modell J-71 berechnet worden sind. Es wurden jeweils Daten derselben Jahreszeit der nördlichen und der südlichen Hemisphäre mit einander verglichen, d.h. die Daten der beiden Halbkugeln sind jeweils ein halbes Jahr von einander entfernt.

Bei unseren Untersuchungen haben wir vom Smithsonian Astrophysical Observatory veröffentlichte Luftdichtewerte

verwendet, und zwar etwa 2500 Luftdichten, die aus den Jahren 1963-69 stammen, und sich auf 9 Satelliten beziehen. Aus technischen Gründen haben wir die Differenzen der Logarithmen der Modellwerte /C/ und der beobachteten Luftdichten /O/ berechnet, und das 1000-fache dieser C-O-Werte in Funktion des absoluten Wertes der geographischen Breite des Perigäums aufgetragen.

Wenn bei den so gewonnenen C-O-Kurven sich die von der südlichen Hemisphäre stammenden Punkte nicht systematisch von den Punkten der nördlichen Halbkugel trennen, so kann angenommen werden, dass das Modell die Dichteverteilung im Grunde genommen gut beschreibt. Wenn aber die Punkte auf zwei verschiedenen Geraden oder Kurven liegen, so kann das ein Zeichen der Asymmetrie sein. Im Falle, wenn diese zwei Geraden mit der Abszissenachse einen Winkel einschliessen, ist die Asymmetrie breitenabhängig. Im allgemeinen Fall ist so ein Breiteneffekt nicht unbedingt linear, und deshalb streuen dann die Punkte entlang einer Kurve. In der überwiegenden Mehrzahl unserer Kurven fanden wir gerade diesen letzteren Fall, d.h. eine breitenabhängige Asymmetrie.

Allererst wollten wir klären, ob die gefundene Nord-Süd Asymmetrie eine sporadische Erscheinung ist, oder ein mehr oder weniger konstanter Zug der hohen Atmosphäre. Deshalb untersuchten wir Daten aus allen vier Jahreszeiten. Es zeigte sich, dass die Asymmetrie in jeder Jahreszeit nachweisbar ist, wenn genügend lange Zeitintervalle untersucht werden.

Demnach interessierte uns, ob die Asymmetrie stationäre

Eigenschaften hat, oder einfacher ausgedrückt: ob eine Jahreszeit mit einer C-O-Kurve bestimmter Form charakterisiert werden kann. Auf diese vereinfachte Fragestellung ist die Antwort negativ. Obwohl wir mehrere Kurven fanden, die einander ähnlich sind, kann trotzdem nicht behauptet werden, dass jede Jahreszeit ihre bestimmte Kurvenform hat.

In den Abbildungen 1.-8. demonstrieren wir die Existenz der Asymmetrie zu verschiedenen Jahreszeiten. Das tausendfache der Logarythmen der C-O-Werte ist in Funktion des absoluten Wertes der geographischen Breite des Perigäums aufgetragen. Die leeren Kreise bedeuten eine polwärts gerichtete Bewegung des Perigäums auf der nördlichen Hemisphäre, die gefüllten Kreise die entgegengesetzte Richtung. Die Kreuze bedeuten die polwärts gerichtete Bewegung auf der südlichen Halbkugel, die Sternchen die entgegengesetzte.

Bei der Betrachtung der Abbildungen ist es auffallend, dass die Kurven der nördlichen und der südlichen Hemisphäre sich beim Equator nicht treffen, obwohl dies jedenfalls zu erwarten wäre. Schon anfangs vermuteten wir, dass dies damit zusammenhängt, dass die zwei Kurven jeder Abbildung etwa ein halbes Jahr von einander entfernt sind, da sie ja dieselbe Jahreszeit representieren. Dabei könnte es sein, dass die effektive Querschnittsfläche des Satelliten sich in der Zwischenzeit geändert hat, sowie die Parameter der Atmosphäre können sich inzwischen geändert haben. Nachdem wir über das Material von mehreren Satelliten für denselben Zeitraum mit einander verglichen, und die möglichen atmosphärischen Veränderungen rechnerisch in Betracht nahmen, mussten wir fest-

stellen, dass die Verschiebung der Kurven in der Equatorgegend einen anderen Grund haben muss.

Eine Kontrolle unserer Methode verstärkte die Meinung, dass es sich um einen Scheineffekt handelt, der mit der Darstellung der C-O-Kurven zusammenhängt. Die Punkte eines Diagramms gehören ja nicht zu ein und demselben Augenblick, d. h. wir stellen eine zeitlich recht ausgedehnte Erscheinung als Momentaufnahme dar, und diese Tatsache muss bei der Deutung der Kurven in Betracht genommen werden. Um diesen Scheineffekt noch mehr hervortreten zu lassen, untersuchten wir Kurven, die längere Zeitintervalle umfassten. Dies ermöglichte es uns, einige Feststellungen zu machen, die sich auf die Asymmetrie beziehen.

Wenn wir die in der Abbildung 9 nicht eingetragenen Zeitdaten mit in Betracht nehmen, können wir folgende Feststellungen machen. Das Perigäum des betreffenden Satelliten kreuzte Ende April den Equator und wanderte in Richtung Südpol, wo es Ende Juli ankam. Vom Südpol wanderte dann das Perigäum wieder zum Equator, wo es Ende Juli ankam. Ein auffallender Zug dieser Kurve ist, dass der absteigende Ast nur vom Südpol bis etwa zur Breite 50° mit dem aufsteigenden Ast in Deckung ist, von dort an weicht er immer mehr und mehr in positiver Richtung ab. Beim Equator entsteht dementsprechend eine ziemlich grosse Entfernung zwischen den beiden Ästen der Kurve. Diese formelle Beschreibung hat folgenden physikalischen Inhalt: Ende April, d. h. in der zweiten Hälfte des Herbstes der südlichen Hemisphäre, ist die Luftdichte in der südlichen Equatorgegend um etwa 25% höher, als im Modell

J-71 angegeben wird; drei Monate später, also in der zweiten Hälfte des südlichen Winters, finden wir dagegen, dass die Luftdichte in derselben Gegend etwa um 60% niedriger, als im Modell vorgeschrieben, ist. Während des Winters fand also eine Umordnung der Atmosphäre statt /z.B. durch Auftreten eines transequatorialen, meridionalen Windes/, die die Erwähnten Veränderungen hervorrief, ohne die höheren geographischen Breiten zu betreffen.

Zur formellen Beschreibung der Kurven zurückkehrend kann also festgestellt werden, dass der equatornahe Abschnitt der Kurve sich während des Winters längs der Ordinatenachse steigend verschiebt. Offenbar können sich die nördlichen und südlichen Kurven einer Abbildung in der Equatorgegend nur dann treffen, wenn die equatornahen Abschnitte der beiden Kurven aus derselben Phase des Winters stammen. Diese Bedingung wird aber natürlicherweise sehr selten erfüllt, da ja die Satelliten nicht auf speziellen Bahnen fliegen, und deshalb findet man meistens, dass die equatornahen Abschnitte der Kurven gegenseitig verschoben sind. Diese Verschiebung bedeutet also, dass die aus zwei verschiedenen Hemisphären stammenden Kurven nicht zur selben Phase des Winters gehören.

Dies ist also auch zu ersehen in der Abbildung 10, wo neben der Kurve der Abbildung 9 auch die entsprechende nördliche Kurve zu sehen ist. Bemerkenswert ist, dass diese letztere Kurve kleinere Abweichungen aufweist gegenüber das Modell, als die südliche Kurve. Beide Kurven zeigen aber, dass die Luftdichten in den polaren Gegenden bedeutend höher sind,

als die entsprechenden Modellwerte. Nach Analyse von mehreren Kurven kann nun endgültig angenommen werden, dass das Modell J-71 die Luftdichte in den polaren Gegenden mit einem Fehler von mehr, als 20% angibt. Ausserdem ist festzustellen, dass in der südlichen polaren Gegend die Luftdichte zur Winterzeit höher ist, als in der nördlichen polaren Gegend. Dies bedeutet mit anderen Worten, dass der südliche Winterpol wärmer, als der nördliche ist, was mit nach anderen Methoden abgeleiteten Temperaturverteilungen im Einklang steht [1].

Wir analysierten die Verschiebung des equatorialen Teiles der südlichen Kurven in Einzelheiten, und zwar mit Hilfe von Satelliten, die eine kleine Bahnneigung hatten, und demzufolge innerhalb kurzer Zeit auf dem absteigenden Ast waren. Dadurch gelang es uns die laufende Verschiebung der Kurven während des Winters zu verfolgen, d.h. die im Zusammenhang mit Abbildung 9 geschilderte Vorstellung nachzuweisen.

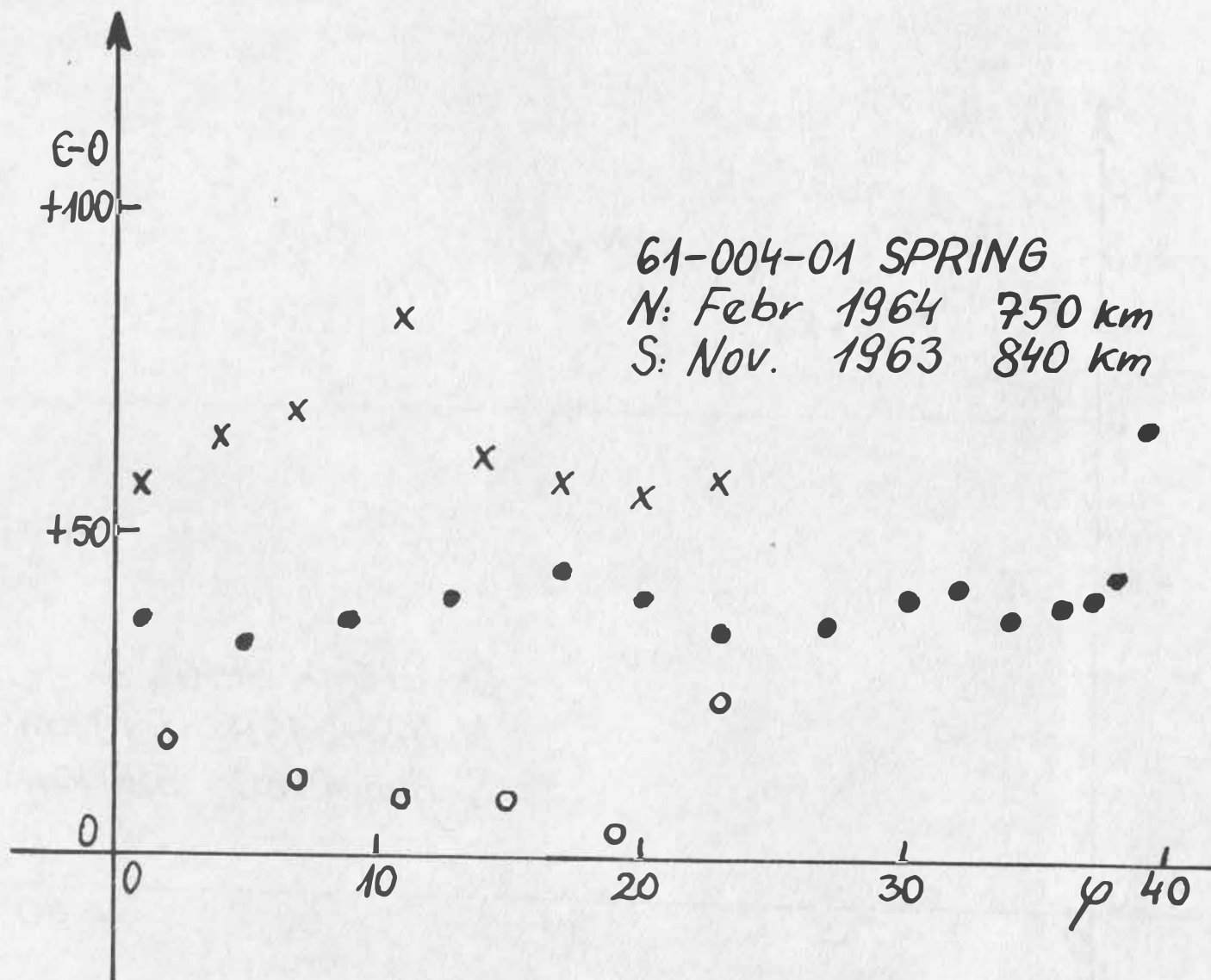
In der Abbildung 11 ist es ersichtlich, dass die Steigung des equatorialen Teiles der Kurve schon Mitte Mai, also am Ende des südlichen Herbstes beginnt. Aus dem Material eines anderen Satelliten ist in Abbildung 12 zu ersehen, dass diese Steigung um die Mitte des Winters sich seinem Ende nähert. Wie in der Abbildung 13 zu sehen ist, bewegte sich die Kurve Ende Juli überhaupt nicht, der aufsteigende und absteigende Ast fällt zusammen. Am Ende des Winters bzw. am Anfang des Frühjahrs dagegen beginnt die Kurve zu sinken /Abbildung 14 /, um im Oktober wieder in eine Lage zu gelangen, die der Abbildung 9 ähnlich ist.

Das aus dem Material von mehreren Satelliten zusammengesetzte Mosaikbild ist im Einklang den Folgerungen, die aus der Abbildung 9 gewonnen wurden. Das bisherige Material bezieht sich in erster Linie auf den Winter, die Verarbeitung der übrigen Jahreszeiten ist im Gange. Offenbar wird die Modellierung der mit der Nord-Süd Asymmetrie zusammenhängenden Erscheinungen erst dann möglich sein, wenn schon alle vier Jahreszeiten in Einzelheiten analysiert worden sind.

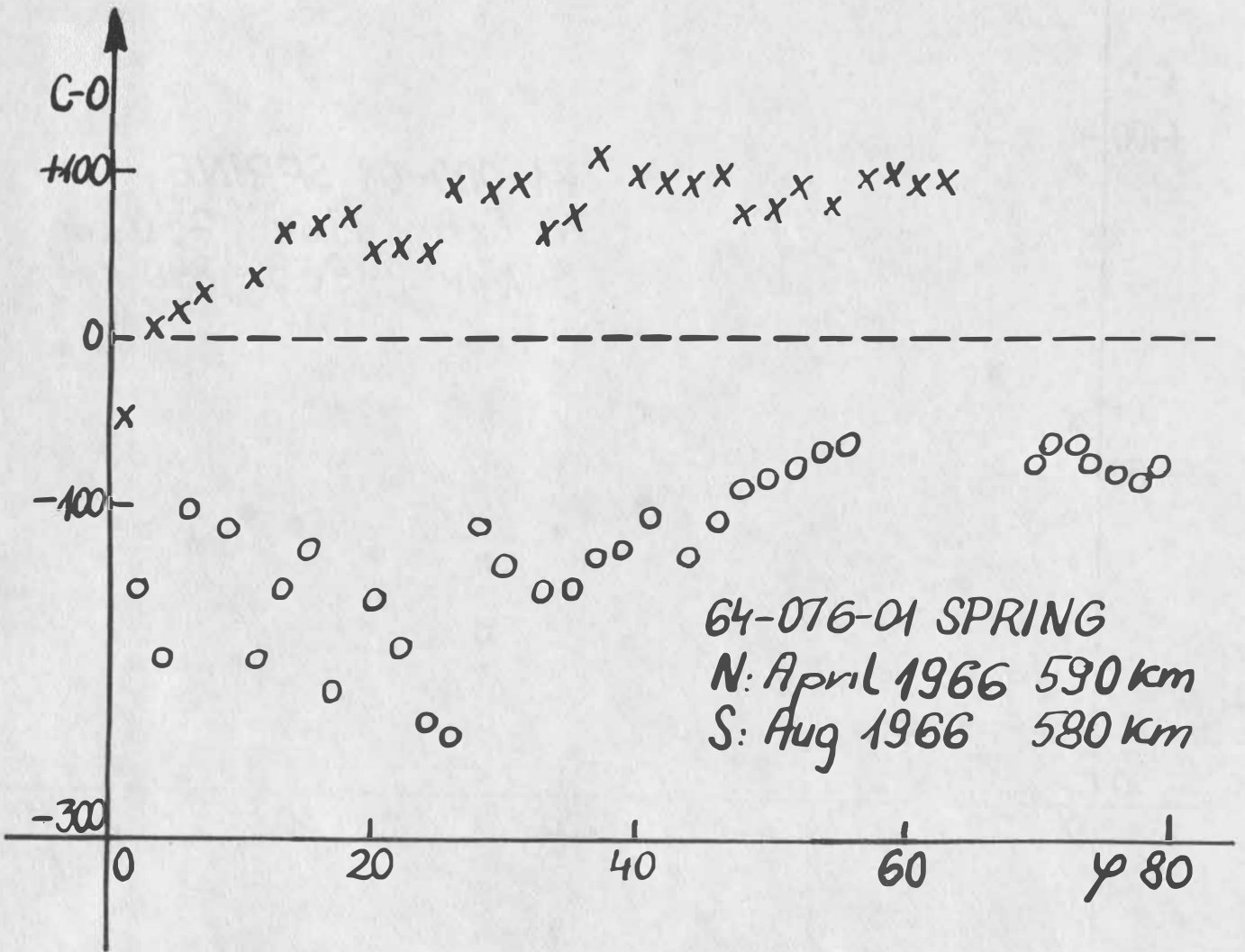
Literatur

- [1] J.E. Blamont, J.M. Luton: Journ. Geophys. Res., 77,
3534,1972.
- [2] G.M. Keating, D.S. McDougal, E.J. Prior, J.S. Levine:
XV. Plen. Meeting, Cospar, Madrid, 1972.
- [3] C. Berger: Thèse de doctorat, Univ. Paris VI., 1976.
- [4] F. Barlier, J.L. Falin, M. Ill, C. Jœeck: Space Res.
XIII., 349, 1973.
- [5] M. Ill, J. Clairemidi, J.L. Falin: Planet. Space Sc.,
Vol 23., 401, 1975.

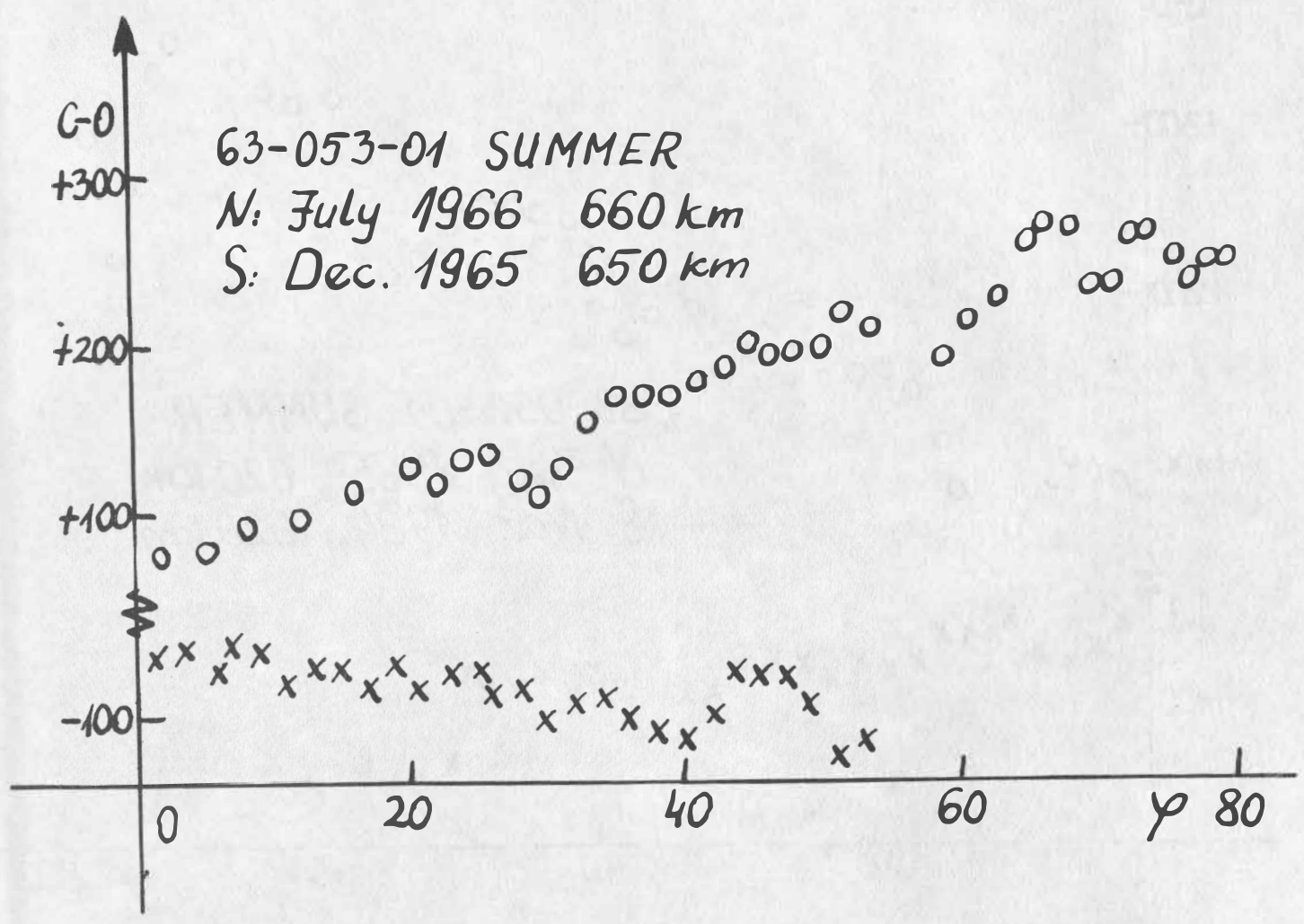
1.



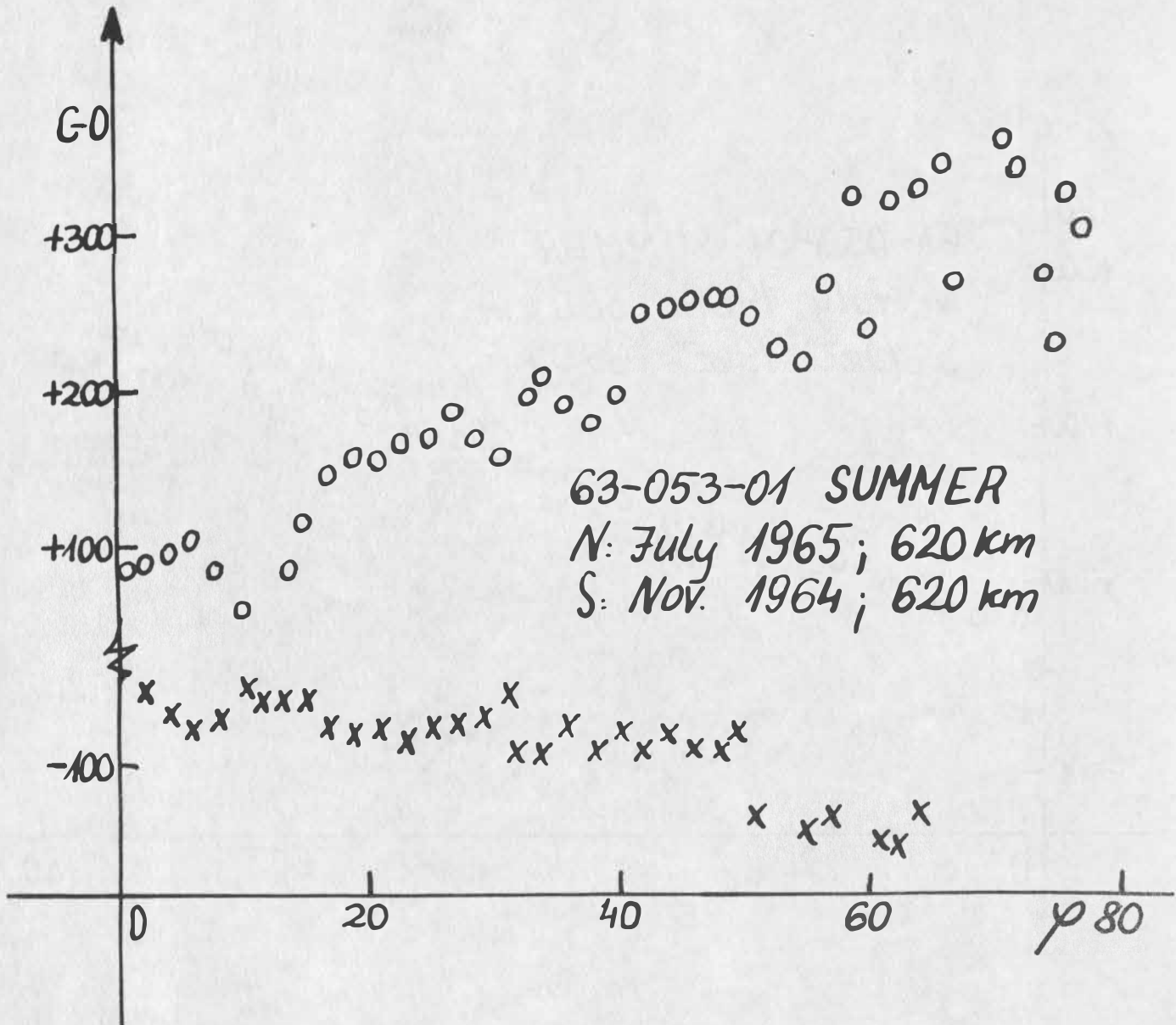
2.

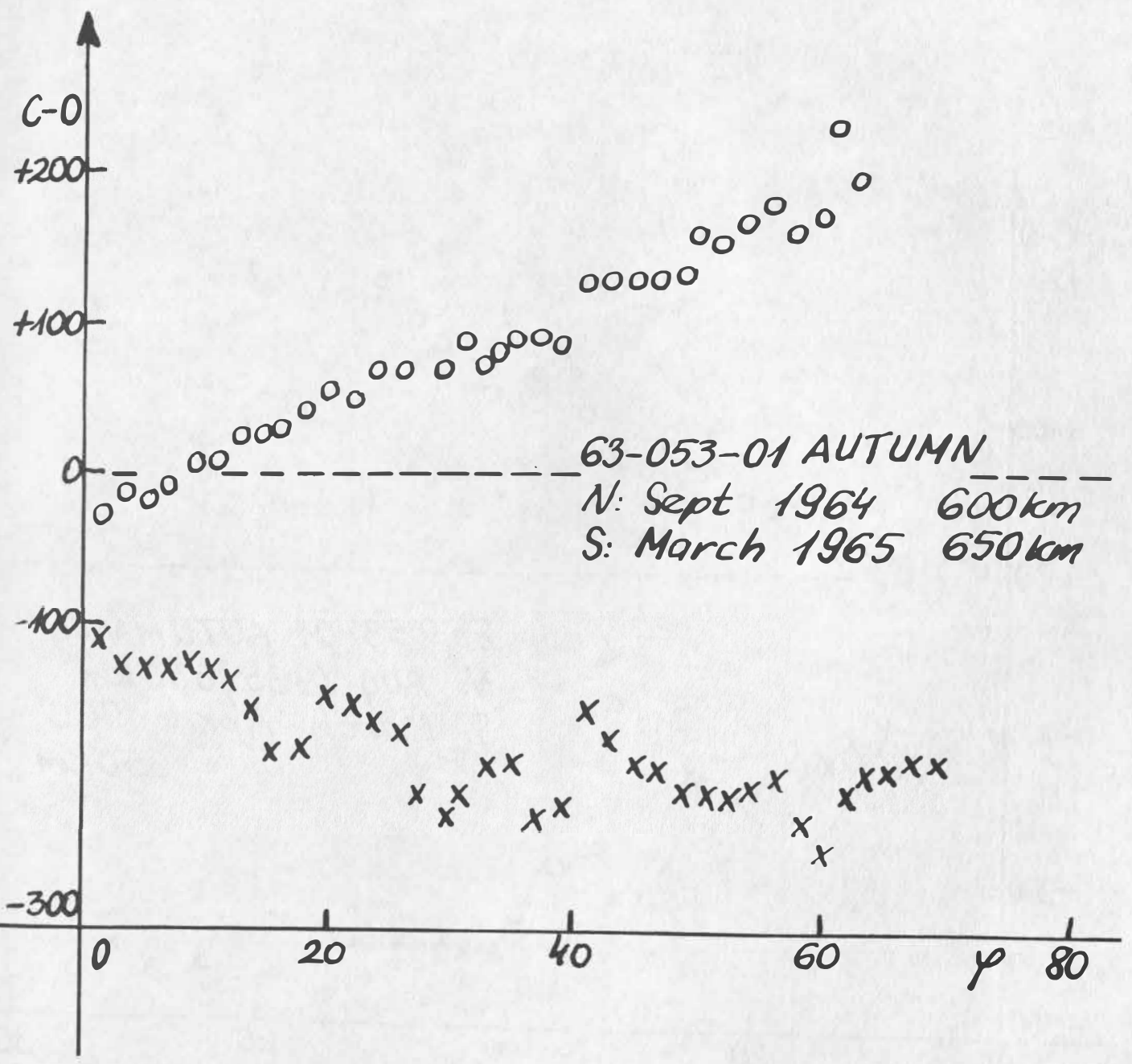


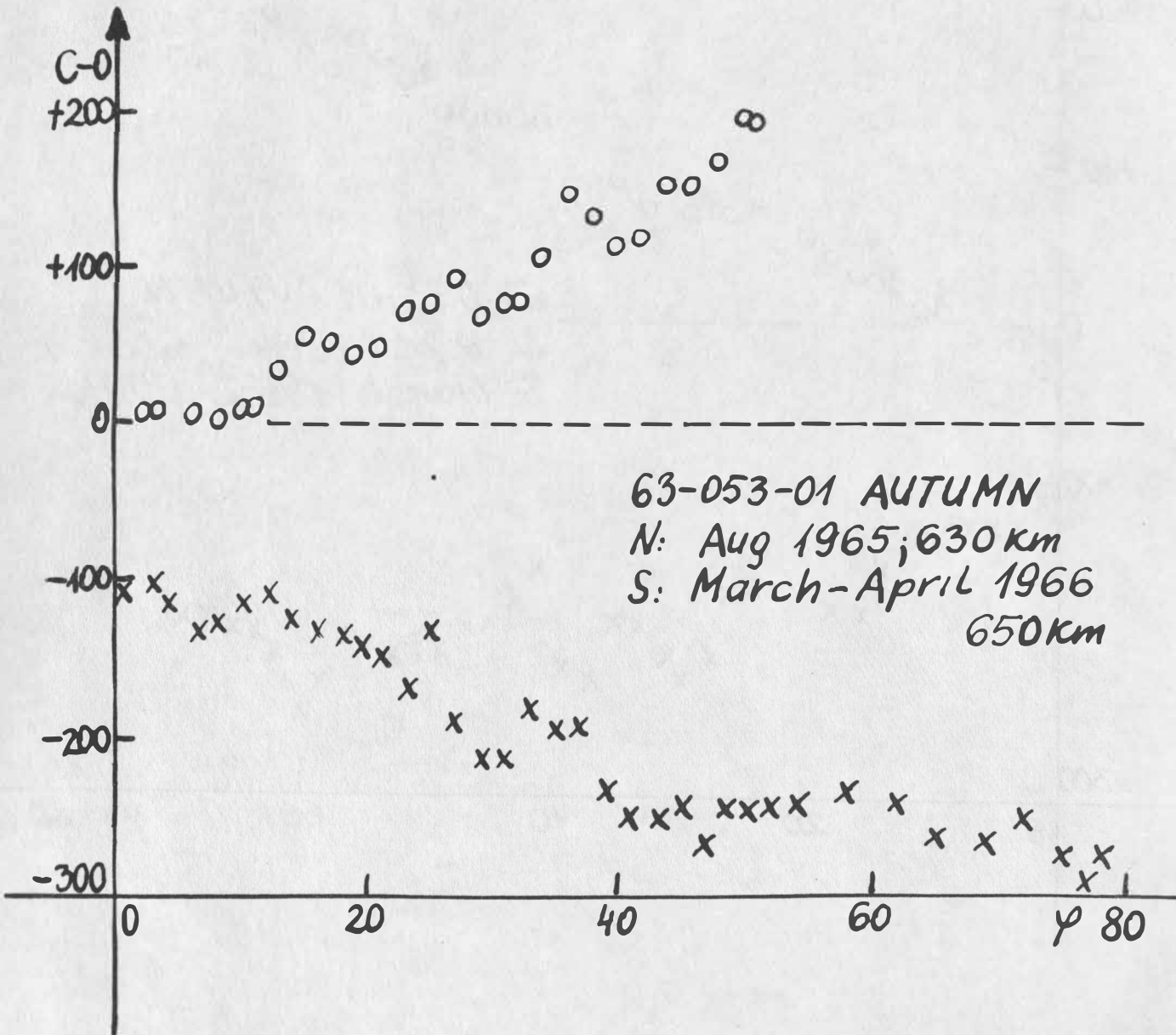
3.



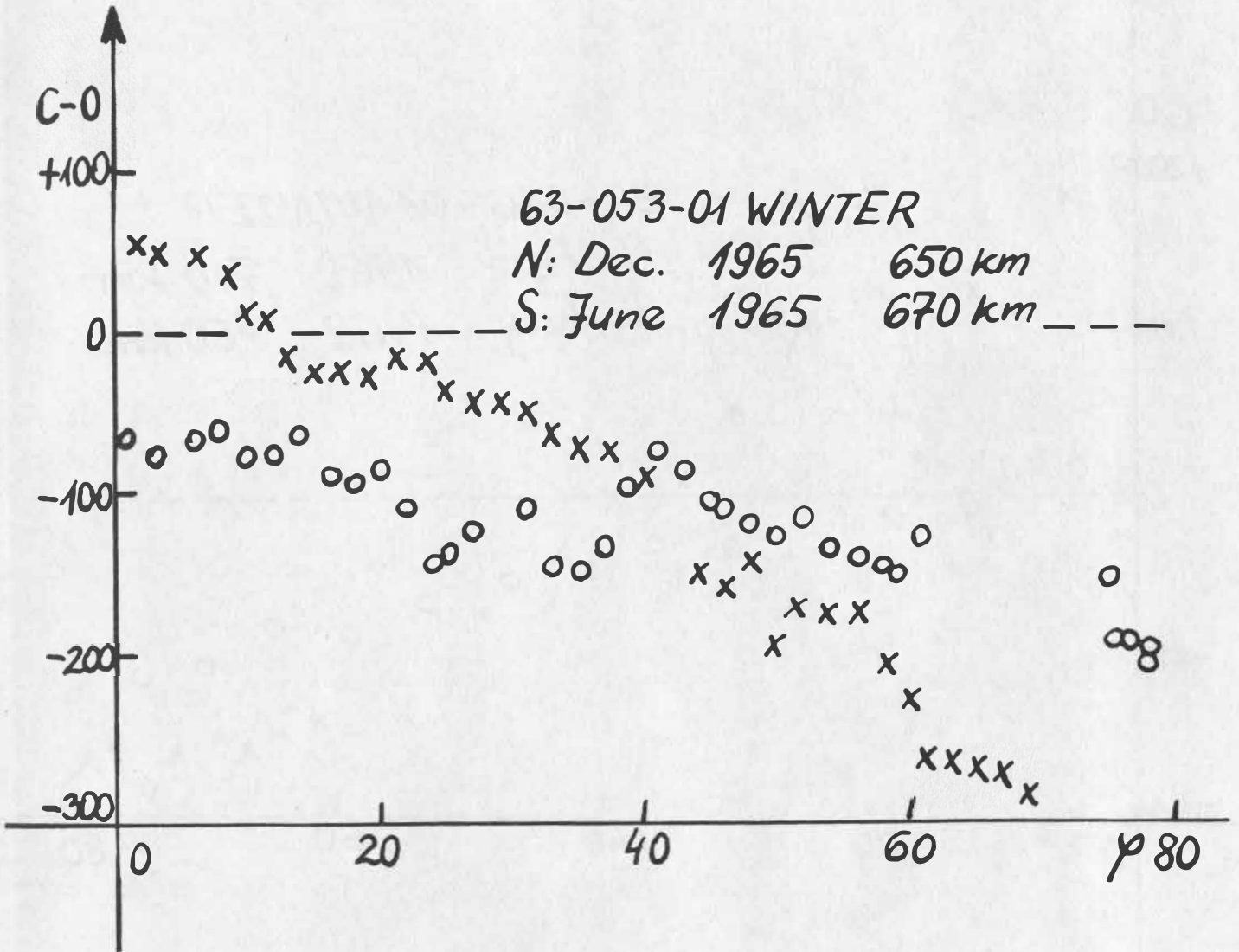
4.

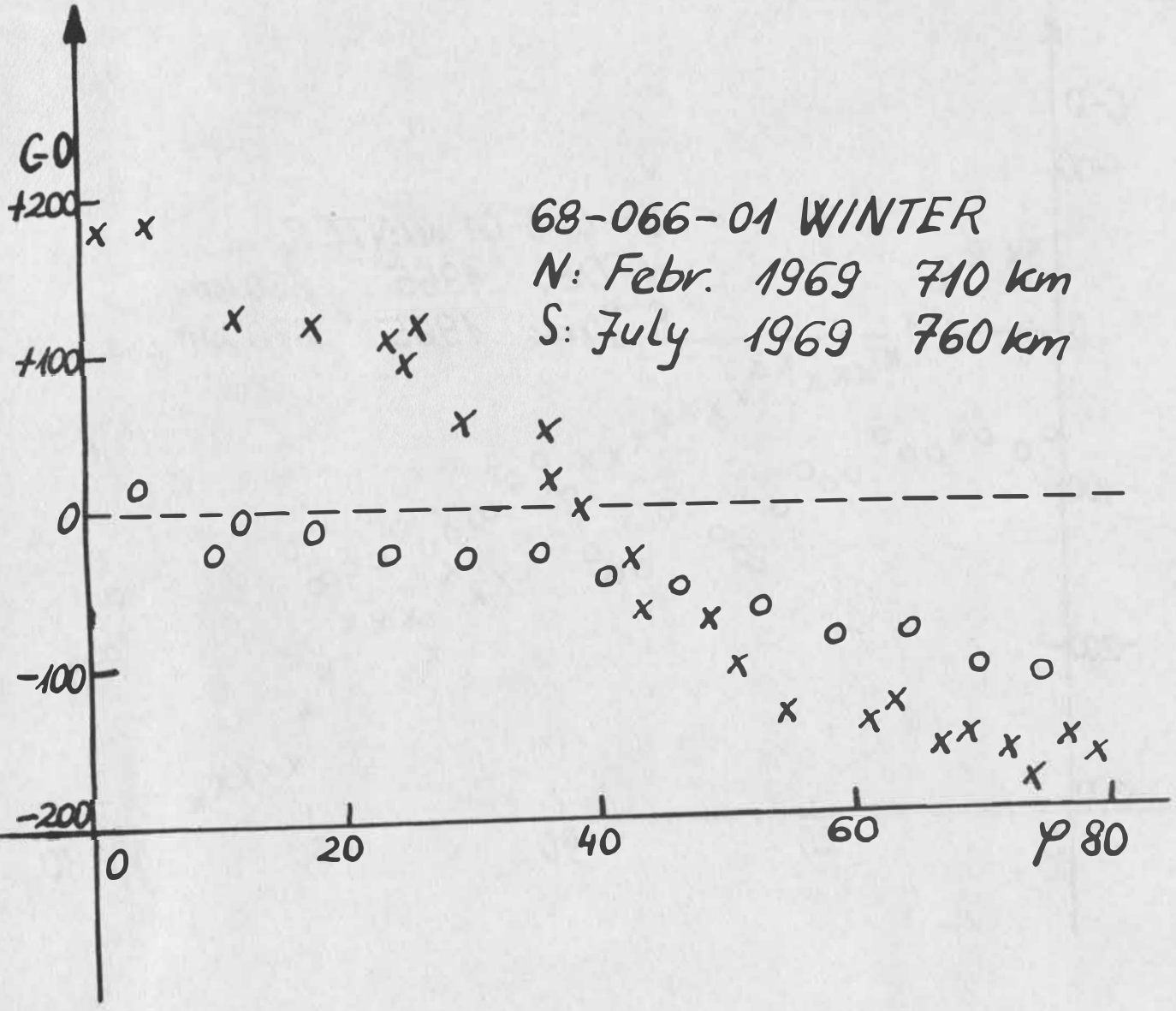




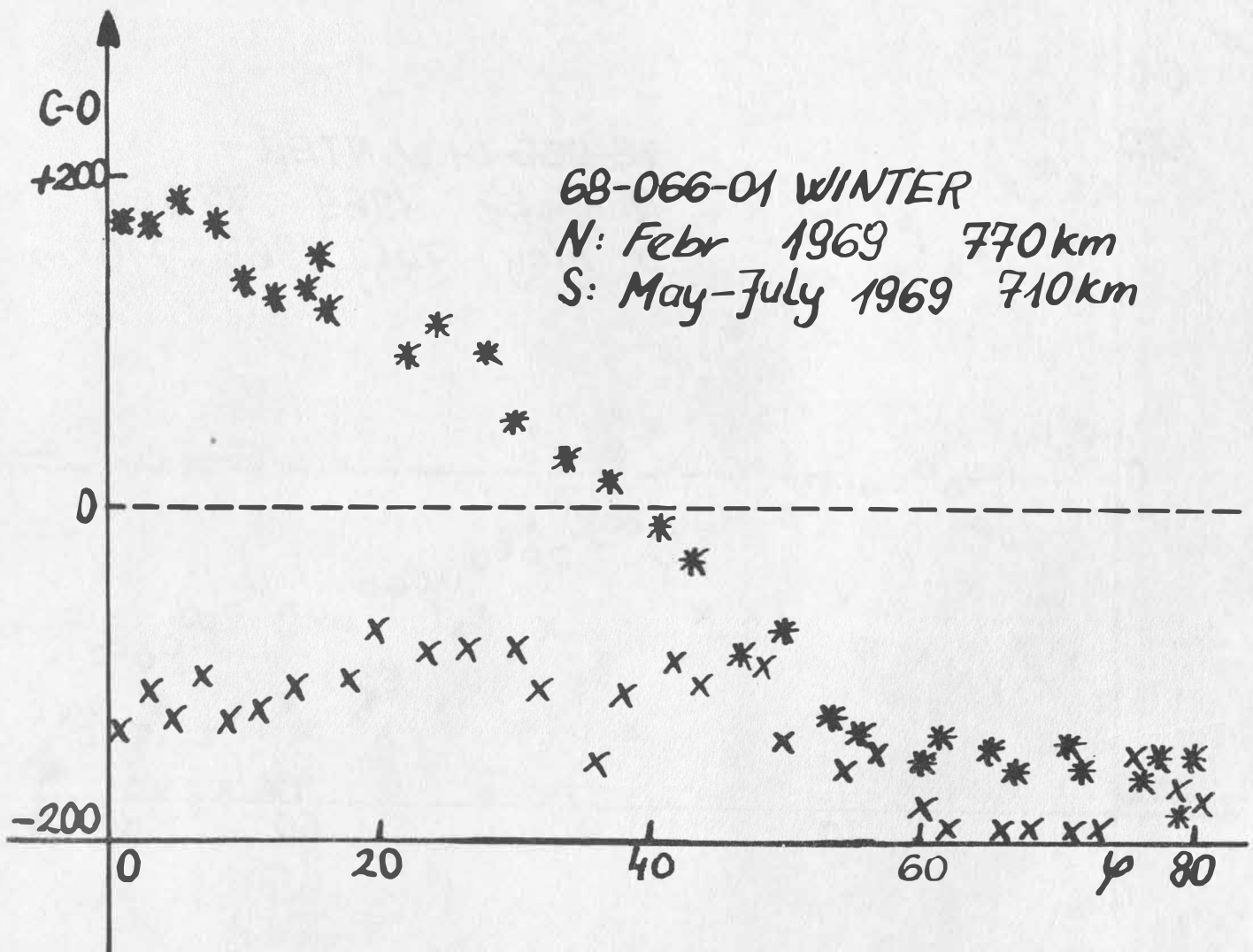


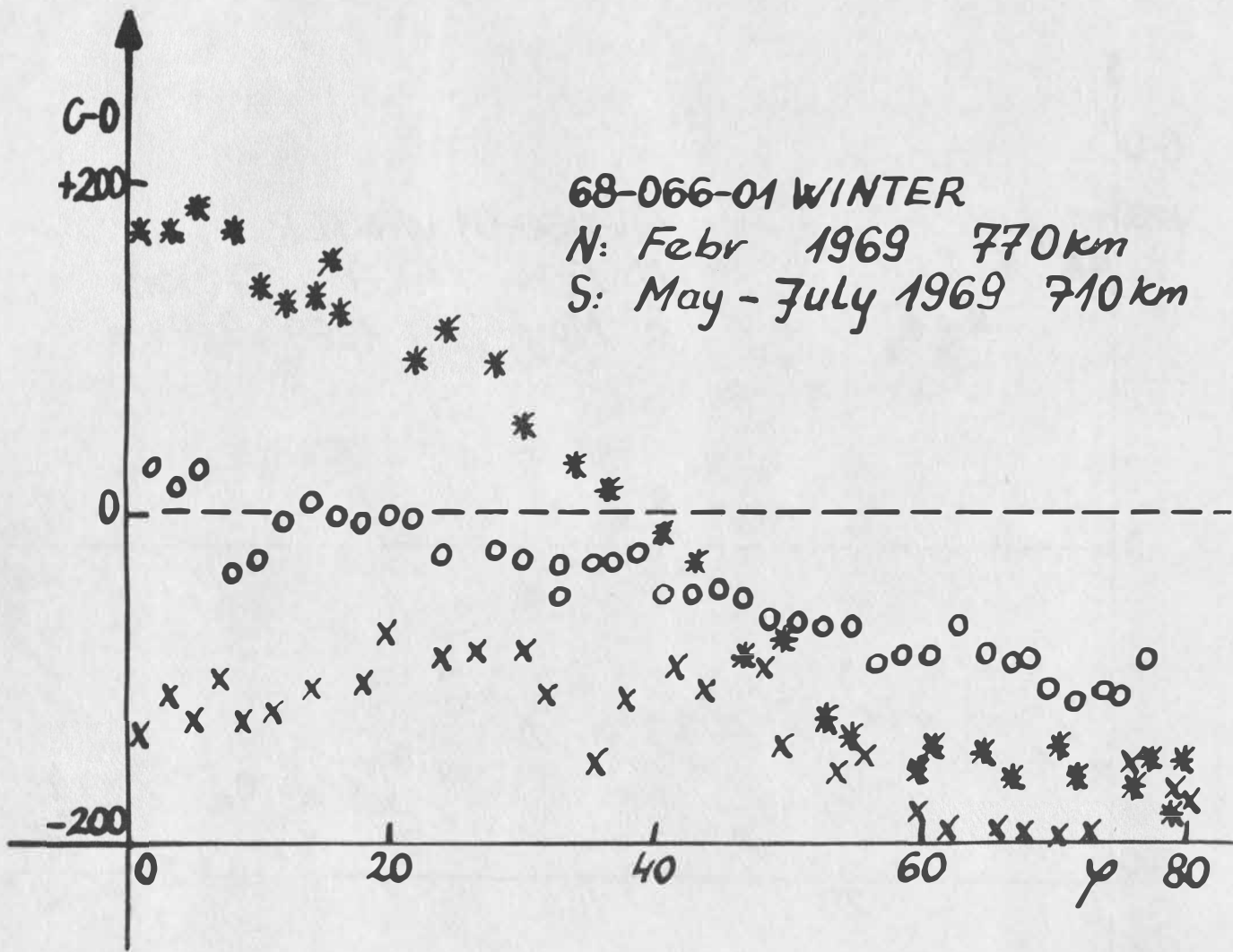
7.



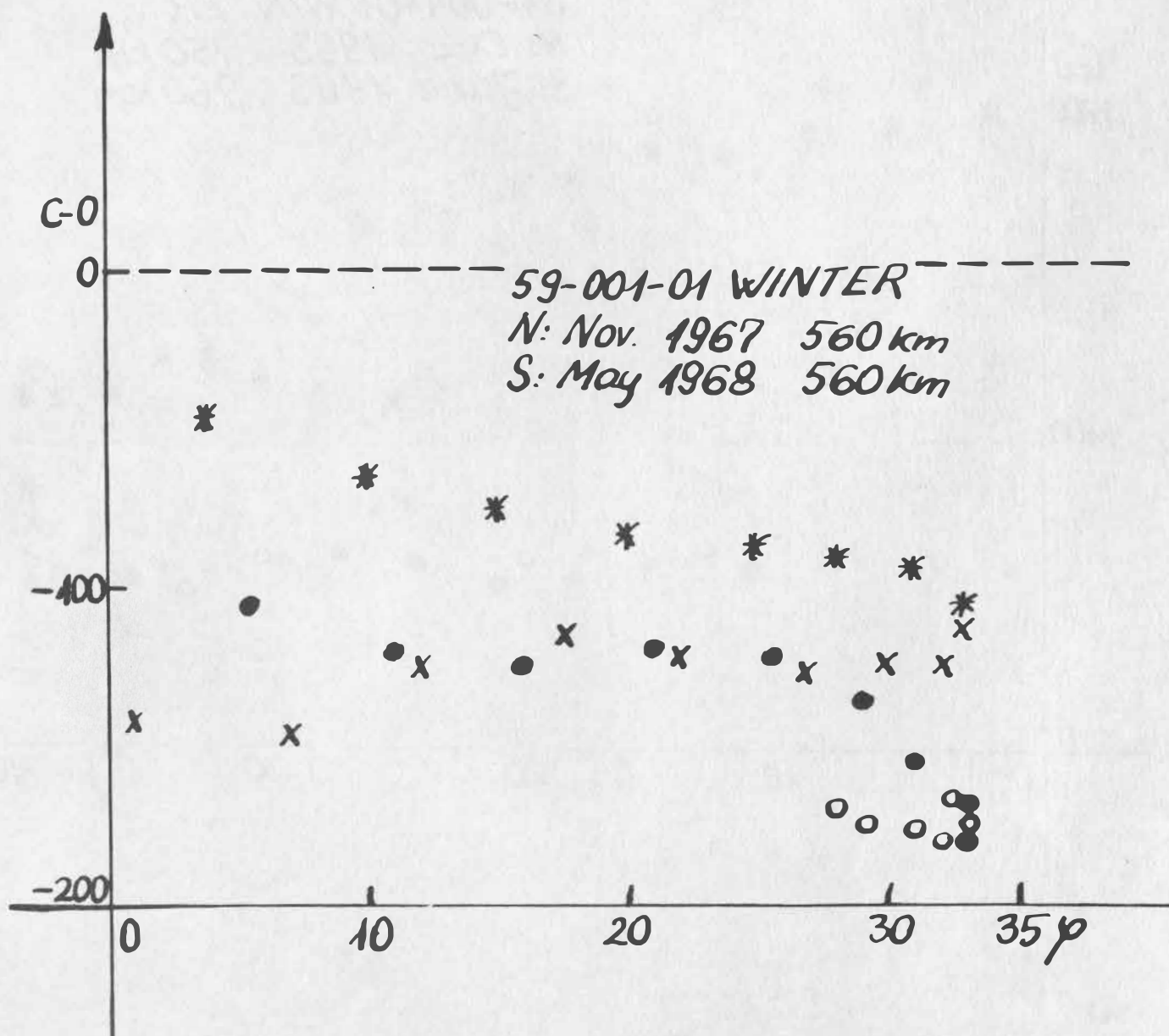


9.

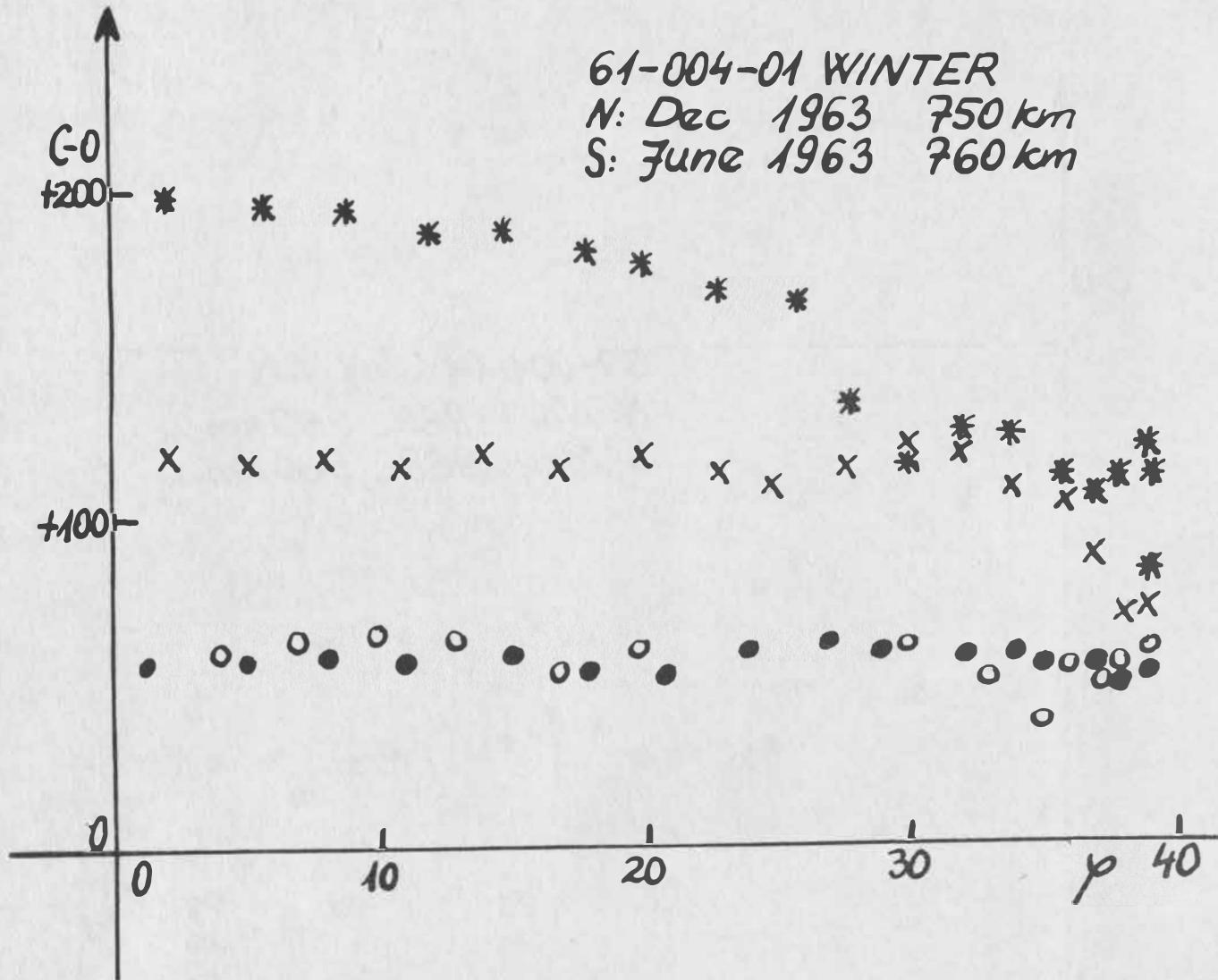




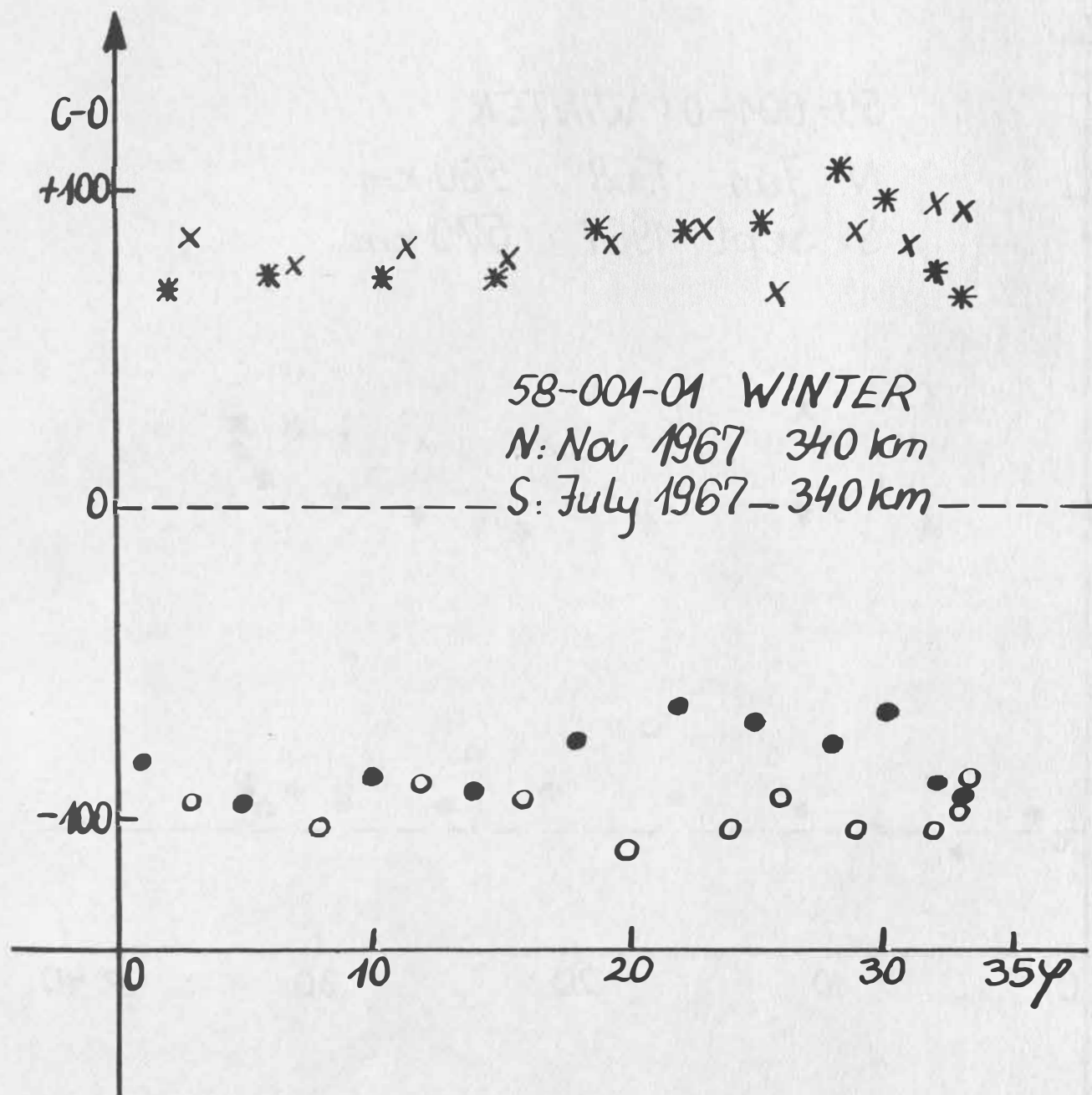
II,



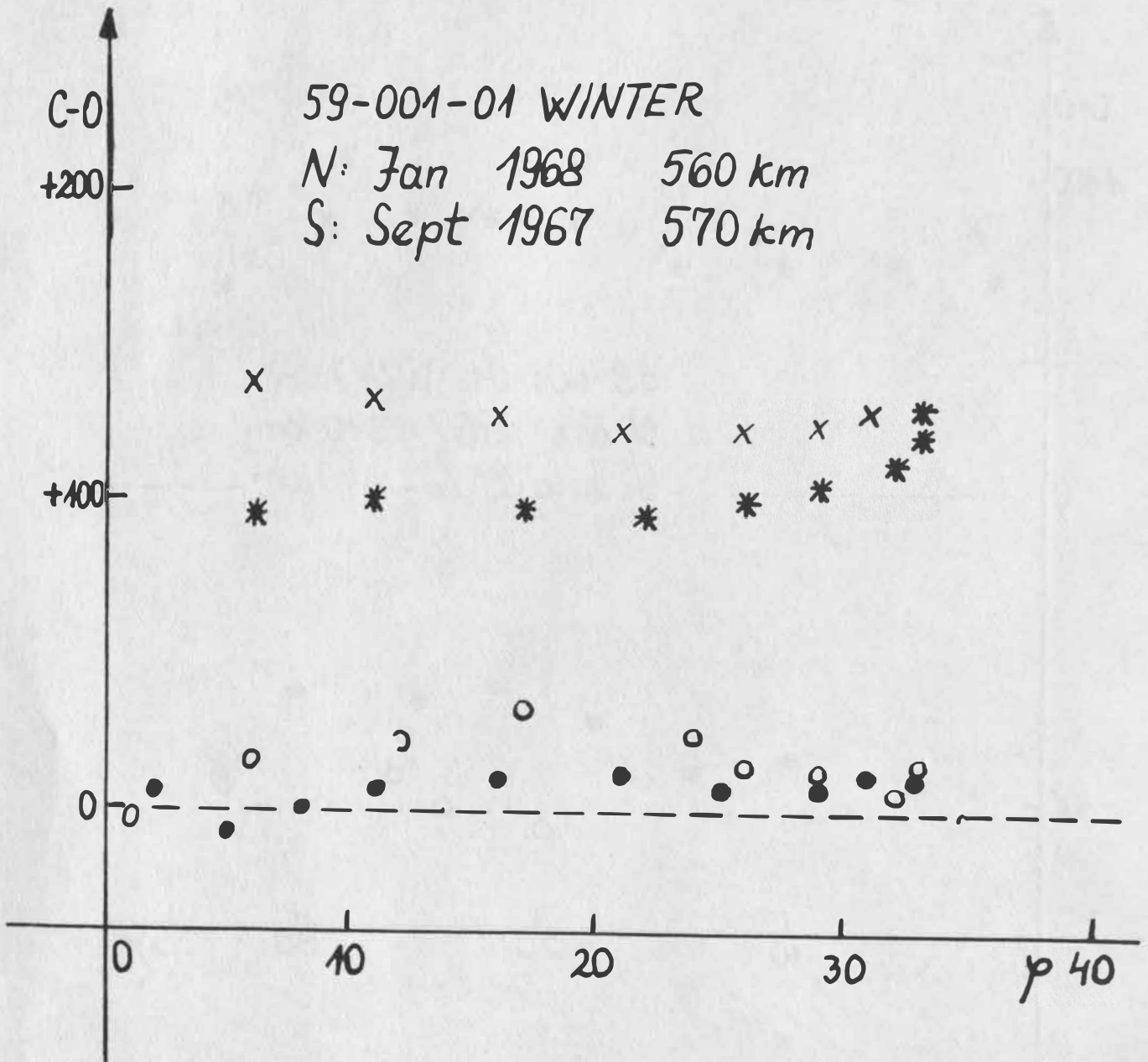
12.



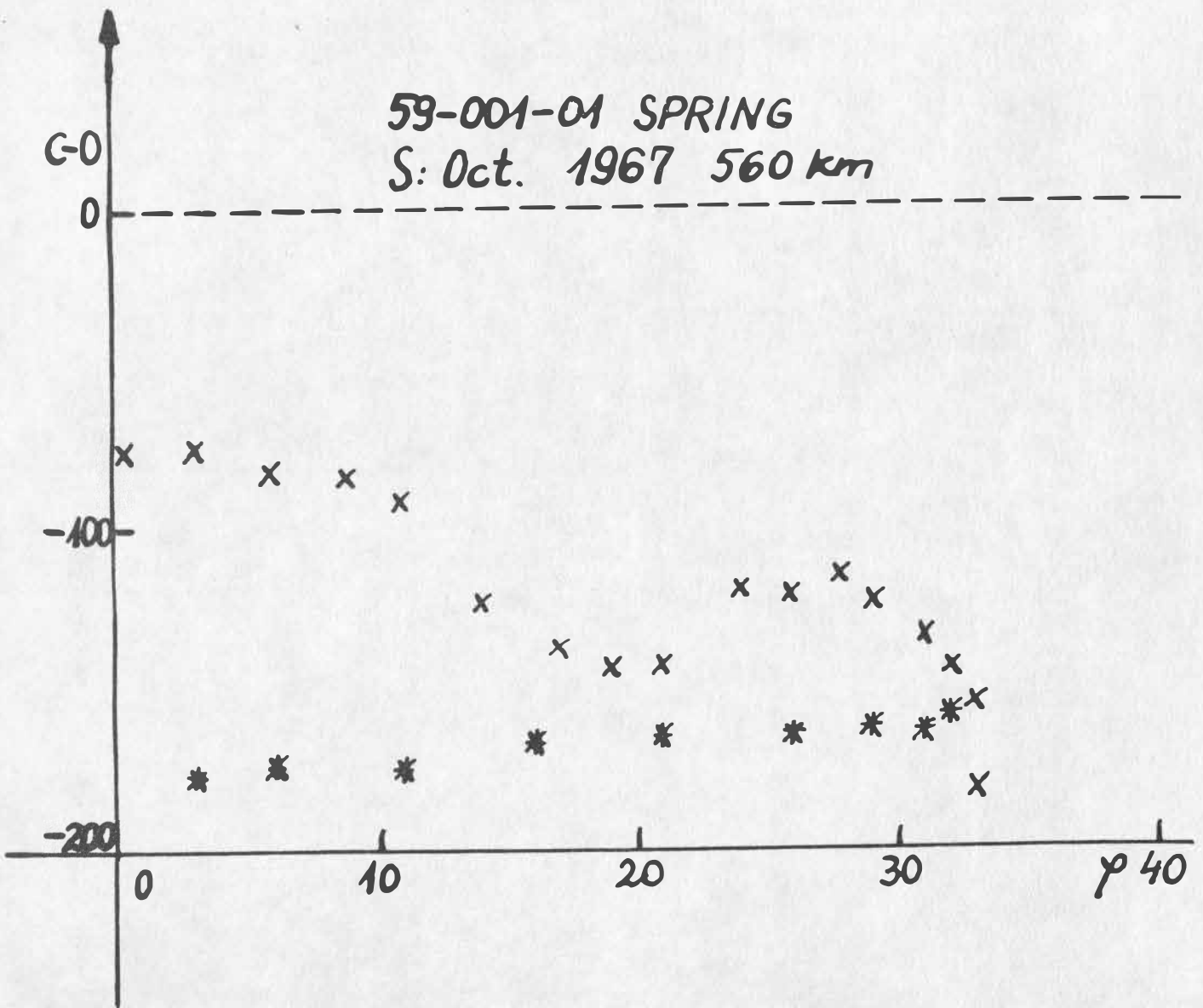
13.



14.



15.



АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЫ

С 27-ДНЕВНЫМ ЦИКЛОМ

Э. Иллей-Алмар, Венгрия

Резюме: По данным с второй половины 1971 г. торможения более 20 спутников исследовались колебания плотности атмосферы, связанные с 27-дневным циклом солнечной деятельности, относящиеся к высотам 200 - 1000 км. Статистическое изучение моментов максимального торможения отдельных спутников доказало, что иногда имеются периоды, когда это колебание появляется в течение 5 последовательных 27-дневных циклов, хотя в то время ход интенсивности радиовлучения Солнца на волне 10.7 см ($S_{10.7}$ - обычный индекс солнечной активности) сильно возмущен. Похожий эффект был обнаружен до сих пор только по слежению немногих спутников и в изолированных циклах. Наша статистическая обработка доказала, что индекс $S_{10.7}$ иногда может оказываться в течение нескольких месяцев непригодным для характеристики медленных колебаний плотности воздуха.

Abstract: ANALYSIS OF THE 27-DAYS FLUCTUATION OF THE THERMOSPHERIC DENSITY E. Illés-Almár Hungary

The density variation in the upper atmosphere along with the 27-days cycle of solar activity have been analysed using drag data of more than 20 satellites from the second half of 1971 between 200 and 1000 km. A statistical treatment of the maximum drag moments of different satellites indicates that there is a 27-days periodicity in the changes of the thermospheric density through 5 consecutive cycles in spite of the fact that the usual index of solar activity i.e. the intensity of the 10.7 cm solar radio flux ($S_{10.7}$), is strongly distributed. Earlier results were based on the tracking of a few satellites and suggested a similar effect in isolated cycles only. It has been proved by this statistical treatment that $S_{10.7}$ may be sometimes for months an unsuitable index to describe slow fluctuations of atmospheric density.

Введение

В Астрономическом Институте ВАН комплексная система программы PERLO [1] дополнена с новой частью, под названием KINGHELE. Используя значения торможений спутников, программа KINGHELE вычисляет измеренные значения плотности атмосферы (ρ_{obs}) с помощью формул Кинг-Хили [2], и также модельные значения, по модели Яккия-71 (ρ_{J71}) на тот же момент времени и на то же мгновенное положение, когда и где спутник тормозится.

Чтобы отдельно изучать реальные эффекты в изменении плотности верхней атмосферы разного периода, описанные в моделях — в программе имеется возможность исключить один из выбранных эффектов, ход которого изучается, и оставить все остальные эффекты у вычисления ρ_{J71} . Таким образом, отдельно можно исследовать суточный, 27-дневный, полугодовой, сезонный и 11-летний эффект.

В настоящей работе изучается 27-дневный эффект изменения плотности верхней атмосферы.

Метод

Как известно, в большинстве случаев размеры спутников очень грубо известны. Но на основании литературных данных [4] можем принимать, что модель Яккия-71 в среднем хорошо описывает плотность атмосферы. По этому отношению поперечного сечения (F) к массе (m) спутника было изменено до того, пока среднее значение $\rho_{\text{obs}}/\rho_{J71}$ (f) на исследованном интервале стало равным 1. Дальше при обработке использовались эти исправленные значения F/m .

При изучении 27-дневного эффекта по программе KINGHELE вычисляются модельные значения (ρ_{J71}^{27}) так, как будто индекс Ковингтона ($S_{10.7}$, радиоизлучение Солнца на 10.7 см — использованный в моделях, как индекс солнечной деятельности) был-бы постоянным, и равным с его минимальным значением в исследованном промежутке времени. Полученная таким образом кривая $f^{27} = \rho_{\text{obs}} / \rho_{J71}^{27}$ по времени показывает реальный ход только 27-дневного эффекта, если предполагается, что модель хорошо учитывает все остальные эффекты.

Для изучения длительности периода и изменения фазы 27-дневного эффекта достаточно исследовать места максимумов кривой f^{27} , не считая значения их амплитуды. Поэтому было изучено распределение максимумов кривых f^{27} разных спутников: с анализом частоты максимумов каждые 5 дней.

Наблюдательный материал

Обрабатывались наблюденные орбитальные периоды 22 спутников в интервале времени с июня 1971-ого года до июля 1972-ого года. Места торможения спутников находились между высотами 200 — 1000 км. Часть спутников в этом интервале времени закончила свою жизнь, но всегда не меньше, чем 7 спутников имелись в распоряжении.

В случае 19 спутников использовали значения орбитальных периодов, опубликованные GSFC (вычисленные на основании наблюдений сети NORAD) [5]. Разрешающая способность по времени этого материала около 5 — 10 дней.

В случае 3 спутников (Полёт-1, Эксплорер-19 и

Эксплорер-39) использовались не только орбитальные элементы GSFC, а также SAO [6], RAЕ [7] и КОСМОС, и орбитальные периоды определённые непосредственно из наблюдений с программой FERLO. Оригинальным наблюдательным материалом этого последнего, служило около 1000 фотографических наблюдений, сделанных в рамках программы "АТМОСФЕРА" [8] с камерами АФУ-75 Астросовета, и приблизительно 4000 визуальных наблюдений, сделанных в 30 странах Европы и Азии. Разрешающая способность по времени у этих трёх спутников около 2-х дней.

Чтобы согласовать данные, имеющие различные разрешающие способности по времени и модельные значения, полученные ежедневно — значения f^{27} были усреднены с перекрытием по 5 дней.

Результаты

На рисунке внизу видна гистограмма частоты максимумов плотности верхней атмосферы (чёрные столбцы). На середине кривая $S_{10.7}$ показывает индекс Ковингтона, Стрелки над кривой $S_{10.7}$ символизируют серии 27-дневных цикл солнечной деятельности на кривой $S_{10.7}$. Три серии, между которыми являются скачкообразные разницы фазы, фиксированы к наиболее характеристическим максимумам (обозначенным непрерывными стрелками: соответственно 7, 9; 2, 3, 5; 1, 2) солнечной активности с периодом 27 дней. Прерывные стрелки показывают места с периодом 27 дней: там надо было появиться максимумам, если солнечная деятельность не была-бы возмущённая. Цифры у стрелок показывают собствен-

ный номер порядка в данных серии и длительность серии без изменения фазы.

Видно, что во время характеристических максимумов на кривой $S_{10.7}$, всегда с большими частотами появляются максимумы и в плотности верхней атмосферы, как это написано в моделях. Но кроме этих максимумов существуют с достоверностью 99.999% серии максимумов плотности с циклом 27 дней, перед и после вышесказанных характеристических максимумов солнечной активности, и в то время, когда кривая $S_{10.7}$ возмущенная: то есть у места прерывных стрелок. Надо подчеркнуть, что у первой серии появляется не меньше 5 последующих максимумов в плотности атмосферы, но на кривой $S_{10.7}$ соответствующие максимумы совсем не показываются.

В середине рисунка кривая C показывает индекс космических излучений, измеренных нейтронным монитором в Сульфур Моунтин [9]. Кажется, что корреляция намного лучше с этой кривой, особенно в вышесказанном возмущенном промежутке времени. Этот последний аспект исследования дальше изучается.

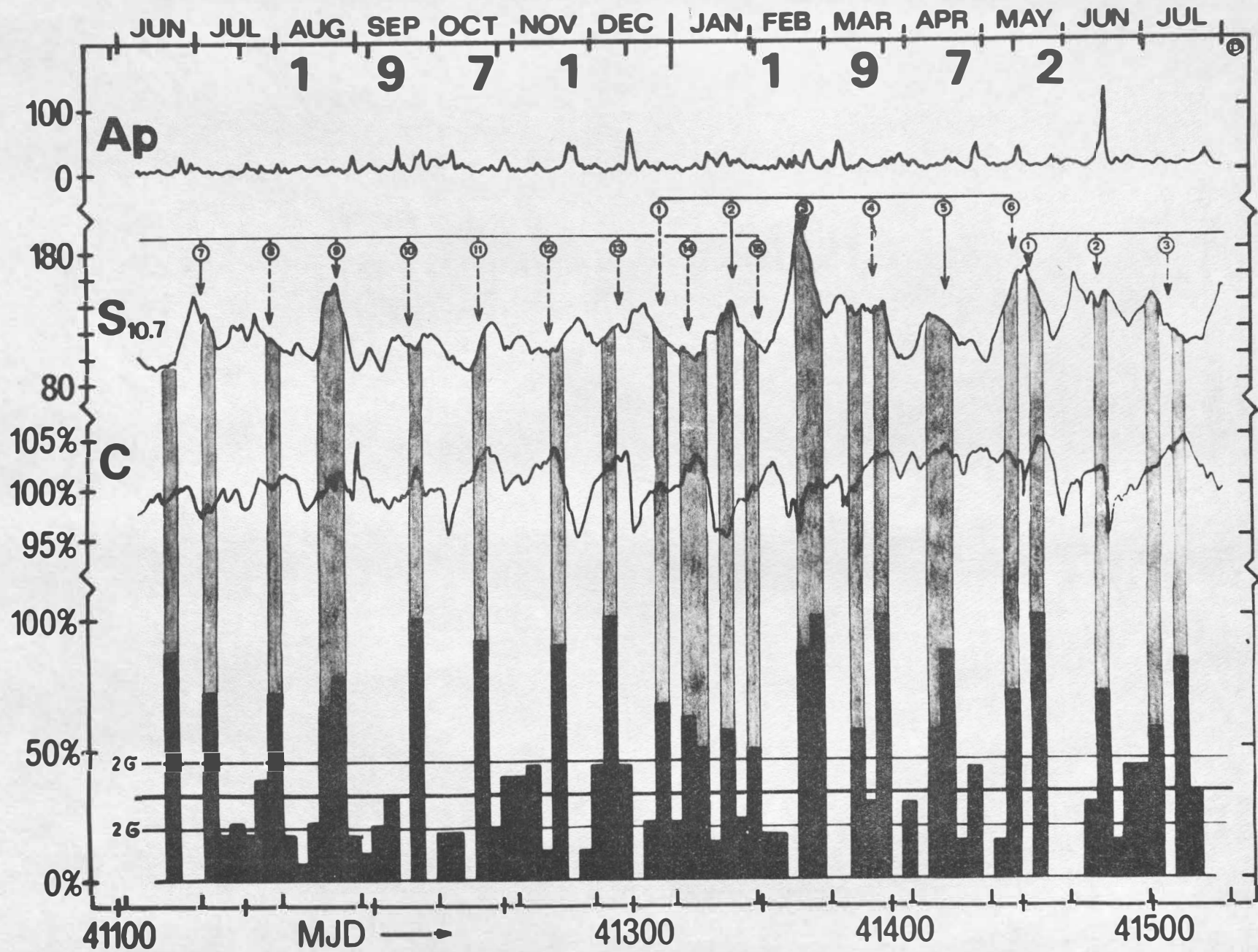
Выводы

В литературе найдутся случаи, когда корреляция между $S_{10.7}$ и интенсивностью экстремального ультрафиолетового излучения слабая, и этот дефект виден между измеренными и модельными значениями плотности. Но по мнению Яккия [10] такие случаи редко появляются, и не распространяются больше, чем на один цикл солнечной активности с периодом 27

дней. А наш материал однозначно показывает, что такой дефект может распространяться больше, чем на один цикл, если возмущение кривой $S_{10.7}$ происходит на длительном промежутке времени; то есть, индекс Ковингтона иногда больше нескольких месяцев непригодный к описанию изменения плотности по 27-дневному эффекту в моделях верхней атмосферы.

Литература

- [1] А. Хорват, Э. Иллеш-Алмар, Наблюдения ИСЗ №14, стр. 417, Бухарест, 1975.
- [2] King-Hele, Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere Butterworths, 1964.
- [3] L.G. Jacchia, SAO Spec. Rep. 332.
- [4] Ф. Барлье, Х. Жек, Ж.Л. Фалин, М. Илл, Наблюдения ИСЗ №12, стр. 213, Прага, 1973.
- [5] Current Gear Ratio Elements Derived by NASA GSFC from NORAD Data.
- [6] Modified Orbital Elements, Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Massachusetts.
- [7] Orbital Elements of S.R.C. Radio and Space Research Station Slough
- [8] Программа "АТМОСФЕРА", Экваториальные топоцентрические координаты ИСЗ, Астросовет АН СССР
- [9] Solar Geophysical Data No 332 - 341 I.
- [10] L.G. Jacchia, Journal of Geophysical Research Vol. 80. No 10, p. 1374, 1975.



ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОГО ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА ПОЛОЖЕНИЯ ИСЗ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОГНОЗИРУЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНДЕКСОВ ГЕОМАГ-
НИТНОЙ ВОЗМУЩЕННОСТИ И СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

Б.В. Кугаенко

Институт космических исследований АН СССР

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о целесообразности использования прогнозируемых значений индексов a_p (или K_p) и F , являющихся аргументами большинства современных моделей верхней атмосферы, при прогнозировании орбит ИСЗ. Разрабатывается методика оценки возможного повышения точности по сравнению с тем случаем, когда расчет орбиты ведется без учета соответствующих вариаций плотности. Делается вывод, что при краткосрочном прогнозе положения спутника (до нескольких суток) использование предсказанных значений индексов a_p и F может заметно повысить точность расчетов.

ESTIMATION OF A POSSIBLE AES ORBIT CALCULATION
ACCURACY IMPROVEMENT BASED ON PREDICTED VALUES
OF GEOMAGNETIC DISTURBANCE AND SOLAR ACTIVITY

INDICES

B.V. Kugaenko

Institute for Space Research, Academy of Sciences
of the USSR

ABSTRACT

Expediency of applying the predicted values of α_p (or K_p) and F indices to predict AES orbits is studied. The indices are used as arguments in most of the modern models of the upper atmosphere. A procedure is developed for estimating a possible accuracy improvement in comparison with the case when an orbit is calculated without taking into account corresponding density variations. The conclusion is made that predicted values of α_p and F indices, if used for short-term prediction of AES orbits (up to several days), may substantially improve the accuracy of orbit calculations.

Индексы геомагнитной возмущенности α_p (или K_p) и солнечной активности F (интенсивность солнечного радиоизлучения на волне 10,7 см) являются аргументами большинства современных моделей верхней атмосферы, учитывающих ее пространственно-временные вариации. Одна из основных функций, выполняемых этими индексами в моделях атмосферы – описание кратковременных вариаций ее параметров. При прогнозировании орбит ИСЗ кратковременные вариации плотности обычно не учитываются [1]. Однако индексы α_p (или K_p) и F регулярно измеряются, по их измеренным значениям можно получить прогнозируемые значения этих индексов и, следовательно, спрогнозировать вариации плотности атмосферы. В данной работе ставится задача оценить, насколько существенно может повыситься точность расчета орбит, если при расчете использовать спрогнозированные по индексам α_p и F кратковременные вариации плотности. Решать эту задачу будем при следующих предположениях.

1. Известны все значения α_p и F до момента t_0 начала прогнозирования движения спутника.

2. Каждый из рассматриваемых двух видов вариаций (описываемых α_p и F) может быть представлен как центрированный стационарный случайный процесс (обозначим их через X_1 и X_2 соответственно).

3. Корреляционная функция K_x каждого процесса X имеет вид

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|} \cos \beta\tau, \quad (I)$$

$$\tau = t_1 - t_2,$$

где D_x – дисперсия процесса X ,

λ, β – параметры корреляционной функции, причем β может быть равна нулю,

t_1, t_2 – моменты времени.

4. Ошибки определения орбиты по результатам траекторных измерений отсутствуют.

5. Влиянием погрешностей описания всех возмущающих сил кроме сопротивления атмосферы можно пренебречь.

При этих допущениях для случая $\beta = 0$ в работе [2] была предложена методика оценки влияния короткопериодических изменений плотности атмосферы на точность расчета орбит. Эта методика была разработана для общепринятой схемы прогноза движения ИСЗ, то есть когда на интервале прогноза вариации плотности не учитываются, но по предыдущим N виткам полета уточняется корректирующий множитель K при плотности атмосферы в уравнениях движения спутника. Этот множитель согласует принятую модель плотности с ее фактическими значениями на N витках согласования. В дальнейшем методика [2] была обобщена на случай $\beta \neq 0$. С полученными при этом результатами оценки точности, а также с результатами, приведенными в [2], мы и будем сравнивать оценки погрешностей для случая, когда при расчете орбит используются прогнозируемые значения a_p и F .

Связь между процессами X и индексами a_p и F определяется принятой моделью атмосферы. Для модели плотности [3] в работе [2] получено:

$$X_1 = \ln a_p - M(\ln a_p), \quad (2)$$

$$X_2 = \frac{F}{F_0} - M\left(\frac{F}{F_0}\right),$$

где F_0 - некоторое опорное значение индекса F .

В методике [2] средние квадратические ошибки расчета орбитальных элементов Δ на витке N представлены в виде

$$\sigma_{\Delta\Delta}(N) = f(\tilde{h}) |\delta P_{cp}| \sigma_x \xi_{\Delta\Delta}(N), \quad (3)$$

где $f(\tilde{h})$ – некоторая функция высоты,

δP_{cp} – среднее торможение спутника на рассматриваемом интервале (среднее изменение периода обращения за виток),

$$b_x = \sqrt{D_x},$$

$\xi_{\Delta z}(N)$ – функция ошибок, зависящая от длительности интервала согласования N и от выбора способа согласования коэффициента K .

Наша задача, таким образом, заключается в получении зависимостей аналогичных (3)^H в сравнении соответствующих функций ошибок ξ .

При условии справедливости допущений 2 и 3 для процесса X может быть получена экстраполяционная формула, обеспечивающая минимум дисперсии ошибок прогноза в классе линейных прогнозов. Если дополнительно предположить, что распределение процесса X подчиняется нормальному закону, то получаемая при этом линейная формула прогноза будет оптимальной не только для линейных, но и для нелинейных прогнозов. Общая процедура построения такой экстраполяционной формулы описана, в частности, в [4]. Следуя приведенной в [4] схеме этого построения, получим в итоге (опуская все выкладки, связанные с выводом искомого соотношения), что для процесса X с корреляционной функцией вида (I) прогнозирование значения процесса с момента t на момент $t + \tau$ следует вести по формуле

$$\tilde{X}(t + \tau) = A(\tau)X(t) + B(\tau) \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tau} X(t - \tau) d\tau, \quad (4)$$

где $A(\tau) = e^{-\alpha\tau} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \sin \beta\tau \right),$

$$B(\tau) = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha\tau} \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \sin \beta\tau.$$

Введем следующие обозначения для ошибок прогноза процесса X на τ_1 и τ_2 :

$$\Delta X_{\tau_1} = X(t + \tau_1) - \tilde{X}(t + \tau_1), \quad (5)$$

$$\Delta X_{\tau_2} = X(t + \tau_2) - \tilde{X}(t + \tau_2), \quad (6)$$

где $X(t + \tau_1)$ и $X(t + \tau_2)$ - истинные значения процесса X . Учитывая (1), (4), (5) и (6), получим необходимое для дальнейшего выражение для корреляционной функции этих ошибок:

$$\begin{aligned} K_{\Delta X}(\tau_1, \tau_2) &= M(\Delta X_{\tau_1} \cdot \Delta X_{\tau_2}) = \\ &= D_X \left\{ e^{-\alpha|\tau_1 - \tau_2|} \cos \beta(\tau_1 - \tau_2) - \right. \\ &\left. - e^{-\alpha(\tau_1 + \tau_2)} \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos \beta(\tau_1 - \tau_2) + \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos \beta(\tau_1 + \tau_2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Как и в [2], представим плотность атмосферы в виде суммы двух слагаемых

$$\rho = \rho_{cp} + f(h) \rho_{cp} X, \quad (8)$$

где ρ_{cp} - среднее значение плотности,
 $f(h)$ - функция высоты h .

Заменим в (8) истинное значение процесса X его прогнозируемым значением \tilde{X} и ошибкой прогноза ΔX :

$$\rho = \rho_{cp} + f(h) \rho_{cp} (\tilde{X} + \Delta X) = \tilde{\rho} + f(h) \rho_{cp} \Delta X, \quad (9)$$

где $\tilde{\rho}$ - прогнозируемое значение плотности.

Этому выражению соответствует подобное представление изменения периода обращения спутника за один виток [2]

$$\delta P = \delta \tilde{P} + f(\tilde{h}) \delta P_{cp} \Delta X \quad (I0)$$

(\tilde{h} - высота, несколько превышающая высоту перигея).

Входящие в (I0) величины можно рассматривать как функции номера витка N . Тогда, пренебрегая переменностью $f(\tilde{h})$ и δP_{cp} , получим после интегрирования (I0) по N

$$\begin{aligned} P(N) &= P_0 + \int_0^N \delta \tilde{P} dN + f(\tilde{h}) \delta P_{cp} \int_0^N \Delta X dN = \\ &= \tilde{P} + f(\tilde{h}) \delta P_{cp} \int_0^N \Delta X dN, \end{aligned} \quad (II)$$

где $P(N)$ и P_0 - оскулирующие периоды обращения ИСЗ в начале N -го и первого витков,

\tilde{P} - прогнозируемое значение оскулирующего периода на начало N -го витка.

Проинтегрировав (II) еще раз по N , получаем аналогичное соотношение для времени начала N -го витка $t_{\Omega}(N)$

$$\begin{aligned} t_{\Omega}(N) &= t_0 + \int_0^N \tilde{P} dN + f(\tilde{h}) \delta P_{cp} \int_0^N \int_0^N \Delta X dN dN = \\ &= \tilde{t} + f(\tilde{h}) \delta P_{cp} \int_0^N \int_0^N \Delta X dN dN, \end{aligned} \quad (I2)$$

где t_0 - время начала первого витка,

\tilde{t} - прогнозируемое значение времени начала N -го витка.

Выражения (II) и (I2) описывают нестационарные случайные процессы с математическими ожиданиями \tilde{P} и \tilde{t} и дисперсиями

$$D_{\Delta \tilde{P}}(N) = f^2(\tilde{h}) \delta P_{cp}^2 M \left(\int_0^N \Delta X dN \cdot \int_0^N \Delta X dN \right), \quad (I3)$$

$$D_{\Delta \tilde{t}}(N) = f^2(\tilde{h}) \delta P_{cp}^2 M \left(\int_0^N \int_0^N \Delta X dN dN \cdot \int_0^N \int_0^N \Delta X dN dN \right) \quad (I4)$$

Зависимости (I3) и (I4) можно преобразовать таким образом, чтобы подынтегральные выражения содержали корреляционную функцию $K_{\Delta X}$ ошибок прогноза процесса X . При этом корреляционная функция $K_{\Delta X}$ должна быть представлена в виде функции номера витка, а не времени (как в (7)), что достигается переходом от τ к N и соответствующей заменой коэффициентов α и β на α_1 и β_1 :

$$\alpha_1 = \alpha \frac{\tau}{N} = \alpha P_{cp}, \quad (I5)$$

$$\beta_1 = \beta \frac{\tau}{N} = \beta P_{cp},$$

P_{cp} - средний период обращения спутника на интервале интегрирования.

Подставляя (7) с учетом (I5) в преобразованные соотношения (I3) и (I4), получаем (опуская довольно громоздкие выкладки), что средние квадратические ошибки прогноза периода обращения и времени начала витка могут быть рассчитаны по формулам, аналогичным (3):

$$\bar{\sigma}_{\Delta \varepsilon}(N) = f(\tilde{h}) / \delta P_{cp} / \delta x \bar{\xi}_{\Delta \varepsilon}(N), \quad (I6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{\Delta \rho}^2(N) = & \frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} N - \frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} - e^{-\alpha_1 N} \sin \beta_1 N \frac{2\alpha_1 \beta_1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} (3 + \gamma) - \\ & - (1 - 2e^{-\alpha_1 N} \cos \beta_1 N) \frac{2\alpha_1^2 - \beta_1^2 (1 + \gamma)}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} - e^{-2\alpha_1 N} \cos^2 \beta_1 N \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \left(1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} \gamma\right) - \\ & - e^{-2\alpha_1 N} \sin^2 \beta_1 N \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \left(\frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} - \gamma\right) + e^{-2\alpha_1 N} \sin 2\beta_1 N \frac{\alpha_1 \beta_1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} (1 + \gamma); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\zeta}_{\Delta t}^2(N) &= \frac{2}{3} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} N^3 - \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \left[2 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} (1 + \gamma) \right] N^2 + \\
&+ \frac{2\alpha_1^3}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^3} \left[1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} (1 + 2\gamma) \right] N + \frac{2\alpha_1^2\beta_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^4} (2\gamma - 5) + \frac{\alpha_1^4 + \beta_1^4}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^4} + \\
&+ e^{-2\alpha_1 N} \cos^2 \beta_1 N \frac{4\alpha_1^2\beta_1^2\gamma - (\alpha_1^2 - \beta_1^2)^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^4} + e^{-2\alpha_1 N} \sin^2 \beta_1 N \frac{(\alpha_1^2 - \beta_1^2)^2\gamma - 4\alpha_1^2\beta_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^4} + \\
&+ e^{-2\alpha_1 N} \sin 2\beta_1 N \frac{2\alpha_1\beta_1(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(1 + \gamma)}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^4} - N e^{-\alpha_1 N} \cos \beta_1 N \frac{4\alpha_1^3}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^3} \left[1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} (2 + \gamma) \right] + \\
&+ N e^{-\alpha_1 N} \sin \beta_1 N \frac{2\alpha_1^2\beta_1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^3} \left[5 + \gamma - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} (1 + \gamma) \right] + e^{-\alpha_1 N} \cos \beta_1 N \frac{8\alpha_1^2\beta_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^4} (1 - \gamma) + \\
&+ e^{-\alpha_1 N} \sin \beta_1 N \frac{4\alpha_1\beta_1(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(1 - \gamma)}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^4} ;
\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$$

Сравним значения ошибок, получаемых с помощью соотношений (3) и (16). Для этого введем величину

$$\Delta \zeta = \frac{\bar{\zeta}_{\Delta t} - \bar{\zeta}_{\Delta t}}{\bar{\zeta}_{\Delta t}} \cdot 100 [\%], \quad (17)$$

которая характеризует относительный выигрыш в точности при использовании прогнозируемых значений процессов X_1 и X_2 (или a_p и F). Значения величины $\Delta \zeta$ для ошибок в положении спутника вдоль орбиты даны на рис. 1 в функции длительности интервала прогноза

t (обратный переход от N к t осуществлялся с помощью соотношения (15)). Для других элементов орбиты величина $\Delta \zeta$ остается практически той же. Функции $\zeta_{\Delta \varepsilon}$ из (3) брались для случая $K = K_p$, то есть когда коэффициент согласования K уточняется на предыдущем интервале согласования длительностью t_c по изменению периода обращения P (что обеспечивает наибольшую точность прогноза орбит). Длительность интервала согласования t_c принималась равной одним, трем и пяти суткам. Длительность прогноза — до одного месяца. Графики для индексов α_p и F приведены отдельно.

Из этого рисунка видно, что $\Delta \zeta$ всюду положительна, то есть использование прогнозируемых значений индексов α_p и F приводит к увеличению точности расчета орбит. Повышение точности больше для вариаций плотности, пропорциональных индексу F . При этом выигрыш в точности тем больше, чем длиннее интервал согласования коэффициента K_p . Для изменений плотности, коррелирующих с индексом α_p , зависимость $\Delta \zeta$ от длительности t_c аналогична на интервалах прогноза до 1–2 суток и изменяется на противоположную при больших интервалах прогноза. Величина $\Delta \zeta$ уменьшается для X_1 от 35–45% при прогнозе орбиты на 1 сутки до 28–32% при расчете на 3 суток. Для процесса X_2 эта величина изменяется соответственно от 65–85% до 45–70%. При расчете орбиты на длительные интервалы времени $\Delta \zeta$ опять увеличивается.

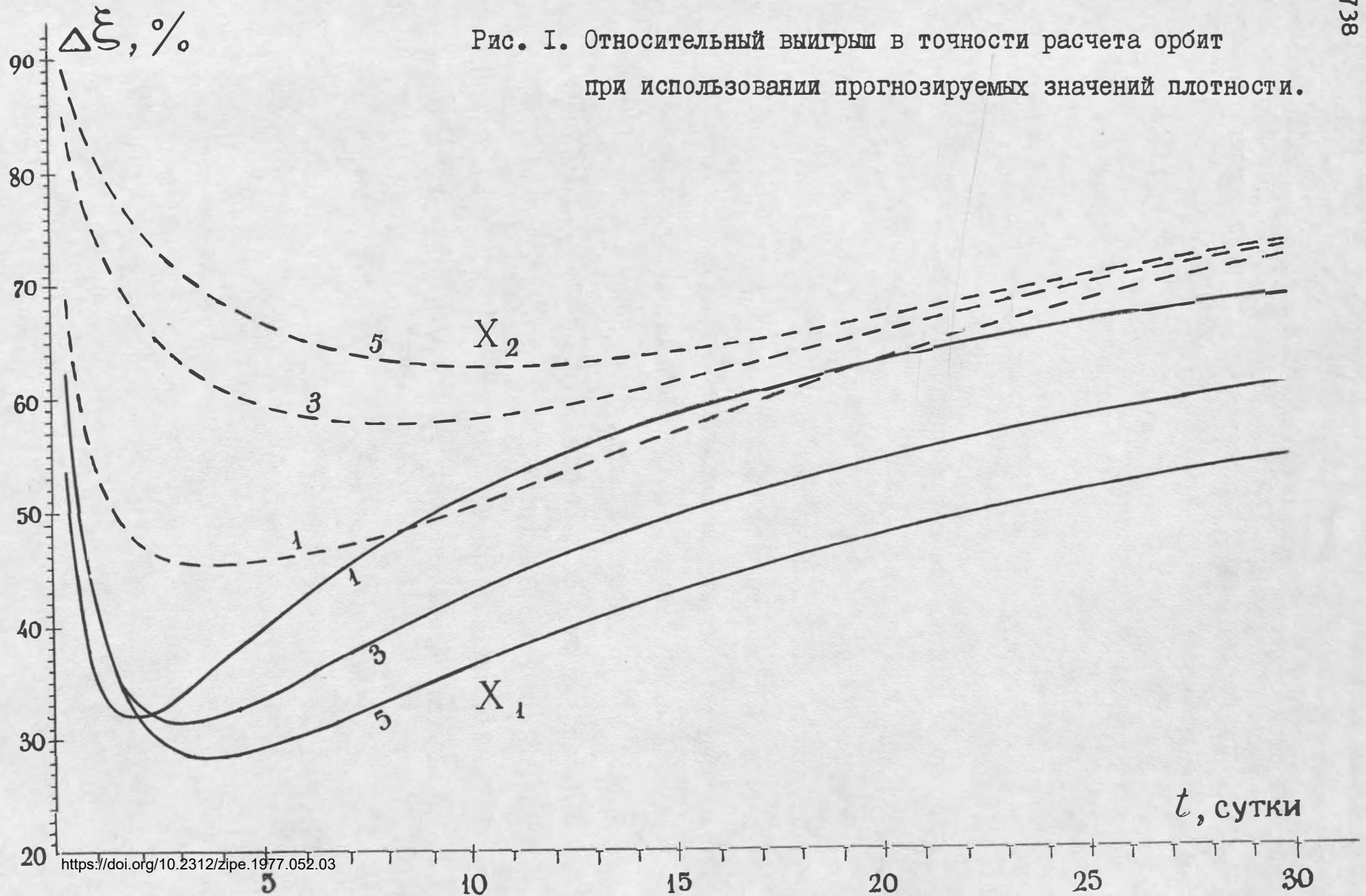
В реальных условиях выигрыш в точности будет, естественно, меньше (особенно при длительных интервалах прогноза), так как скажется влияние целого ряда неучтенных факторов, например, ошибок определения орбиты, аномалий гравитационного поля Земли,

погрешностей принятой модели плотности атмосферы и других. Однако, при краткосрочных прогнозах орбит можно ожидать заметное повышение точности расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Основы теории полета космических аппаратов.
Под ред. Г.С.Нариманова и М.К.Тихонравова, М.,
"Машиностроение", 1972.
2. П.Е.Эльясберг, Б.В.Кугаенко, М.И.Войсковский.
Влияние короткопериодических вариаций плотности атмосферы
на точность расчета низких орбит искусственных спутников
Земли. Сб. "Наблюдения искусственных спутников Земли",
№ 14, 1974, Бухарест, Румыния, 1975.
3. М.И.Войсковский, И.И. Волков, Н.И.Грязев, Б.В.Кугаенко,
В.М.Синицын, П.Е.Эльясберг. "Космические исследования",
1973, II, вып. I.
4. А.М.Яглом. Успехи математических наук, 1952, т.УП, вып.5.

Рис. 1. Относительный выигрыш в точности расчета орбит при использовании прогнозируемых значений плотности.



NEW RESULTS CONCERNING THE GEOMAGNETIC
EFFECT IN THE UPPER ATMOSPHERE

I. Almár,¹⁾ A. Horváth, E. Illés-Almár²⁾

/Hungary/

A B S T R A C T . 89 equivalent duration values based on more than 30 000 satellite observations were used to derive relations between different geomagnetic parameters and the correlated changes in upper atmospheric density during magnetospheric storms. The results demonstrate how the storm-time relative density increase depends on the intensity of the magnetospheric storm, on the altitude of the perigee and on its geocentric distance from the center of the diurnal bulge.

РЕЗЮМЕ: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОМАГНИТНОГО ЭФФЕКТА ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЫ

И.Алмар, А.Хорват, Е.Иллеш-Алмар (Венгрия)

На основе более 30 000 наблюдений ИСЗ были определены 89 значений эквивалентных продолжительностей для того, чтобы выводить отношения между разными геомагнитными параметрами и соответствующими им изменениями плотности верхней атмосферы во время магнитосферных бурь.

Результаты показывают как зависит относительное увеличение плотности во время бури от интенсивности магнитосферной бури, от высоты перигея и от геоцентрического расстояния от центра суточного горба.

¹⁾ Inst. f. Geod. u. Kartogr. FÖMI, 1373 Budapest (Ungarn)

²⁾ Astron. Inst., H-1525 Budapest (Ungarn)

Introduction

We proposed in 1970 to use the integral of the relative density variation curve as a new parameter to characterize the total intensity of the atmospheric response during large magnetospheric storms [1]. Successively 89 "equivalent duration" $/D/$ parameters have been derived mainly using three sources: 1/ optical observations of artificial satellites in order to determine the D value by our PERLO - SPACECOOR method [2], 2/ orbital elements from the GSFC and other computing centers, 3/ some \dot{P} or g curves /published in the literature/ having a sufficient resolution in time.

All data concerning the observational material in question are summarized in Table I.

Table 1

time interval:	1960-1972
number of geomagnetic storms:	22
number of different satellites:	34
number of equivalent durations:	89
number of independent determinations:	125
number of observations used:	$\sim 30\ 000$
height interval:	200 - 1200 km

The observed equivalent duration values $/D_{\text{obs}}/$ have been directly compared with similar ones, obtained by means of direct integration of the corresponding g curves of the Jacchia-71 model $/D_{\text{J71}}/$. As we already emphasized in earlier papers [3, 4], below 300 km the total response is significantly more intensive than supposed by Jacchia /Fig. 1/. A least squares solution has been fit to the whole interval transformed from the linear relation between $\log \frac{D_{\text{obs}}}{D_{\text{J71}}}$ and $\log /h_{\text{ref}} - 200/$ as demonstrated on Fig. 2. The correlation

is, however, rather poor $/r^2 = 0.45/$ pointing to the need of a more comprehensive investigation in order to determine how the storm-time relative density increase depends on different geometric and physical parameters.

Results

As it was already suggested [5], D values coming from different magnetospheric storms should be reduced to unit storm intensity before analysing their dependence on height, latitude, $S_{10.7}$ etc. The connection between storm intensity and changes in solar wind energy /directly influencing the magnetosphere/, is at present not available, therefore only secondary parameters, like a_p , K_p can be used. There are several empirical formulae in different models giving a direct connection between a function of a geomagnetic index and the corresponding relative density change in the upper atmosphere. Integrating both sides from the beginning till the end of the storm the equivalent duration is divided into two components:

the β function representing its dependence on invariable parameters during the storm $/h_{ref}, \varphi$ etc/;

the L function, the integral of an arbitrary geomagnetic index, representing its dependence on storm intensity.

The β value is therefore the equivalent duration reduced to unit total storm intensity.

Five slightly different L definitions have been introduced, corresponding to five possible model connections:

$$L_1 = \int_{t_1}^{t_2} \ln \frac{a_p}{a_{p0}} dt; \quad L_2 = \int_{t_1}^{t_2} (a_p - a_{p0}) dt$$

$$L_3 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_p - a_{p0}}{a_{p0}} dt; \quad L_4 = \int_{t_1}^{t_2} a_p dt; \quad L_5 = \int_{t_1}^{t_2} (K_p - K_{p0}) dt$$

The dependence of all $\beta_{\uparrow}^{\text{obs}}$ values - reduced from the observed equivalent durations by means of the five different L definitions - have been thoroughly investigated on the following parameters: L, $\log g_0$, φ , φ_{geom} , ψ_{sun} , LST, $\bar{S}_{10.7}$, h_{ref} , ψ_B . No remaining dependence has been found on L. From those parameters, characterizing the spatial position of the point in question, the altitude $/h_{\text{ref}}/$ and - somewhat arbitrarily - the angular distance from the center of the diurnal bulge $/\psi_B/$ have been selected. /Other parameters are less sensitive./

Fig. 3 and 4 demonstrate how β_i depend on h_{ref} and ψ_B . There is an obvious increase with height from 200 to 800 km /Fig. 3/ and a more complex dependence on ψ_B varying with altitude /Fig. 4/. Several model relations are also plotted for comparison. Roemer [6], for instance, derived a constant β_2 function, which is obviously not correct. In another model β_4 is a linear function of height only [7]. In the atmospheric model of the Space Research Institute of the Soviet Union [8] β_1 is a linear function of height and $S_{10.7}$. These model relations can be considered as a first approximation only. It is more difficult to have a direct comparison with the Jacchia-71 model [9], which does not contain any explicit relation between density and a geomagnetic index; therefore another approach was used.

First of all it has been analysed whether the selection of L effects in this way or another significantly our conclusions. Third order polynomials in independent variables h_{ref} and ψ_B have been fitted to all $\beta_1 \dots \beta_5$ values separately. The functions contain 10 independent coefficients: $a_1 \dots a_{10}$. After a normalisation procedure the five equations have similar coefficients demonstrating that all definitions are almost equally suitable. The parameter characterizing the scatter of the points around the surface proved to be smallest at β_2 , therefore this definition has been considered optimal.

The β_2 surface shows clearly the complex dependence of the atmospheric reaction on height and position /Fig. 5/. The total density change is strongest in the bulge at low altitudes, but has another maximum at higher altitudes around $\psi_B = 90^\circ$. The same surface has been constructed from calculated β_{J71} values and plotted for comparison with the Jacchia-71 model. The difference between the observed and the model surface is important along the h_{ref} axis. Comparing directly the corresponding coefficients in the two equations we came to the same conclusion. If the number of free coefficients of the solution is reduced from 10 to 7 by making 3 badly determined coefficients equal zero, the significance of all other coefficients is considerably improved. The new coefficients are similar /within error limit/ in the equations of the observed and model surfaces respectively - except terms containing h and h^3 . It can be pointed out that the Jacchia model correctly describes the variability with ψ_B but overestimates the height dependence. Fig. 6 finally demonstrates the dependence of β_2 on h_{ref} and ψ_B in another way. The observed β_2 values are plotted in different $/h_{ref}, \psi_B /$ intervals and confronted by curves derived from our model equation for the interval in question.

Conclusions

By means of 89 equivalent duration values it has been demonstrated that all earlier model relations between geomagnetic indices and corresponding changes in upper atmospheric density should be modified during strong geomagnetic storms. The relative density increase is proportional to a suitably selected geomagnetic index and its dependence on spatial position can be described from 200 to 1200 km as follows:

$$\beta_i = a_1 + a_2(h-200) + a_3(\psi_B - 90) + a_5(h-200)(\psi_B - 90) + a_7(h-200)^3 + a_8(h-200)^2(\psi_B - 90) + a_9(h-200)(\psi_B - 90)^2$$

	a_1	a_2	a_3	a_5	a_7	a_8	a_9
β_1	$3,906 \cdot 10^{-1}$	$1,008 \cdot 10^{-3}$	$1,939 \cdot 10^{-3}$	$1,341 \cdot 10^{-5}$	$-1,841 \cdot 10^{-9}$	$-3,002 \cdot 10^{-8}$	$-9,124 \cdot 10^{-8}$
β_2	$8,202 \cdot 10^{-3}$	$2,238 \cdot 10^{-5}$	$2,990 \cdot 10^{-5}$	$1,754 \cdot 10^{-7}$	$-3,910 \cdot 10^{-11}$	$-3,923 \cdot 10^{-10}$	$-1,784 \cdot 10^{-9}$
β_3	$8,085 \cdot 10^{-2}$	$1,795 \cdot 10^{-4}$	$2,457 \cdot 10^{-4}$	$2,023 \cdot 10^{-6}$	$-3,273 \cdot 10^{-10}$	$-4,266 \cdot 10^{-9}$	$-1,872 \cdot 10^{-8}$
β_4	$6,971 \cdot 10^{-3}$	$2,101 \cdot 10^{-5}$	$3,007 \cdot 10^{-5}$	$1,680 \cdot 10^{-7}$	$-3,810 \cdot 10^{-11}$	$-3,625 \cdot 10^{-10}$	$-1,374 \cdot 10^{-9}$
β_5	$2,159 \cdot 10^{-1}$	$5,564 \cdot 10^{-4}$	$1,063 \cdot 10^{-3}$	$7,222 \cdot 10^{-6}$	$-1,017 \cdot 10^{-9}$	$-1,608 \cdot 10^{-8}$	$-4,832 \cdot 10^{-8}$

R e f e r e n c e s

- [1] I. Almár, E. Illés-Almár, Space Research XI. Berlin /1971/
- [2] A. Horváth, E. Illés-Almár, Nabliudenia ISZ No.14 Bucharest /1974/
- [3] I. Almár, Nabliudenia ISZ No.14 Bucharest /1974/
- [4] I. Almár, E. Illés-Almár, Space Research XIII. Berlin /1973/
- [5] I. Almár, E. Illés-Almár, A. Horváth, Paper presented at the XVIIIth COSPAR Plenary Meeting, Varna 1975
- [6] M. Roemer, Veröffentlichungen der Astr. Institute Bonn No.85 /1972/
- [7] Handbook of Geophysics and Space Environment 3.6.2. McGraw-Hill 1965.
- [8] P. E. Elyasberg, Prikladnüe zadachi kosmicheskoi ballistiki, Nauka /1973/
- [9] L.G. Jacchia, SAO Special Report 332 /1971/

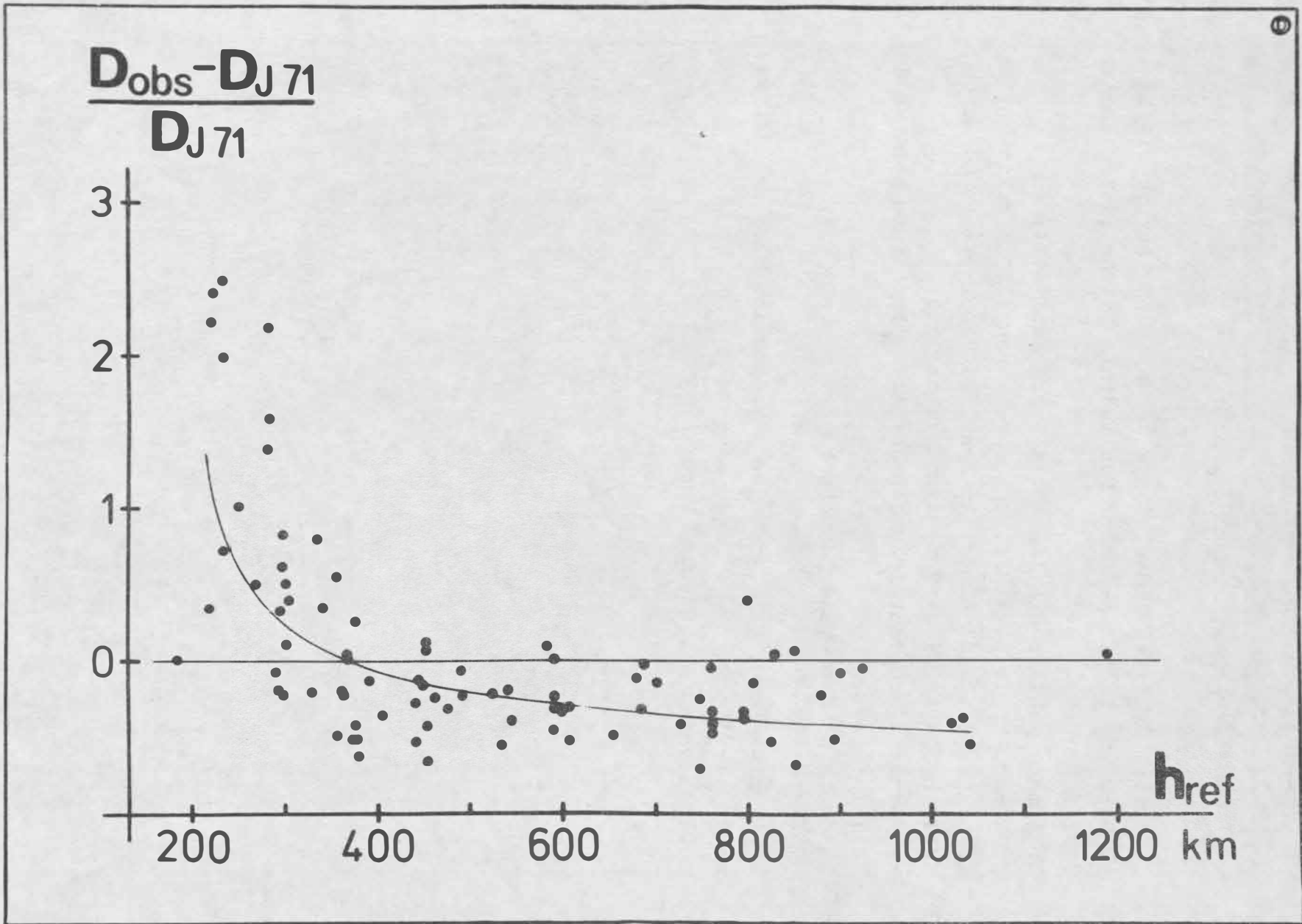


Fig. 1

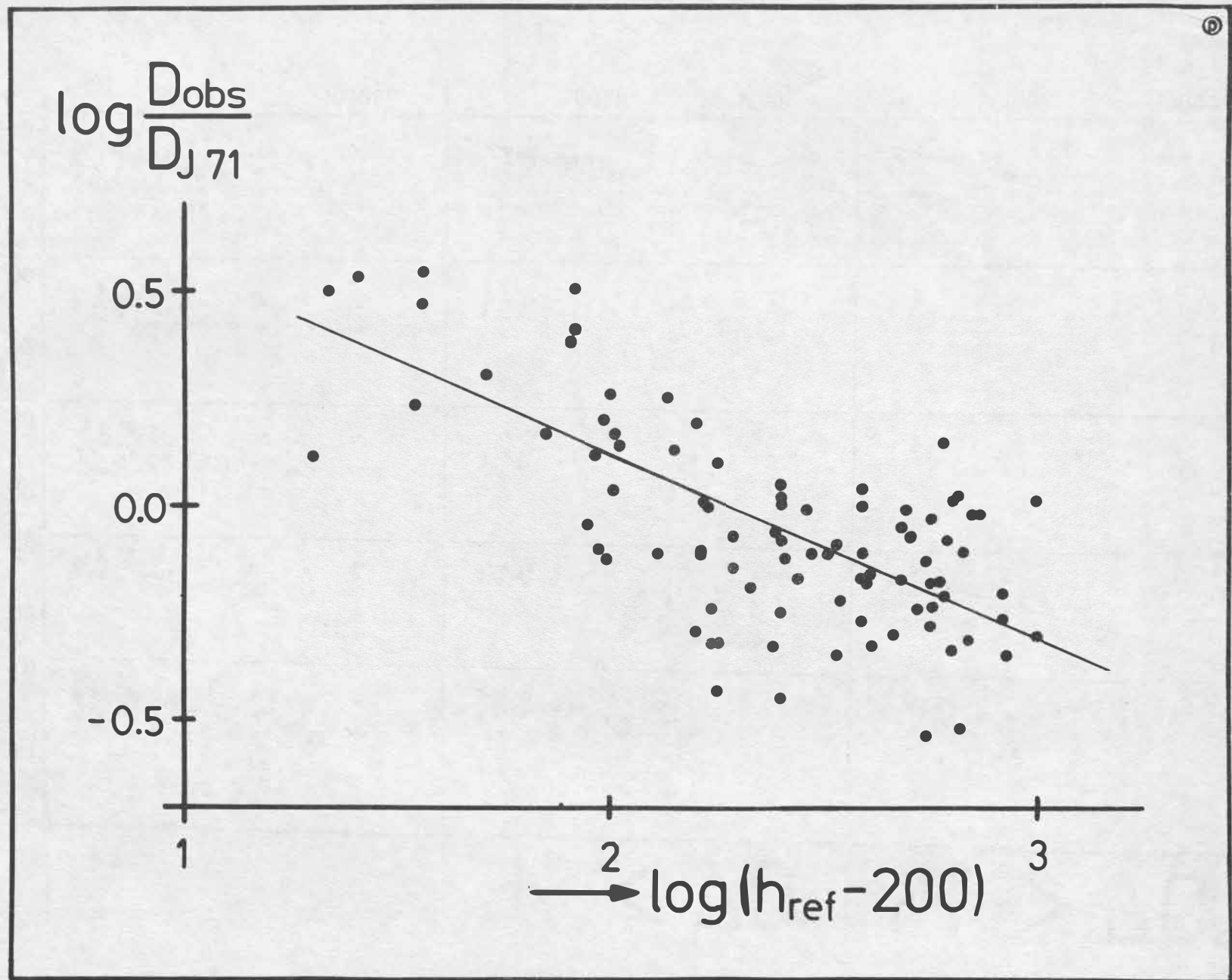


Fig. 2

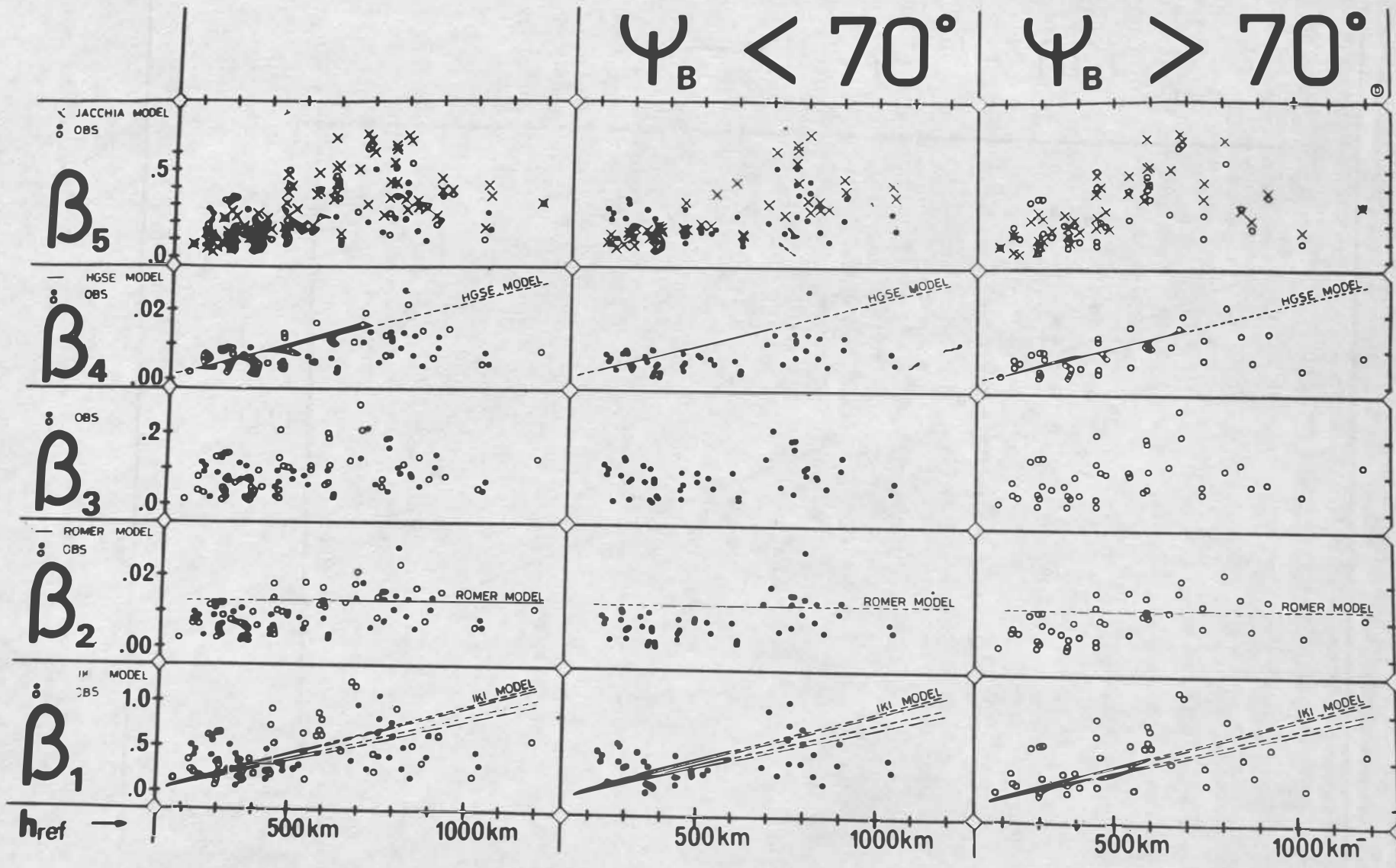


Fig. 3

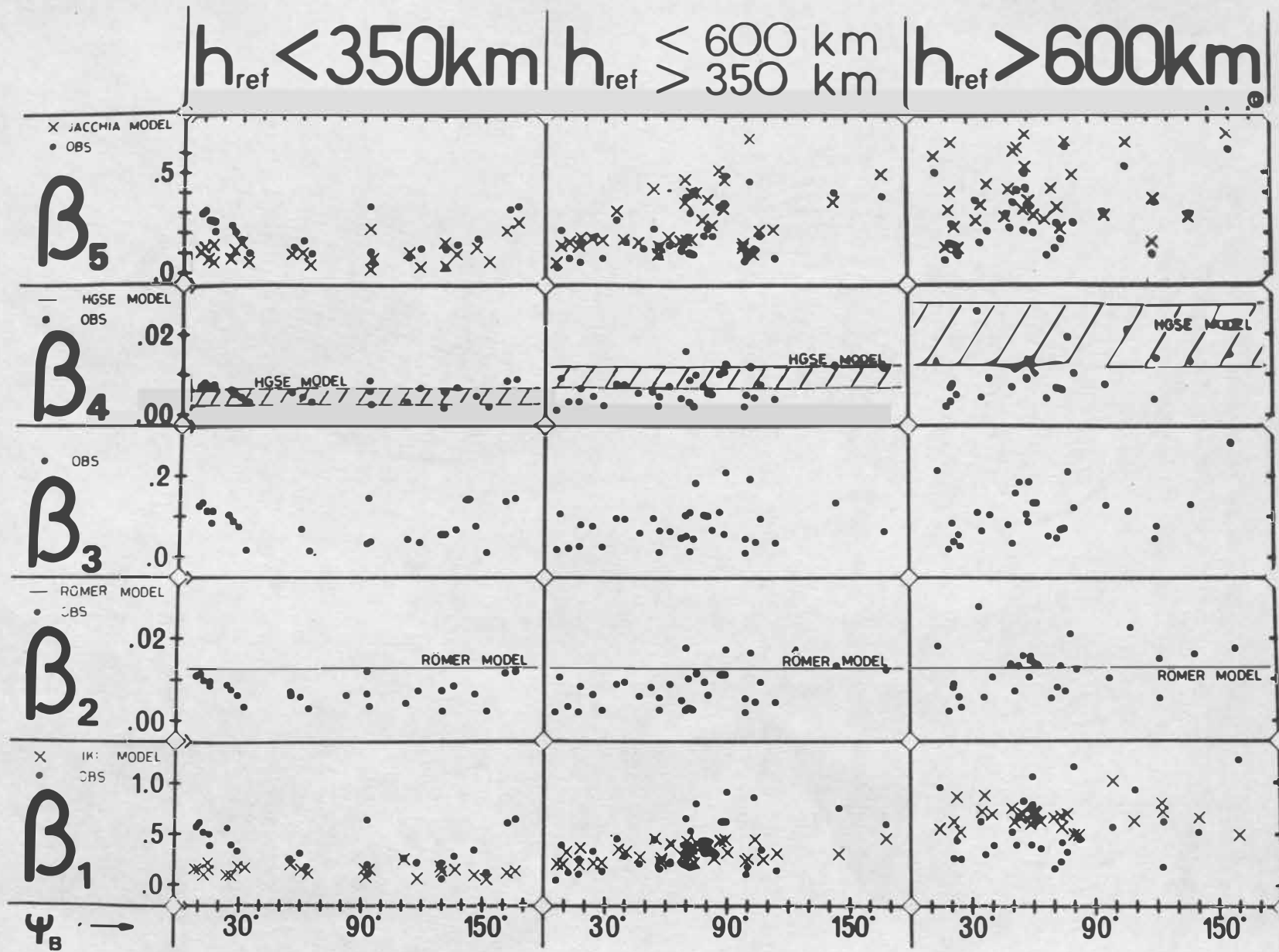


Fig. 4

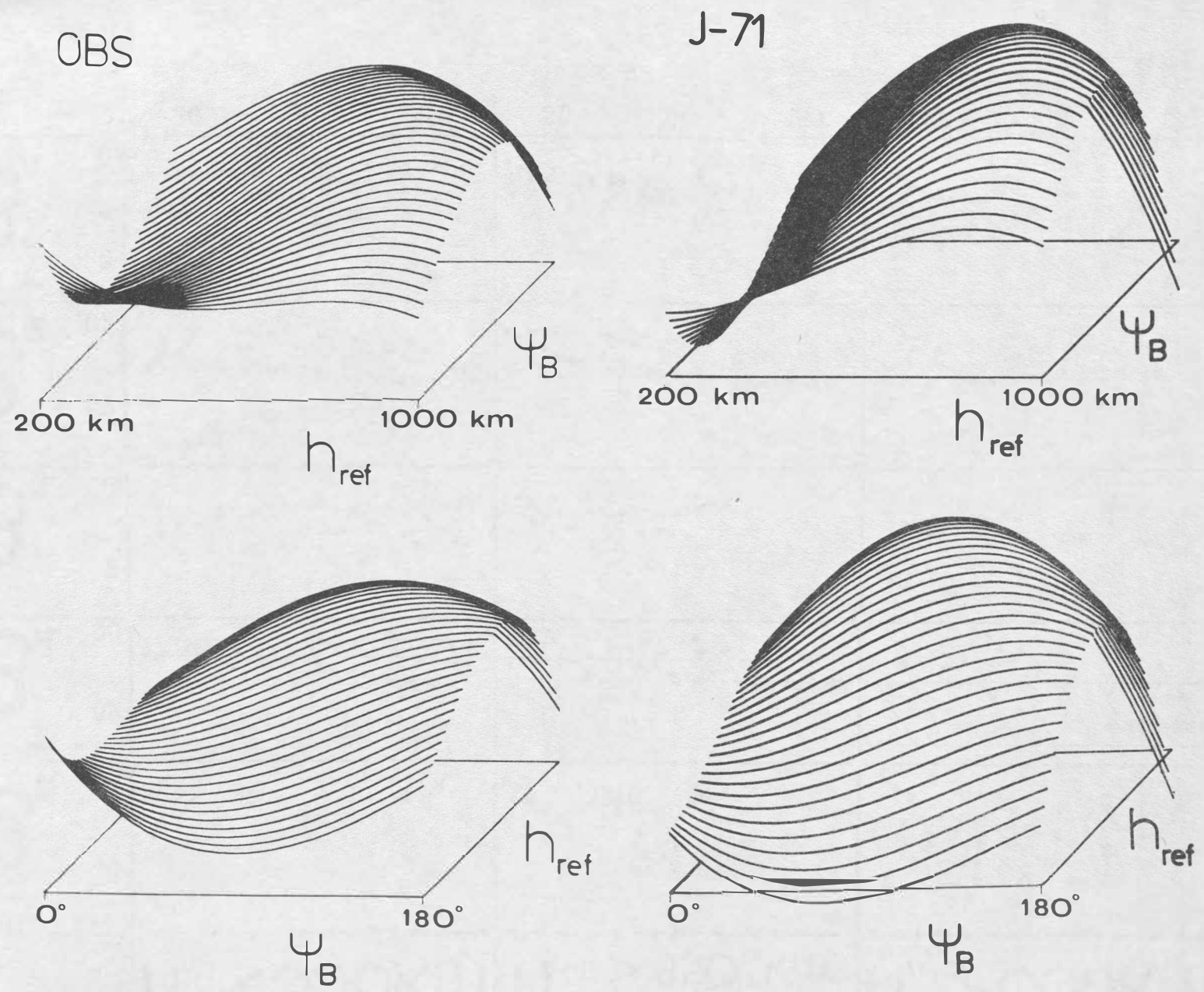


Fig. 5

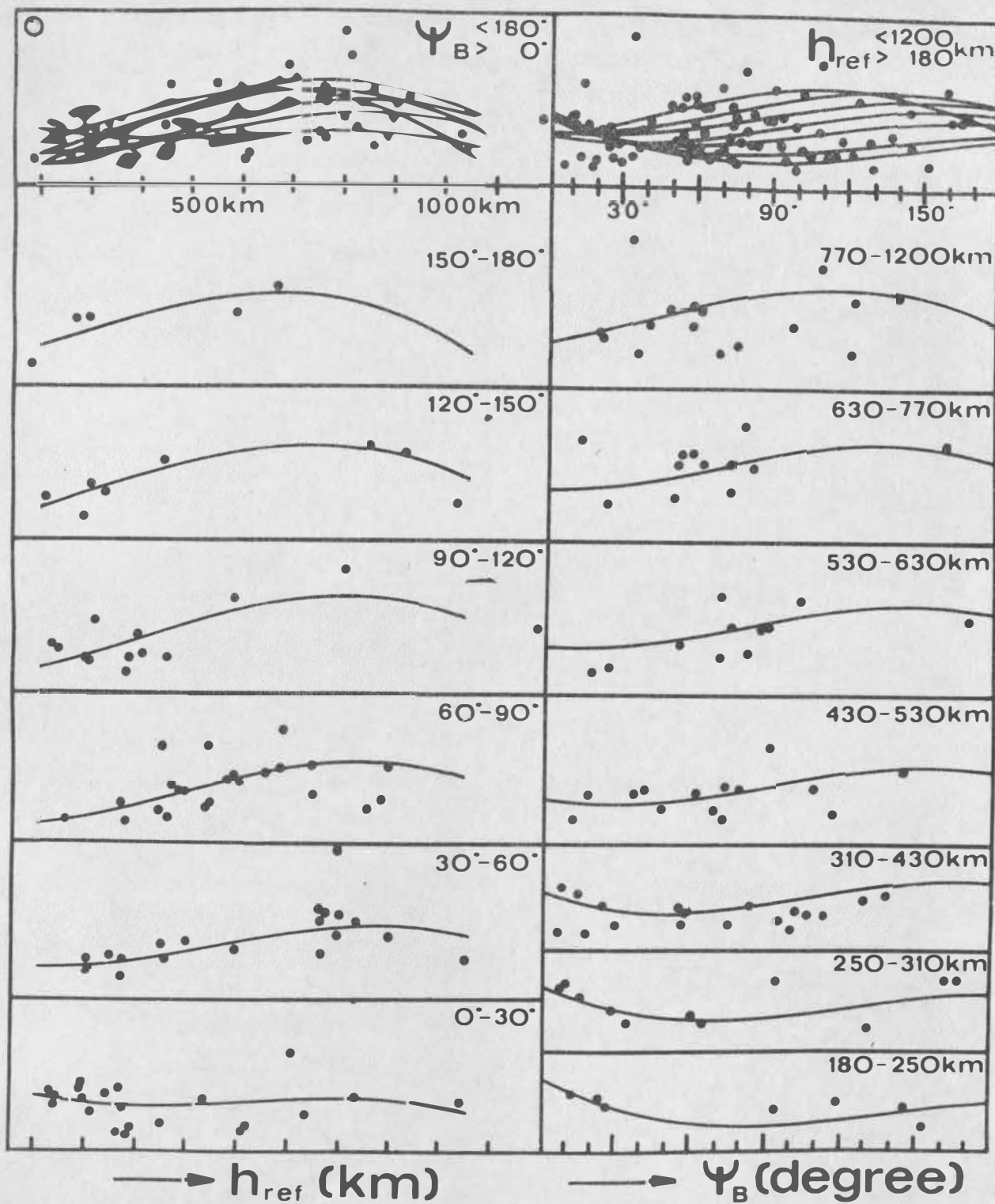


Fig. 6

Some Results of the Examination of the SBG Camera at Borowiec

by

K. VORBRICH¹⁾

Summary

In September 1975 at the Astronomical Latitude Observatory of the Polish Academy of Sciences at Borowiec the SBG Camera ($f \approx 780$ m/m) for observation of Artificial Earth Satellites was set up. Since then experiments have been started for determination of accuracy of the topocentric positions of celestial bodies taken on SBG plates. Several fixed-stars photographs were taken. Then the computations of coefficients of TURNER's equations and calculations of deviations of standard co-ordinates ξ_{cal} , η_{cal} (transformed from co-ordinates of stars x , y measured by co-ordinatometer) from standard co-ordinates ξ_{obs} , η_{obs} (transformed from equatorial co-ordinates of stars) were made. The results gave some information about image and size of distortion and led to the conclusions concerning accuracy obtainable on SBG photographic plates with different working fields. Up to now the camera has been in operation for the campaign of Intercosmos (April 1st - May 31st, 1976). In the process of reduction of the observations, above mentioned results of the determination of accuracy are taken into account.

Резюме

В сентябре 1975 в Астрономической широтной обсерватории Польской Академии Наук в Боровце была поставлена камера SBG ($f \approx 780$ м/м) для наблюдений Искусственных спутников земли. С этого момента начинались эксперименты для определения точности регистрации топоцентрических позиции объектов на фотопластинках SBG.

Сделано несколько фотографий звезд. Методом наименьших квадратов определено коэффициенты уравнений Турнера (постоянные пластинки). Сопоставлено вычисленные значения идеальных координат опорных звезд $\xi_{выч}$, $\eta_{выч}$ (преобразованных из координат x , y измеренных на координатно - измерительной машине) с идеальными координатами $\xi_{наб}$, $\eta_{наб}$ (преобразованными из экваториальных координат опорных звезд). Из результатов можно было получить информации об изображении и величине дисторсии и сделать вывод точности позиции на фотопластинках SBG из разными зонами работы.

До сих пор камера работала в кампании сотрудничества Интеркосмос (1ое Апреля - 31ое Мая 1976г.). При обработке наблюдений были учтены вышеупомянутые результаты определения точности.

¹⁾ Polish Academy of Sciences, Institute of Geophysics, Astronomical Latitude Observatory, Poland Borowiec, P.O. 63-120 Kornik

The present paper describes some experiments made at the Astronomical Latitude Observatory of Polish Academy of Sciences at Borowiec for the determination of accuracy of the topocentric positions of celestial bodies on the plates of SBG Camera set up at the Observatory.

The calibration of the SBG optic was based on TURNER's observational equation method employed for different photographic plates with a common star's field situated in the region of the constellation "Triangle". The camera was adjusted parallactically ("fixed stars" mode). The plates of the ORWO factory had a sensitivity of about 27° DIN. For elaboration, there were chosen three photographs, exposed 30 s near meridian in quiet atmospheric conditions. Two pictures (no. 7507 and no. 7508) were taken on the same night - on November 10/11, 1975, and a third one (no. 7604) - on January 27/28, 1976 and covered the testing field in such a manner, that the positions of the optical centres of the plates (being about at $2^{\text{h}}23^{\text{m}}$, $+34^{\circ}.7$) with reference to the background of the stars differed by less than one minute of arc from each other. For measurement and further elaboration on each plate were chosen the same 70 stars evenly distributed on a field of a radius 2.2° . It was considered, that an increase of the number of reference stars would only slightly effect the mean error and would make the computation much more laborious and longer. The reference stars' Smithsonian Astrophysical Observatory Catalog numbers are given in Table I.

Table I. The Smithsonian Astrophysical Observatory Catalog numbers of 70 reference stars chosen on plates

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	603	13	584	25	532	37	501	49	509	61	410
2	625	14	445	26	568	38	468	50	519	62	461
3	627	15	393	27	645	39	447	51	615	63	507
4	690	16	377	28	676	40	429	52	652	64	560
5	733	17	363	29	670	41	402	53	621	65	590
6	723	18	361	30	659	42	374	54	591	66	572
7	696	19	340	31	671	43	372	55	527	67	551
8	758	20	346	32	651	44	354	56	508	68	479
9	692	21	396	33	613	45	414	57	500	69	505
10	679	22	409	34	567	46	440	58	469	70	537
11	641	23	425	35	523	47	444	59	448		
12	586	24	494	36	506	48	475	60	441		

Table I contains:

1. The number of the reference star on each plate,
2. The number which when added to value 055000 gives S.A.O.C. number.

The stars' image diameters were from $50\ \mu\text{m}$ to $120\ \mu\text{m}$, average value being $80\ \mu\text{m}$. The stars images were quite well defined, though they differed in quality as to their shape. Objects distributed on an area of up to $1.5^{\circ} \div 1.8^{\circ}$ from the optical centre had round shaped images, those distributed on a more peripheral area were slightly elongated - in general directed towards the principal point of the plate. From the set of three plates, no. 7508 was the easiest to look at (developed to the highest contrast); that of no. 7507 had the most dark background.

Plates were placed in the comparator in glass-up position, so the system of standard co-ordinates ξ, η was anti-clockwise, reflected to the system of measured co-ordinates x, y . Mutual reflection of the above mentioned systems was eliminated in the process of further computation.

Previous to measurement, plates were oriented so as to bring the directions of the equatorial axes α, δ more or less into coincidence with the axes x, y .

In order to eliminate personal and instrumental systematical error each plate was measured 8 times (in position ξ parallel to x and in position ξ perpendicular to x after anti-clockwise rotation of the plate carriage; in each position for the measured star co-ordinates, the averages of four readings were considered - two with and two without reversed prism). After measurements were completed, there were for each plate two systems of mean co-ordinates x, y : $\xi \parallel x$ system further called "0°" and $\xi \perp x$ system further called "90°". The average standard deviation of single measurement was less than $3 \mu\text{m}$ for both systems.

The successiveness of computation (made by the program in Algol 1204 by the computer "Odra 1204") was as follows:

1. Rotation of the system of axes "90°" to system "0°".

Rotation equations:

$$x_{0^{\circ}} \xi_j = a_{1j} x_{90^{\circ}} \xi_j + a_{2j} y_{90^{\circ}} \xi_j + a_{3j}$$

$$(1) \quad y_{0^{\circ}} \xi_j = b_{1j} x_{90^{\circ}} \xi_j + b_{2j} y_{90^{\circ}} \xi_j + b_{3j}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

were adopted for a different number of reference stars n , distributed on tested working fields with different radii. Additional information concerning the radii of fields with relation to the quantity of stars gives Table II.

Coefficients $a_{1j}, b_{1j}, i = 1, 2, 3$ determined by the least-squares method introduced as known factors into equations (1) served for the determination of the seeking measured co-ordinates of stars $x_{0^{\circ}} \xi_j_{\text{cal}}, y_{90^{\circ}} \xi_j_{\text{cal}}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ with reference to the new system rotated to system "0°".

Table II.

1	2								3
	2.2	2.2	1.8	1.8	1.8	1.5	1.0	1.0	
r	2.2	2.2	1.8	1.8	1.8	1.5	1.0	1.0	
n	70	24	46	16	8	21	16	8	
m	± 3.82	± 3.98	± 3.72	± 3.72	± 3.52	± 3.70	± 3.78	± 3.92	7507
$\sqrt{\mu m}$	± 3.18	± 3.49	± 2.86	± 2.57	± 2.13	± 2.50	± 2.35	± 2.05	7508
	± 3.19	± 3.00	± 3.06	± 3.24	± 2.34	± 2.89	± 2.55	± 3.00	7604
m	± 1.01	± 1.06	± 0.99	± 0.99	± 0.94	± 0.98	± 1.00	± 1.04	7507
[sec. of arc]	± 0.84	± 0.92	± 0.76	± 0.68	± 0.57	± 0.66	± 0.62	± 0.54	7508
	± 0.85	± 0.80	± 0.81	± 0.86	± 0.63	± 0.77	± 0.68	± 0.80	7604

The columns of Table II present the following informations:

1. r - radius (in degree) of chosen tested working fields with reference to optical centre,
 n - respective number of reference stars uniformly distributed on tested fields;
 remark: n = 24 concerns the ring of stars outward working field of radius equal to 1.8° up to 2.2° only,
 m - mean error computed from deviations $x_{0^0} [j] - x_{0^0} [j]_{cal}$ and $y_{0^0} [j] - y_{0^0} [j]_{cal}$ given in μm and seconds of arc.
2. values of r, n, m,
3. numerations of plates.

Values $(x_{0^0} [j] + x_{0^0} [j]_{cal})/2$ and $(y_{0^0} [j] + y_{0^0} [j]_{cal})/2$ served for the construction of the mean measured co-ordinate system further called "Mⁿ" system.

2. Correction of the equatorial co-ordinates α, δ of stars for proper motions. S.A.O.C. was used.
3. Computation of the co-ordinates α_0, δ_0 of the optical centre by means of SCHLESINGER's method (so called "dependences" method). Three triangles were chosen made of stars forming optimal geometry with reference to an estimated principal point. Maximal deviations (mean-computed) of optical centre co-ordinates determined from individual triangles were less than one second of arc.
4. Computation of standard co-ordinates ξ, η connected with the previous computed position of optical centre.
 Further computations were made independently for "0°", "90°", and "Mⁿ" systems of co-ordinates.
5. Determination of coefficients of the plate by means of the least-squares method using TURNER's equations in the form:

$$\xi_j = A_1 x_j + A_2 y_j + A_3 + A_4 x_j^2 + A_5 x_j y_j + A_6 y_j^2 + A_7 r_j x_j^2 + A_8 r_j y_j^2,$$

$$(2) \quad \eta_j = B_1 x_j + B_2 y_j + B_3 + B_4 x_j^2 + B_5 x_j y_j + B_6 y_j^2 + B_7 r_j x_j^2 + B_8 r_j y_j^2,$$

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

where r is the radial distance from the principal point to the measured one. The computations were made for observational equations with VI, XII, XIV and XVI coefficients, that is with linear, quadratic, minor cubic and major cubic terms respectively.

6. Transformation of measured co-ordinates x, y of stars into standard co-ordinates by using earlier computed coefficients of TURNER's equations.
7. Determination of the residuals (observed - calculated) between standard co-ordinates computed from equatorial co-ordinates of stars and those given by best-fitting polynomials of the first second and thirds orders in measured co-ordinates. The scale factor of the camera equal to about $3.8 \mu\text{m}/\text{sec. of arc}$ (computed by means of coefficients from TURNER's linear equations) was taken into consideration.

From deviations ξ, η (obs. - cal.) in numerical form or plotted on the graph it was possible to obtain information concerning:

1. the object image position accuracy on different working fields of the plate (field) of radii $2.2^\circ, 1.8^\circ, 1.5^\circ, 1.0^\circ$ were tested),
2. the optimum number of reference stars necessary for computation of the position of an Artificial Earth Satellite and
3. the optimum number of coefficients for TURNER's observational equations.

Table III gives an estimate of the object image position accuracy as a function of mean error calculated, from residuals of the reference stars, independently for plates no. 7507, no. 7508 and no. 7604 - sub-table no. IIIa, IIIb, and IIIc respectively. Results are gathered in the following columns:

1. quantity n of adjusted stars,
2. radius (in degree) of the working field (with reference to the optical centre; remark: for $n = 24$ see explanation to Table II,
- 3a, b, c, 4a, ..., 6c. mean errors (in sec. of arc) computed for residuals from the methods of linear and power series for systems of co-ordinates " 0° ", " 90° ", " M° ". For $n = 8$, there are given results from the linear series only, because the quantity of observational equations was considered too small for sufficiently valuable adjustment by means of the methods of the power series.

Table IIIa. Plate no. 7507. Mean errors in seconds of arc

r	n	VI coefficients			XII coefficients		
		3a	3b	3c	4a	4b	4c
		0°	90°	M ⁿ	0°	90°	M ⁿ
2.2	70	<u>+4.32</u>	<u>+4.50</u>	<u>+4.39</u>	<u>+4.30</u>	<u>+4.49</u>	<u>+4.38</u>
2.2	24	<u>+3.07</u>	<u>+3.16</u>	<u>+3.09</u>	<u>+2.83</u>	<u>+2.93</u>	<u>+2.85</u>
1.8	46	<u>+2.38</u>	<u>+2.53</u>	<u>+2.42</u>	<u>+2.19</u>	<u>+2.30</u>	<u>+2.20</u>
1.8	16	<u>+2.71</u>	<u>+2.66</u>	<u>+2.66</u>	<u>+2.63</u>	<u>+2.56</u>	<u>+2.56</u>
1.8	8	<u>+2.61</u>	<u>+2.83</u>	<u>+2.70</u>	-	-	-
1.5	21	<u>+1.24</u>	<u>+1.44</u>	<u>+1.29</u>	<u>+1.29</u>	<u>+1.44</u>	<u>+1.30</u>
1.0	16	<u>+1.00</u>	<u>+1.15</u>	<u>+1.00</u>	<u>+0.97</u>	<u>+1.08</u>	<u>+0.95</u>
1.0	8	<u>+0.89</u>	<u>+0.97</u>	<u>+0.84</u>	-	-	-

1	2	XIV coefficients			XVI coefficients		
		5a	5b	5c	6a	6b	6c
		0°	90°	M ⁿ	00°	90°	M ⁿ
2.2	70	<u>+1.11</u>	<u>+1.10</u>	<u>+1.04</u>	<u>+1.10</u>	<u>+1.09</u>	<u>+1.03</u>
2.2	24	<u>+1.25</u>	<u>+1.20</u>	<u>+1.17</u>	<u>+1.16</u>	<u>+1.09</u>	<u>+1.02</u>
1.8	46	<u>+1.07</u>	<u>+1.07</u>	<u>+1.00</u>	<u>+1.07</u>	<u>+1.06</u>	<u>+0.99</u>
1.8	16	<u>+1.12</u>	<u>+1.19</u>	<u>+0.99</u>	<u>+1.13</u>	<u>+1.13</u>	<u>+0.98</u>
1.5	21	<u>+0.88</u>	<u>+1.07</u>	<u>+0.87</u>	<u>+0.95</u>	<u>+1.01</u>	<u>+0.84</u>
1.0	16	<u>+0.82</u>	<u>+0.94</u>	<u>+0.74</u>	<u>+0.95</u>	<u>+0.95</u>	<u>+0.76</u>

Table IIIb. Plate no. 7508. Mean errors in seconds of arc

r	n	VI coefficients			XII coefficients		
		3a	3b	3c	4a	4b	4c
		0°	90°	M ⁿ	0°	90°	M ⁿ
2.2	70	<u>+4.39</u>	<u>+4.41</u>	<u>+4.39</u>	<u>+4.35</u>	<u>+4.39</u>	<u>+4.36</u>
2.2	24	<u>+3.19</u>	<u>+3.22</u>	<u>+3.18</u>	<u>+2.95</u>	<u>+2.99</u>	<u>+2.95</u>
1.8	46	<u>+2.44</u>	<u>+2.37</u>	<u>+2.39</u>	<u>+2.14</u>	<u>+2.09</u>	<u>+2.09</u>
1.8	16	<u>+2.58</u>	<u>+2.38</u>	<u>+2.47</u>	<u>+2.55</u>	<u>+2.33</u>	<u>+2.43</u>
1.8	8	<u>+2.69</u>	<u>+2.41</u>	<u>+2.55</u>	-	-	-
1.5	21	<u>+1.26</u>	<u>+1.27</u>	<u>+1.24</u>	<u>+1.23</u>	<u>+1.32</u>	<u>+1.25</u>
1.0	16	<u>+1.12</u>	<u>+1.02</u>	<u>+1.04</u>	<u>+1.02</u>	<u>+1.02</u>	<u>+0.99</u>
1.0	8	<u>+1.21</u>	<u>+1.16</u>	<u>+1.16</u>	-	-	-

1	2	XIV coefficients			XVI coefficients		
		5a	5b	5c	6a	6b	6c
		0°	90°	M ⁿ	0°	90°	M ⁿ
2.2	70	<u>+1.06</u>	<u>+1.15</u>	<u>+1.06</u>	<u>+1.06</u>	<u>+1.15</u>	<u>+1.06</u>
2.2	24	<u>+1.24</u>	<u>+1.48</u>	<u>+1.30</u>	<u>+1.23</u>	<u>+1.44</u>	<u>+1.25</u>
1.8	46	<u>+0.98</u>	<u>+1.06</u>	<u>+0.96</u>	<u>+0.99</u>	<u>+1.03</u>	<u>+0.95</u>
1.8	16	<u>+0.86</u>	<u>+0.85</u>	<u>+0.82</u>	<u>+0.91</u>	<u>+0.88</u>	<u>+0.86</u>
1.5	21	<u>+0.74</u>	<u>+0.76</u>	<u>+0.68</u>	<u>+0.77</u>	<u>+0.77</u>	<u>+0.67</u>
1.8	16	<u>+0.73</u>	<u>+0.58</u>	<u>+0.61</u>	<u>+0.72</u>	<u>+0.59</u>	<u>+0.60</u>

Table IIIc. Plate no. 7604. Mean errors in seconds of arc

r	n	VI coefficients			XII coefficients		
		3a	3b	3c	4a	4b	4c
		0°	90°	M ⁿ	0°	90°	M ⁿ
2.2	70	±4.30	±4.49	±4.38	±4.38	±4.50	±4.43
2.2	24	±3.01	±3.24	±3.11	±2.84	±3.05	±2.93
1.8	46	±2.28	±2.21	±2.22	±2.13	±2.13	±2.10
1.8	16	±2.52	±2.43	±2.45	±2.53	±2.52	±2.50
1.8	8	±2.40	±2.62	±2.52	-	-	-
1.5	21	±1.13	±1.16	±1.10	±1.12	±1.26	±1.16
1.0	16	±0.98	±0.96	±0.93	±0.95	±0.98	±0.94
1.0	8	±1.13	±1.19	±1.12	-	-	-

1	2	XIV coefficients			XVI coefficients		
		5a	5b	5c	6a	6b	6c
		0°	90°	M ⁿ	0°	90°	M ⁿ
2.2	70	±1.07	±1.19	±1.09	±1.05	±1.18	±1.08
2.2	24	±1.21	±1.51	±1.31	±1.20	±1.38	±1.23
1.8	46	±0.98	±1.10	±0.98	±0.97	±1.02	±0.94
1.8	16	±0.85	±1.18	±0.98	±0.89	±1.16	±0.99
1.5	21	±0.84	±0.75	±0.73	±0.90	±0.74	±0.75
1.0	16	±0.75	±0.66	±0.68	±0.78	±0.68	±0.70

It was interesting to compare ξ , η (obs. - cal.) residual vectors of stars from three different plates plotted on one picture. The sample on Fig. 1 presents the plotting of 70 stars (the field of radius 2.2°) of elaborated plates drawn with reference to the optical centre of each plate. On the picture the origins of the three co-ordinate systems are in mutual coincidence. Thick, slender and interrupted arrows relate to deviations (computed by means of XII coefficients method with "0°" system) for plates no. 7507. no. 7508 and no. 7604 respectively. From this sample arises an indication, that the residual vectors of stars appear quite correlated. This strongly suggests, that the effect of the displacement of the images of stars is attributable to camera errors - mostly distortion. It is worth mentioning here however, that the star - catalogue employed (namely S.A.O.C.) was earlier investigated by many authors - the average standard deviation of the S.A.O.C. position is considered to be of the order of half a sec. of arc, although individual values may range to 2.5 sec. of arc. The conclusion can be drawn that random error in the proper motions could indeed perceptibly account for the observed effect of residuals. The focal length of SBG Camera is sufficiently great for the catalogue error to be significantly relative to the plate measuring error.

The mean error of deviations from the least-squares method which employed a working field of radius 2.2° and observational equations with VI and XII coefficients was greater than 4 sec. of arc. But for the VI and XII coefficient methods such less error - of the order of one sec. of arc was permissible. So the radius of the investigated field was decreased to 1.8° ($n = 46$), then to 1.5° ($n = 21, 16$ and 8)

and finally to 1.0° ($n = 16$ and 8); as a result of computations with such decreasing fields the mean error was reduced to $2.4'' \div 2.2''$, $1.3''$ and $1'' \div$ less than $1''$ respectively.

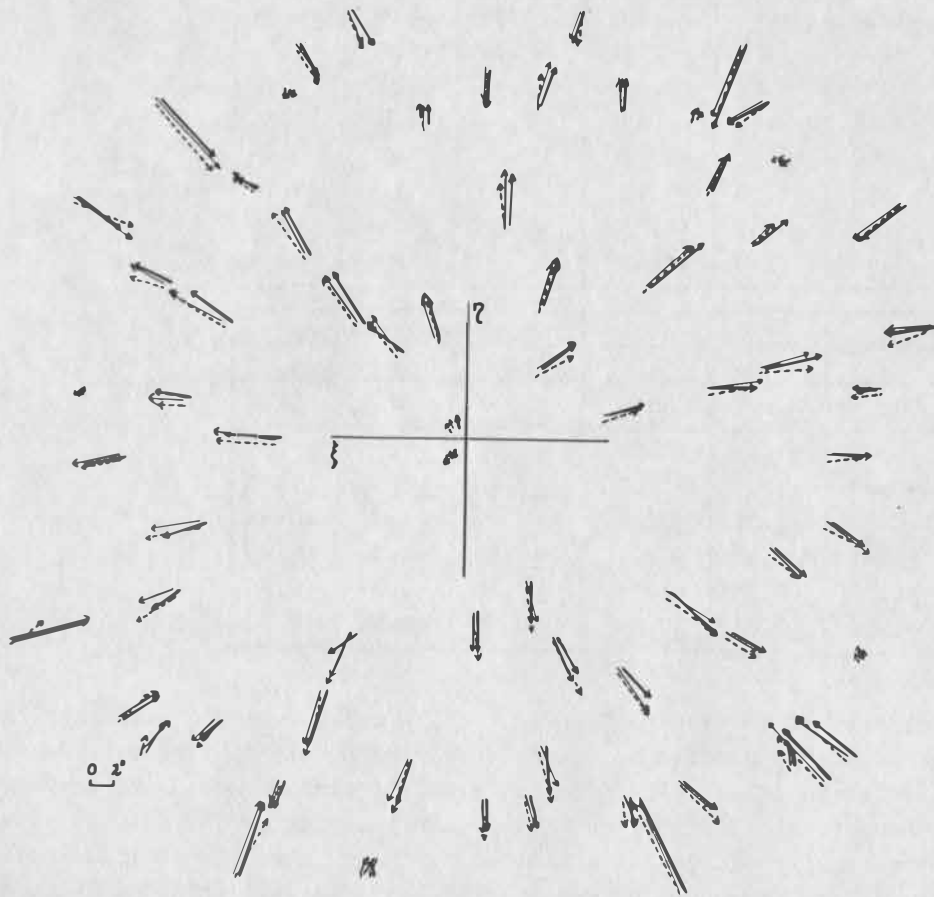


Fig. 1. The plot of the residual vectors from least-squares method with XII coefficients of TURNER's equations for the system "0⁰" ($n = 70$). The average mean error equal to ± 4.3 sec. of arc.

- ▶ for plate no. 7507
- ▶ for plate no. 7508
- - -▶ for plate no. 7604

After introducing the method of the third order series, the mean error for the field of radius 2.2° and $n = 70$ was also decreased to one sec. of arc. The sample on Fig. 2 shows (specially when compared with those on Fig. 1), that after using observational equations with XIV coefficients nearly complete randomness of residual vectors was achieved.

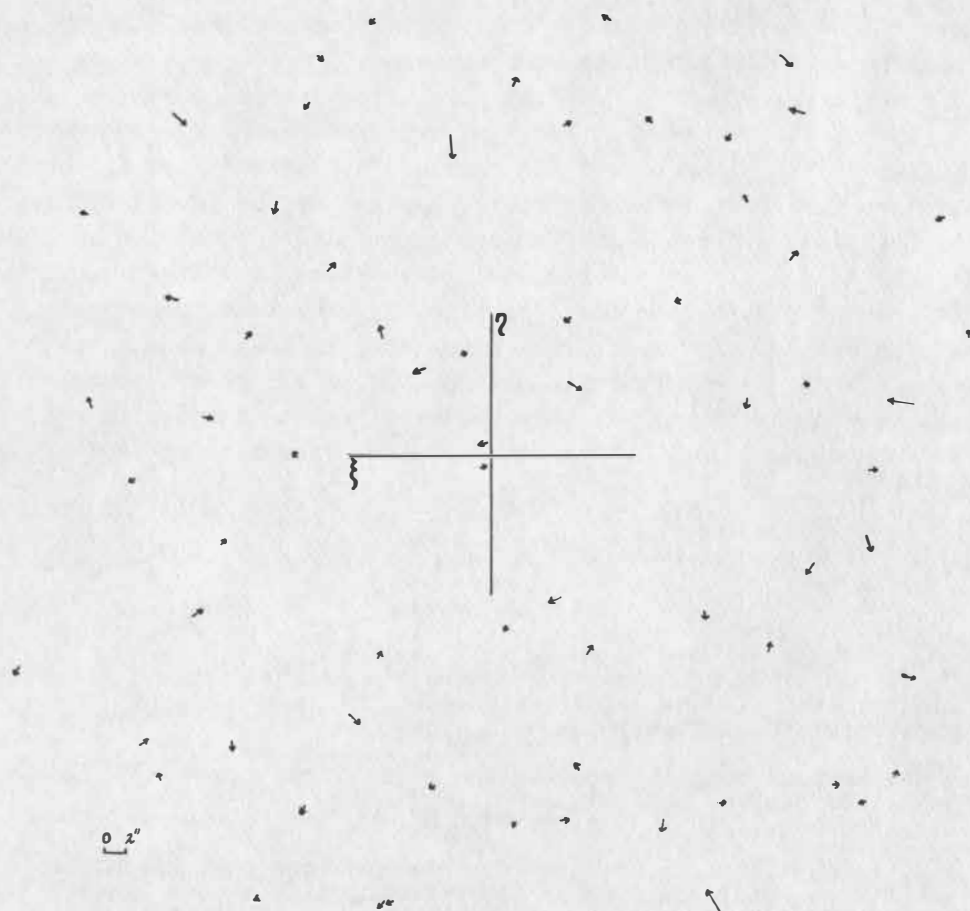


Fig. 2. The plot of the residual vectors from least-squares method with XIV coefficients of TURNER's equations for the system "0⁰" (n = 70, plate no. 7507.) The mean error equal to ± 1.1 sec. of arc.

The conclusion can be drawn from the above mentioned results, that TURNER's power series in the third order absorbed systematic distortion error.

The mean distortion coefficient calculated from coefficients A [7] and B [8] of observational equations type (2) arranged for 70 reference stars scattered on a working field of radius 2.2° was of the order of:

$$c = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m/m}^{-2}$$

in both co-ordinates - x and y.

Conclusions

Linear methods of reduction can fit the precise (of one sec. of arc order) photographic positions of the satellite if a minimum of 8 reference stars can be chosen at a distance not larger than 1° from the satellite position (usually being close to the optical centre). In the case of photographs taken very low upon the horizon it is necessary to employ the XII coefficients method. This method however requires a considerably greater number of reference stars, because of the large quantity of constants of the plate and hence is less practical. It happens once in a while that too small a number of stars in the vicinity of the satellite image requires us to seek further than $1^{\circ} \div 1.5^{\circ}$ from the optical centre, or that the satellite image is too far from the optical centre. In this situation, in order to achieve a precise reduction of position it is necessary to use the XIV or XVI coefficients-methods. The decision must be made as to what is more desirable in the particular case: the very precise position of the object or the relatively shorter time of plate measurements.

References

- GAJDEROWICZ, I.; OSZCZAK, St.: Joint determination of the distortion and the centre of distortion in the satellite camera.
Artificial Satellites 2 (1969) 1, pp. 37-42
- HEWITT, J.: The methods used in reducing the plates from the HEWITT f1 SCHMIDT satellite camera.
Cospar Trans. 7 (1970), p. 171-190
- KISSELEV, A.A.: Réduction astrométrique des observations photographiques des satellites artificiels de la Terre du point de vue de l'astrométrie photographique classique.
Cospar Trans. 7 (1970), pp. 53-66
- KORDYLEWSKI, Z.: Automatic computation of the position of artificial satellites.
Artificial Satellites 2 (1966) 1, pp. 19-24
- SWIERKOWSKA, St.: Comparative study of some methods for determining the optical distortion of an objective.
Artificial Satellites 6 (1971) 2, pp. 3-36
- TURNER, H.H.: On the errors of star photographs due to optical distortion of the object-glass which the photograph is taken.
Monthly Notices 1898 - 99, London LIX (1899) pp. 438-478

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ ИСЗ
ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н.Георгиев /Болгария/

Резюме

В настоящей работе разработан метод использования промежуточной орбиты на основе несимметрического варианта обобщенной задачи двух неподвижных центров. Силовая функция в этом случае строго учитывает не только вторую, но и третью зональную гармонику земного потенциала.

При использовании этой силовой функции сделано разложение координат ξ_j , η_j , ω_j промежуточного движения ИСЗ в зависимости от степени регуляризованного времени \tilde{t}_j .

Получены формулы для определения возмущений от зональных, тессеральных и секторальных гармоник.

ZUR NUTZUNG INTERMEDIÄRER SATELLITENBAHNEN BEI
DER LÖSUNG GEODÄTISCHER PROBLEME

N.Georgiew

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit wird eine Methode zur Nutzung einer intermediären Bahn auf der Basis der asymmetrischen Variante des allgemeinen Zweikörperproblems entwickelt. Dabei berücksichtigt die Kraftfunktion nicht nur die zweite, sondern auch die dritte zonale Harmonische des Erdpotentials völlig streng.

Unter Nutzung dieser Kraftfunktion werden die Koordinaten

ξ_j , η_j , ω_j der intermediären Satellitenbewegung in Abhängig-

keit von der Ordnung der regularisierten Zeit ζ ; dargestellt. Formeln zur Bestimmung der Störungen von zonalen, Tesseralen und sektoriellen Harmonischen werden angegeben.

Введение

Усовершенствование техники наблюдений ИСЗ и повышение точности определения положения спутников в пространстве дают возможность решать многие новые задачи, где нужна большая точность при учете таких эффектов, как движение полюсов, неравномерность вращения Земли, движение континентов и др.

Так как точность в современных методах определения спутников в пространстве различна (фотографический и лазерный методы), то при совместном их использовании несомненно теряется высокая точность лазерных наблюдений. Чтобы использовать лазерные наблюдения, необходимо получить синхронные наблюдения не менее, чем от четырех станций, что практически трудно реализуемо.

Следовательно, необходимо использовать либо только равнозначные наблюдения, либо вести совместную обработку с помощью теоретически разработанных динамических или орбитальных методов.

Если раньше определение орбиты нам было нужно в основном при прогнозировании движения спутников для эфемеридных целей или для использования несинхронных фотографических наблюдений при определении координат земных станций, то сегодня необходимы высокоточные методы по определению орбиты, которые по своей точности не уступали бы лазерным наблюдениям.

На основе анализа методов вычисления орбит, появившихся в последнее время, приходим к выводу, что наиболее подходящими орбитами являются промежуточные орбиты, которые содержат те члены потенциала земного притяжения, которые пропорциональны J_2 , J_3 и т.д.

В ряде работ [1,2,3,4] нами разработаны теории движения ИСЗ на коротких интервалах времени с большой степенью точности, на основании несимметричного варианта обобщенной задачи двух неподвижных центров [5,6,7]. При этом в отличие от известных методов, где обычно принимаются разложения тригонометрических функций в ряды по малому параметру, или по времени, здесь мы имеем возможность представлять переменные на коротких интервалах времени некоторыми многочленами относительно регуляризованного времени \tilde{t}_j . Существенно то, что во-первых, принятая переменная \tilde{t}_j дает быстро сходящиеся ряды, так как она является на самом деле обратной величиной от квадрата геоцентрического расстояния до спутника, во-вторых, в полученные формулы входят координаты промежуточного движения спутника, что избавляет от необходимости вычисления элементов орбиты.

Благодаря этому, не только упрощается сам процесс вычисления, но и появляется возможность сделать оценку точности, с которой определены все необходимые величины для дальнейших вычислений

В настоящей работе мы даем основные результаты, полученные в работах [1,2,3]. Суть работы состоит в получении единых формул, позволяющих определять совокупное влияние зональных, тессеральных и секторальных гармоник на возмущения орбит [2,3], т.е. полностью учитывать влияние гравитационного поля Земли.

Выводы формул и некоторые выражения, которые здесь не приводятся, можно найти в уже опубликованных работах [1,2,3].

I. Степенные ряды для определения координат промежуточного движения ИСЗ.

Выберем прямоугольную систему координат $Ox y z$ с началом в центре масс Земли так, чтобы ось Oz была направлена в северный полюс, а плоскость $Ox y$ совпадала с плоскостью земного экватора. Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \text{/I/}$$

При $R = 0$ переходим к дифференциальным уравнениям промежуточного движения.

В формуле /I/ согласно [5] функция W задается выражением :

$$W = \frac{\mu}{2} \left\{ \frac{1+i\sigma}{z_1} + \frac{1-i\sigma}{z_2} \right\}, \quad \text{/2/}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2, \\ z_2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2, \end{aligned} \right\} \text{/3/}$$

c и σ — некоторые вещественные постоянные, а $i = \sqrt{-1}$.

Если разложить в ряд /2/ получаем

$$W = \frac{\mu}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left(\frac{z_0}{z} \right)^n P_n \left(\frac{z}{z} \right) \right\}, \quad \text{/4/}$$

где $\mu = fm$, f - постоянная тяготения, m и τ - масса и средний экваториальный радиус Земли, τ - радиус вектор спутника, $P_n(\frac{z}{\tau})$ - полином Лежандра n -го порядка, а для J'_n имеем

$$J'_n = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\tau_0}\right)^n \left\{ (1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n \right\} \quad /5/$$

Для величин C и σ имеем выражения

$$C = \tau_0 \left\{ -J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2 \right\}^{1/2}, \quad /6/$$

$$\sigma = \frac{J_3}{2J_2} \left\{ -J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2 \right\}^{-1/2}. \quad /7/$$

Если в уравнениях /I//когда $R = 0$ / перейдем от x, y, z и времени t к новым координатам ξ, η, ω в сжатой сфероидальной координатной системе и к новой независимой переменной τ , согласно [5]:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(c^2 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \cos \omega, \\ y &= \sqrt{(c^2 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \sin \omega, \\ z &= c\sigma + \xi\eta, \end{aligned} \right\} \quad /8/$$

$$dt = (\xi^2 + c^2\eta^2) d\tau. \quad /9/$$

То получаем новую систему с разделяющимися переменными.

В [I] для силовой функции /4/ получено выражение

$$\begin{aligned} \bar{W} = & -\frac{\mu}{2} [C_1 \eta (1 - \eta^2) - 2\xi(c^2 + \xi^2)] + h [c^2\eta^2(1 - \eta^2) + \\ & + \xi^2(c^2 + \xi^2)] + C_2 [(c^2 + \xi^2) - (1 - \eta^2)] + C_1^2 (c^2 - 1) \end{aligned} \quad /10/$$

В таком случае можно записать дифференциальные уравнения промежуточного движения спутника в виде, согласно [I]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \xi''_{np} = \mu(c^2 + 3\xi^2) + 2h\xi(c^2 + 2\xi^2) + 2C_2\xi, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \eta''_{np} = -\mu\sigma_1(1 - 3\eta^2) + 2hc^2\eta(1 - 2\eta^2) + 2C_2\eta, \\ \frac{d^2\omega}{d\tau^2} &= \omega''_{np} = 2C_1 \left[\frac{\eta}{(1 - \eta^2)^2} \eta' + \frac{c^2\xi}{(c^2 + \xi^2)^2} \xi' \right], \end{aligned} \right\} /II/$$

где $\sigma_1 = c\sigma$, а C_1 , C_2 и h постоянные интегрирования.

После получения уравнений /II/, которые надо рассматривать как дифференциальные уравнения промежуточного движения в явном виде, можно разложить координаты ξ , η , ω по степеням регуляризованного времени $\tilde{\tau}$, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \xi_j &= \xi_0 + \xi'_0 \tilde{\tau}_j + a_2 \tilde{\tau}_j^2 + a_3 \tilde{\tau}_j^3 + a_4 \tilde{\tau}_j^4 + a_5 \tilde{\tau}_j^5, \\ \eta_j &= \eta_0 + \eta'_0 \tilde{\tau}_j + b_2 \tilde{\tau}_j^2 + b_3 \tilde{\tau}_j^3 + b_4 \tilde{\tau}_j^4 + b_5 \tilde{\tau}_j^5, \\ \omega_j &= \omega_0 + \omega'_0 \tilde{\tau}_j + d_2 \tilde{\tau}_j^2 + d_3 \tilde{\tau}_j^3 + d_4 \tilde{\tau}_j^4 + d_5 \tilde{\tau}_j^5, \end{aligned} \right\} /I2/$$

где a_n, b_n, d_n получаем посредством дифференциальным выражениям:

$$\left. \begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^n(\xi''_{np})_0}{d\tau^n}, \quad b_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^n(\eta''_{np})_0}{d\tau^n}, \quad d_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^n(\omega''_{np})_0}{d\tau^n} \end{aligned} \right\} /I3/$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

В работе [I] все коэффициенты до 5-го порядка определены точно. Полученные формулы для a, b, d выражаются или посредством неизвестных постоянных интегрирования C_1, C_2 и h или только неизвестных $\xi'_0, \eta'_0, \omega'_0$.

Чтобы проинтегрировать формулу /9/, дающую связь между временем t и новой переменной $\tilde{\tau}$, сначала выражаем ξ^2 и η^2 через переменную $\tilde{\tau}$, с помощью первых двух уравнений системы /I2/ и получаем, что

$$dt = (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \tilde{\tau} + \tilde{T}_3 \tilde{\tau}^2 + \tilde{T}_4 \tilde{\tau}^3 + \tilde{T}_5 \tilde{\tau}^4 + \tilde{T}_6 \tilde{\tau}^5) d\tilde{\tau}, \quad /I4/$$

Коэффициенты \tilde{J}_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) надо рассматривать как константы, а это дает возможность легко интегрировать /14/ и в результате имеем

$$\Delta t = t - t_0 = J_1 \tau + J_2 \tau^2 + J_3 \tau^3 + J_4 \tau^4 + J_5 \tau^5. \quad /15/$$

Выражения /15/ дают возможность определить новую переменную τ посредством времени $\Delta t = t - t_0$, а именно

$$\tau_j = \bar{J}_1 \Delta t_j + \bar{J}_2 \Delta t_j^2 + \bar{J}_3 \Delta t_j^3 + \bar{J}_4 \Delta t_j^4 + \bar{J}_5 \Delta t_j^5, \quad /16/$$

Значения коэффициентов J_n или \bar{J}_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) представлены [1].

В [1] дается также и методика для определения неизвестных величин ξ'_0 , η'_0 , ω'_0 , необходимых, как для вычисления коэффициентов a_n , b_n , d_n , J_n ($n = 1, 2, \dots, 5$), также и при следующих вычислениях. Для определения неизвестных величин ξ'_0 , η'_0 , ω'_0 предложен метод наименьших квадратов, дающий возможность оценить степень их точности.

Надо отметить, что полученные ряды /12/, а также /16/ представляют быстроходящиеся ряды, так как опущенный член с τ^6 имеет τ^{-12} (где τ - геоцентрическое расстояние до спутника).

2. Определение возмущающей функции

Для уравнения /1/, в работе [2] получены следующие выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} + \xi^4 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi}, \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + \xi^2 (1 - \eta^2) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta}, \\ \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \omega} + \frac{\xi^2}{1 - \eta^2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}, \end{aligned} \right\} /17/$$

которые надо рассматривать как дифференциальные уравнения возмущенного

движения спутника в сжатой сфероидальной координатной системе.

Здесь мы дадим формулы, учитывающие возмущения только от гравитационного поля Земли, так что возмущающая функция \bar{R} представлена в виде

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2, \quad /18/$$

где \bar{R}_1 - возмущающая функция учитывающая зональные гармоники, а \bar{R}_2 - возмущающая функция, учитывающая тессеральные и секториальные гармоник.

Что касается функции \bar{R}_1 , то она равняется разности между потенциалом притяжения Земли V и искусственно введенной функцией W (формула /4/), а именно

$$\bar{R}_1 = V - W, \quad /19/$$

где V задается формулой

$$V = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{z_0}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right\}. \quad /20/$$

Из /4/ и /20/ имеем, что

$$\bar{R}_1 = \frac{\mu}{r} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{z_0}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right), \quad /21/$$

где

$$j_n = J_n - J_n',$$

а J_n - n -ая зональная гармоника земного потенциала.

Таким образом, возмущающая функция \bar{R}_1 в формуле /21/, содержит только члены порядка 10^{-6} и выше т.е. она не включает в себя гармоники второго и третьего порядка. При этом для $n \geq 6$ коэффициенты j_n практически равны коэффициентом J_n , так что характер убывания J_n' с возрастанием номера n не отличается от характера убывания постоянных J_n .

Согласно формуле /8/, для r и $\frac{z}{r}$ получаем

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = [r^2 + c^2(1 - \eta^2)]^{1/2} = r [1 + \varepsilon^2(1 - \eta^2)]^{1/2} \approx r + 0(\varepsilon^2) \quad /22/$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\xi\eta + c\sigma}{[\xi^2 + c^2(1-\eta^2)]^{1/2}} = \frac{\xi(\eta + \varepsilon\sigma)}{\xi[1 - \varepsilon^2(1-\eta^2)]^{1/2}} \approx \eta + O(\varepsilon^2), \quad /23/$$

где, как при получении \bar{z} и $\frac{\bar{z}}{z}$, так и в следующих выражениях будем ограничиваться членами с $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{\xi^2} \approx 10^{-3}$.

Подставляя /22/ и /23/ в формулу /21/, получаем

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \frac{\mu}{\xi} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{z_0}{\xi}\right)^n P_n(\eta) = \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \gamma_n \xi^{-(n+1)} P_n(\eta), \end{aligned} \quad /24/$$

где

$$\gamma_n = \mu j_n z_0^n. \quad /25/$$

Для полинома Лежандра $P_n(\eta)$, в [2] мы нашли, что

$$P_n(\eta) = \sum_{p=0}^t L_{np} \eta^{n-2p}, \quad /26/$$

где

$$L_{np} = (-1)^p \frac{(2n-2p-1)!!}{(2p)!!(n-2p)!}, \quad /27/$$

$$t = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{— при } n \text{ четном.} \\ \frac{n-1}{2} & \text{— при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \quad /28/$$

Подставляя формулу /26/ в /24/ находим, что

$$\bar{R}_1 = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^t \gamma_n L_{np} \xi^{-(n+1)} \eta^{n-2p} \quad /29/$$

Возмущающая функция \bar{R}_2 , обусловленная долготными членами геопотенциала имеет вид

$$\bar{R}_2 = \frac{\mu}{z} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{nm} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n P_{nm}(\eta) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}), \quad /30/$$

где z , η , λ — соответственно радиус-вектор, синус широты и долготы спутника, J_{nm} и λ_{nm} — постоянные, числовые значения

которых приводятся в [6], а $P_{nm}(\eta)$ - нормированные присоединенные полиномы Лежандра, которые вычисляются по формуле

$$P_{nm}(\eta) = (1-\eta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m}. \quad /31/$$

С учетом /26/ формулы /31/, можно записать в виде [3]

$$P_{nm} = \sum_{p=0}^t A_{n-2p}^{m-1} L_{np} (1-\eta^2)^{\frac{m}{2}} \eta^{n-m-2p}, \quad /32/$$

где

$$A_{n-2p}^{m-1} = \frac{(n-2p)!}{(n-m-2p)!}. \quad /33/$$

Для $\cos m(\lambda - \lambda_{nm})$ также в [3] получено, что

$$\cos m(\lambda - \lambda_{nm}) = \cos m(\omega - \varrho_{nm}), \quad /34/$$

где

$$\varrho_{nm} = n_1 (t - t_r) + \lambda_{nm}. \quad /35/$$

n_1 - угловая скорость вращения Земли вокруг своей оои, t_r - момент времени, когда спутник пересекает Гринвический меридиан, ω - долгота спутника, отсчитываемая от некоторого неподвижного в пространстве направления.

Подставляя /22/, /32/ и /34/ в /30/, получаем выражение для возмущающей функции

$$\bar{R}_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^t \gamma_{nmp}^{\mu} \xi^{-(n+1)} \eta^{n-m-2p} (1-\eta^2)^{\frac{m}{2}} \cos m(\omega - \varrho_{nm}), \quad /36/$$

где

$$\gamma_{nmp}^{\mu} = \mu J_{nm}(\tau_0)^n A_{n-2p}^{m-1} L_{np}.$$

В полученные таким образом формулы /29/ и /36/ входят координаты промежуточного движения ξ , η , ω в явном виде, а это дает возможность непосредственно дифференцировать R_1 и R_2 по согласно системе уравнений /17/, находим

$$\bar{A}_j = \xi^4 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} = - \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^n \gamma_n^p \bar{M}_1 L_{np} \xi^{-\bar{q}_1} \eta^{\bar{k}_1},$$

$$\bar{B}_j = \xi^2 (1-\eta^2) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^n \gamma_n^p \bar{M}_2 L_{np} \xi^{-\bar{q}_2} \eta^{\bar{k}_2} (1-\eta^2)^{\bar{p}_2},$$

$$\bar{D}_j = \frac{\xi^2}{1-\eta^2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} = 0$$

} /37/

$$A_{jl} = \xi^4 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^n \gamma_{nmp}^l M_1 \xi^{-q_1} \eta^{k_1} (1-\eta^2)^{p_1} \cos m(\omega - \alpha_{nm}),$$

$$B_{jl} = \xi^2 (1-\eta^2) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^n \gamma_{nmp}^l M_2 \xi^{-q_2} \eta^{k_2} (1-\eta^2)^{p_2} \cos m(\omega - \alpha_{nm}),$$

$$D_{jl} = \frac{\xi^2}{1-\eta^2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^n \gamma_{nmp}^l M_3 \xi^{-q_3} \eta^{k_3} (1-\eta^2)^{p_3} \sin m(\omega - \alpha_{nm}),$$

} /38/

где

$$\bar{M}_1 = n+1, \quad \bar{q}_1 = n-2, \quad \bar{k}_1 = n-2p, \quad \bar{p}_1 = 0$$

$$\bar{M}_2 = n-2p, \quad \bar{q}_2 = n-1, \quad \bar{k}_2 = n-2p-1, \quad \bar{p}_2 = 1$$

} /39/

$$M_1 = n+1, \quad q_1 = n-2, \quad k_1 = n-m-2p, \quad p_1 = \frac{m}{2}, \quad /40/$$

$$M_2 = n-2p, \quad q_2 = n-1, \quad k_2 = n-m-2p-1, \quad p_2 = \frac{m+2}{2}, \quad /41/$$

$$M_3 = m, \quad q_3 = n-1, \quad k_3 = n-m-2p, \quad p_3 = \frac{m-1}{2}, \quad /42/$$

3. Степенные ряды для возмущений от гравитационного поля Земли

В полученных таким образом выражениях /37/ и /38/ надо заменить координаты ξ , η и ω соответствующими им выражениями из /12/, где эти координаты представлены как функции регуляризованого времени и постоянных a_n , b_n и d_n (как это сделано в [2,3]). В результате этому получаем следующие степенные ряды по регуляризованому времени

$$\begin{aligned} \bar{R}_f^{(i)} &= - \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\pm} \gamma_n \bar{M}_i L_{np} \xi^{-q_i} \eta^{\bar{k}_i} (1-\eta^2)^{\bar{p}_i} = \\ &= \bar{L}_0 + \bar{L}_1 \bar{t} + \bar{L}_2 \bar{t}^2 + \bar{L}_3 \bar{t}^3, \end{aligned} \quad /43/$$

$$\begin{aligned} R_{f\ell}^{(i)} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^{\pm} \gamma_{nmp} M_{i\ell}^{(i)} \xi^{-q_i} \eta^{\bar{k}_i} (1-\eta^2)^{\bar{p}_i} \begin{Bmatrix} \cos m(\omega - \bar{\alpha}_{nm}) \\ \sin m(\omega - \bar{\alpha}_{nm}) \end{Bmatrix} = \\ &= L_0 + L_1 \bar{t} + L_2 \bar{t}^2 + L_3 \bar{t}^3, \end{aligned} \quad /44/$$

где

$$i = 1, 2, 3$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_f^{(1)} &= \bar{A}_f, & \bar{R}_f^{(2)} &= -\bar{B}_f, & \bar{R}_f^{(3)} &= \bar{D}_f = 0, \\ R_{f\ell}^{(1)} &= A_{f\ell}, & R_{f\ell}^{(2)} &= -B_{f\ell}, & R_{f\ell}^{(3)} &= D_{f\ell}, \end{aligned} \right\} /45/$$

$$\bar{L}_0 = \bar{R}_0^{(i)} = - \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\pm} \gamma_n \bar{M}_i L_{np} \xi_0^{-q_i} \eta_0^{\bar{k}_i} (1-\eta_0^2)^{\bar{p}_i}, \quad /46/$$

$$L_0 = R_{0p}^{(i)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^{\pm} \gamma_{nmp} M_{0\ell}^{(i)} \xi_0^{-q_i} \eta_0^{\bar{k}_i} (1-\eta_0^2)^{\bar{p}_i} \begin{Bmatrix} \cos m(\bar{\omega}_0 - \bar{\alpha}_{nm}) \\ \sin m(\bar{\omega}_0 - \bar{\alpha}_{nm}) \end{Bmatrix}, \quad /47/$$

а также

$$(\bar{L}_1 + L_1) = \xi_0' (\bar{R}_1^{(i)} + R_{1,0}^{(i)}) + \eta_0' (\bar{R}_4^{(i)} + R_{4,0}^{(i)}) + [\alpha_1 R_{0,1}^{(i)}],$$

$$(\bar{L}_2 + L_2) = \alpha_1 (\bar{R}_1^{(i)} + R_{1,0}^{(i)}) + \xi_0'^2 (\bar{R}_2^{(i)} + R_{2,0}^{(i)}) + \alpha_3 (\bar{R}_4^{(i)} + R_{4,0}^{(i)}) + \\ + \xi_0' \eta_0' (\bar{R}_5^{(i)} + R_{5,0}^{(i)}) + \eta_0'^2 (\bar{R}_6^{(i)} + R_{6,0}^{(i)}) + \\ + [\alpha_2 R_{0,1}^{(i)} + \alpha_7 R_{1,1}^{(i)} + \alpha_{10} R_{4,1}^{(i)} + \alpha_4 R_{0,2}^{(i)}],$$

$$(\bar{L}_3 + L_3) = \alpha_2 (\bar{R}_1^{(i)} + R_{1,0}^{(i)}) + \alpha_5 (\bar{R}_2^{(i)} + R_{2,0}^{(i)}) + \xi_0'^3 (\bar{R}_3^{(i)} + R_{3,0}^{(i)}) + \\ + \alpha_4 (\bar{R}_4^{(i)} + R_{4,0}^{(i)}) + \alpha_6 (\bar{R}_6^{(i)} + R_{6,0}^{(i)}) + \xi_0'^2 \eta_0' (\bar{R}_7^{(i)} + R_{7,0}^{(i)}) + \\ + \xi_0' \eta_0'^2 (\bar{R}_8^{(i)} + R_{8,0}^{(i)}) + \eta_0'^3 (\bar{R}_9^{(i)} + R_{9,0}^{(i)}) + [\alpha_{15} R_{5,0}^{(i)} + \alpha_3 R_{0,1}^{(i)} + \\ + \alpha_8 R_{0,1}^{(i)} + \alpha_{13} R_{2,1}^{(i)} + \alpha_{11} R_{4,1}^{(i)} + \alpha_{16} R_{5,1}^{(i)} + \alpha_{14} R_{6,1}^{(i)} + \\ + \alpha_5 R_{0,2}^{(i)} + \alpha_9 R_{1,2}^{(i)} + \alpha_{12} R_{4,2}^{(i)} + \alpha_6 R_{0,3}^{(i)}],$$

/48/

Полученные выражения /46/-/48/ дают возмущения от гравитационного поля Земли (зональные, тессеральные и секториальные гармоник), при этом все величины данные в квадратных скобках учитывают только возмущения от тессеральных и секториальных гармоник.

Принятые обозначения $\bar{R}_j^{(i)}$ и $R_{j,l}^{(i)}$ имеют вид :

$$\bar{R}_0^{(i)} = - \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^n \gamma_n L_{np} \bar{M}_i \xi_0^{-\bar{q}_i} \eta^{\bar{k}_i} (1 - \eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_1^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^n \gamma_n L_{np} \bar{M}_i \xi_0^{-(\bar{q}_i + 1)} \eta^{\bar{k}_i} (1 - \eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

/49/

$$\bar{R}_2^{(i)} = - \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{q}_i}^2 \xi_0^{-(\bar{q}_i+2)} \eta_0^{\bar{k}_i} (1-\eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_3^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{q}_i}^3 \xi_0^{-(\bar{q}_i+3)} \eta_0^{\bar{k}_i} (1-\eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_4^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{k}_i}^1 \xi_0^{-\bar{q}_i} \eta_0^{\bar{k}_i-1} (1-\bar{C}_{kp}^1 \eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_5^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{k}_i}^2 \xi_0^{-\bar{q}_i} \eta_0^{\bar{k}_i-2} (1-\bar{C}_{kp}^2 \eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_6^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{k}_i}^3 \xi_0^{-\bar{q}_i} \eta_0^{\bar{k}_i-3} (1-\bar{C}_{kp}^3 \eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_7^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{q}_i}^1 C_{\bar{k}_i}^1 \xi_0^{-(\bar{q}_i+1)} \eta_0^{(\bar{k}_i-1)} (1-\bar{C}_{kp}^1 \eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_8^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{q}_i}^2 C_{\bar{k}_i}^1 \xi_0^{-(\bar{q}_i+2)} \eta_0^{\bar{k}_i-1} (1-\bar{C}_{kp}^1 \eta_0^2)^{\bar{p}_i},$$

$$\bar{R}_9^{(i)} = \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} L_{np} \bar{M}_i C_{\bar{q}_i}^1 C_{\bar{k}_i}^2 \xi_0^{-(\bar{q}_i+2)} \eta_0^{\bar{k}_i-2} (1-\bar{C}_{kp}^2 \eta_0^2)^{\bar{p}_i}$$

/49/

$$R_{0l}^{(i)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} M_{ie}^{(0)} \xi_0^{-q_i+2l} \eta_0^{k_i} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{array}{l} \cos m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{array} \right\},$$

$$R_{1l}^{(i)} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} C_{q_i}^1 \xi_0^{-q_i+2l-1} \eta_0^{k_i} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{array}{l} \cos m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{array} \right\},$$

$$R_{2l}^{(i)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} M_{ie}^{(2)} C_{q_i}^2 \xi_0^{-q_i+2l-2} \eta_0^{k_i} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{array}{l} \cos m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{array} \right\},$$

$$R_{3l}^{(i)} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^{\dagger} \delta_{nmp} M_{ie}^{(3)} C_{q_i}^3 \xi_0^{-q_i+2l-3} \eta_0^{k_i} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{array}{l} \cos m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\alpha}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{array} \right\},$$

/50/

$$R_{4e}^{(i)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^t \delta_{nmp} M_{ie}^{(4)} C_{k_i}^1 \xi_0^{-q_i+2l} \eta_0^{k_i-1} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{matrix} \cos m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{matrix} \right\}$$

$$R_{5e}^{(i)} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^t \delta_{nmp} M_{ie}^{(5)} C_{q_i}^1 C_{k_i}^1 \xi_0^{-q_i+2l-1} \eta_0^{k_i-1} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{matrix} \cos m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{matrix} \right\}$$

$$R_{6e}^{(i)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^t \delta_{nmp} M_{ie}^{(6)} C_{k_i}^2 \xi_0^{-q_i+2l} \eta_0^{k_i-2} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{matrix} \cos m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{matrix} \right\} \quad /50/$$

$$R_{7e}^{(i)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^t \delta_{nmp} M_{ie}^{(7)} C_{k_i}^1 C_{q_i}^2 \xi_0^{-q_i+2l-2} \eta_0^{k_i-1} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{matrix} \cos m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{matrix} \right\}$$

$$R_{8e}^{(i)} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^t \delta_{nmp} M_{ie}^{(8)} C_{k_i}^2 C_{q_i}^1 \xi_0^{-q_i+2l-1} \eta_0^{k_i-2} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{matrix} \cos m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{matrix} \right\}$$

$$R_{9e}^{(i)} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^t \delta_{nmp} M_{ie}^{(9)} C_{k_i}^3 \xi_0^{-q_i+2l} \eta_0^{k_i-3} (1-\eta_0^2)^{p_i} \left\{ \begin{matrix} \cos m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \\ \sin m(\bar{\omega}_{nm} + \frac{l\pi}{2}) \end{matrix} \right\}$$

Значения $\bar{\omega}_{nm}$, $M_{ie}^{(t)}$ ($t = 0, I, \dots, 9$) имеют вид

$$\bar{\omega}_{nm} = \bar{\omega}_0 - \lambda_{nm} = \omega_0 - n_1(t_r - t_0) - \lambda_{nm}$$

$$M_{ie}^{(t)} = \frac{m^l}{l!} M_i F_{nm}^{(t)}$$

$$F_{nm}^{(0)} = F_{nm}^{(1)} = F_{nm}^{(2)} = F_{nm}^{(3)} = 1,$$

$$F_{nm}^{(4)} = 1 - \frac{m}{k_i} \frac{\xi_0^2 \eta_0}{1-\eta_0^2}, \quad F_{nm}^{(5)} = 1 + \frac{m}{k_i} \frac{\eta_0}{1-\eta_0^2},$$

$$F_{nm}^{(6)} = 1 - \frac{2m}{k_i-1} \frac{\eta_0}{\xi_0^2(1-\eta_0^2)} + \frac{m}{k_i(k_i-1)} \left[\frac{\eta_0^2}{(1-\eta_0^2)^2} + (1-m) \frac{\eta_0^4}{(1-\eta_0^2)^4} \right],$$

$$F_{nm}^{(7)} = 1 + \frac{2m}{q_i-1} \frac{\eta_0}{1-\eta_0^2}, \quad F_{nm}^{(8)} = 1 + \frac{2m}{k_i-1} \frac{\eta_0}{1-\eta_0^2},$$

$$F_{nm}^{(9)} = 1 - \frac{3m}{k_i-3} \frac{\eta_0}{1-\eta_0^2} - \frac{m}{(k_i-1)(k_i-2)} \frac{\eta_0^2}{\xi_0^2(1-\eta_0^2)} [3 + (1-m)\eta_0^2] - \frac{m(m-2)}{k_i(k_i-1)(k_i-2)} \cdot \frac{\eta_0^4}{(1-\eta_0^2)^3} [3 + (1-m)\eta_0^2],$$

/51/

/52/

В уравнении /49/ и /50/ посредством $C_{\bar{q}_i}$, C_{q_i} , $C_{\bar{k}_i}$ и C_{k_i} мы обозначили биномиальные коэффициенты Ньютона.

Величины A_k ($k = 1, 2, \dots, 16$) в формулах /48/ можно получить через коэффициенты a_n , b_n , d_n ($n = 1, \dots, 5$) из уравнений /12/, которые точно определены в [1], а здесь мы их приводим до ϵ^2 , а именно

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left[-\mu \xi_0^2 + \frac{2}{\xi_0} \xi_0'^2 + \frac{\xi_0}{1-\eta_0^2} \eta_0'^2 + \xi_0 (1-\eta_0^2) \omega_0'^2 \right] + O(\epsilon^2), \\ a_2 &= \frac{1}{6} \left[-\mu \xi_0 \xi_0' - \frac{6}{\xi_0^3} \xi_0'^3 + \frac{5}{1-\eta_0^2} \xi_0' \eta_0'^2 + 5(1-\eta_0^2) \xi_0' \omega_0'^2 \right] + O(\epsilon^2), \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\eta_0}{1-\eta_0^2} \eta_0'^2 - \eta_0 (1-\eta_0^2) \omega_0'^2 \right] + O(\epsilon^2), \\ a_4 &= \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{1-\eta_0^2} \eta_0'^3 - (1-\eta_0^2) \omega_0'^2 \eta_0' \right] + O(\epsilon^2), \end{aligned} \right\} /53/$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\left(\eta_1 - \frac{d_1}{\xi_0^2}\right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\xi_0^2} (d_2 - \eta_1 J_2), \quad \alpha_3 = \frac{1}{\xi_0^2} (d_3 - \eta_1 J_3), \\ a_5 &= 2 \xi_0'^2 a_1, \quad a_6 = 2 \eta_0'^2 a_3, \quad a_7 = \xi_0' \alpha_1, \quad a_8 = a_1 \alpha_1 + \alpha_2 \xi_0', \\ a_9 &= \xi_0' \alpha_1^2, \quad a_{10} = \eta_0' \alpha_1, \quad a_{11} = a_3 \alpha_1 + \eta_0' \alpha_2, \quad a_{12} = \eta_0' \alpha_1^2, \\ a_{13} &= \xi_0 \alpha_1, \quad a_{14} = \eta_0'^2 \alpha_1, \quad a_{15} = \xi_0' a_3 + \eta_0' a_1, \quad a_{16} = \xi_0' \eta_0' \alpha_1 \end{aligned} \right\} /54/$$

Надо считать, что полученные выражения /43/-/44/, а также /46/-/50/, справедливы для /37/ и /38/, достаточно поставить $i = 1, 2, 3$ и принять во внимание выражения /39/-/42/ и согласно /45/ можно записать, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_i &= \bar{A}_0 + \bar{A}_1 \tau + \bar{A}_2 \tau^2 + \bar{A}_3 \tau^3, \\ \bar{B}_i &= \bar{B}_0 + \bar{B}_1 \tau + \bar{B}_2 \tau^2 + \bar{B}_3 \tau^3, \\ \bar{D}_i &= 0 \end{aligned} \right\} /55/$$

$$\left. \begin{aligned} A_{je} &= Q_0 + Q_1 \tau + Q_2 \tau^2 + Q_3 \tau^3, \\ B_{je} &= H_0 + H_1 \tau + H_2 \tau^2 + H_3 \tau^3, \\ D_{je} &= G_0 + G_1 \tau + G_2 \tau^2 + G_3 \tau^3, \end{aligned} \right\} /56/$$

Где величины Q_j , H_j и G_j ($j = 1, 2, 3$) имеют такой же вид, как L_j из формул /46/-/48/, достаточно заменить $R_{je}^{(i)}$ выражениями из /45/ и соответствующим образом изменить формулы /46/-/48/.

4. Определение $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \omega$ учитывающие возмущения от гравитационного поля Земли

После определения $\xi^4 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi}$, $\xi^4 (1-\eta^2) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta}$, $\frac{\xi^2}{1-\eta^2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}$ и имея формулу /II/ для ξ''_{np} , η''_{np} , ω''_{np} мы можем получить выражения дающие возмущения от гравитационного поля Земли, непосредственно в координатах промежуточного движения ξ , η , ω . С этой целью сделаем разложение в ряд Тейлора координат возмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}'' &= \xi'' + \delta \xi'' = \xi''_{np} + (\delta \xi_1'' + \delta \xi_2''), \\ \bar{\eta}'' &= \eta'' + \delta \eta'' = \eta''_{np} + (\delta \eta_1'' + \delta \eta_2''), \\ \bar{\omega}'' &= \omega'' + \delta \omega'' = \omega''_{np} + (\delta \omega_1'' + \delta \omega_2''), \end{aligned} \right\} /57/$$

а именно

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}'' &= \xi'' + \frac{\partial(\xi'')}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial(\xi'')}{\partial \xi'} \delta \xi' + \frac{\partial(\xi'')}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial(\xi'')}{\partial \eta'} \delta \eta' + \frac{\partial(\xi'')}{\partial \omega} \delta \omega + \xi^4 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} + \dots \\ \bar{\eta}'' &= \eta'' + \frac{\partial(\eta'')}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial(\eta'')}{\partial \xi'} \delta \xi' + \frac{\partial(\eta'')}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial(\eta'')}{\partial \eta'} \delta \eta' + \frac{\partial(\eta'')}{\partial \omega} \delta \omega + \xi^2 (1-\eta^2) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} + \dots \\ \bar{\omega}'' &= \omega'' + \frac{\partial(\omega'')}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial(\omega'')}{\partial \xi'} \delta \xi' + \frac{\partial(\omega'')}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial(\omega'')}{\partial \eta'} \delta \eta' + \frac{\partial(\omega'')}{\partial \omega} \delta \omega + \frac{\xi^2}{(1-\eta^2)} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} + \dots \end{aligned} \right\} /58/$$

Все остальные члены в /58/ $\frac{\partial^2(\xi'')}{\partial \xi^2} \delta \xi^2 \dots \frac{\partial^2(\eta'')}{\partial \eta^2} \delta \eta^2 \dots \frac{\partial^2(\omega'')}{\partial \omega^2} \delta \omega^2$
 $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} \right)$ и т.д. можно рассматривать как малые
 второго порядка относительно величины ε^2 , так, что их не будем
 принимать во внимание в дальнейшем. Из выражения /II/, можно по-
 лучить все необходимые нам дифференциалы с точностью до ε^2 (они
 даны в [2]). При этом надо отметить, что

$$\frac{\partial(\eta'')}{\partial \xi} = \frac{\partial(\eta'')}{\partial \xi'} = \frac{\partial(\omega'')}{\partial \xi} = \frac{\partial(\omega'')}{\partial \xi'} = 0. \quad /59/$$

Для $\delta \xi$, $\delta \eta$ и $\delta \omega$ записываем ряды по степеням переменного, ,
 а именно

$$\delta \xi = \sum_{i=0}^5 \lambda_i \tau^i, \quad \delta \eta = \sum_{i=0}^5 \mu_i \tau^i, \quad \delta \omega = \sum_{i=0}^5 \nu_i \tau^i, \quad /60/$$

где λ_i , μ_i и ν_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) неизвестные коэффициенты.

Дифференцируя /60/ два раза получаем

$$\delta \xi' = \sum_{i=0}^5 i \lambda_i \tau^{i-1}, \quad \delta \eta' = \sum_{i=0}^5 i \mu_i \tau^{i-1}, \quad \delta \omega' = \sum_{i=0}^5 i \nu_i \tau^{i-1}, \quad /61/$$

$$\delta \xi'' = \sum_{i=0}^5 i(i-1) \lambda_i \tau^{i-2}, \quad \delta \eta'' = \sum_{i=0}^5 i(i-1) \mu_i \tau^{i-2}, \quad \delta \omega'' = \sum_{i=0}^5 i(i-1) \nu_i \tau^{i-2} \quad /62/$$

Подставляя выражения /60/-/62/, а также определенные величины
 для $\xi^4 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi}$, $\xi^2(1-\eta^2) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta}$, $\frac{\xi^2}{1-\eta^2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}$ из /55/ и /56/ в систему /58/
 получаем

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_2 + 6\lambda_3\tau + 12\lambda_4\tau^2 + 20\lambda_5\tau^3 &= \Lambda_0 + \Lambda_1\tau + \Lambda_2\tau^2 + \Lambda_3\tau^3, \\ 2\mu_2 + 6\mu_3\tau + 12\mu_4\tau^2 + 20\mu_5\tau^3 &= M_0 + M_1\tau + M_2\tau^2 + M_3\tau^3, \\ 2\nu_2 + 6\nu_3\tau + 12\nu_4\tau^2 + 20\nu_5\tau^3 &= N_0 + N_1\tau + N_2\tau^2 + N_3\tau^3, \end{aligned} \right\} /63/$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_i &= f(\bar{a}_1 = \frac{\partial(\xi'')}{\partial \xi}, \bar{a}_2 = \frac{\partial(\xi'')}{\partial \xi'}, \bar{a}_3 = \frac{\partial(\xi'')}{\partial \eta}, \bar{a}_4 = \frac{\partial(\xi'')}{\partial \eta'}, \bar{a}_5 = \frac{\partial(\xi'')}{\partial \omega}), \\ M_i &= f(\bar{b}_3 = \frac{\partial(\eta'')}{\partial \eta}, \bar{b}_4 = \frac{\partial(\eta'')}{\partial \eta'}, \bar{b}_5 = \frac{\partial(\eta'')}{\partial \omega}), \\ N_i &= f(\bar{d}_3 = \frac{\partial(\omega'')}{\partial \eta}, \bar{d}_4 = \frac{\partial(\omega'')}{\partial \eta'}, \bar{d}_5 = \frac{\partial(\omega'')}{\partial \omega'}), \end{aligned} \right\} /64/$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях \tilde{t} в левых и правых частях уравнений /63/ получаем 12 уравнений в которых имеем 17 неизвестных коэффициентов [2,3]. Для того, чтобы мы могли определить эти коэффициенты, воспользуемся тем обстоятельством, что полученные промежуточные координаты спутника ξ_0, η_0, ω_0 , а также $\xi'_0, \eta'_0, \omega'_0$ для начального момента $\tilde{t}=0$ (например по способу разработанному в [1]), уже включают в себя все возмущения.

Так, что при $\tilde{t}=0$, согласно формулам /60/ и /61/ имеем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \delta \xi_0 = 0, & \lambda_1 &= \delta \xi'_0 = 0, \\ \mu_0 &= \delta \eta_0 = 0, & \mu_1 &= \delta \eta'_0 = 0, \\ \nu_0 &= \delta \omega_0 = 0, & \nu_1 &= \delta \omega'_0 = 0, \end{aligned} \right\} /65/$$

и тогда получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_0 &= \xi_0, & \bar{\xi}'_0 &= \xi'_0, \\ \bar{\eta}_0 &= \eta_0, & \bar{\eta}'_0 &= \eta'_0, \\ \bar{\omega}_0 &= \omega_0, & \bar{\omega}'_0 &= \omega'_0. \end{aligned} \right\} /66/$$

Для всех остальных коэффициентов из формула /63/ следует

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1}{2} (\bar{Q}_0 + Q_0), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} (\bar{H}_0 + H_0), \\ \nu_2 &= \frac{1}{2} H_0, \end{aligned} \right\} /67/$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{1}{6} [\bar{a}_2 (\bar{Q}_0 + Q_0) + \bar{a}_4 (\bar{H}_0 + H_0) + (\bar{a}_1 + a_1) + a_5 G_0], \\ \mu_3 &= \frac{1}{6} [\bar{b}_4 (\bar{H}_0 + H_0) + (\bar{b}_1 + b_1) + b_5 G_0], \\ \nu_3 &= \frac{1}{6} [\bar{d}_4 (\bar{H}_0 + H_0) + G_1 + d_5 G_0], \end{aligned} \right\} /68/$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_4 &= \frac{1}{24} [\alpha_{41}(\bar{Q}_0 + Q_0) + \alpha_{42}(\bar{H}_0 + H_0) + \bar{a}_2(\bar{Q}_1 + Q_1) + \\ &\quad + \bar{a}_4(\bar{H}_1 + H_1) + 2(\bar{Q}_2 + Q_2) + \alpha_{43}G_0 + \bar{a}_5G_1], \\ \mu_4 &= \frac{1}{24} [\beta_{41}(\bar{H}_0 + H_0) + \bar{b}_4(\bar{H}_1 + H_1) + 2(\bar{H}_2 + H_2) + \beta_{42}G_0 + \bar{b}_5G_1], \\ \nu_4 &= \frac{1}{24} [\chi_{41}(\bar{H}_0 + H_0) + \bar{d}_4(\bar{H}_1 + H_1) + \chi_{42}G_0 + \bar{d}_5G_1 + 2G_2], \end{aligned} \right\} /69/$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{41} &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2^2, & \beta_{41} &= \bar{b}_3 + \bar{b}_4^2 + \bar{b}_5\bar{d}_4, & \beta_{42} &= \bar{b}_4\bar{b}_5 + \bar{b}_5\bar{d}_5, \\ \alpha_{42} &= \bar{a}_2\bar{a}_4 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4\bar{b}_4 + \bar{a}_5 + \bar{a}_5\bar{d}_4, & \chi_{41} &= \bar{d}_3 + \bar{d}_4\bar{b}_4 + \bar{d}_5\bar{d}_4, \\ \alpha_{43} &= \bar{a}_2\bar{a}_5 + \bar{a}_4\bar{b}_5 + \bar{a}_5\bar{d}_5, & \chi_{42} &= \bar{d}_5^2 + \bar{d}_4\bar{b}_5, \end{aligned} \right\} /70/$$

Остальные коэффициенты μ_5 , λ_5 и ν_5 можно найти в [2 и 3].

После того, как мы получили неизвестные коэффициенты по формулам /67/-/69/, согласно формулам /65/ и /66/, окончательно можно записать

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi &= \lambda_2\tilde{r}^2 + \lambda_3\tilde{r}^3 + \lambda_4\tilde{r}^4 + \lambda_5\tilde{r}^5, \\ \delta\eta &= \mu_2\tilde{r}^2 + \mu_3\tilde{r}^3 + \mu_4\tilde{r}^4 + \mu_5\tilde{r}^5, \\ \delta\omega &= \nu_2\tilde{r}^2 + \nu_3\tilde{r}^3 + \nu_4\tilde{r}^4 + \nu_5\tilde{r}^5, \end{aligned} \right\} /71/$$

Таким образом мы имеем формулы, позволяющие вычислить возмущения от гравитационного поля Земли непосредственно в координатах промежуточного движения ξ_{np} , η_{np} и ω_{np} которые мы определяем по разработанной в [I] методике с высокой степенью точности.

5. Заключение

В настоящей работе даются формулы с помощью которых можно

определить координаты промежуточного движения по степеням регуляризованного времени \tilde{t} , а также даны выражения, учитывающие влияние гравитационного поля Земли.

Существенно, что во-первых, получены быстрорасходящиеся ряды, отброшенный член \tilde{t}^6 имеет порядок \tilde{r}^{-12} (где \tilde{r} - геоцентрическое расстояние до спутника); во-вторых, полученные один раз величины a_n, b_n, d_n и \tilde{J}_n для определенного момента $t = t_0$, остаются постоянными, как при экстраполяции орбиты, так и при получении возмущений от гравитационного поля Земли; в третьих, возмущения введены непосредственно в координаты промежуточного движения, а это дает возможность оценить изменения координат спутника, вызванные гравитационным полем Земли на различных промежутках времени.

Полученные формулы (49), (50) для $\bar{R}_r^{(n)}, R_{r,z}^{(n)}$ выраженные в виде суммы по переменным ξ, η и ω дают возможность определять гармоники любого порядка.

Наконец отметим, что на основании анализа, проведенного в работах [2] и [3] видно, что изменение координаты ξ (т.е. в направлении геоцентрического радиуса-вектора) в два и более раз сильнее под действием геопотенциала, чем изменения других координат η и ω (ω в первом приближении можно рассматривать как прямое восхождение и изменения ω от зональных гармоник настолько мало, что его можно не рассматривать).

Это дает возможность сделать заключение, что, если в будущем начнем улучшение динамических постоянных Земли (коэффициентов зональных, тессеральных и секторальных гармоник), то проводить его надо по наблюдениям, измеряющим непосредственно координату ξ , а именно - по лазерным и высотомерным наблюдениям. Использование для этой цели фотографических наблюдений не будет эффективным, поскольку они дадут косвенные измерения (угловые) быстроизменяющейся величины ξ .

Все выверенные формулы удобны для программирования и вычислений на электронно-вычислительной машине.

Литература

1. Н. Георгиев "Определение координат промежуточного движения ИСЗ с помощью степенных рядов регуляризованного времени", Труды ГАИШ - 49, Москва, 1977.
2. Н. Георгиев "Степенные ряды для возмущений координат промежуточного движения от зональных гармоник геопотенциала", Труды ГАИШ - 49, Москва, 1977.
3. Н. Георгиев "Степенные ряды для возмущений координат ИСЗ от тессеральных и секторальных гармоник геопотенциала", "Научные информации Астросовета" № 39, Москва, 1977.
4. Н. Георгиев "Степенные ряды для возмущения координат ИСЗ от Луны и Солнца", Научные информации № 3, Астросовет АН СССР, Москва, 1977.
5. Е. П. Аксенов "Асимметричные промежуточные орбиты ИСЗ", Сообщения ГАИШ, № 155, Москва, 1968.
6. Е. П. Аксенов "Один вид дифференциальных уравнений движения спутника", Труды ГАИШ, т. 35, Москва, 1966.
7. Е. П. Аксенов "Движение спутника осесимметричной планеты", Труды ГАИШ, т. 35, Москва, 1966.

The determination of the Earth gravity field

by use of satellite gradiometry

by

Jan Łatka ^{1/}

The determination of the Earth gravity field by use of artificial Earth satellites usually consists in determining the coefficients C_{nm} and S_{nm} in the known formula /1/ with data on orbit perturbations.

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \cdot \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot [C_{nm} \cos(mL) + S_{nm} \sin(mL)] \cdot P_{nm}[\sin(F)] \right\} \quad /1/$$

This method is limited in its scope and by now the coefficients n and m are known only up to 20 - 30. New satellite methods such as, satellite altimetry, satellite gradiometry or doppler measurements, can furnish new possibilities. It is hoped that these methods will permit to determine the coefficients for n and m up to 75 or even 100.

This report is based on a slightly different approach to the problem. I want to determine gravity anomaly directly using satellite gradiometry. My approach is limited to regional determination but it is possible to extend it to the global scale.

Formulas /2/ and /3/ define gradient tensor and the relations between different components of this tensor. As the gravity potential is harmonic outside the Earth there exist the first and second spatial derivatives. Due to the solenoidal and irrotational character of field we have only five independent components of gravity tensor.

$$\begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} V_{xx} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ V_{yx} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad /2/$$

1/ Polish Academy of sciences, Institute of Geophysics,
00-901 Warsaw, Pk1N 2313, Poland

$$\bar{\nabla} \bar{v} = -\bar{g}$$

$$\bar{\nabla} \bar{v} \cdot \bar{g} = \bar{\nabla}^2 \bar{v} = 0$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{g} = 0$$

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$$

$$V_{xy} = V_{yx} ; V_{xz} = V_{zx} ; V_{yz} = V_{zy} ;$$

/3/

During last few years there have been promising developments in the area of gradient measurements. There exist many different concepts of gradiometers. Forward's construction [1] seems to be the most promising one. In the near future we can expect to attain a precision of up to 0,01 Bu and thus a resolution of 200 - 300 km on the Earth's surface. Unfortunately at the moment we have not yet real gradients measurements. In my numerical experiment I have used simulated values, calculated by means of Rapp's model of gravity field [2].

Figure 1 and formula /4/ show the component T_{zz} in the local coordinates system xyz , analogously can be obtained other components.

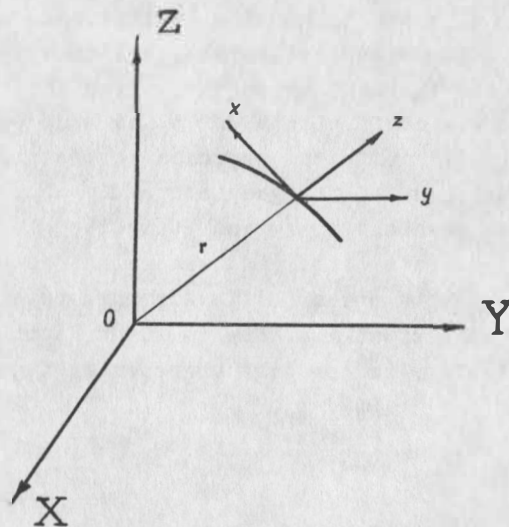


Fig. 1

$$T_{zz} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (n+1)(n+2) \frac{GM}{H} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) \left[\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \quad /4/$$

To determine the gravity anomaly, the collocation method has been used. Generally collocation comprises leastsquares adjustment and prediction. In my case, which involves prediction only the very simple formula /5/ is sufficient to solve the problem.

$$S_p = C_{sx} \bar{C}^{-1} \cdot x$$

/5/

The prediction has been done for an area of 10 x 10 degrees on the Earth's surface. The results have been compared with the reference gravity anomaly. In numerical experiments, different configurations of "measurements" have been used, including the combined method consisting of gradients and sporadic gravity anomaly measurements. As a covariance function for the disturbing potential I have used the known development in spherical harmonics given by Moritz /3/.

$$K(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(\cos \psi) \quad ; \quad k_n = \sum_{m=0}^n (A_{nm}^2 + B_{nm}^2) \quad /6/$$

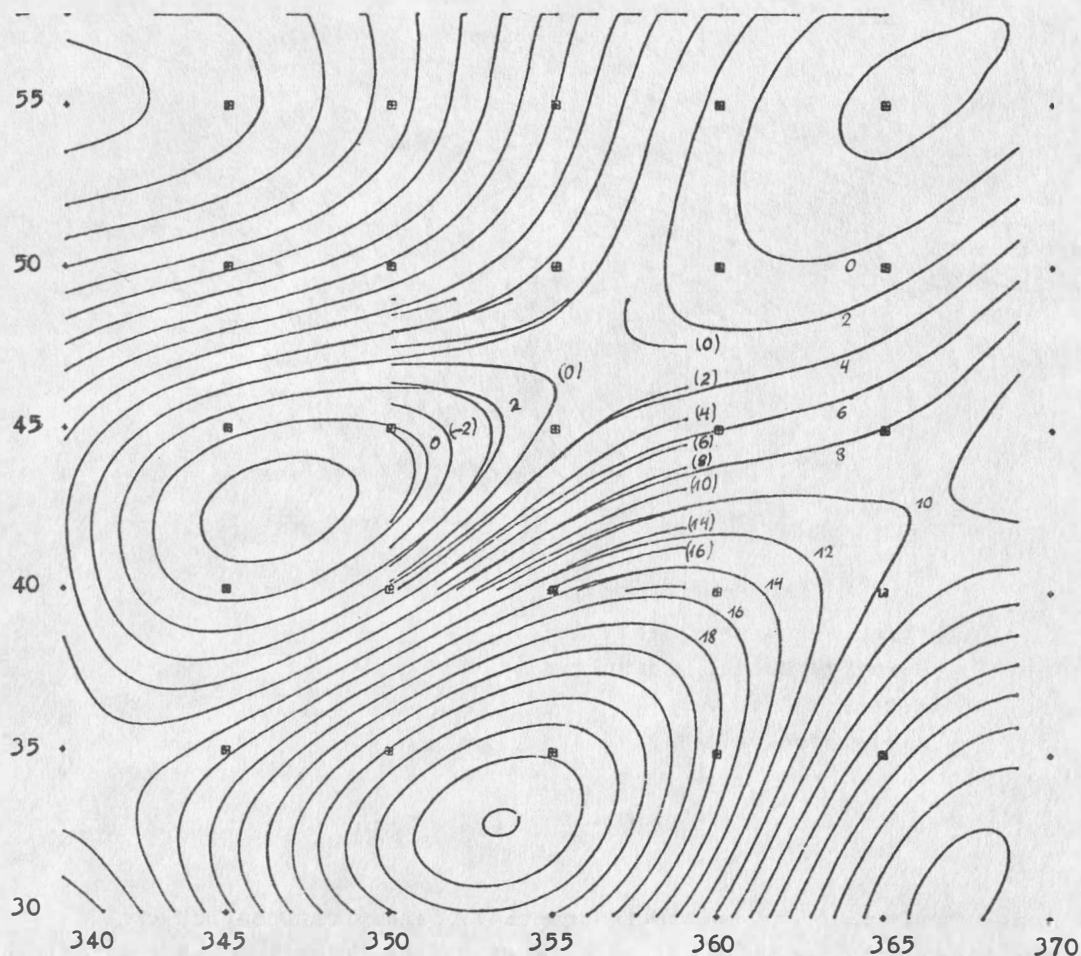


Figure 2

- ⊕ gradient measurements
- (a) predicted values
- a reference values

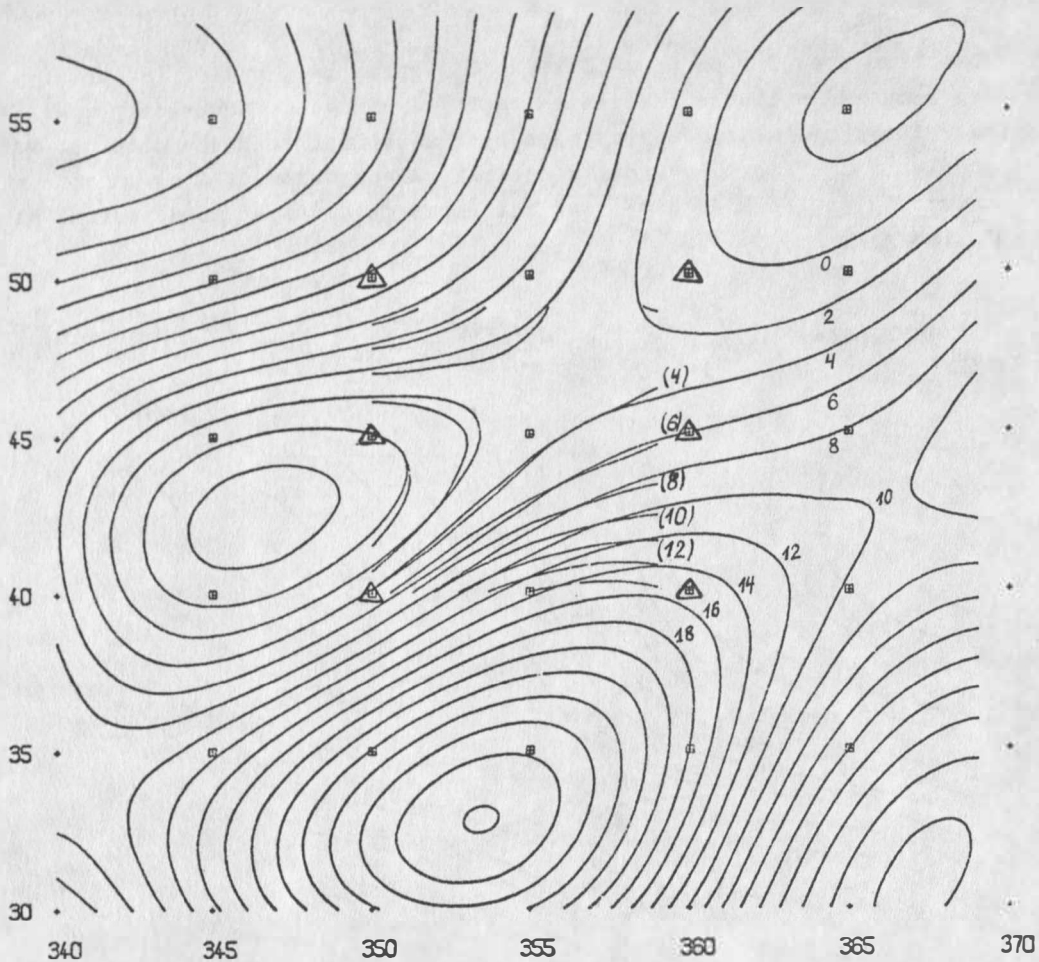


Figure 3

- ⊠ gradient measurements
- △ gravity anomaly measurements
- (a) predicted values
- a reference values

Such a covariance function is too smooth in practical determinations but will do for this experiment. Covariance functions for values related to the potential as gradients and gravity anomaly have been developed by virtue of the law of covariance propagation. For the optimal distribution of measurements the mean difference between gravity anomalies and predicted values was about 3,5 mgal when only gradiometric measurements had been used on the height of 200 km /fig 2/. When sporadic gravity anomaly measurements on the Earth surface were available, this difference was less than 0,5 mgal. /Fig 3/.

Figure 4 shows the effect of satellite height on the precision of gravity anomaly prediction. This effect is quasilinear.

I expect that a precision better than 0,5 mgal can be achieved if different components of gradient tensor and sporadic gravity anomaly measurements on Earth surface are used simultaneously.

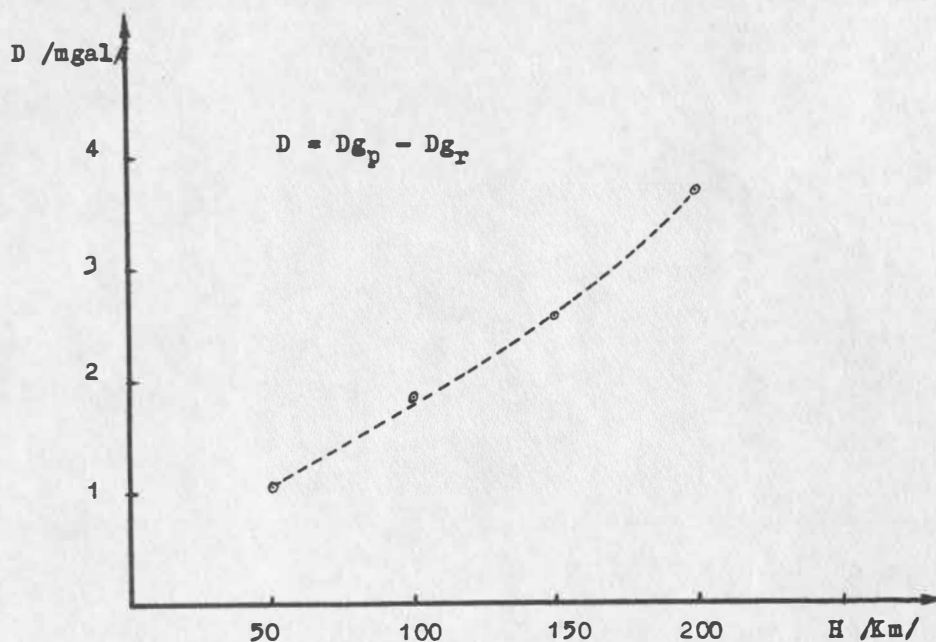


Figure 4

— " —

References:

- [1] Forward R.L. Review of artificial satellite gravity gradiometer techniques for geodesy.
Hughes Research Laboratories, Malibu Research report 469, may 1973.
- [2] Rapp R.H. Numerical results from the combination of gravimetric and satellite data using the principles of least squares collocation.
Report No 200 Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, 1973.
- [3] Moritz H. Least-Squares Collocation
Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Theoretische Geodäsie Reihe A Heft Nr 75
München 1973

The Satellite Laser of Finland

by

SEPPO J. HALME, MATTI PAUNONEN, A.B.R. SHARMA¹⁾JUHANI KAKKURI and KARI KALLIOMÄKI²⁾

(Presented by T.J. KUKKAMÄKI)

Zusammenfassung

Es wird ein in Finnland gebauter Satellitenlaser beschrieben. Er besteht aus einem gütegeschalteten Rubinlaser mit einer Wellenlänge von 693 nm. Seine Leistung beträgt 1,2 J, die Impulsdauer 20 ns. Der Empfänger ist ein astronomisches Spiegelteleskop mit 63-cm-Öffnung. Laser und Teleskop sind äquatorial montiert. Sie werden mit computergesteuerten Schrittmotoren nachgeführt. Die Laufzeit wird mit einem Nanosekunden-zähler bestimmt. Der Zeitanschluß erfolgt über einen LORAN-Empfänger. Über die neuesten Resultate wird berichtet.

1. Introduction

The Satellite Laser of Finland is located at the Metsähovi Space Geodetic Station (Lat. = 60°13'2", Long. = 24°23'9") approximately 40 km from Helsinki. System planning was initiated in 1972 with financial support from the Academy of Finland, and in 1974 a cooperation agreement was made with the Geographical Survey Office of Sweden, which was provided further funding. The various sub-systems have now been individually tested and assembled at the station. Preliminary data from 332 m long calibration line has been obtained (Table 1), and the indications are that calibration line errors will be between 0.4 to 1.8 ns (6 to 27 cm) depending on the type of detection.

Table 1. Standard deviations (m) found in the preliminary calibration line measurements; n = number shots.

Date	m (ns)	n	Type of detection
1976 Sept. 26.	+0.78	10	constant fraction
"	1.24	10	" "
"	0.89	10	" "
1976 Sept. 29.	0.42	9	centroid detection
"	0.66	10	" "
"	0.92	8	" "
1976 Oct. 18.	1.84	30	" "

¹⁾ Helsinki University of Technology
²⁾ Finnish Geodetic Institute

The above results are very preliminary ones. More complete results will be reported later when all the parts of the laser are developed to the final stage.

The purpose of this report is to briefly outline the equipment we are using and some of the main characteristics. Detailed description appear in other referred reports which are available on request.

2. Laser transmitter

The transmitter (PAUNONEN, 1975) is based on a ruby rod pumped by a helical flash lamp at a maximum energy of 5000 J. Cooling is achieved by using de-ionized water pumped using a standard circulator pumped. The water temperature is controlled to 0.1 °C using both a refrigerator and a heater.

Pumping is achieved the discharge of a 400 μ F capacitor at a maximum of 5 kV, the voltage being stable to better than 0.5 V.

The output is obtained in the Q-switched mode, and the pulse energy is 1 to 2 J and its duration about 20 ns.

3. Electro-optical receiver

The laser "echo" is collected by a 63 cm parabolic mirror and directed on to a 12 % quantum efficiency photomultiplier tube via focusing optics and an interference filter. A mechanical shutter is also included to eliminate potential back scatter problem.

The output of the photomultiplier is passed through an integrating receiver (SHARMA, 1975, 1976) and onto a constant fraction counter, thereby providing centroid timing. The receiver has sufficient dynamic range to handle several thousand photoelectrons.

4. Mount electronics

The equatorial mount is driven by stepper motors, and can be pointed to given coordinates either manually or by pre-setting thumb wheel switches according to ephemerides prepared by a computer center. Control can also be handed over to a computer.

The pointing accuracy is about 1 min of arc as confirmed by pointing to fixed stars.

5. Time keeping electronics

Station time keeping is achieved by using a crystal clock which is phase locked to the LORAN-C transmission. In this way good short term stability is provided by the

crystal, while long term stability is assured by the atomic clocks used for controlling the LORAN-C. The accuracy obtained is between 5 to 10 μ s.

6. Weather station

The weather station is automatically operated (KAKKURI et al. 1976) using capacitive type transducers, and the data is punched onto paper tape. The measurement accuracy has been found to ± 0.5 °C for temperature, ± 0.7 mb for air pressure, and ± 3.9 % for relative humidity.

7. Mini-computer

A mini-computer, D-116 (Digital Computer Controls Inc.), is available. It will eventually be used for automation, but for now only for data acquisition and processing. Thus, outgoing and return pulse shapes, UTC, weather data, directional coordinates, and the two way travel time will be stored in the computer and also punched on paper tape, for later processing. The pulse shape information will be obtained in binary form using a transient digitizer which is also available.

8. Conclusion

The satellite ranging instrument described will be used for realizing the international scientific objectives, which include, for example, the following principles:

- measurements of the high order geodetic networks,
- investigations made for improving the gravity field models,
- Earth rotation and polar motion,
- tracking of the satellites equipped with retroreflectors in order to provide data for accurate orbit determination.

The accuracy of our system is expected to be one meter in ranging of the satellites. The system will be upgraded to give higher accuracies than one meter.

References

- KAKKURI, JUHANI; KALLIOMÄKI, KARI: 1976. An automatically operated weather station. Rep. Finn. Geod. Inst. 76:4. Helsinki
- PAUNONEN, MATTI V.: 1975. A high power q-switched ruby laser for satellite ranging. Rep. Finn. Geod. Inst. 75:11. Helsinki
- SHARMA, A.B.: 1975. An integrating, centroid timing, receiver for satellite ranging. Rep. Finn. Geod. Inst. 75:10. Helsinki
- SHARMA, A.B.R.: 1976. A theoretical analysis of optical receivers used in satellite ranging. Rep. Finn. Geod. Inst. 76:3. Helsinki

Improvement of the Potsdam Laser Ranging Equipment

by

Reinhart Neubert ¹⁾ and Harald Fischer ¹⁾Zusammenfassung

Nachdem sich das Potsdamer Satellitenentfernungsmeßgerät seit drei Jahren in experimentellem Einsatz befindet, konnten weitere Verbesserungen erzielt werden. So wurde durch den Austausch des ursprünglichen Flankendiskriminators gegen einen Constant-fraction-Typ eine Verringerung des systematischen Fehleranteils erreicht. Für zukünftige Blindbeobachtungen wurde die SBG-Montierung mit Einrichtungen zur genauen Positionierung ausgerüstet. Zur Steigerung der Reichweite wurde der Einsatz eines GaAs-Photovervielfachers vorbereitet.

1. Introduction

The Potsdam laser ranging equipment is based on the satellite camera Zeiss SBG. This camera has been equipped with a twostage ruby laser and the necessary receiving and timing electronics.

A unique feature of the instrument is the ability to make both photographic and laser observations. This is possible by means of a hinged cassegrain mirror.

The ranging equipment is now more than two years in operation with satisfactory results. The ranging performance is typical for a first generation instrument:

Ranging error: $\pm 1 \dots 2$ m

Maximum range: appr. 3000 km for Geos A

During the observation programme of April/May 1976 40 passes of the Geos satelliten with approx. 600 echoes and 20 photoplates have been obtained.

Nearly half of the observations were taken in the combined mode that is alternating photographic and laser observation during each passage of the satellite.

Experience of the two years operation led to some improvements. These are directed to

1. the tracking capabilities
2. the timing accuracy and sensitivity of the receiver

†) -----
Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Physik der Erde
DDR - 15 Potsdam, Telegrafenberg A 17

2. Tracking

All observations have to be made by visual tracking so far. To make blind observations in the future we tried to improve the static pointing accuracy of the mount.

For this purpose axis 3 and 4 of the 4-axis SBG mount have been equipped with encoders for digital reading of the angles. Rotation of axis 1 and 2 are indicated by optical means. By astronomical observations we found that the mount shows rather strong bending effects of the third axis. But taking this bending into account, we obtained a static pointing accuracy of better than 1 minute of arc.

This should be sufficient to get echoes without visual tracking. Unfortunately the necessary precise predictions are not available for us as yet.

We hope to generate improved predictions using observations of our station only. Some work in this direction is now in progress at our institute.

For very short periods a simple correction model may be used. For instance we obtained some echoes of Geos A in the last part of a transit by static pointing using constant corrections of time and inclination resp., which were determined visually in the first part of the same satellite transit.

Experiments on static pointing are a first step within the studies of the mechanical quality of the mount and for the derivation of the necessary error model. Later a new numerical controlled drive will be installed by the manufacturer of the camera.

If no precise predictions are available good visual tracking capabilities are still an important feature for weak satellites. Thus we tried to use the high quality Schmidt system of the receiver as a guiding telescope too. For this we introduced a small dichroic mirror into the receiver ray path.

The red light of the echo is reflected by this mirror to the photomultiplier, whereas the light with wavelengths shorter than $0.6 \mu\text{m}$ is transmitted to the observer. With this simple improvement we were able to get echoes from Starlette using visual tracking.

3. Ranging Accuracy

It is well known that the accuracy of the time interval measurement depends largely on the nature of the stop channel trigger and the amplitude and shape of the echo signal. Using at first a simple fixed threshold leading edge trigger we found a linear dependence of the time interval on the logarithm of the signal amplitude. A 10 times stronger signal causes a reduction of the time interval of 7 ns corresponding to 1 m.

To reduce this systematic error source we designed simple constant fraction discriminators for both the start and stop channel. The effect was tested by range

measurements to a fixed prism target of 2 km distance. The signal amplitude was varied using neutral density filters in front of the receiver. The results are shown in Fig. 1.

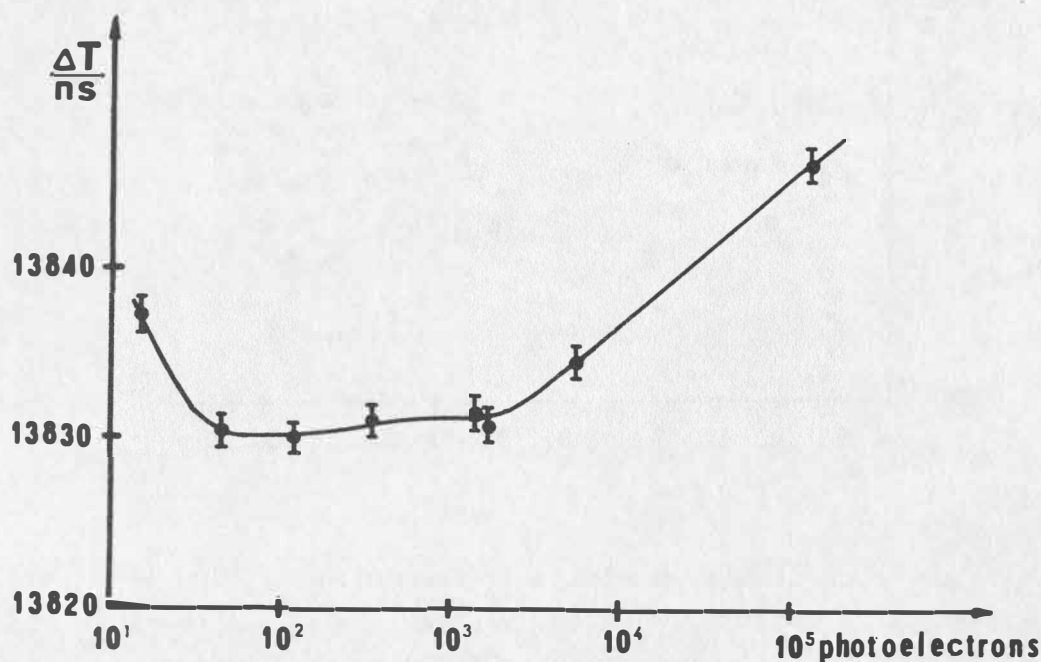


Fig. 1. Dependence of the calibration on signal amplitude

From this figure it is obvious that for nearly two decades of signal-amplitude there is a flat portion of the curve, i. e. minimal amplitude dependence of the measured range. Close to the threshold our trigger behaves like a normal leading edge trigger with associated negative time shift. Above signal levels of appr. 10^3 photoelectrons a strong positive time shift occurs, presumably due to overload.

The new discriminators have been used since July 1975. Investigations of satellite-measurements using short arc method showed that the statistical r.m.s. range noise is typically 1.0 m or 7 ns [1]. This is nearly two times the limit set by the resolution of the counter (10 ns counter resolution causes a mean standard deviation of 4.1 ns). Fig. 2. shows as an example the range residuals of two consecutive transits of Geos C. The standard deviation is 0.9 m in this case.

Similar results showed earlier work with the fixed threshold trigger [1].

It is obvious from Tab. 1 that the range noise is not significantly lower with the new trigger. From target measurements we conclude however that the systematic error produced by strong changes in mean signal amplitude, which cannot be detected by short arc analysis, has been reduced.

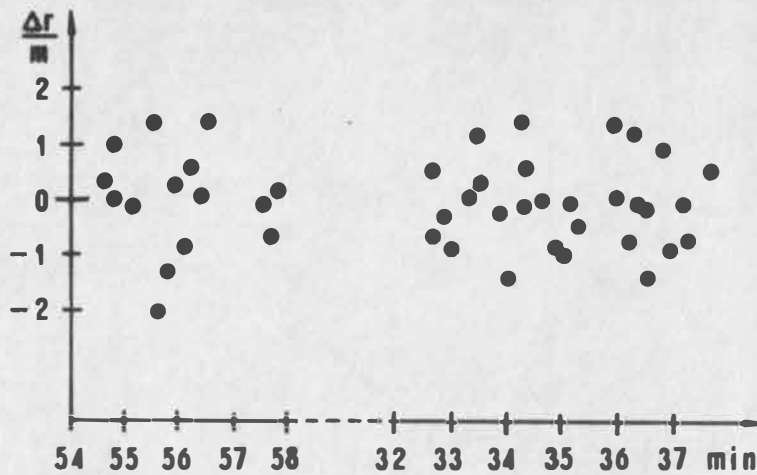


Fig. 2. Range residuals of two Geos C transits 1976 May 17th, 20^h56^m and 22^h35^m UT

Tab. 1. r.m.s. range noise for some satellite transits

Satellite	MJD	number of transits points		standard deviation	trigger type
Geos A	42 127 - 42 147	6	63	1.1	fixed threshold
Geos B	42 621 - 42 629	3	83	1.0	constant fraction
Geos C	42 915	2	45	0.9	"
Starlette	42 950	2	12	1.1	"

Current practice with target calibration measurements showed very stable results nearly unaffected by signal changes from weather, actual laser power and so on.

Fig. 3. shows the long term stability of the range calibration constant over a period of 300 days. Each point is the mean of 15 to 20 individual measurements.

Near MJD 42 900 we made a readjustment of the start channel trigger resulting in a 5 ns shift.

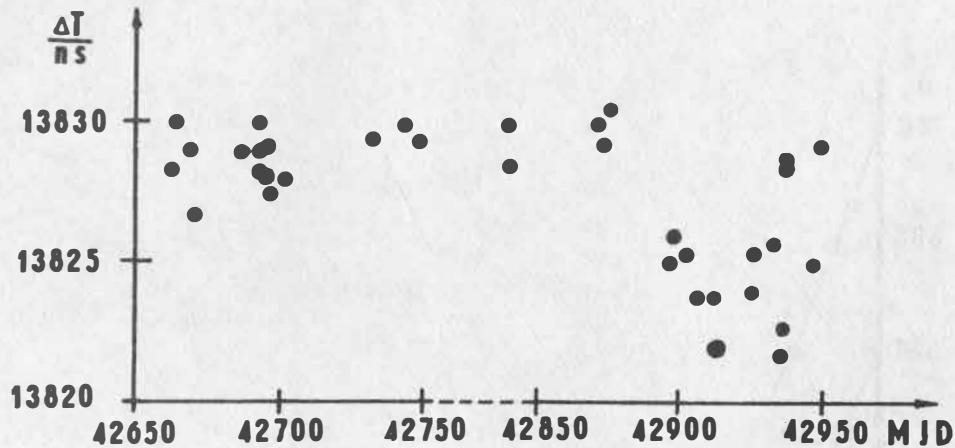


Fig. 3. Long term stability of the calibration

4. Receiver Sensitivity

The presently used photomultiplier RCA C 31000 is a multialkali-type of 3 percent quantum efficiency for ruby laser wavelength. Since the advent of the GaAs-cathode (quantum efficiency as high as 20 percent) the sensitivity of a red light receiver may be as high as for the green part of the spectrum.

The available RCA Type C 31034 however has to be operated at anode currents below 10^{-7} A for 30 s averaging period according to the manufacturer. This implies special precautions. During the development of the necessary receiver circuits we made some laboratory tests, which may be of interest to other users. We decided to use pulsed supply voltage even at night because of the strong atmospheric backscatter signal. Attempts to gate only the first dynode resulted in insufficient suppression of the PMT gain. We use now combined static and pulsed total voltage. The stop channel of the receiver is opened after the rise of the PMT-voltage.

The measured dark-pulse-spectrum shows that for dark night sky and gate open time of the stop channel of 1 ms the receiver threshold may be set as low as 2 electron equivalents. This applies for cooling of the PMT. In this case the increase in quantum efficiency is equivalent to the increase in overall sensitivity. At daylight conditions, background radiation is so strong that cooling is not necessary. Furthermore the higher quantum efficiency of the GaAs-PMT increases not only the signal, but also the average background photoelectron rate. We expect for this reason that the increase in overall sensitivity is only one half of the increase in quantum

efficiency if nothing is done to suppress the background (reduction of optical filter passband for instance).

Even at night, near 1 electron equivalents threshold problems may arise from the fact that the dark pulse rate increases immediately after the PMT has been exposed by the atmospheric backscatter. Experimentally we found that the effect extends for more than 10 ms after exposition (Fig. 3.).

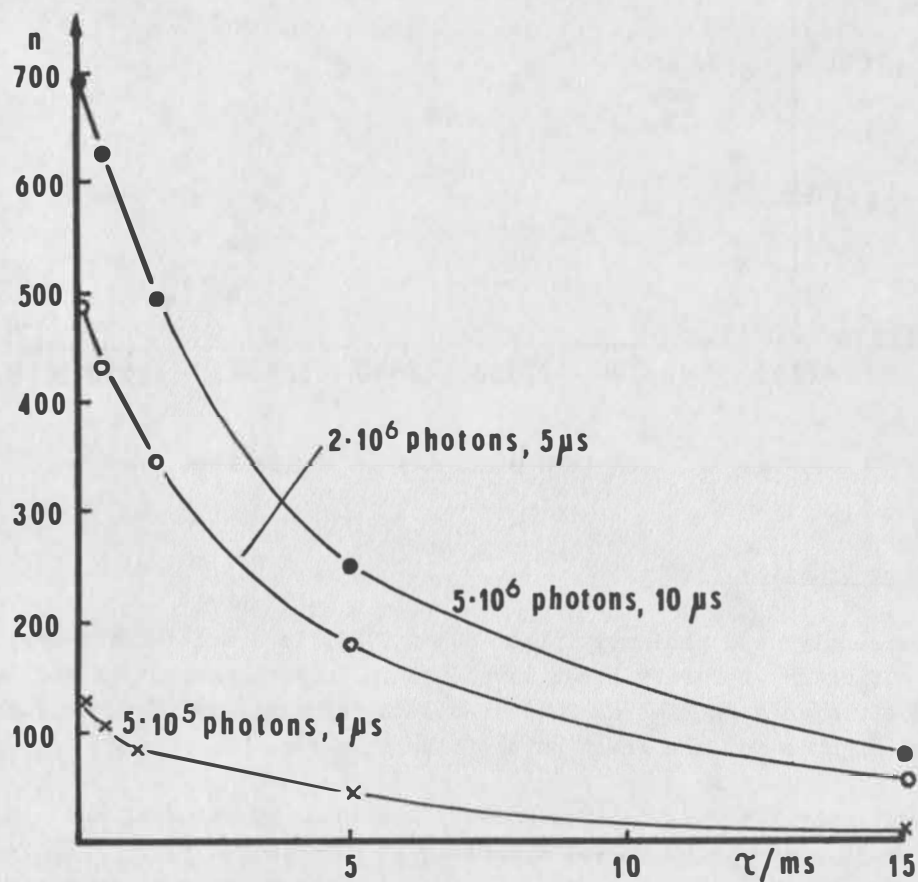


Fig. 4. Time dependence of enhanced dark count after exposition of the PMT RCA C 31034 A.

Parameter: Exposition light energy in photons

τ : Delay time n : Dark pulse count during 10 ms

In these measurements the backscatter pulse was simulated using a light emitting diode (LED). During exposition the PMT-voltage was 1200 V. After some delay time (abscissa in Fig. 4.) the PMT-voltage was increased for 10 ms duration to approx. 1600 V, and the pulses were counted.

Further details may be found in [2].

References

- [1] MONTAG, H.: Vermessungstechnik, Berlin 23 (1975) 2, p. 60-63
- [2] FISCHER, H.; NEUBERT, R.: Veröff. Zentralinst. Physik Erde
Potsdam (1976) 40, p. 77-95

SATELLITE LASER RANGING STATION
AT BOROWIEC

S.Schillak, E.Wnuk
/Poland/

A B S T R A C T . This paper presented the technical parameters and initial working results of satellite ranging with the first laser radar of the "Interkosmos" type, following its transfer from the Ondrejov Astronomical Observatory to the Astronomical Latitude Observatory in Borowiec. In the period between April 1 and May 31, 1976, 22 ranging operations were carried out on the Geos A and the Geos C satellites, with 253 echoes obtained as a result. The ranging precision, calculated with the described polynomial method, appeared to fall between 1 - 4 m.

СПУТНИКОВАЯ ЛАЗЕРНАЯ СТАНЦИЯ
В БОРОВЦЕ

С.Шильяк, Э.Внук
(Польша)

Р Е З Ю М Е . Описывается технические параметры и первые результаты наблюдения первого лазерного спутникового дальномера типа "Интеркосмос" после его перемещения из Астрономической Обсерватории в Ондржейове в Астрономическую Широтную Обсерваторию в Боровце. В период от 1.04 до 31.05.76 сделано 22 наблюдения спутников Геос А и Геос С, от которых получено 253 отражений. Точность этих наблюдений, которая определялась приведённым методом полиномов составлялась от 1 до 4 м.

The first satellite laser radar of the "Interkosmos" type, following a 3 years period of observations at the CSAV Astronomical Institute in Ondrejov /Czechoslovakia/, was transferred in 1975 to the Astronomical Latitude Observatory of the Polish

¹⁾ Polish Academy of Sciences, Inst. of Geophysics, Astron. Latitude Obs., AOS Borowiec, 63-120 Kornik, Poland

Academy of Sciences in Borowiec /Poland/. The results of observations performed with this laser radar in Ondrejov are discussed by Sechnal /1973/, Navara /1974/ and Prokeš /1976/.

The laser radar was installed in the eastern meridian house of the Borowiec Observatory, whose geographical coordinates obtained hitherto in this pavillon with the help of a transit instrument are:

$$\varphi = 52^{\circ}16'38''.3$$

$$\lambda = -1^{\text{h}}08^{\text{m}}18^{\text{s}}.46$$

After a period of preparatory work, concerned with installing the radar and a series of apparatus tests, the laser radar in Borowiec was ready to start observations at the beginning of 1976.

Description of the laser radar.

The laser radar at Borowiec is a first generation instrument. The block diagram of the radar is presented in Fig.1. The technical parameters of individual elements of the apparatus are given below:

Laser - ruby, two linear flashlamps, Q-switch by the rotating prism

Energy - 1 - 2 J

Repetition rate - 0.1 Hz

Half-energy impuls width - 30 ns

Beam divergence - 3 mrad

Transmitting optics - Galilean telescope

Diameter - 12 cm

Output beam divergence - 0.6 mrad

Receiver optics - Cassegrain-Mangin telescope

Receiver aperture - 32 cm

Focal length - 100 cm

Filter - 27 Å, 50% transmission

Photomultiplier - EMI 9558B

Counter resolution - 5 ns, stop input gated

Mount - 4-axes

Tracking system - visual, semiautomatic with manual corrections

Guiding telescope

Diameter - 12 cm

Field of view - 4°

Timing accuracy - 0.1 ms

The station timing was based on the quartz clocks of the Berowice Observatory, the daily stability of which is 2×10^{-11} , and which have a timekeeping in the UTC system with the accuracy of $1 \mu\text{s}$ /Domiński, 1973/.

First measurements.

The first measurements of distance were obtained on April 10, 1976, during tracking the satellite Geos A. In the course of "Interkosmos" satellite campaign, between April 1 and May 31, 1976, 22 observations of Geos A and Geos C passes were carried out, with 253 obtained echoes as the total result. The number of hitting shots as compared to their total number was, for Geos A 44% and for Geos C 74%.

Before every satellite pass, 25 calibration measurements were performed, aimed at a ground target 1478.9 m distant from the radar. The amplitude of the target calibration return-pulse corresponded to the medial amplitude of the satellite return-pulse. The standard deviation obtained during target calibrations was equal to 0.8 m. The long-term calibration stability is presented in Fig.2.

Smoothing of the observation dates.

The approximate estimation of the internal precision of our observations was arrived at by fitting the observed distances with the help of orthogonal polynomials, with the least squares method.

The polynomial fitting of dates was carried on up to such a degree of the polynomial, for which the residuals O-C were random in character. This condition will be fulfilled by Fisher's variable F, of the form:

$$F(p) = \frac{\sum (\Delta r_1^{(p-1)})^2 - \sum (\Delta r_1^{(p)})^2}{\sum (\Delta r_1^{(p)})^2} \cdot \frac{1}{n-p-1}$$

when $F^{(p)} \leq F_0$, where F_0 is obtained from Fisher's tables for the level of significance 0.01 and for the degrees of freedom

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = n-p-1,$$

$\Delta r_1^{(p-1)}$ - residuals corresponding to the degree of the polynomial equal $p-1$,

$\Delta r_1^{(p)}$ - residuals corresponding to the degree of the polynomial equal p ,

n - number of echoes from the satellite,

p - degree of the polynomial.

If the difference between succeeding degrees of the polynomial $p-1$ and p is negligible $[F^{(p)} \leq F_0]$, the higher degree $[p+1]$ should be checked, and if the difference $[p, p+1]$ is also negligible, smoothing procedure can cease at this point, the assumed degree of the polynomial being equal to $p-1$. If such is not the case, the procedure should continue, until the above mentioned condition is obtained.

An exemplary procedure for obtaining the degree of the polynomial with the described method is shown in Tab.1.

Tab.1. Determining the degree of the polynomial for a Geos A passage on May 19, 1976.

Degree of the polynomial	R.M.S. /m/	$F^{(p)}$	F_0
2	3703.53		
3	3040.52	5.80 < 9.33	
4	201.84	2485.37 > 9.65	
5	162.41	5.44 < 10.04	
6	9.95	2389.97 > 10.56	
7	8.89	2.02 < 11.26	
8	1.20	377.88 > 12.25	
9	1.18	0.20 < 13.74	
10	1.01	1.83 < 16.26	
11	0.95	0.49 < 21.20	
12	0.92	0.24 < 34.12	

Since the difference between the 7-th and 8-th degree of the polynomial is still significant [Tab.1], whereas for the remaining degrees there are no significant differences, the 8-th degree of the polynomial should be taken as final.

The residuals from the smoothing with an 8-th degree polynomial

for this pass is presented in Fig.3.

Results.

The approximate estimation of precision with the above described method was carried out only in respect to observations containing no less than 8 satellite echos. The results of observations carried out in Borowiec during April and May 1976 are contained in Tab.2.

Tab.2. Results of the first laser observations at Borowiec Observatory.

Nr of series	Date 1976	UTC	n	p	R.M.S. /m/
Geos A					
1.	04.10	1 ^h 09 ^m	6	-	-
2.	26	22 12	3	-	-
3.	05.02	20 33	8	5	1.66
4.	06	0 58	11	7	0.76
6.	07	20 55	3	-	-
7.	08	1 06	7	-	-
9.	09	1 11	3	-	-
11.	09	23 10	5	-	-
13.	10	23 14	8	5	0.50
16.	17	21 39	5	-	-
19.	19	21 48	16	8	1.20
21.	22	22 01	13	7	1.14
Geos C					
5.	05.07	20 ^h 01 ^m	7	-	-
8.	08	21 26	16	7	2.43
10.	09	21 11	26	11	3.70
12.	10	20 57	21	10	3.46
14.	15	21 24	5	-	-
15.	17	20 55	8	6	4.03
17.	17	22 34	16	10	1.04
18.	18	22 19	18	9	2.17
20.	19	22 05	22	10	3.49
22.	22	23 01	25	10	2.18

The small number of echos from Geos A is due to the visual method of tracking and small frequency of the laser pulses. The polynomial fitting of the observations of Geos A required a lower degree of the polynomial, compared to the observations of Geos C. It is likely that this was caused by the smaller distance from

the satellite Geos C, but the small number of observations, however, does not permit definite conclusions. The precision of the observations of Geos A, averaging 1.12 m, corresponds to the estimated precision for that type of laser radar, and does not differ much from that of other radars of the "Interkosmos" type. The observations of Geos C showed a lower precision, averaging 2.95 m. The reason for this lies probably in the greater changes of amplitude of the return-pulse, ranging between 100 and 500 mV, which appeared during this satellite pass. In the case of Geos A, the amplitude of the return-pulse changed only slightly, within the range of 100 and 200 mV. If the width of laser pulse is large, the changes of amplitude of the return-pulse may cause random errors of as much as several meters. In the nearest future, the relation between the signal-strength of the return-pulse and measurement distance will be investigated by a series of calibration tests.

Conclusions.

Initial measurements at Borowiec showed that the laser radar was in working order. They also enabled us to improve the radar's performance.

1. To improve the precision of observations a centroid determination integration amplifier will be attached to the output of the photomultiplier.
2. To improve the action radius and efficiency of ranging, the photomultiplier will be exchanged for an RCA 8852.
3. To improve the efficiency of ranging, the motor of the tracking system will be substituted with a tape-controlled stepping motor.
4. The polynomial method should be considered as approximate for a small number of echos. For a more precise estimation and for reckoning systematic errors, the orbital method is recommendable.

Acknowledgements.

We wish to thank the staff of the Ondrejov Observatory as well as of the Prague Institute of Technology for invaluable assistance in transferring the laser radar to Borowiec, and for their service in initial stages of its operation. We would also like to thank W. Kiełek, for his assistance in solving many initial pro-

blems, and K.Kornowicz for his part in the observations.

R e f e r e n c e s

1. Domiński I. : Metoda powiązania lokalnej skali czasu UTC/Be/ z międzynarodowym czasem atomowym TAI, Postępy Astronomii, XXI, z.4, 1973.
2. Linnik J.W. : Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowywania obserwacji, PWN, Warszawa, 1962,
3. Oktała W. : Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie, PWN, Warszawa, 1971.
4. Navara P. : Time base of satellite laser radar at Ondrejov Observatory, BAC, 25, p.46, 1974.
5. Navara P. : The Interkosmos satellite laser radar, BAC, 25, p.313, 1974.
6. Prokeš M., Lala P. : Accuracy of laser ranging to satellites from Ondrejov Observatory in 1972 - 1975, Presented at the working session on problems of satellite geodesy, Zgorzelec, April, 1976.
7. Sechnal L. : Satellite laser ranging instrument at the Ondrejov Observatory, Space Research, XIII, p.51, Akad.Vlg, Berlin 1973.

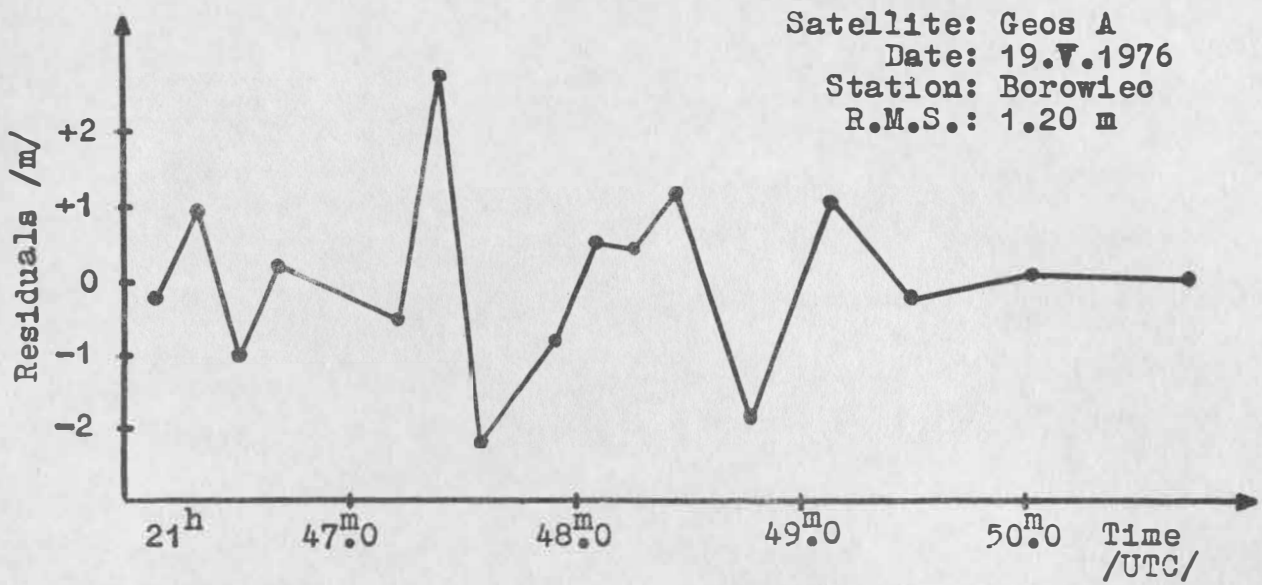


Fig.3. Range residuals.

Event Timer for the Second Generation Laser Radar

by

P. HIRŠL, V. KRAJÍČEK and M. PFEIFER¹⁾Summary

The event timer developed on the Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering is able to measure time intervals with precision up to 1 ns and resolution of 0.1 ns. It is able to receive more than one stop pulse for one start pulse. Information obtained has the form of instants of time in seconds measured from the beginning of the measurement. The intervals must be computed by a computer on line.

The information transmission is controlled by means of an internal program introduced from a keyboard, by a computer or in another way. The flow of information is determined by the program as to the path and the quantity used as well. The internal program may be used for the control of other parts of the laser radar.

The event timer includes a clock adjustable to UTC time base. The time reading of the beginning of the measurement is stored in the internal memory and periodically fed into the computer.

Резюме

Измеритель временных интервалов построенный на ЭЦМ позволяет измерять временные интервалы с точностью до 1 нс и различимостью 0,1 нс. В принципе возможно с его помощью привести к одному старт-импульсу более чем один стоп-импульс. Информация получаемая из прибора представляет собой мгновения прихода импульсов, привязанные к началу измерения. В последующем надо подсчитать из этого интервалы, самое лучшее с помощью вычислительной машины.

Передача информации управляется программой, внесенной вручную, с помощью вычислительной машины или из другого источника. Программой управляется выбор пути и количество передаваемой информации. Информацию можно передавать в вычислительную машину, или в какое-нибудь регистрирующее устройство. Программа используется даже для управления других частей лазерного радара.

Составной частью измерителя интервалов является часы с возможностью точной настройки по эталонному времени. Время начала измерения хранится во внутренней памяти и подается в каждом цикле переписи информации в регистрирующее устройство.

¹⁾ Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering, Prague

The claim for the constructive performance of the time interval measurement system [1, 2] is based on demand of the maximal resolution ability. The second generation laser radar is to give the error of the measurement in the range as maximum as 10 cm. So the time interval system error must not be greater either.

Commercial counters used for the start - stop system are working with resolution ~ 0.1 ns, e.g. for distance ~ 1 cm. But the disadvantage of the start - stop method sustains in the necessity of waiting for returning each laser pulse. But for distances greater than 10^4 km the interval between start and stop pulses is too big and the return of the stop pulse is not guaranteed at all. Under those circumstances difficulties of measuring could be very great.

To solve this problem it is necessary to use multiple pulse reception [1, 2]. Using this method we are not limited neither by distance nor by noise. Then the only limiting factor is laser pulse frequency and possibly the capability of the on line computer to process the information. The computer must be used for computing of intervals and then it may be used for the control of all the laser radar system as well.

The system of multiple pulse reception is based on reading the time instants of pulses. From the synchronous counter (Fig. 7) are made readings of time instants t_2 and t_4 . The basic interval of the readings $T_0 = 200$ ns. The principle of this method is shown on Fig. 1. The interval T_A is

$$(1) \quad T_A = N T_0 = t_4 - t_2 .$$

This interval differs from the real interval T_i

$$(2) \quad T_i = t_3 - t_1 = T_A + T_B - T_C .$$

The parts T_B and T_C must be obtained by special circuits, expanders, and all the system is principally shown by Fig. 2.

The basic principle of the expander is very simple (Fig. 3). It consists of a current generator and a capacitor. In the moment t_1 (Fig. 4) the current generator is switched on and by the next in time clock pulse switched off. The voltage u_2 has the form of a sawtooth. The capacitor is discharged much slowly and the stretched time interval of discharge is measured by a special counter using clock pulses with $T_0 = 200$ ns. The block diagram of a simple expander is on Fig. 5. The error caused by quantification is

$$(3) \quad \theta = \frac{\delta}{k} , \quad \text{because}$$

$$(4) \quad t_i = \frac{N T_0 - \delta}{k} = N T_0 \frac{1}{k} + \theta .$$

The sawtooth voltage is nonlinear, because the current of the current generator is

$$(5) \quad i(t) = c_1 (1 - e^{-\lambda t}) .$$

The voltage u_2 then is

$$(6) \quad u_2(t) = k_1 \left(t - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) .$$

So as to eliminate the nonlinearity it is necessary to use a different mode of operation (Fig. 6). For this purpose double cycle operation of the expanders is used [8]. In the first cycle of operation one of the expanders is started by an input at t_1 and stopped by the second next in time clock pulse. The achieved value of the stretched time interval t_1 is counted up by a up-down counter. In the second cycle of operation instead of input pulse there is fed in a clock pulse through the input path and the expander is started and stopped by two neighbour clock pulses. The interval measured is then equal to T_0 and its stretched value is counted down by the same up-down counter. As all signals are going through the same signal path the resultant precision is quite high.

The expander is started at the moment t_1 and stopped by the second next clock pulse at the moment

$$t_H + d$$

where d is delay of the clock pulse coming through different way then the input pulse. The stretched interval in the first cycle of operation is then

$$(7) \quad k (t_H - t_1 + d) = N_1 T_0$$

where N_1 is the number of clock pulses inside the stretched interval. T_0 is the period of clock pulses. The interval $t_H - t_1 + d$ is chosen greater than T_0 (Fig. 5).

The second cycle is started after the end of interval $N_1 T_0$. This time the expander is started by a clock pulse at the moment

$$t_H + N_x T_0$$

and stopped at the moment

$$t_H + d + (N_x + 1) T_0$$

where $N_x > N_1$. This second interval is stretched by the same way as in the first cycle of operation.

By the assumption the interval $(N_x - N_1) T_0$ between both cycles is short enough to hold the same conditions for expander function that means

$$k = \text{const}, \quad d = \text{const},$$

the stretched interval in the second cycle of operation is

$$(8) \quad k (t_H + (N_x + 1) T_0 + d - (t_H + N_x T_0)) = k (T_0 + d) = N_2 T_0 .$$

The difference of both stretched intervals is

$$(9) \quad (N_1 - N_2) T_0 = k (t_H - t_1 + d) - (T_0 + d) = k (t_H - t_1 - T_0) .$$

That means that the mode of operation eliminates the influence of delays and the non-linearity of the sawtooth as well. The difference $N_1 - N_2$ is read on the up-down counter.

By this mode of operation it is necessary to control one of parameters only, the parameter k , by means of a special feedback circuit. The number of expanders is chosen by one greater than needed in each group. All the time one expander of each group is calibrated alternatively. While the expander is calibrated it is started by a clock pulse in the first cycle of operation in a similar way as in the second cycle. Then it is stopped after two periods of clock pulses by means of the path with delay d . The stretched interval will have the length

$$(10) \quad N_1' T_0 = k (2T_0 + d) .$$

The second cycle of operation is the same as above. Its stretched length will be

$$(11) \quad N_2 T_0 = k (T_0 + d) .$$

The difference of both expressions

$$(12) \quad (N_1' - N_2) T_0 = k T_0$$

that means $N_1' - N_2$ is the actual value of the parameter k .

If there is no agreement between the actual value and required value of k the feedback calibration is put into action and some of parameters of the expander are changed to get

$$(13) \quad N_1' - N_2 = k .$$

The selected value of the parameter k is

$$k = 1000 .$$

Each of the expanders has the jitter ± 0.3 ns.

The control part of the system designed in our laboratory contains a look and a programmed control (processor). The whole system block diagram is shown on Fig. 7.

The start-stop pulses are coming in the system of expanders containing $n_1 + 1$ units for start pulses and $n_2 + 1$ for stop pulses. Each part has its own control unit causing cyclic alternation of the expanders. In the time out of operation each expander is so alternatively calibrated to get the true value of the parameter k .

The system of expanders is processing the input pulses to derive from each of them a pulse for controlling the data reading out of the basic synchronous counter and switching on the processor. The 5 MHz signal from the crystal oscillator is counted by the synchronous counter to provide the epoch for both start and stop pulses. Data from the counter are fed into a shift register at the moments of start and stop pulses. After coming the stated series of pulses, for example one start and three stop pulses, the data from the register, including the data from the expanders, are fed into the computer. As two out of three stop pulses at least are supposed to be noise pulses the computer program must be made to recognize the right returns. For this purpose the computer makes a histogram and on basis of it is operating the time gate on the output of the receiver. This operation is made by means of a shift register with coincidence coupled to the synchronous counter. The transcription of measured data from the register is controlled by the processor of the data control programmable from a keyboard, computer or punched paper tape. The processor is able to control the flow of the information out of the system (measured data), in the system (gating of the receiver) and if necessary it is able to control all other parts of the laser radar system operation.

The data transcription can be made to an individual hardware device (magnetic tape recorder, paper tape puncher, printer or computer) or to more of them simultaneously. Numerical display used for optical checking of applied program or of measured data makes the part of the whole system. All the information is coded in ASCII code. The information flow should reach up to 10^6 bit/s.

If distances up to $5 \cdot 10^5$ km are to be measured with accuracy better than 15 cm it is necessary to use clock with short term stability better than $3 \cdot 10^{-10}$. This claim could be satisfied by a good crystal oscillator.

Relatively slow changes of measured distances make no claim for extreme precision of binding the crystal clock to the absolute world time (UTC). There it is necessary to have the synchronization better than $5 \mu\text{s}$ between collaborative laser stations.

Error caused by light beam pass through the atmosphere accomplishes no more than ~ 1.0 cm [6].

Our electronic system allows the binding to UTC better than $1 \mu\text{s}$, the accuracy of measured time intervals < 1.0 ns with resolution ± 0.6 ns [3, 5, 4, 7].

References

- [1] STEGGERDA, C.A.: A Precision Event Timer for Lunar Ranging. Techn. Rep. No. 74-038, Nov. 1973, University of Maryland, U.S.A.
- [2] STEGGERDA, C.A.: A Description of the Time Interval Measurement and Laser Control Circuitry for Lunar Ranging Experiment. Techn. Rep. No. 70-049, Nov. 1969, University of Maryland, U.S.A.
- [3] KRAJICEK, V.; HIRŠL, P.: Expander časových intervalů pro zařízení k měření vzdálenosti družic a Měsíce. Konference CVUT, Praha 1975
- [4] PFEIFER, M.; HIRŠL, P.: Časový báze a sběr dat pro zařízení k měření vzdálenosti družic a Měsíce. Konference CVUT, Praha 1975

- [5] HIRŠL, P.; KRAJÍČEK, V.; PFEIFER, M.: Long Distances Measurement Electronic System.
Summer School of Laser Tracking Instrumentation, Prague 1975
- [6] MARINI, J.W.; MURRAY, C.W.: Correction of Laser Range Tracking Data for Atmospheric Refraction at Elevation Above 10 Degrees.
Goddard Space Flight Center, Nov. 1973
- [7] TOLMAN, J.; PTÁČEK, V.; SOUČEK, A.; STECHER, R.: Microsecond Clock Comparison by Means of TV Synchronizing Pulses.
IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Sept. 1967
- [8] KRAJÍČEK, V.: PV 6775-74, ČVUT - Praha, 2. 10. 1974

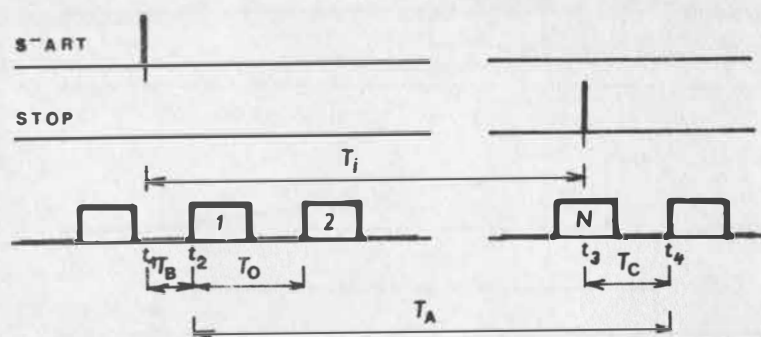


FIG. 1

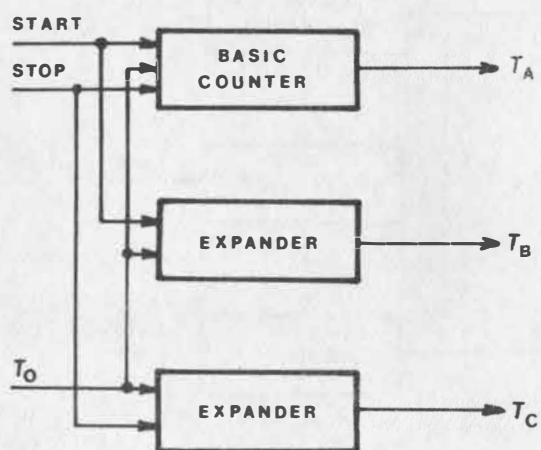


FIG. 2

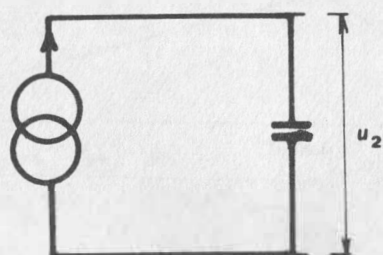


FIG. 3

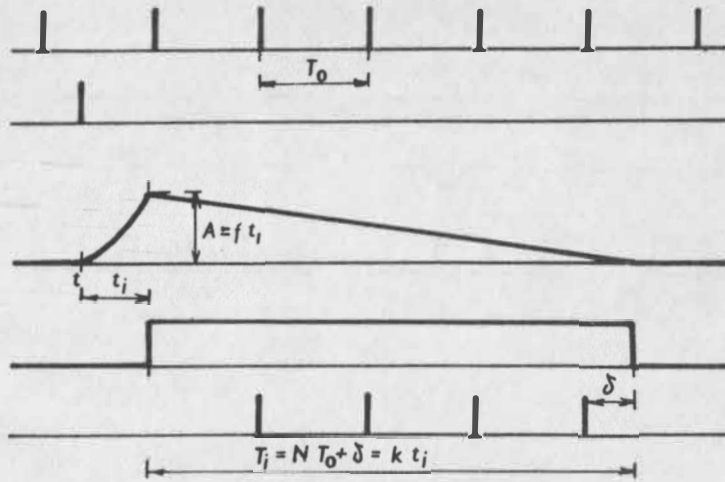


FIG. 4

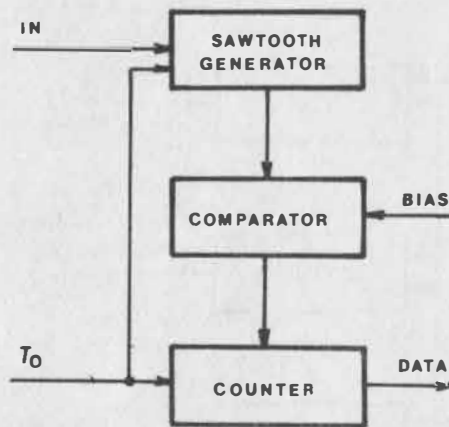


FIG. 5

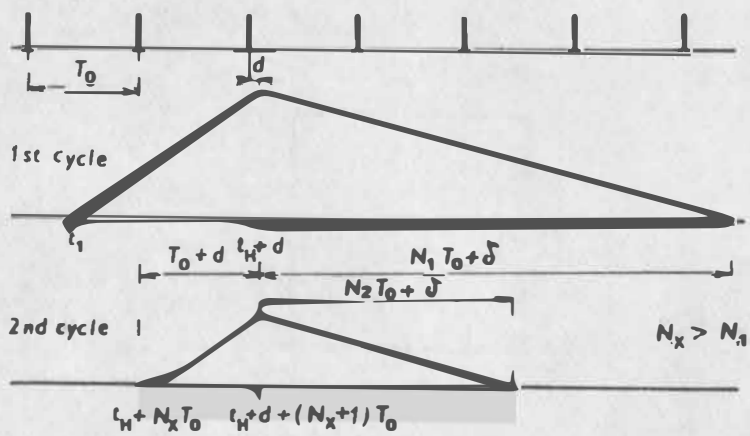


FIG. 6

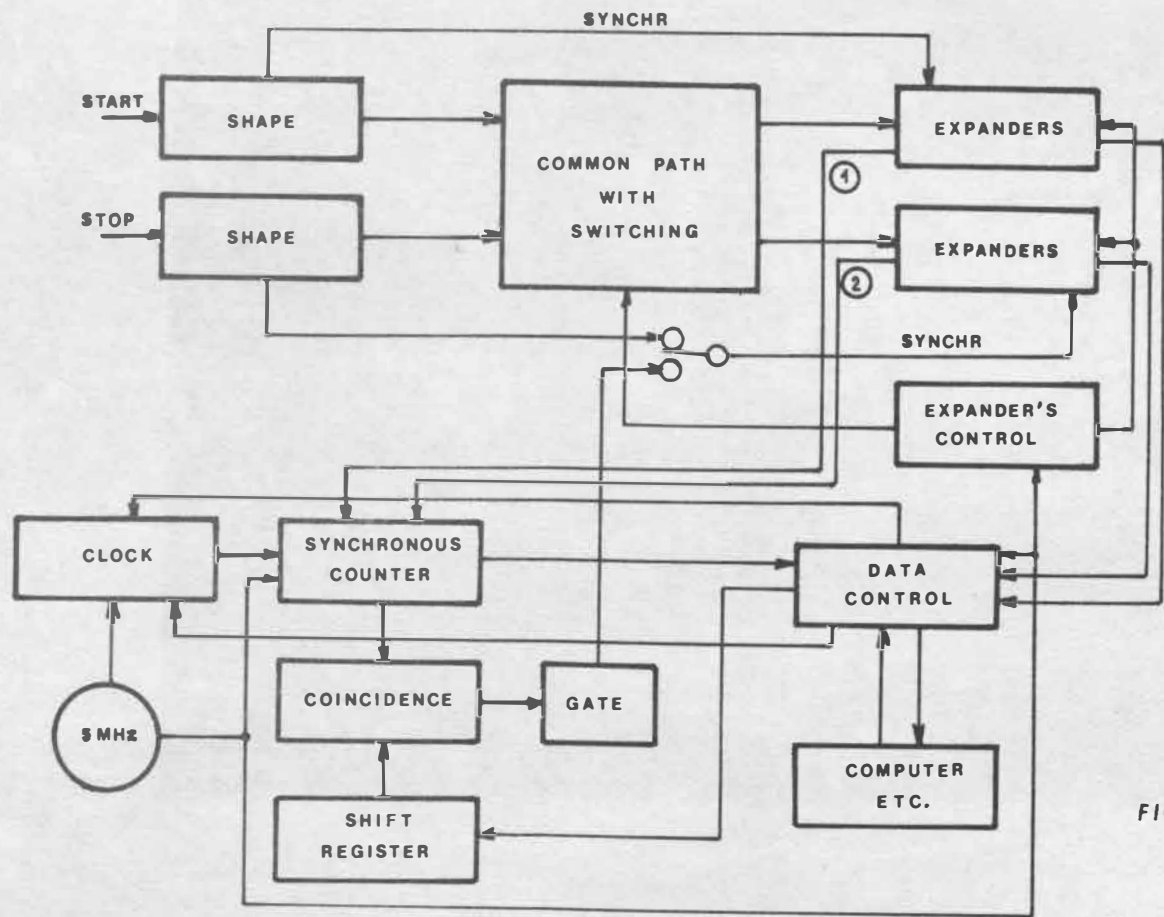
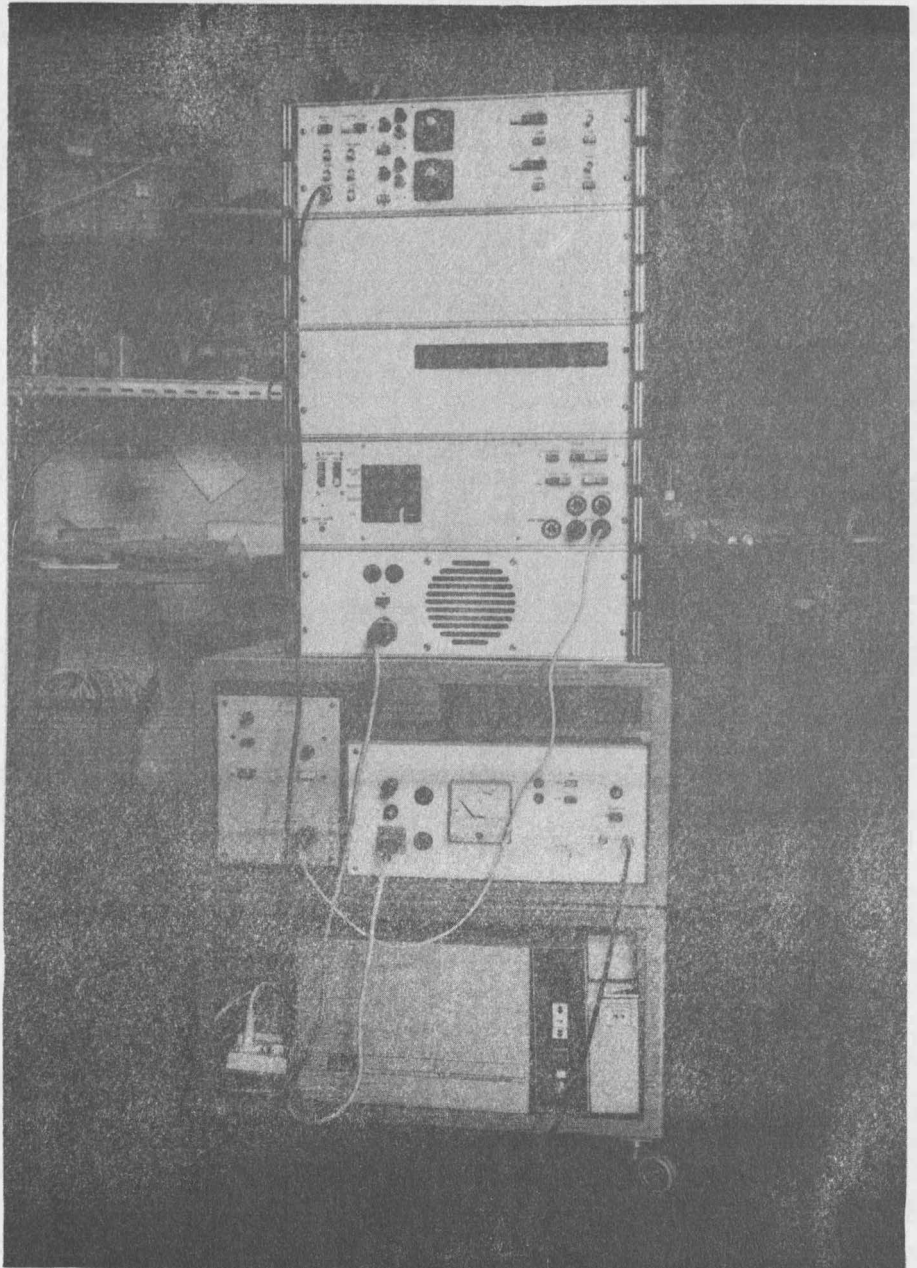


FIG. 7



The new Nd-YAG laser-ranging system for the
satellite observation station at Wettzell

by

P. Wilson, H. Seeger and K. Nottarp

Institut für Angewandte Geodäsie (IfAG), Frankfurt am Main (Abtlg. II des Deutschen Geodätischen Forschungsinstitutes) and Sonderforschungsbereich Satellitengeodäsie der TU München (SFB 78)

submitted to the 3rd International Symposium "Geodesy and Physics of the Earth",
Weimar, 25. - 31.10.1976

Summary

The installation of a new laser ranging system for the satellite observation station in Wettzell in early November 1976 will culminate two years of development.

This paper describes the system in some detail and reports on the decision making processes influencing the design. A brief summary of tracking to date at the manufacturers plant is given together with some remarks on the results of acceptance testing.

Zusammenfassung

Mit der für November 1976 vorgesehenen Installation eines neuen Laserentfernungsmeßsystems auf der Satellitenbeobachtungsstation Wettzell endet eine mehr als zweijährige Entwicklungsperiode. Der vorgelegte Beitrag enthält eine detaillierte Beschreibung des Gerätesystems und Hinweise auf Konzeptänderungen, die im Verlauf der Konstruktionsarbeiten erfolgten. Abschließend wird kurz über den Abnahmetest im Herstellerwerk und dabei durchgeführte Beobachtungen berichtet.

1. Introduction

In December 1974 the Institut für Angewandte Geodäsie, Frankfurt a.M., acting together with, and on behalf of the Sonderforschungsbereich Satellite Geodesy of the Technical University Munich, (SFB 78) placed an order with GTE-Sylvania, Mountain View, California, for an advanced laser ranging system. The original specifications for the system are summarised in the first column of table 1. The installation of the system at the satellite observation station in Wettzell (Bavarian Forest, Federal Republic of Germany) in early November 1976 will culminate the efforts of the Institut to introduce advanced equipment of this kind for geodetic/geodynamic research in the Federal Republic of Germany. These efforts date back to 1968 and have been reported in numerous publications /1/, /2/.

The specifications for the system had been modified over the years, taking into account the rapid technical developments which have taken place in this field. The requirements may be characterised briefly by

- increased ranging accuracy;
- increased range capability;
- blind tracking by day and night;
- a high level of automation for tracking and data-sampling.

Significant modifications (described later) to the original specifications have been made in consultation with the manufacturer (GTE-Sylvania, Mountain-View, California). These have enlarged the potential of the system still further. Acceptance testing of the total integrated system took place in California from 9. through 21. September of this year and delivery to Wettzell is to follow at the end of October.

The system has been financed jointly by the Bundesministerium des Innern (Ministry of the Interior) and the Deutsche Forschungsgemeinschaft (German Research Council) through the

Original specification	Original proposal	Acceptance tested
<u>General</u>		
Range 350 to 20 000 km	350 - 20 000 km	900 - 9000 km
Data recovery rate up to 1 range/sec	3 ranges/sec	5 ranges/sec
Operating staff/ 2 persons	2 persons	1 person
<u>Mount</u>		
Axes / 2	2	2
Configuration alt-az. or x - y with Coudé axes	alt-az. with Coudé	alt-az. with Coudé
Angular travel-elevation 110° -azimuth 540°	190° 540°	190° 540°
<u>Tracking</u>		
Continuous from -10° through zenith to -10° under control of computer	Continuous from -10° to within 2 degrees of zenith to -10° under computer control	Continuous from -10° to within 2 degrees of zenith to -10° under computer control
Tracking rates from 1°/min. to 1°/sec in plane of orbit	1°/min. to 1°/sec	<1°/min. to 1°/sec
Orthogonality of axes / ± 2"	± 2"	<1"
18 bit encoders	18 bit	20/18 bit
<u>Transmitting optics</u>		
Effective beam divergence 0,1 to 5,0 mrad	0,1 to 5,0 mrad	0,025 to 2,0 mrad
<u>Receiving optics</u>		
Cassegrain	Cassegrain	Cassegrain
Diameter 60 to 90 cm	61 cm	61 cm
Fov 1 to 15 arc'	0,05 to 2,3 mrad	0,05 to 2,3 mrad
<u>Laser</u>		
Ruby or Nd-YAG	Ruby or Nd-YAG	Nd-YAG
Pulse transmission mode or mode-locked operation	PTM or mode-locked	mode-locked
Energy 0,25 to 5,0 J	0,25 or 3,0 J	0,25 J
Halfenergy pulse width/100 psec to 5 nsec	200 psec to 5 nsec	200 psec
Peakpower 1 to 2 GW	1 GW or 1,25 GW	1,25 GW
Natural divergence 1 mrad	1,2 to 6 mrad dependent on rep. rate or < 1 mrad	0,3 mrad
Spectral region-green or red, 694 nm or 532nm	694 or 532 nm	532 nm
Pulse repetition rate/1 pps or better	3 pps	5 pps
<u>Receiver</u>		
Electrostatic	Electro-static or crossed field	crossed field
Rise time better than 2 nsec	< 2 nsec or 0,5 nsec	0,5 nsec
Pulse analysis	if required	not required
<u>Computer</u>		
Data flow rate/1 measurement/sec	1 - 3 measurements/sec	5 measurements/sec
Data storage on mag-tape and/or disk	disk with 1,2 mio word capacity	disk
Output-teletype, mag-tape, punched tape	all three	mag.-tape, punched tape, printer
Memory-at least 16 k- 16 bit words	16 k expandable to 127 k	32 k

Table 1: Summary of specifications for laser ranging system

Sonderforschungsbereich 78. The system will be installed in a new building in Wettzell, provided by the Institut für Angewandte Geodäsie /3/, with the stationary components of the system maintained in a climatically controlled environment.

2. The general concept

With the objective of closing the gap between the then in Wettzell available equipment /4/ and the new generation of laser ranging equipment coming into international use in 1974, a call was made for tenders to build a new laser ranging system for the satellite observation station in Wettzell. Specifications for the new system had been conceived in the light of information gathered during the 1st Laser Workshop at Lagonissi and a subsequent 6-week visit to the USA, during which some 28 firms and institutions had been visited in this connection /10/.

In brief, the specifications visualised an automated tracking system with better than decimeter ranging accuracy and a data recovery rate of up to one measurement per second operated by a maximum of 2 operators. It was anticipated that the pulse repetition rate of the laser would have to be variable, to permit the collection of adequate data during short, low altitude passes without jeopardising the safety of the laser operating at full power on distant (up to 20 000 km) targets. To assist in the clear definition of the time of reference for the outgoing and returning signals a half-energy pulse width better than 5 nsec was specified. To avoid problems with the support for the primary mirror of the Cassegrain receiver telescope, a maximum diameter of 90 cms had been set.

The table 1 summarises the specifications originally put out for tender together with an indication of the corresponding characteristics achieved in the final construction.

2.1. System Description

The stationary laser (fig. 1) is mounted in a climatically controlled environment under the control of the operator

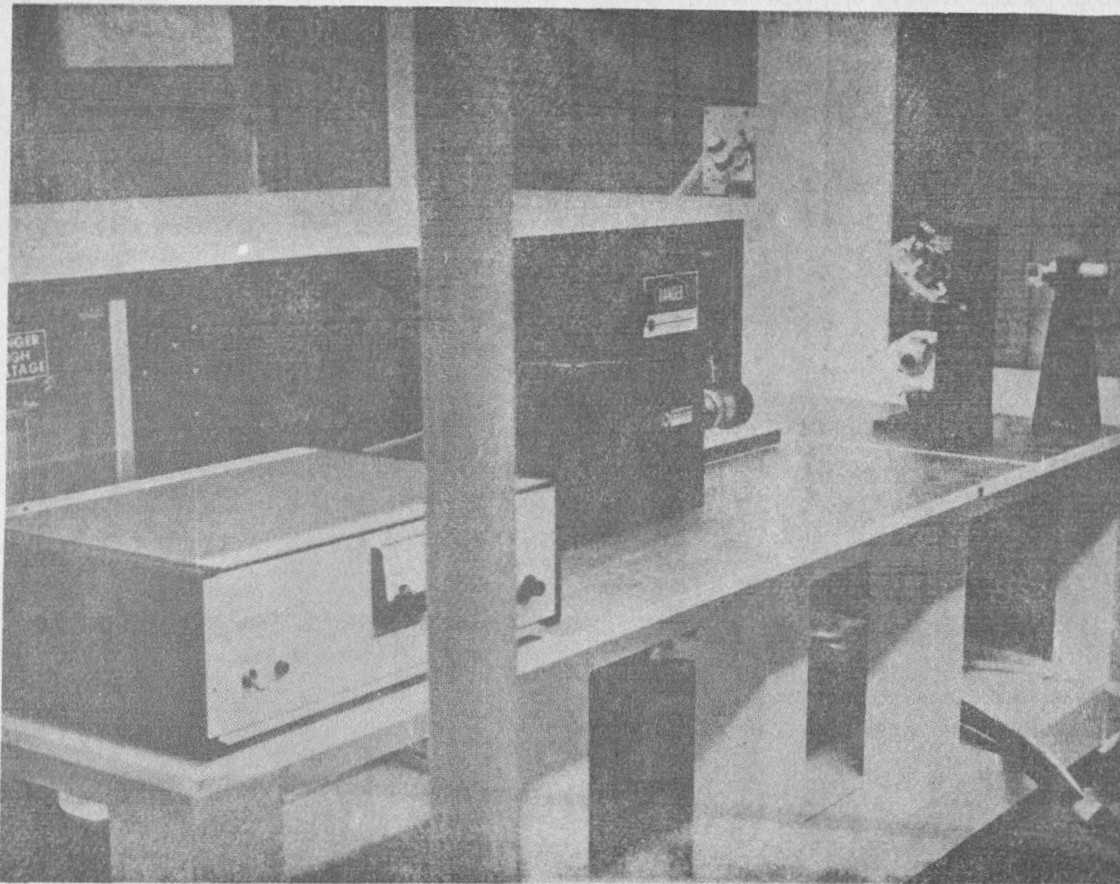


fig. 1: The neodymium-YAG Laser

seated at the computer interface unit (= CJU, see fig. 2). The laser beam is directed into the Coudé channel traversing the two rotational axes of the mount (fig. 3) and emerges finally from the transmitting telescope (fig. 4), which has been directed, under the control of the computer, towards the momentary position of the target being tracked.

The return signal is picked up by the 60 cm Cassegrain optics of the receiver telescope, which focus it via a variable attenuator and narrowband filter onto the static crossed field photo-multiplier. The range time is generated by a high resolution computing counter triggered by the start impulse, which was fed to the crossed field photo-multiplier from the outgoing laser beam via a light pipe, and stopped by the amplified return pulse.

Range, epoch and system status data are recorded by the computer on magnetic tape for each outgoing pulse. This data includes the momentary reading of the shaft encoders at the time of laser firing.

The computer is also used to precalculate look angles and predicted ranges, which are written onto disk in preparation for the future mission. Besides general mode control, other functions controlled by the operator from the CJU and the computer include the adjustment of the effective divergence of the transmitted laser beam, of the attenuation and of the field of view of the receiver, of the start/stop signal thresholds, as well as system calibration and encoder diagnostics.



fig. 2: Control unit with PDP-11-45 computer and peripherals, epoch/range counting devices and control interface unit.

3. The Laser Subsystem

At the recommendation of GTE-Sylvania a final decision on the selection of the laser was post-poned until some 4 months after awarding the contract. Whereas the short pulse ruby laser operating either in pulse transmission mode or with pulse slicer has demonstrated it's reliability for ranging at the one meter to decimeter level, the sub-decimeter accuracy over extended ranges can be more easily achieved with the sub-nanosecond pulse from the mode-locked neodymium-YAG laser, which permits narrow gating of the receiver. The delay in making the final selection for the laser sub-system was therefore primarily related to the ability of GTE-Sylvania to demonstrate the conditions under which a complex laser of this type could be operated reliably. The high energy densities and short pulse, together with a high pulse repetition rate make it necessary to operate the laser under more stringently controlled conditions of cleanliness than had been necessary with the earlier lasers. However, the consequences of this condition are also beneficial to the computer, which shares the some room as the laser. The decision to proceed with the neodymium-YAG laser was made finally in April 1975. Specifications for the laser sub-system are given in table 2 /11/.

3.1. Optical Design of the Laser

The laser comprises on oscillator, regenerative amplifier and three amplifiers (fig. 5).

A small Nd:YAG rod is continuously pumped by a krypton are lamp. A Brewster plate polariser and the restricted aperture constrain the laser to oscillate at a wavelength of 1064 nm in a polarised Gaussian beam. The following acousto-optical modulator, which is temperature controlled, is driven by a 75 MHz signal. This signal is half the resonant frequency of the laser cavity and results in mode locking, thereby generating a train of 150 MHz pulses, which are then passed through on optical switch. This switch is composed of two polarisers and a Pockel's cell. It is used to select the train of seed pulses to the regenerative amplifier. The first seed pulse is injected into the resonant cavity of the regenerative

Peak Power Output:	1.25×10^9 watts at approximately $0.53 \mu\text{m}$
Energy Output:	0.25 joules per pulse at approximately $0.53 \mu\text{m}$
Output Stability:	$\pm 5 \%$
Pulsewidth:	Less than 0.2 nanoseconds
Repetition Rate:	3,4 or 5 pulses per second external or internal command
Beam Divergence: (Full width containing 90% of the energy)	Less than 10 times the diffraction limit from the final amplifier assembly
Beam Diameter:	12 mm
Spectral Linewidth:	Less than 2 nanometer
Spectral Line Stability:	Better than 0.1 nanometer
Spectral Line Position:	Repeatable to better than 0.1 nanometer from one operational cycle to another
Physical Characteristics:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Laser Transmitter - 1.23 meters long x 63 cm wide x 30 cm high 2. Power Supply - Self-contained cabinet 1.6 meters high x 60 cm wide x 80 cm deep 3. Cooling System - Cabinet mounted 1.6 meters high x 60 cm wide x 80 cm deep

Table 2: Characteristics of the frequency doubled Nd YAG Laser

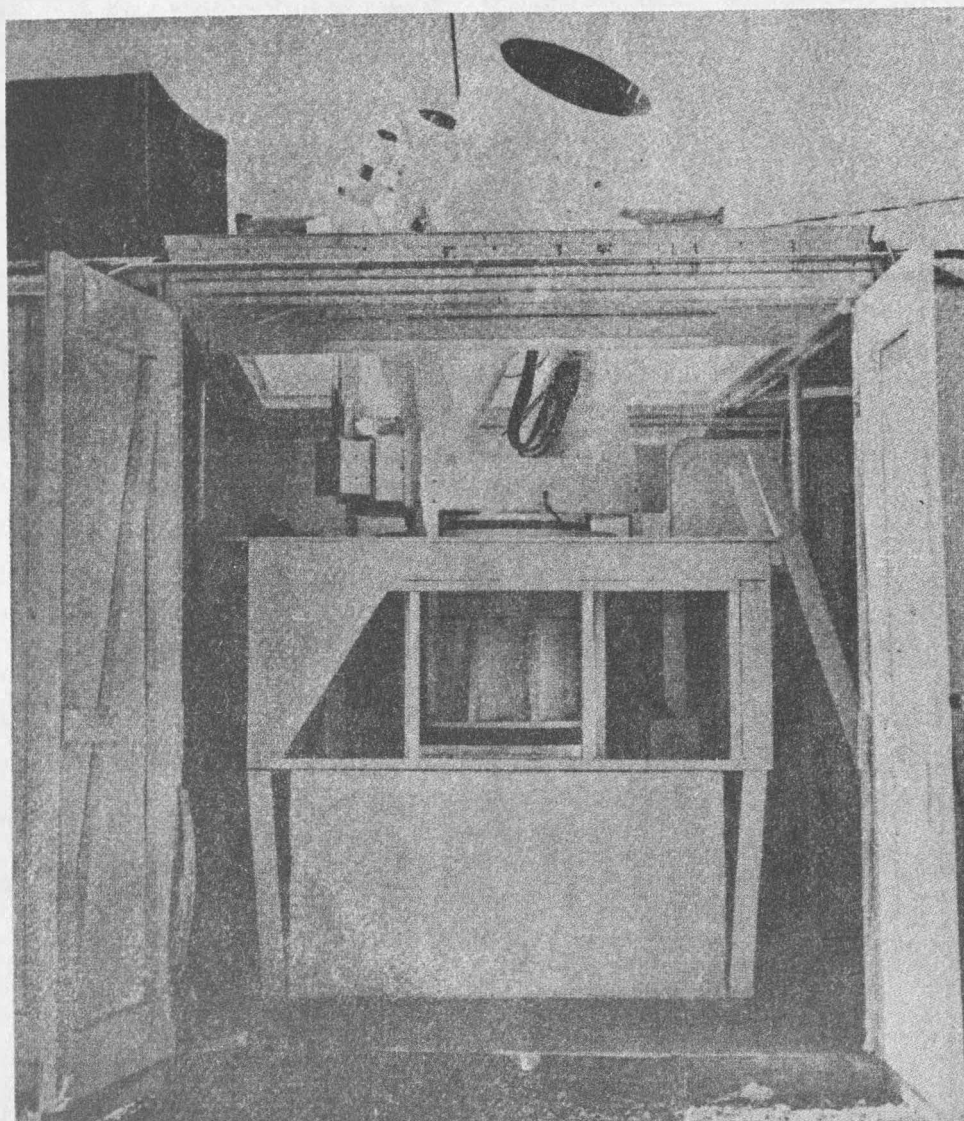


fig. 3: General view of the mount, with sighting telescope, transmitting and receiving optics.

amplifier via the third polariser. This pulse is then allowed to traverse and re-traverse the quarter wave plate, after which the "Q-switch" Pockels cell is operated to nullify further polarisation changes by the quarter-wave plate during the multi-pass regeneration phase. This furthermore removes the remaining pulses in the seed train. The seed pulse makes seventeen or eighteen round trips through the regenerative

amplifier, during which time the energy is amplified from about 2 nanojoules to the order of 5 millijoules, by inversion of the Nd-YAG rods through operation of the flash lamps. At this stage the "cavity dump" Pockels' cell ejects the amplified pulse into an up-collimator, provided to match the diameter of the pulse to that of the first and second amplifiers and an isolator. The isolator is used to prevent noise feed-back. The first amplifier amplifies the 5 millijoules pulse from the regenerative amplifier to about 50 millijoules, which forms then the input to the second amplifier, the output from which (some 200 millijoules) is passed through a second 1.5x beam expander, thereby matching it to the input aperture of the final amplifier. At this point the pulse is amplified to about 500 millijoules before passing through a further 2x up collimator into the temperature controlled frequency doubling crystal. At least 250 millijoules of the 1064 nm (infra-red) input are converted to 532 nm (green) radiation, which is then output through a final collimating beam expander in a 12 mm diameter beam /5/, /6/.

3.2. Mechanical Design

The mechanical design incorporates features which contribute significantly to reliability and safety as well as to the ruggedness of the system. The pump cavity shells are of nickel plated cast brass and incorporate a full flow water path in series across the rods, lamps (including electrode caps) and reflective gold-plated cavity inserts. All power and water connections are located beneath the invar baseplate, thus eliminating potentially lethal voltages from the optical deck, where adjustment or replacement of critical components is occasionally necessary. All optical components are rigidly mounted on the thermally and mechanically stable invar optical deck.

The second harmonic generating (CsD^{*}A) crystal is mounted in OFHC copper, which is closely surrounded by a heater winding. This whole assembly is well insulated from the remainder of the system to maintain the crystal accurately and uniformly at the

phase-matching temperature. Since CsD^{*}A is hygroscopic, the assembly is O-ring sealed.

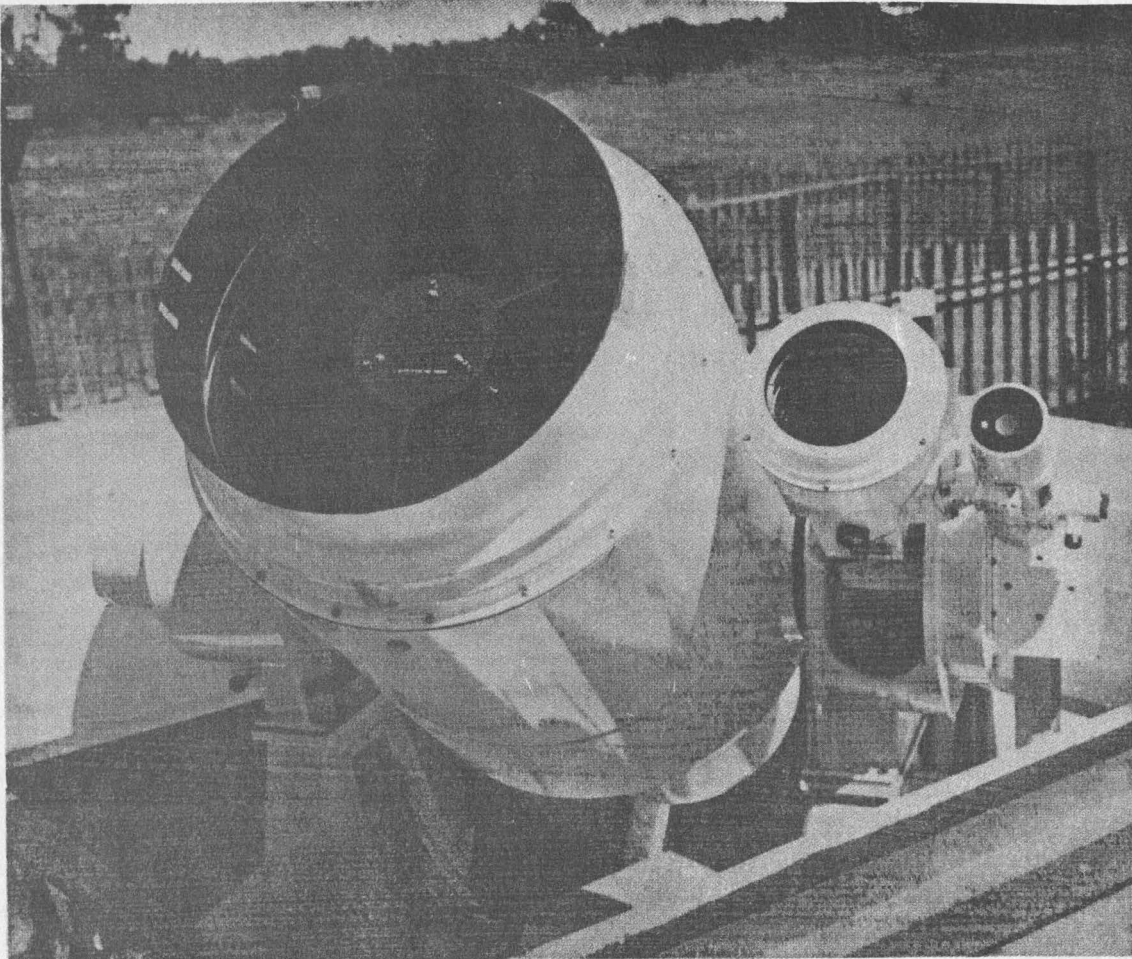


fig. 4: Detailed view of the optical subsystems

The single-pass amplifiers are identical to the regenerative amplifier head, except for the rod sizes. The first amplifier operates in the non-saturated regime, with about 50 millijoules of the 300 millijoules stored being extracted. The second amplifier is partially saturated, with about 200 of the 300 millijoules of stored energy being extracted and the final amplifier is saturated, giving out the final 500 millijoules. This arrangement results in inherent stability and somewhat alleviates the problems of amplified reflections. The amplitude stability of the laser is approximately equal to the capacitor energy stability of the single pass amplifiers and reaches better than 5⁰%. The

ends of the rods are wedged to minimise super-radiance. The output power is monitored and recorded by the computer during the mission /5/, /6/.

3.3. Electrical Design

The electrical and electronic portion of the design is rather conventional. It consists of the laser power supply sources, RF oscillator and switches, protection and interlock circuitry and SHG oven supply and control circuitry, all of which need no further explanation.

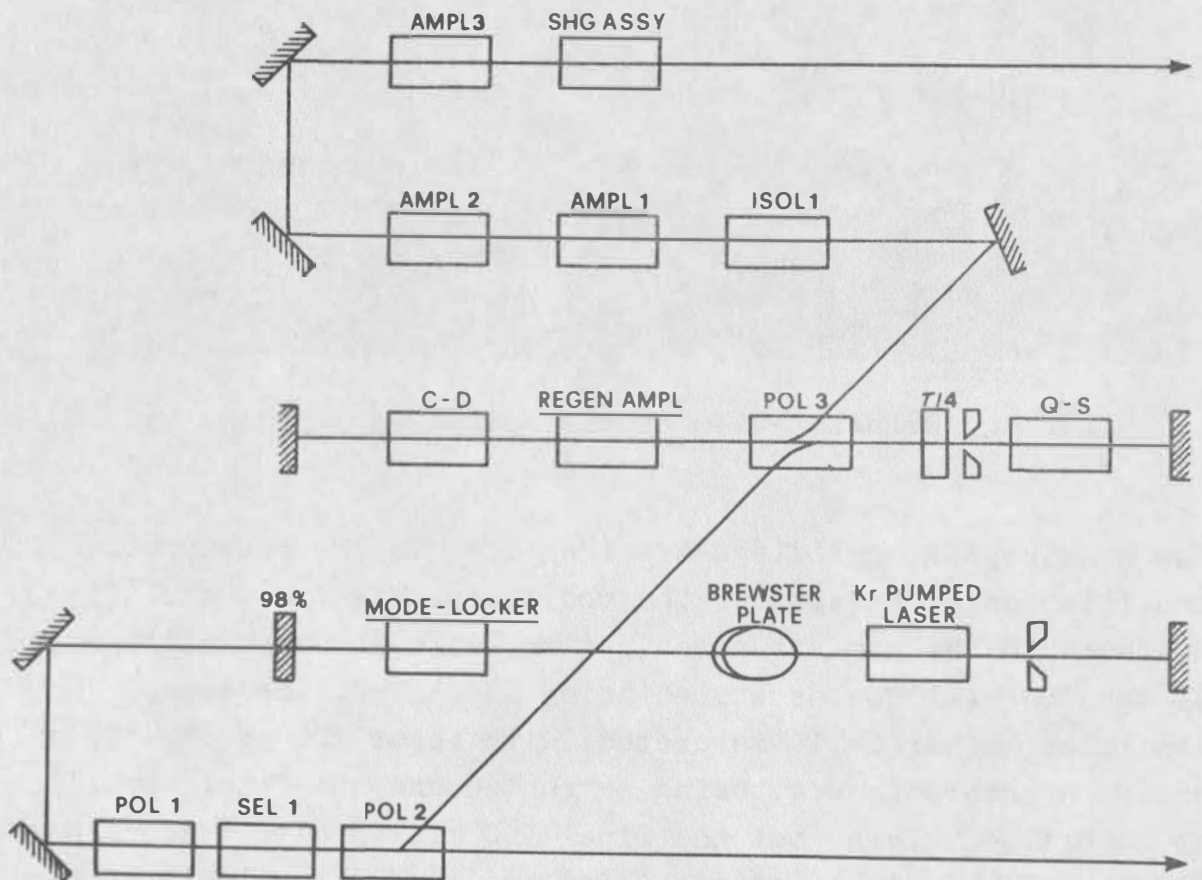


fig. 5: Block diagram of the optical lay-out of the GTE-Sylvania Nd-YAG laser

3.4. Environmental Considerations

De-ionised water is used as coolant, a de-ionising cartridge and controlled material contact in the path of the water flow being applied to maintain the purity of the water. The operating temperature of the coolant is 30°C. This temperature has been selected to permit satisfactory laser operation without giving rise to condensation on the laser heads during periods of exposure to air at the ambient room temperature (as for example during alignment). The temperature will be maintained to within $\pm 3^{\circ}\text{C}$ in order to hold the spectral line position and mechanical stability to 0,02 nm. During normal operation the laser interior is flushed with dry nitrogen, maintaining thereby a slight positive pressure of dry gas within the chassis. This prevents not only condensation, but also undue pressure stress /5/, /6/.

4. The Mount and Optical Components

Although theoretically technical considerations such as:

- better gravitational loading of the axes making it independent of the momentary orientation result in more precisely maintained orthogonality of the axes;
- restriction of sag of the optical components to only one direction;
- decreased requirements for maintaining the orthogonality adjustment of the fold mirrors in the Coudé path;

favour selection of the altitude over azimuth configuration for the mount, the decisive (though correlated) factor in the selection of this type of mount was the available experience in building such systems, as evidenced by the large number of these mounts in operation and the number of firms competing for such contracts. The main disadvantage of this configuration is the presence of a small dead zone at the zenith, in which tracking is not possible.

Table 3 summarises the specifications for the mount, which was manufactured by Contraves Goerz Inc., Pittsburgh, Pa. The optical components were supplied by GTE-Sylvania.

Rotational freedom in elevation in azimuth	-10° to $+190^{\circ}$ $\pm 270^{\circ}$
Orthogonality of axes	$\leq \pm 2$ arc"
Wobble on each axis	$< \pm 1$ arc"
Tracking velocity in elevation in azimuth	$< 0,5/\text{min.}$ to $2^{\circ}/\text{sec}$ $< 0,5/\text{min.}$ to $32^{\circ}/\text{sec}$
Acceleration in elevation travel in azimuth travel	$> 2^{\circ}/\text{sec}^2$ $> 10^{\circ}/\text{sec}^2$
Payload	500 kg
Static pointing accuracy	better than 10 arc"
Levelling and alignment in azimuth	better than 1 arc"
Prime power	220/380 V, Hz
Operating temperatures	-20°C to $+50^{\circ}\text{C}$
Humidity	0 - 100% without damage

Table 3: Specifications for the positioning mount

4.1. The Mount including Encoders

The mount is basically of original design, although several design features had been used in earlier mounts by the same manufacturer.

Each axis of the computer controlled positioning mount is driven via a servo system with externally generated error signals by a direct drive DC torque motor. Rate feedback is generated by precision DC tachometers on each axis. 20 bit

optical shaft encoders, provided by Itek Measurement Systems of Newton, Mass., were calibrated to give 18 bit (3,6 arc") absolute pointing accuracy, the last two bits being interpolated. This reflects the first of several significant modifications from the original design concept, to simplify the expansion of the system to provide for lunar ranging capability at a later date.

The range of tracking rates covers all foreseeable near and far earth artificial satellites of potential significance for geodetic/geodynamic applications. The accelerations and velocities together ensure that a minimum of data will be lost during repositioning of the mount following interruption of the observing procedures or in passes through the zenith. Acceptance testing with simulated loads in Pittsburgh, prior to integration of the total system, indicated that all design goals had been reached easily /7/. Acceptance testing in Mountain View demonstrated only insignificant deterioration in performance following final system integration, although there was a small irregularity apparently attributable to one of the encoders. This error will be repaired prior to delivery of the system to Wettzell /8/.

4.2. The Optical Subsystems

Excluding the laser, the optical subsystems comprise:

- the transmitting optics;
- the receiving telescope;
- the sighting telescope;
- the alignment optics.

Each of these will be considered in turn. The characteristics of the subsystems are given in table 4.

4.2.1. The Transmitting Optics

Besides determining the effective divergence of the exiting laser beam, the transmitting optics reduce the sensitivity of the

system to angular and positional errors of the adjustment of the Coudé mirrors proportionately to the telescope magnification here 10x. The transmitting optics (see fig. 4) are mounted ex-centrally between the receiver and the sighting telescopes.

Transmitting optics

Configuration	Gallilean
Magnification	12x
Input diameter	16 mm
Output diameter	200 mm
Focus (divergence)	0,025 to 2,0 mrad
Alignment stability	10 ⁰ /o of divergence
Correction wavelengths	532, 643, 1064 nm
Peak power input	2 GW/cm ²
Optical coatings-maximum loss	0,25 ⁰ /o/surface

Receiver optics

Configuration	Catadioptric Cassegrain
Aperture diameter	60 cm
Focal length	440 cm
Correction wavelength	532 nm
Alignment stability	10 arc" over $\pm 20^{\circ}\text{C}$
Field of view	0,05 to 2,3 mrad

Sighting telescope

Configuration	Maksutov - Cassegrain
Aperture	90 mm
Focal length	1300 mm
Magnification	50x
Field of view	55 arc min
Resolution	1,5 arc"

Table 4: Specifications of the optical subsystems

They are of Galilean configuration and are continuously adjustable to provide effective divergence between 0,025 and 2,0 mrad. These figures signify a further modification to accommodate lunar ranging capabilities at a later date. They have been corrected for the wavelengths 532 nm (green), 643 nm (red) and 1064 nm (infra-red). To provide thermal stability and prevent damage under the conditions of heavy thermal loading caused by the laser beam, the components have been manufactured from optical grade fused silica.

Provisions have been made in the design to allow for thermal compensation and to maintain alignment characteristics under all operating conditions /5/, /6/.

4.2.2. The Receiver Telescope

The Cassegrain receiver package comprises a 60 cm $f/1,7$ spherical primary, a mangin secondary mirror, a focusing lens and a field lens, backed up by a narrow band filter and attenuating plate. The field of view is continuously variable between 0,050 and 2,3 mrad (lunar ranging), with the aid of a motor driven iris situated at the Cassegrain focus. The field lens images the system entrance pupil onto the photo-multiplier.

The spacer rods for the receiver telescope are of graphite epoxy. The barrel of the subsystem is constructed from materials complementary to the mirrors so that the focal position needs only seasonal adjustment. This can be achieved by resetting the focusing lens.

The receiver telescope is dust sealed with an anti-reflection coated window. The heated 10 \AA band-pass filter is located between the iris and the field lens. The variable neutral density filter wheel provides a range of attenuation for the return signal between 0 and 40 dB.

The start signal is transmitted from the last Coudé fold mirror to the photomultiplier via a fibre-optics light pipe through a 100 \AA filter.

A sun-detector, located outside the receiver telescope, activates a mechanical shutter in the receiver upon detection of excessive brightness within 2° of the optical axis of the receiver. This is to prevent damage to the PMT photocathode. Care has been taken in the design to permit easy access to all drive motor assemblies for the event of repair or replacement without overall disturbance to the system /5/, /6/.

4.2.3. The Sighting Telescope

The sighting telescope fulfills two primary functions. First, it is used to control pointing e.g. to terrestrial targets during range calibration etc. and secondly to control alignment of the Coudé folding mirrors a still more important function.

The design is conventional. The characteristics are summarised in table 4 /6/.

4.2.4. The Alignment Optics

Alignment is conducted with the aid of an argon CW laser, mounted parallel to the main Nd-YAG laser. Adjustments are available for ensuring that the laser beam exiting from the Nd-YAG laser enters the Coudé path normal and centrally to the input pupil, whereafter corrections to the Coudé folding mirrors are possible to maintain concentricity of the laser beam during translation along the two axes of rotation. In practice, the output axis of the alignment laser is first adjusted to be parallel to that of the main Nd-YAG laser. With this condition established, the less powerful CW laser can be used as the emission source during alignment of the remaining optical systems. A large retro-reflector is used at the exit from the transmitting optics to enable the adjustment of each succeeding fold mirror to be monitored visually through the sighting telescope. When the alignment of the Coudé mirrors has been successfully completed, the retro-reflector is used once more to assist in aligning the receiver telescope to the transmitting axis. This operation is also monitored directly, this time by adjusting the alignment

beam to the reticle of the receiver telescope.

Despite the complexity of the system, the alignment of the optical components proves to be a relatively easy, though fastidious operation, which can be completely checked with relative ease. Inevitably, internal re-alignment of the laser necessitates complete checking and likely re-alignment of the Coudé path. Acceptance testing demonstrated that the total alignment of the system could be achieved adequately and that the stability of the adjustment depends primarily on that of the laser /8/.

5. The Receiver Subsystem

The function of the receiver subsystem is to detect the transmitted and returned laser signals and to record the precise epoch of the event together with the time of flight of the signal.

The receiver for the return signal is in this case a Varian 153A static crossed field photomultiplier. This translates the returned optical energy into an electrical signal. The power supply to the PMT allows for electrically gating the tube on and off. Timing discriminators provide normalised pulses for both the start and stop channels of the interpolating counter. The detection thresholds of the start and stop channel discriminators are adjusted by the computer through digital to analogue converters. Time interval data is supplied with 100 psec resolution by the Hewlett-Packard 5360 A Computing Counter. The counter is clocked by the 5 MHz output from a Rohde and Schwarz rubidium standard frequency generator, type XSR. The counter also provides start and stop flags that strobe on epoch latch in the CJU /5/, /6/.

5.1. The Static Crossed-Field Photomultiplier

It is mandatory that the short pulse be preserved in the photo-detection process. Standard electrostatic photomultipliers are incapable of operating at much higher than a few hundred megahertz owing to the output coupling losses at high frequencies and the large electron transit time dispersion characteristic for these tubes.

Static crossed field multipliers are designed to eliminate, in large part, the effects in variations in the initial velocities of the secondary electrons. Crossed electric and magnetic fields are used to make the electron trajectories between dynodes satisfy the cyclotron resonance condition, which requires that all electrons take the same time to travel between dynodes, regardless of their initial velocities. The tube geometry is essentially that of a linear magnetron.

The electrons from the photo-cathode or from any dynode are accelerated by a crossed magnetic field in an arc onto the succeeding dynode. At the end of the arc-train, the electron couple into a specially designed output connector.

Owing to the improved quantum efficiency at 532 nm and its large cathode surface, Varian 153A six-stage static crossed-field photomultiplier is especially suited to the system. Specifications for this tube are given in table 5.

Photocathode/Window Material	S-20/Sapphire
Cathode Diameter	5 mm
Cathode quantum efficiency	10 ⁰ /o typical at 530 nm
Gain	10 ⁵ typical, 5 x 10 ⁴ min.
Number of Stages	6
Dynode Material	BeCu Alloy
Anode Dark Current	3 x 10 ⁻⁹ typical at 20°C
Output Current	250 uA max. continuous
Bandwidth, 0 to - 3 dB	DC to 2.5 GHz
Anode Rise Time (10 ⁰ /o to 90 ⁰ /o)	150 picoseconds

Table 5: Specifications for the Varian 153A static crossed field photomultiplier.

The PMT must be protected against excessive peak currents and excessive continuous current levels. The continuous tube current is limited by the power dissipation limits at the anode to 250 μ A.

The anticipated background signal strength during daylight operation is in excess of this value, so that it is necessary to reduce the duty cycle of the background current by electrically gating the PMT around the anticipated time of arrival of the return signal. This is performed by altering the focusing characteristics of the first dynode /5/.

5.2. Post-detection Gating

Post-detection gating is also employed just prior to threshold detection, using a diode quad in a balanced bridge. The diodes are normally biased off and are pulsed into conduction by a balanced drive pulse during the gate on time. Because the "off" state noise is attenuated by the reverse impedance of the diode (a large resistance shunted by a capacitor), this gate can achieve isolations of greater than 40 dB.

By using distributed constant techniques, optimising low capacitance small diode geometry and accurate diode matching, the gate induced noise can be reduced to the point where the total sum of the gate noise plus attenuated noise feed through is significantly below the system threshold level. This eliminates the possibility of a noise spike exceeding the threshold during the gate off-time. The third gating technique uses circuitry incorporated in the HP 5360A Computing Counting.

Finally, the computer uses the predicted range to set a range gate inhibiting the detection of false targets. Following successful acquisition the computer extrapolates the range estimate for the range gate from the measured range /5/, /6/.

5.3. Threshold Detection

For the simplest method of time derivation a leading-edge timing discriminator is used. A microwave tunnel diode is used in the threshold circuit because of its wide bandwidth. A adjustable threshold is provided. Both manual control by the operator and automatic adjustment under computer control, using algorithms

based on stored ephemeral data and real-time pulse height data, are possible.

The major disadvantage of leading edge detection is the occurrence of time walk due to pulse amplitude fluctuations. With the short pulse width in use here these effects have been minimised. However, pulse amplitude is recorded by the computer for each return, thereby permitting post-mission correction for time walk. At any rate, this correction cannot exceed the pulse rise time, corresponding to a range error of about 2 cm.

Connections for a transient digitiser are available, should this be of interest at a later date /5/, /6/.

5.4. Interpolating Counter and Time Interval Plug-In

Clocked by the Rohde and Schwarz XSR rubidium standard frequency generator, the HP Computing Counter and plug-in provide highly stable time interval measurements with a resolution of 100 psec.

It has been proved that the standard deviation of the range jitter is independent of target range. This could be anticipated, since this effect is due to inaccuracies in the interpolation processing in the counter. Trigger errors in the time interval plug-in are negligible.

The computing counter provides the CJU with time interval data in a "character serial" format. Serial to parallel conversion is performed in the CJU.

The start pulse epoch is obtained by strobing the epoch latch in the CJU with the counter gate made available by the computing counter /5/.

5.5. Received Power Monitor

A received power monitor provides accurate signal strength information to the computer for time walk correction. The output of the peak hold circuit is multiplexed to an analog to digital

converter in the CJU. Logarithmic amplification is used so that the peak hold circuit can accommodate large fluctuations in signal strength /5/.

5.6. Epoch Timing System

The determination of the epoch time for the range measurement is essential. The required accuracy is directly dependent on the anticipated ranging accuracy. With this set at 2 cm, the appropriate epoch timing accuracy is $\pm 1 \mu\text{sec}$. To achieve this, three rubidium clocks, one automatic Loran-C receiver and two VLF receivers are used in conjunction with a rather elaborate checking and recording system at the station in Wettzell.

Table 6 shows the accuracy and resolution of the epoch timing system to which the satellite ranging system will be connected /9/.

clock receiver	rubidium	rubidium	rubidium	Loran-C	DCF77	GBR 16
short-term stability	$5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-11}$
long-term stability	$2 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-13}$
resolution	1 μsec	1 μsec	1 μsec	1 μsec	-	-
output	100 μsec	10 μsec	1 μsec	-	-	-

Table 6: Accuracy and resolution of the epoch timing system in Wettzell.

6. The Guidance and Data Handling System

The computing system comprises a PDP 11-45 with 32 k of core, disk

unit and several disk packs, magnetic tape unit, paper tape reader and punch, programmable clock. Input/output control is via an alphanumeric display terminal VT 05 with hard-copy output from a LA-36-CA printer. The disk packs have each a capacity of 1,2 million 16 bit words. With this hardware and the system executive RSX II-M and the Fortran IV Plus compiler, all system software could be written in fortran.

The main objectives of the computing capability can be broken down under the following operational headings

1. the calculation of look-angles and storage on disk for use during the mission (ephemerides mode),
2. the real-time tracking task including system control with recording of measured ranges and the associated data and real-time display (execution mode),
3. the post-mission data processing (processing mode),
4. the setting and calibration of system parameters (initialisation mode),
5. the testing for possible encoder errors (diagnostic mode).

The operational programs associated with these tasks will be described briefly in the following sections.

6.1. Initialisation

In this mode the operator can select the order in which operations are performed. The CRT display distinguishes between the measured and the manually entered parameters, calibration procedures are laid down for correcting for the levelling amplitude and phase of the mount, possible measurable collimation error, range offset correction, encoder offset and sag to name a few of the operational capabilities when operating in the initialisation mode. Fixed terrestrial sites can be designated for future static pointing and their location defined by the azimuth and elevation angles from the mount.

6.2. The Execution Mode

The most complex mode of operation, this is the mode used during the satellite pass, when all subsystems are functioning together. The execution mode controls time keeping, pointing control including ephemeris retrieval, interpolation and correction, mount positioning and range gate control. Furthermore this mode of operation governs laser firing, field of view divergence and attenuation settings, data gathering, tape recording and real-time display.

6.3. The Processing Mode

Entry into this mode permits post mission search of the data recorded on the tape, positioning of the tape and selective dumping of the information stored for post mission analysis and system diagnosis.

6.4. The Diagnostic Mode

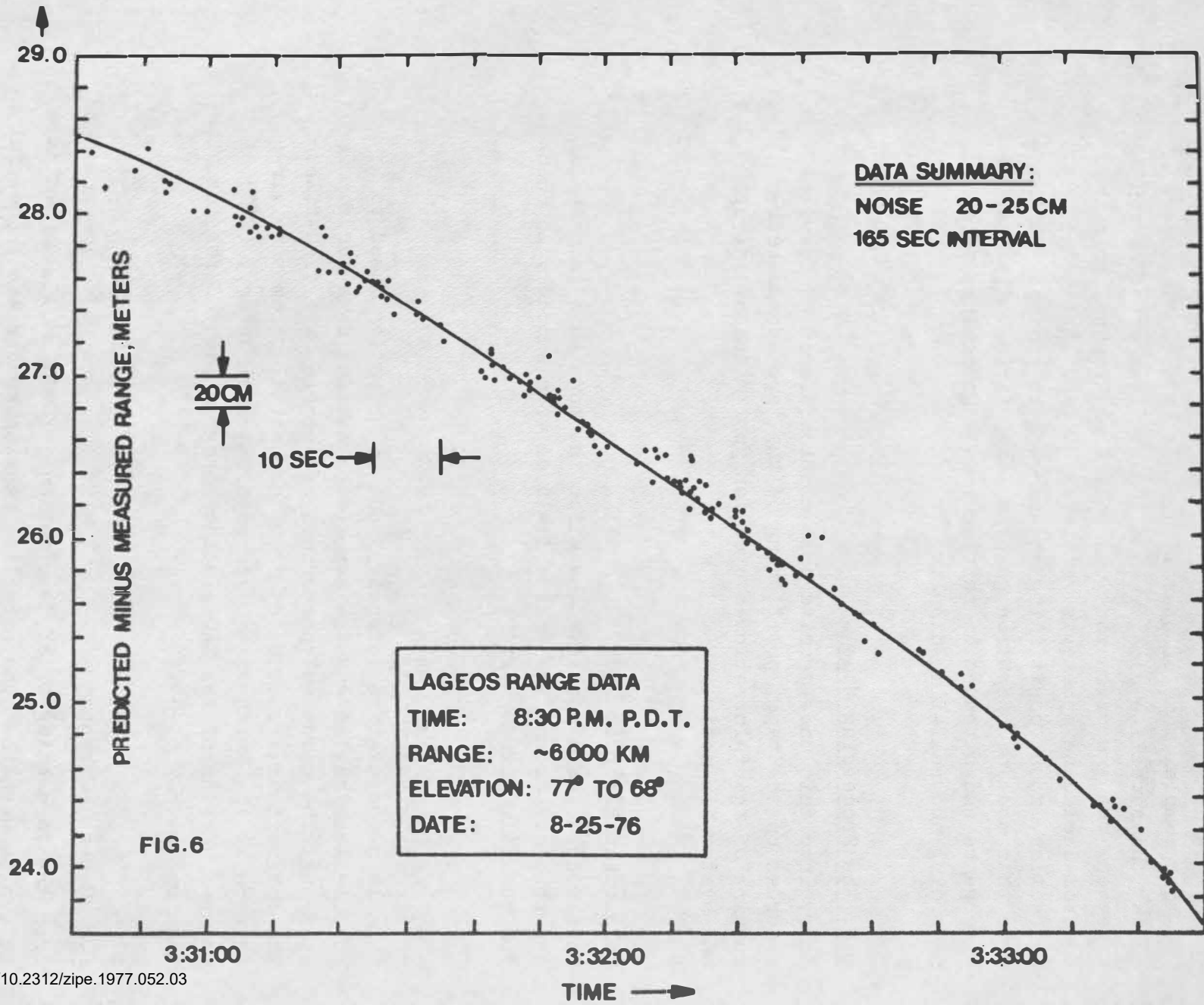
This mode makes a complete check for the monotonic increase of the readings around the entire field of each encoder, to check for possible encoder errors.

6.5. The Ephemerides Mode

This is a computation intensive mode of operation, used to compute look-angles and the associated setting data for future missions. The computed ephemerides are stored on a disk-file. The ephemerides are computed from the orbital parameters circulated by the Smithsonian Astrophysical Observatory, (SAO), using a version of the SAO Amlaser program adapted for installation on the PDP 11-45.

6.6. General Comments

From the foregoing brief descriptions of the available software, it can be seen that the satellite ranging system has a powerful



computational capability. It is this capability which has contributed mainly to reducing the number of operating personnel required during a satellite pass.

7. Current Status of the System

At the date of writing acceptance testing of the system has been completed. During the period of these tests which took place in Mountain View, California, ranging was performed to the following satellites

	Beacon-C	(day-time and night-time)
	GEOS-C	(day-time and night-time)
	Starlette	(night-time only)
and	Lageos	(day-time and night-time).

Over 1100 ranges to GEOS-A had been achieved during a single pass prior to the commencement of acceptance testing. Fig. 6 gives results obtained from a typical pass; these results have not been corrected for possible time walk and for amplitude variations. Considering the lack of observing experience on the part of the GTE-Sylvania operators, this record gives adequate justification for optimism for the future in Wettzell. Some problems have still to be ironed out, but it is anticipated that the system can be delivered to Wettzell for installation in early November.

References:

- /1/ Nottarp, K. The Satellite Observation Station
Seeger, H. Wettzell - Concept and Realisation
Wilson, P.: (in: The Use of Artificial Satellites
for Geodesy and Geodynamics,
Athen, 1973)
- /2/ Nottarp, K. Zur Anwendung von Laserbeobachtungen in
Seeger, H.: der Satellitengeodäsie (in: Bericht über
die Tätigkeit des Inst. f. Angew.
Geodäsie im Jahre 1971)

- /3/ Beetz, H.
Wolf, K.: Zur Planung eines Schutz- und Betriebsgebäudes für das künftige Neodymium YAG-Laserentfernungsmesssystem der Satellitenbeobachtungsstation Wettzell (in: Veröff. der Bayer. Kom. f.d. Int. Erdmessung, Astr.-Geod. Arb. Nr. 35)
- /4/ Fricke, K.
Schiele, K.: Entwicklung und Erprobung einer Puls-Laser-Anlage zur Entfernungsmessung an künstlichen Satelliten (DFVLR, Forschungsbericht 74 - 03)
- /5/ GTE-Sylvania: Proposal for Satellite Ranging System, prepared for IfAG, 24.5.1974 (unpublished)
- /6/ GTE-Sylvania: Quarterly Progress Reports and other unpublished documentation submitted to IfAG during design and construction phases of the satellite ranging system
- /7/ Contraves-Goerz: Acceptance test results for the positioning mount obtained during tests in Pittsburgh, October 1975
- /8/ GTE-Sylvania: Acceptance test results for testing conducted with the completely integrated system in Mountain View, September 1976
- /9/ Nottarp, K.
Seeger, H.
Wilson, P.: In der Bundesrepublik Deutschland entwickelte Projekte zur Entfernungsmessung und Richtungsmessung nach Satelliten mit Hilfe von Lasern (in: Veröff. der Bayer. Kom. f. d. Int. Erdmessg., Astr.-Geod. Arb. Nr. 30)

- /10/ Seeger, H.
Wilson, P.
Nottarp, K.:
Das künftige Neodymium YAG-Laser-
entfernungsmeßsystem der Satelliten-
beobachtungsstation Wettzell (in: Veröff.
der Bayer. Kom. f. d. Int. Erdmessg.,
Astr.-Geod. Arb. Nr. 33)
- /11/ Nottarp, K:
Der Nd:YAG-Laser des Sylvania Laser-
entfernungsmeßsystems (in: Veröff.
der Bayer. Kom. f. d. Int. Erdmessg.,
Astr.-Geod. Arb. Nr. 33)

This work was carried out as part of the research programme of the "Sonderforschungsbereich 78 Satellitengeodäsie" of the Technical University Munich.

SATELLITE LASER RANGING AT HRADEC KRÁLOVÉ

F. Hovorka,¹⁾ M. Konrád, J. Utěkal
(Czechoslovakia)

A B S T R A C T : A satellite laser ranging system of Astronomical Observatory at Hradec Králové is described. During 1976 there were realized three experiments: testing of new "Long distances measurement electronic system" with accuracy ± 0.5 ns ; observations of satellites without tracking with guiding telescope ; and photoelectrical and photographic collocation of laser pulses returned from airplane. Results from experiments are publicated.

Р Е З Ю М Е : Описывается лазерная дальномерная аппаратура Астрономической Обсерватории Градец Кралове. В течение 1976 года были осуществлены три эксперимента: испытывание новой системы для измерений больших промежутков времени с точностью $\pm 0,5$ нс ; слежение за спутниками без помощи гида ; синхронное фотоэлектрическое и фотографическое наблюдения лазерных пулсов отраженных от самолета. Приведены результаты этих экспериментов.

The satellite laser station of Astronomical Observatory at Hradec Králové was developed in 1973 by collaboration with the Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering at Prague. Station is located at approximately 16 deg.E and 50 deg.N in Czechoslovakia.

¹⁾ Astronomical Observatory, 500 08 Hradec Králové 8,
Na zamecku 24 (CSSR)

The main characteristics are:

- Mount: four axis with programmed step driver on 3rd axis, maximum speed 1 deg./s, pointing accuracy ± 0.5 mrad.
- Transmitter: ruby laser 694.3 nm, output energy 1 J, laser puls width 30 ns or 15 ns, repetition rate 1 Hz, beam divergence 0.5 mrad after collimation.
- Receiver: modified Cassegrain, aperture 440 mm, spacial filter 1 mrad, spectral filter 2 nm with transmission 56 %, photomultiplier with 5 % QE.
- Tracking telescope: double refractor with an aperture 100 mm and 3.5 deg. field of view.
- Electronics: oscilloscope 70 MHz, 10 ns resolution counter, stop input gated with resolution 10 μ s, time base 0.01 ms, Universal Time (UTC) with accuracy ± 1 μ s (TV comparison with OMA - TP standard).
- Data processing: paper tape printer.
- Range accuracy of every measurement: better than 1.5 m.

The satellite laser station has been operated from 1973. During 1976 were made measurements of satellites Geos A, Geos C with dispersion of measured ranges ± 12 ns. Accuracy after adjustment: ± 0.5 m. With the expect of usual observations there were realized three experiments in 1976.

1st) From July 1976 was tested a new "Long distances measurement electronic system" developed on Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering at Prague. New system has 4 channels with accuracy ± 0.5 ns. There were made observations of satellite Geos C and Starlette with laser puls width 30 ns. Dispersion of measured satellite ranges was ± 1.05 m $\sim \pm 7$ ns; accuracy after adjustment: ± 0.3 m.

2nd) During August 1976 were observed satellites Geos C and Starlette without tracking by guiding telescope. Satellite Starlette was in Earth shadow. Programmed system of four axis mount was controlled from the tape prepared on computer Minsk 22. Used orbital elements from SAO make precision

± 1 mrad across the pass and ± 2 s at time (20 days after initial epoch). Laser beam width was used 3 mrad; repetition rate 1 Hz. With respect to great error in time (± 2 s) and small repetition rate, satellite had to be look out on orbit. The motion around 3rd axis was started always 2 s previously and by speed 0.07 deg./s smaller than was predicted from ephemeris. During 15 seconds it becomes in 2 - 3 s into coincidence with the motion of satellite. Laser generate double pulses (time interval between bouth pulses: 300 ns). By receiving two pulses in interval 250 - 350 ns electronical circuit starts the programmed tracking of the satellite.

3rd) In August 1976 was realized practical experiment with photoelectrical and photographic collocation of laser pulses returned from the airplane. This experiment was realized by collaboration with the Astronomical and geophysical Observatory of the Czech Technical University at Prague. On the surface of airplane were installed plastic cuby corner retro-reflectors. By satellite laser ranging system on station were transmitted pulses to the airplane and measured topocentral ranges. By photographic camera were made photographs of laser pulses returned from the airplane on the star background for the determination of directions to the airplane. There are no difficulties in measuring of ranges, because measured distances were very short (17 km). There was neccessary to use negative material with high sensibilization in red light for photographic observations.

Main characteristics of experiment:

Laser: energy 0.5 J, pulse width 30 ns, beam width 0.5 mrad.

Retroreflectors: effective area 100 cm², returned beam width 1 deg.

Airplane: high 7 km, distance 17 km, zenith angle 66 deg., velocity 100 m/s.

Camera: aperture 140 mm, focal length 1000 mm, film 33°DIN IZOPANCHROM (USSR).

Nearly every returned laser pulse was pictured on photographs. Ranges were measured with precision ± 1 m ; directions were

determined from photographs with precision ± 1 arcsec.

These results we can applicate to satellite, for example satellite AUOS-Z, that launch is planed on 1977. Responding parameters are in next table.

	airplane	satellite	gain (sat/pl)
laser energy	0.5 J	1 J	2
laser puls length	30 ns	30 ns	1
laser puls width	0.5 mrad	0.5 mrad	1
area of cube corners	10^{-2} m^2	$2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$	2
returned beam width	1 deg	10 arcsec	$1.3 \cdot 10^5$
reflectivity of corners			8
camera aperture	0.14 m	0.4 m	8
range min.	17 km	500 km	$1.3 \cdot 10^{-6}$
range max.	17 km	800 km	$2.1 \cdot 10^{-7}$
total gain $\left\{ \begin{array}{l} \text{min.range} \\ \text{max.range} \end{array} \right\}$			$\begin{array}{l} 43 \\ 7 \end{array}$

By using cameras with aperture bigger than 400 mm will be possible, with energetical reserve, determinate topocentral directions from photographs of returned laser pulses (0.5 J, 30 ns). Directions and ranges will be precisely synchronous. Precision of direction is several times higher than that made by using tracking system of camera.

Energetical results acknowledged in practical experiment are equivalent to theoretical calculations according to energetical equation:

$$\mathcal{E} = \frac{260 \cdot E \cdot P_s \cdot k \cdot D^2}{\Omega_e \cdot \Omega_s \cdot r^4 \cdot d^2}$$

\mathcal{E} ... illumination in image plane (lux.sec)

P_s ... effective area of cube corners

E ... energy of laser puls

k ... atmospherical and optical coefficient

D ... aperture of camera

d ... diameter of diffraction image

Ω_e ... laser beam width (sterad)

Ω_s ... cube corner beam width (sterad)
r ... topocentric range.

R e f e r e n c e s :

- / 1 / Hiršl, Krajíček, Pfeifer: Long distances measurement electronic system, Laser Tracking Instrumentation, Prague, 1975
- / 2 / Hovorka: Přesné optické sledování UDZ pro geodetické účely, ČVUT Praha, 1974
- / 3 / Klokočník, Lála, Navara, Prokeš, Sehnal, Solarič: The usage of Interkosmos satellite for astrodynamics, Nabljudeniya ISZ 14, 1974
- / 4 / Massewitsch, Hamal: Interkosmos Laser Radar Network, Laser Tracking Instrumentation, Prague, 1975
- / 5 / Кабелач: Триангуляция на высокие цели с помощью самолетов, если измеряются направления и расстояния, (публиковано в этом сборнике).

Possibilities in Improving Classical Networks by Satellite Geodesy

by

SZ. MIHÁLY ¹⁾

Summary:

The accuracies of satellite geodetic, stellar triangulation and classical geodetic networks have been compared for the case of networks extending from 400 to 3000 km. The comparison has been based on a) recent accuracy informations of satellite geodetic measurements and networks, and of stellar triangulation in Finland, b) the accuracy of the elements measured in the Hungarian astrogeodetic network and c) formulas derived for apriori estimates of the error propagation in stellar triangulation and classical networks.

The comparison demonstrates that large differences may occur between horizontal (along and across) and vertical error components at the edge of a given network and between identical error components in various networks on the other hand. Therefore, in order to decrease these error components or to improve the accuracy of a classical geodetic network of regional or local type, the network developing methods mentioned above ought to be combined using suitable weights.

Резюме

В работе сравниваются точности сетей космической, баллонной и классической геодезии. Сравнения проведены для протяжённости сетей в 400 – 3000 км. Основой сравнения служили: а/ достижимые в настоящее время точности измерений и сетей космической геодезии, и также точностные данные баллонной триангуляции, полученные в Финляндии, б/ точность элементов, измеренных в венгерской астрономо-геодезической сети и в/ выведенные формулы для предварительной оценки распространения ошибок в сетях баллонной триангуляции и астрономо-геодезических.

Из сравнения видно, что значительные расхождения могут быть между продольной, поперечной и высотной ошибками на краю одной и той же сети, с одной стороны, и между идентичными компонентами ошибок в различных сетях, с другой стороны. Поэтому для уменьшения компонентов ошибок на краю сети, или же для повышения точности классических геодезических сетей регионального и локального типа, вышеуказанные методы создания сетей целесообразно комбинировать. При этом должен выбраться подходящий вес.

¹⁾ Satellite Geodetic Observatory, Pécs (Hungary)

1. Introduction

The new tasks of geodesy, e.g. the different aspects of space research and geodynamics, require points on the Earth surface, space coordinates of which are characterised by a high absolute and relative accuracy in a precisely determined common geocentric coordinate system. In addition, these points have to be distributed on the Earth surface with an appropriate density more than that of the existing continental or worldwide networks.

The question to be answered is: how do the existing classical networks of local and regional type satisfy these requirements and which are the ways and possibilities in improving their accuracy.

The answer is given in three steps: a) the mean errors of the relative positions in the classical geodetic and stellar triangulation networks and satellite geodetic measurements are estimated for different network extensions; b) accuracies obtained in a) are compared with each other; c) some possibilities of combining the above-mentioned methods are demonstrated.

To facilitate the comparison, the lateral error (across the chord), the longitudinal error (along the chord) and the vertical error is introduced at the boundary of the networks with extension T km. These error components are denoted on Fig. 1. by m_1 , m_2 , m_3 , respectively.

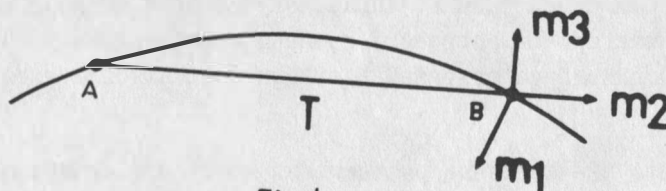


Fig. 1.

2. Relative position errors

2.1. Classical geodetic networks

The lateral, longitudinal and vertical error components at the boundary of the adjusted astrogeodetic networks are estimated as follows:

$$(1) \quad m_1^2 = c \left[s m_k^2 + 2 (s - 1) (m_{kA}^2 + m_{kb}^2) \right]$$

$$(2) \quad m_2^2 = c \left[s m_h^2 + 2 (s - 1) (m_{hA}^2 + m_{hb}^2) \right]$$

$$(3) \quad m_3^2 = c s m_v^2$$

These formulas have been obtained by the author [9] on the basis of the error propagation law and using the idea by PELLINEN L.P. [11].

In the formulas (1), (2), (3) the lateral, longitudinal and vertical error components, referring to a simple part of the chain of triangles bounded by sides with measured azimuths and distances (Fig. 2.), are the following:

$$(4) \quad m_k^2 = \frac{L^2 m_A^2}{2 \rho^2} + \frac{3}{8} m_b^2 + \frac{L^2 m_\beta^2 (n^2 + 2)}{27 \rho^2}$$

$$(5) \quad m_h^2 = \frac{3b^2}{8 \rho^2} m_A^2 + \frac{n^2}{2} m_b^2 + \frac{L^2 m_\beta^2 (n^2 + 2)}{9 \rho^2 n}$$

$$(6) \quad m_3^2 = \mu_{\Delta N}^2 L$$



Fig. 2.

Further, m_{kA} , m_{kb} , m_{hA} , m_{hb} can be computed by the first and second parts of the formulas (4) and (5). In the formulas (1) - (6) the following notations also are used: m_A , m_b , m_β , $\mu_{\Delta N}$ - the mean errors of the measured network elements (azimuth, distance, angle, geoid height difference), b - the average length of the triangle sides, $2n$ - the number of triangles in a part of the chain with an average length ($L = nb$ in km), s - the number of the parts of chain along the given extension of T km ($s = \frac{T}{L}$), c - coefficient (depending on the number of triangles across the network, $c = 0,6 - 1,0$), $Q = 206264''$.

The formulas (1) - (6) are valid if

- all angles of every triangle in the network are measured,
- the network is adjusted with azimuth, distance and triangle conditions or by an equivalent way,
- the triangles have sides of a similar length,
- the simple part of the chains of triangles have a similar length,
- the extension is less than 3000 km.

The formulas (4) and (5) have been obtained by TATEVYAN A.S. and have been proved to be reliable in [13].

The estimation has been based on data of the astrogeodetic networks in Hungary and other countries [3, 4, 10, 11, 12, 13]. The data are as follows: $m_A = \pm 0,75''$, $m_b = \pm 3,1$ cm, $m_\beta = \pm 0,41''$, $\mu_{\Delta N} = \pm 2,5$ cm/km, $b = 25$ km, $n = 4$ ($L = 100$ km), $c = 0,7$. The lateral, longitudinal and vertical error components, as well as their resultant error have been examined at network extensions $T = 400, 1000, 1600, 3000$ km. The results are plotted on Fig. 3. The effect of the error of azimuth, distance and angle measurements on the lateral and longitudinal components respectively are shown on Fig. 4. and Fig. 5. by curves m_{1A} , m_{2A} , m_{1b} , m_{2b} , $m_{1\beta}$, $m_{2\beta}$.

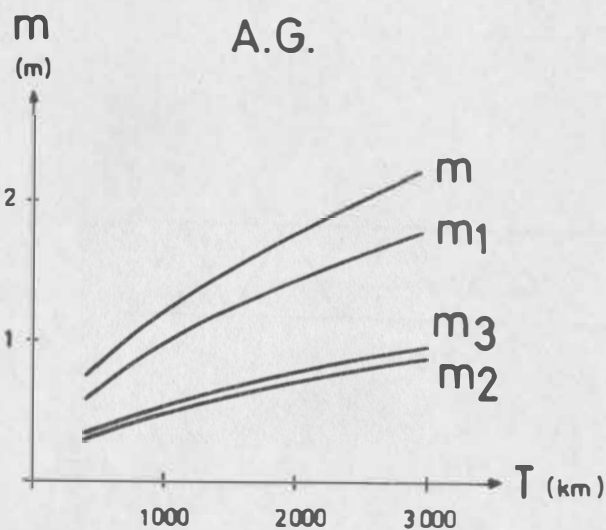


Fig. 3.

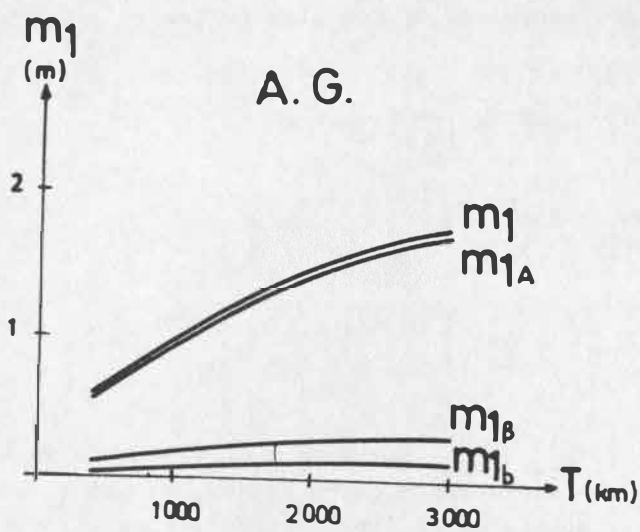


Fig. 4.

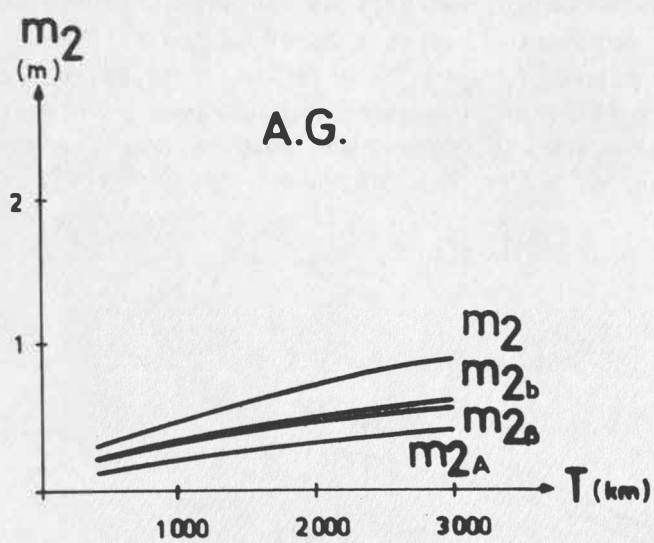


Fig. 5.

2.2. Stellar triangulation

The lateral, longitudinal and vertical error components at the final end of a stellar triangulation chain are estimated by formulas follows:

$$(7) \quad m_1^2 = \frac{b^2 m_A^2}{\rho^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{5c_i^2}{2^{2i+2}} + \frac{c_{n+1}^2}{2^{2n+2}} \right)$$

$$(8) \quad m_2^2 = \frac{b^2 m_A^2}{\rho^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{3c_i^2}{2^{2i+2}} + \frac{3c_{n+1}^2}{2^{2n+2}} \right)$$

$$(9) \quad m_3^2 = \frac{b^2 m_e^2}{\rho^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{2^{2i-1}} + \frac{c_{n+1}^2}{2^{2n}} \right)$$

where $c_i = 2c_{i-1} + /-1^{i-1}$; $c_{i-1} = 0$, n - the number of triangles in the examined stellar triangulation chain, b - the average chord length, m_A and m_e - the azimuth and elevation error components of the chord direction determined from stellar triangulation observations.

The formulas (7) - (9) have been obtained by the author on the basis of the error propagation law. They can be applied if

- the triangles are chain-like,
- the triangle chords are similar length,
- the length of the chain is less than 3000 km.

Stellar triangulation does not give the scale of the network, thus, the estimation obtained by formula (8) must be considered only as the effect of the azimuth error on the scale transmission. The estimation has been based on the following data of the stellar triangulation in Finland [7, 8]: $m_A = \pm 0,3''$, $m_e = \pm 0,5''$, $b = 200$ km. The lateral, longitudinal and vertical error components and their resultant have been examined at the extension $T = 400, 1000, 1600$ and 3000 km ($n = \frac{2T}{b} = 3, 9, 15, 29$). The results are presented on Fig. 6.

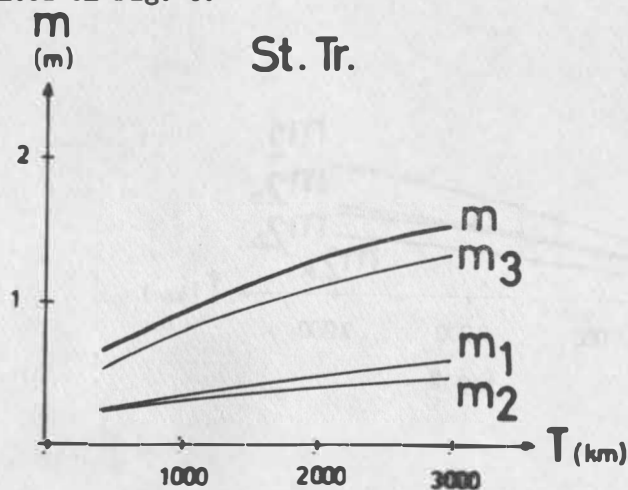


Fig. 6.

The effectiveness of the stellar triangulation of high precision is limited by an extension of about 1000 km, where its construction would require a long time and high costs.

2.3. Satellite geodetic observations

In this section the photographic, laser and Doppler satellite observations as well as the NWL-9D are taken into consideration.

By photographic tracking of satellites the direction of a single chord can be determined. The accuracy of an elementary chord direction is between $\pm 0,6'' - 2,5''$. A probable value is $\pm 1,0''$. The azimuth error being generally larger than that of the elevation, in the comparison $m_A = \pm 0,6''$ and $m_e = \pm 0,8''$ have been accepted. The lateral and vertical error components are shown on Fig. 7. and Fig. 9. by straight lines denoted by Ph.

By means of laser distance measurements the length of the chord joining two stations can be derived. The accuracy of the chord length depends on the measuring equipment and the used chord computation method. Presuming some laser equipments giving an accuracy of $\pm 1,0$ m and $\pm 0,1$ m, as well as a suitable method for the chord computation (e.g. using dynamic informations), the chord distance can be determined with an accuracy $\pm 10^{-6}$ and $\pm 2 \cdot 10^{-7}$, respectively. The longitudinal errors are demonstrated on Fig. 8. by straight lines denoted by L2 and L3.

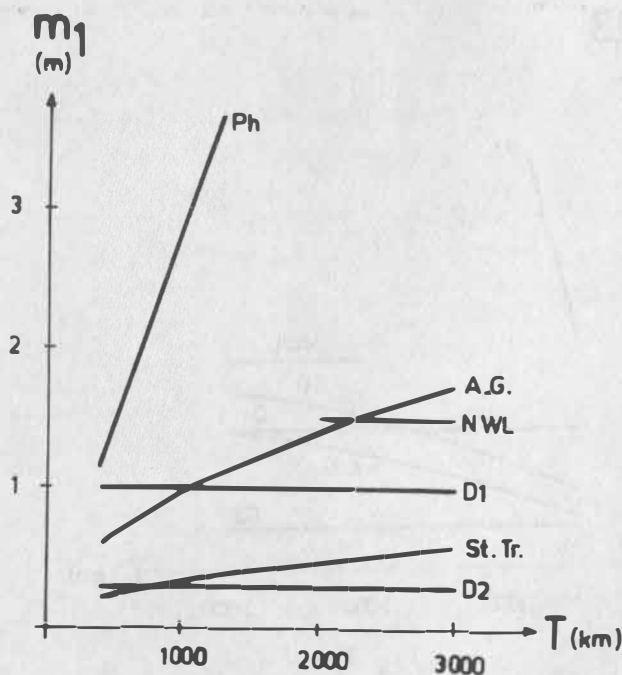


Fig. 7.

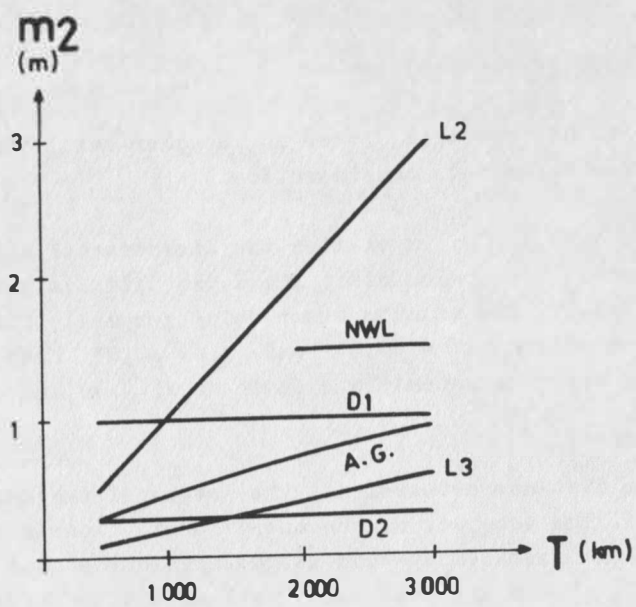


Fig. 8.

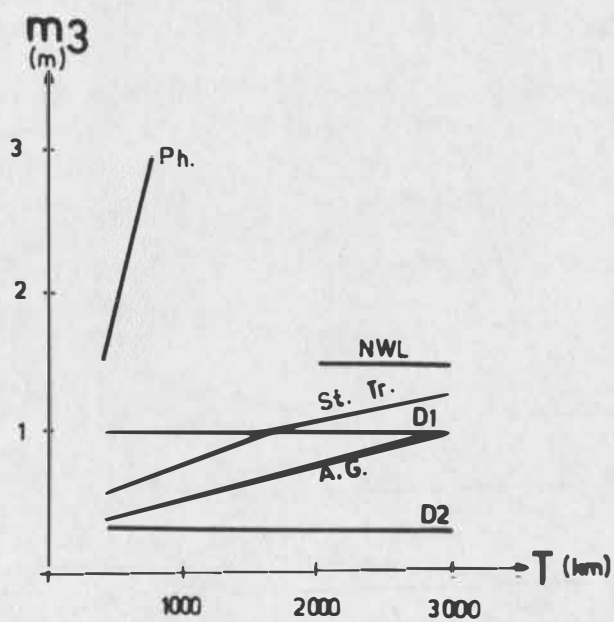


Fig. 9.

The absolute space coordinates of a point on the Earth surface can be determined with Doppler receiver using Broadcast or Precise Ephemeris of the satellite. When the Precise Ephemeris and some suitable data procedure is used, an accuracy of a single station coordinate about $\pm 1,0$ m is feasible. There are proposals to approach a higher precision of about $\pm 0,3$ m by means of the Precise Ephemeris, the Short Arc Adjustment and some special observational net. Using the abovementioned accuracies, all three error components are presented on Fig. 7., Fig. 8. and Fig. 9. by straight lines D1 and D2.

Some points of a worldwide geodetic network can also be included. One network, the NWL-9D is selected here. Its mean error of the point coordinates, $\pm 1,5$ m, is shown on Fig. 7., Fig. 8. and Fig. 9.

3. Comparison of the accuracies

The corresponding error components of the above-mentioned methods are plotted on Fig. 7., Fig. 8. and Fig. 9.

Fig. 7. shows the lateral error components of the methods. Comparing them among each other, the conclusions are as follows:

1. The lateral error in the astrogeodetic networks (A.G.) is generally large and it has to be improved by other methods.
2. For this purpose, the elementary chord direction obtained from photographic observations of satellites (Ph.) can not be used.
3. Considering the relative point positions only, in order to decrease the lateral error of the local classical networks
 - either some points from NWL or the Doppler observation variant D1 should be introduced if the extensions are more than 2000 km and 1000 km, respectively;
 - nevertheless the Doppler observation variant D2 and the stellar triangulation (St,Tr.) are the best effective methods.
4. In order to form some regional network from the local ones and to connect the local geodetic system with the common geocentric coordinate system (i.e. for improving the absolute orientation), all above-mentioned methods may be applied effectively, except the photographic one (Ph.).

Comparing the longitudinal errors on Fig. 8., it can be stated that

1. The longitudinal error of the classical networks is generally less disturbing.
2. In case of a local or regional classical network with homogegeous scale
 - the laser variant L2, the points of the NWL and the Doppler observation variant D1 are not suitable for improving the scale,
 - the Doppler observation variant D2 and the laser observations L3 can lead to good results.
3. Both the Doppler and laser observation variants (D1, D2, L2 and L3) are suitable to a scale standardization of the local and regional classical networks with inhomogeneous scale and, generally, a scale transmission from the common system to the local ones.

On the basis of the vertical errors on Fig. 9., the conclusions are as follows:

1. Comparing the network developing methods practically realized up till now, the classical networks have the highest vertical precision.
2. Considering the relative point positions only, in order to decrease the vertical error of the classical networks the only suitable method is the Doppler observation variant D2.
3. In order to connect the networks to different reference surfaces and to the common geocentric coordinate system, all above-mentioned methods can be used, except the photographic one (Ph.).

Generally, the most effective methods for improving the accuracy of the classical networks can be as follows:

- a) Doppler observations for the determination of space coordinates of the points with an accuracy $\pm 0,3 - 0,5$ m;
- b) stellar triangulation for the determination of the chord direction with an accuracy $\pm 0,6''$;
- c) laser observations for the chord distance determination with an accuracy $\pm 2 \cdot 10^{-7}$.

4. Some possible combinations

In order to improve the accuracy of the geodetic networks of local and regional types and to connect them to the common geocentric system, the network developing methods ought to be combined. It can be recommended to combine

- a) the precise classical networks, the Doppler observations giving an accuracy $\pm 0,3 - 0,5$ m;
- b) the precise classical networks, the Doppler observations giving an accuracy of about $\pm 1,0$ m and the stellar triangulation of high precision;
- c) the precise classical networks, the stellar triangulation of high precision, advanced laser technics and some points of the NWL or other precise worldwide net (if they are in the given classical network).

Some suitable weightings of these combinations (a, b and c) are demonstrated in the following table.

Methods		Variants		
		a	b	c
Astrogeodetic network	orientation	small	small	small
	scale	medium	large	medium
	heights	medium	large	large
Doppler	D2: 0,3-0,5 m	large		
	D1: 1,0 m		medium	
Stellar triangulation	azimuth		large	large
	elevation		medium	medium
Advanced Laser	L3			large
NWL				medium

References

- [1] BOAL, J.D.: Doppler-Satellite Surveys and North American Readjustment of Horizontal Control Network. Geodetic Survey of Canada, 1974
- [2] BROWN, D.C.: Doppler Surveying with the JMR-1 Receiver. Bull. G6od. 1976/1
- [3] CZOBOR, A.: Weighting proportion of sides measured by geodimeter and extended from the baseline. Report of Geodetic Institute (FÖMI), Hungary, Budapest, 1971, (in Hungarian).
- [4] HÁBY, I.: Some methods of control measurements for determining the real reliability of the adjusted astrogeodetic network. Report of Geodetic Institute (FÖMI), Hungary, Budapest, 1972-73, (in Hungarian).
- [5] MÁLMOS, F.: Superkontroll geodätisches Weltnetz und Landnetz. Nabljudenija I.S.Z., No. 14., Bukarest, 1975
- [6] ИЗОТОВ, А.А.: Проблемы построения фундаментальной астрономо-геодезической сети СССР. Геод. и Карг. Но. 7, Москва 1976
- [7] KAKKURI, J.: Stellar triangulation net with Balloons intermediating between Satellite nets and Classical triangulation. Proceedings of the Int. Symp. on Sat. and Terr. Triang., Part II., Graz, 1972
- [8] KUKKAMÄKI, T.I.: Stellar triangulation. Bull. G6od. 54
- [9] MIHALY, Sz.: Comparison of the accuracies of the satellite geodetic, stellar triangulation and classical networks. Report of Geodetic Institute (FÖMI), Hungary, Budapest, 1975, (in Hungarian)
- [10] ПЕЛЛИНЕН, Л.П., ГОВОРОВА, Л.А.: Оценка точности астрономо-гравиметрического нивелирования в СССР. Труды ЦНИИГАиК, вып. 145, Москва 1962
- [11] ПЕЛЛИНЕН, Л.П.: О целесообразных путях совместной обработки наземной и космической триангуляции. Булл. Ст. Опт. Набл. ИСЗ, Но. 55, Москва 1969
- [12] SCHÖLDSTRÖM, R.: Geodimeters AGA-6A and AGA-8. AVN, 1967/7
- [13] ТАТЕВЯН, А.Ш.: Исследования построения опорной геодезической сети. Труды ЦНИИГАиК, вып. 181, Москва 1967
- [14] WOLF, H.: Supporting terrestrial triangulation work by satellite triangulation. Proceedings of the Int. Symp. on Sat. and Terr. Triang., Part II., Graz, 1972

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ СТАНЦИЙ ПОЛУДИНАМИЧЕСКИМ
МЕТОДОМ

Ю.В.Батраков, Т.К. Никольская

(Институт теоретической астрономии АН СССР, Ленинград)

Резюме. Описываются результаты численного эксперимента.

Предполагается, что для трех станций известны их высоты над референц-эллипсоидом и из наблюдений (оптических) определяются поправки к их широтам и долготам вместе с орбитальными элементами ИСЗ. Минимизируется сумма модулей обратной матрицы нормальной системы уравнений. Наименьшее значение суммы достигается в варианте с расположением станций на одной параллели с широтой примерно равной наклону орбиты ИСЗ. Удаление станций друг от друга должно быть достаточно большим, чтобы наблюдениями был охвачен значительный участок орбиты.

ON THE OPTIMALITY CONDITIONS FOR DETERMINING THE STATION POSITIONS BY SEMI-DYNAMICAL METHOD, - by Yu.V.Batrakov and T.K. Nikolskaya.

Abstract. The results of numerical experiment are described. The heights of three stations over the ellipsoid of reference are supposed to be known and the corrections to the latitudes and longitudes are determined together with the orbital elements of the AES from optical observations. The sum of modules of the reciprocal matrix of the normal equations is minimized. The minimum sum corresponds to the variant with stations distributed over one common parallel the latitude being close to the orbital inclination. The stations separation must be sufficient to ensure observing essential part of the orbit.

В полудинамическом методе спутниковой геодезии [1], [2] из наблюдений ИСЗ определяют только координаты станций и элементы орбиты, многочисленные возмущающие параметры (коэффициенты гармоник гравитационного поля, массы Луны и Солнца, параметры атмосферы и светового давления) считаются известными. На самом деле значения этих параметров содержат ошибки, влияние которых на больших интервалах времени может существенно исказить результаты. Поэтому область применимости полудинамического метода ограничена небольшими интервалами времени (1-2 суток). На таких интервалах времени не всегда удается обеспечить наличие достаточного числа хорошо распределенных наблюдений и нормальные системы уравнений для неизвестных нередко бывает плохо обусловленными.

Распределение наблюдений и обусловленность нормальных систем можно улучшить, если при расчете сеансов наблюдений ИСЗ заранее указывать на моменты и условия наиболее благоприятных конфигураций станций и ИСЗ. В связи с этим вопрос об оптимальном расположении станций, обеспечивающем наивысшую точность определяемых параметров, приобретает не только теоретическое, но и практическое значение.

Для решения задачи об оптимальном расположении станций мы провели численный эксперимент, заключающийся в вычислении значения функций цели для ряда вариантов и в выборе такого варианта, при котором это значение наименьшее. В качестве функции цели была взята сумма модулей элементов обратной матрицы нормальных уравнений для неизвестных параметров. На всех рассмотренных вариантах предполагалось, что наблюдения дают угловые положения ИСЗ и ведутся они с трех станций, расположенных на поверхности

Земли. Две станции во всех вариантах имели фиксированные положения (на одной параллели), тогда как положение третьей станции изменялось от варианта к варианту как по широте, так и по долготе. В качестве неизвестных параметров от которых зависят условные уравнения и нормальная система, были выбраны поправки к орбитальным элементам ИСЗ ($M + \omega, n, l = e \cos \omega, h = e \sin \omega, i, \Omega$) и поправки $\cos \varphi \Delta \lambda, \Delta \varphi$ (λ, φ — долгота и широта) для всех трех станций. Высоты трех станций над референц-эллипсоидом считались известными достаточно точно и их поправки в условные уравнения не включались. Предполагалось, что каждая станция ведет наблюдения равномерно по времени, покрывая наблюдениями топоцентрическую дугу орбиты длиной около 60° . Для ИСЗ были взяты почти круговые орбиты с высотой 1500–2000 км над поверхностью Земли и с наклонами $i = 32^\circ, 47^\circ, 66^\circ, 95^\circ$. Наблюдения охватывали интервал времени в 1 сутки.

В первой группе вариантов две станции были расположены на одной широте с разностью долгот 160° . У третьей станции долгота сохранялась неизменной, а широта менялась от варианта к варианту через 6° . В качестве исходных конфигураций в этой группе были выбраны следующие три: 1) равнобедренный треугольник, основание которого составляют две фиксированные станции, а вершину — подвижная станция, 2) прямоугольный треугольник, в котором две фиксированные станции образуют катет, лежащий на параллели, а третья, подвижная, расположена на одном меридиане с одной из фиксированных станций, образуя меридиональный катет.

Для этой группы вариантов функция цели оказалась слабо зависящей от широты третьей станции: при изменении широты в диапазоне $\pm 15^\circ$ от значения, обеспечивающего минимум функции цели,

последняя остается практически постоянной. Это означает, что в выборе широты третьей станции допустима известная свобода. Условия освещенности ИСЗ Солнцем налагают ограничения на область определения функции цели, которая как-бы состоит из нескольких независимых непрерывных кусков, в каждом из которых имеется свой локальный минимум, соответствующий данному прохождению ИСЗ в зоне освещенности (вне тени Земли) над данными станциями. Во всех вариантах этой группы минимум функции цели достигался при положении третьей станции близком к подспутниковой трассе, на расстоянии $1-2^{\circ}$ от последней. Полученный результат говорит о том, что в рассматриваемом варианте полудинамического метода, когда высоты станций не определяются, наиболее выгодны такие взаимные расположения станций и орбит, при которых наблюдаемые траектории ИСЗ на небесной сфере проходят вблизи зенита.

Вторая группа вариантов характеризовалась расположением всех трех станций строго на подспутниковой трассе, варианты различались лишь расстоянием станций друг от друга вдоль трассы. В этой группе наилучшую точность обеспечивают конфигурации, при которых разность долгот между станциями значительна, а широты всех станций близки к i (угол наклона орбиты).

Точность определения орбитальных элементов ИСЗ и координат трех станций значительно увеличивается, если, кроме наблюдений рассматриваемых трех станций, положения которых определяются, в обработку включаются наблюдения еще одной, четвертой, или нескольких станций с известными координатами, которые улучшать не требуется. При этом положение четвертой станции не влияет существенно на точность определения неизвестных задачи.

Подключение же четвертой станции в предположении, что ее две поправки координат, соответствующие широте и долготе, неизвестны и должны определяться из наблюдений совместно с соответствующими поправками для первых трех станций и с орбитальными элементами, резко ухудшает обусловленность системы нормальных уравнений и увеличивает ошибки и корреляции неизвестных. Поэтому приходится делать вывод, что в полудинамическом методе совместное определение положений большого числа станций (больше 3-х - 4-х) нецелесообразно из-за сильных корреляционных связей между неизвестными и высокого уровня ошибок последних.

Отметим, что точность определения неизвестных существенно зависит от величины топоцентрической дуги трассы ИСЗ на небесной сфере, охваченной наблюдениями на каждой станции. Чем такая дуга больше, тем точность выше. При расчетах вариантов, описанных выше, бралась дуга около 60° для каждой станции. Уменьшение этой дуги вдвое приводило к увеличению суммы квадратов ошибок неизвестных в 3,84 раза. Отсюда следует, что наблюдения должны охватывать как можно большую часть трассы ИСЗ во время прохождения ИСЗ в зоне видимости станций, исключая части трассы слишком близкие к горизонту, где возможны ошибки из-за рефракции.

Влияние наклона орбиты ИСЗ на точность определяемых неизвестных менее четко выражено. Однако, вычисления показывают, что для конфигурации станций, обеспечивающей минимум функции цели, более высокая точность неизвестных получалась при наклоне в 47° , а более низкая при наклоне 95° . В целом оптимальный выбор конфигурации станций и орбиты ИСЗ, как это показывает сравнение

просчитанных вариантов, может обеспечить увеличение точности определяемых параметров примерно в 1,5 раза.

В заключение можно сделать следующие выводы. При определении полудинамическим методом поправок широт и долгот станций, в предположении, что поправки высоты известны точно, станции должны быть расположены приблизительно на одной параллели, а спутники должны иметь наклон близкий к широте этой параллели. Расстояние между станциями должно быть достаточно большим, чтобы наблюдениями была охвачена значительная часть орбиты. Каждое прохождение ИСЗ должно наблюдаться станциями с охватом наибольшей топоцентрической дуги орбиты. При этих условиях можно ожидать лучшего разделения неизвестных и их более высокой точности, чем при несоблюдении этих условий.

1. Татевян С.К. Динамические методы спутниковой геодезии. Бюлл. "Наблюдения ИСЗ", вып.13, 1974.
2. Батраков Ю.В., Никольская Т.К. Программа вычисления координат станций наблюдения полудинамическим методом. Бюлл. "Наблюдения ИСЗ", вып.13, 1974.

provide possibilities for demonstrating plate-tectonic movements, a problem which currently is in the centre of geoscientific research.

In this paper, the error propagation from the observation errors m_{ϵ} (mean error of the laser distance measurement) to the errors m_s of the derived distances is investigated on the basis of results of variant calculations. This propagation is formally described by an equation having the following form:

$$m_s = \sqrt{Q_{ss}} \quad m_{\epsilon} = k \quad m_{\epsilon} \quad (1)$$

If satellite observations are performed only from the two terminals of the chord to be derived and if the derivation is to be done geometrically, in addition to distance measurements also photographic direction observations have to be introduced for solving the problem. The accuracy of the photographic observations is limited to about $\pm 1''$; thus, for a satellite distance of 1500 km it is less favourable by a factor of 75 than the accuracy of ranging ($\pm 0,1$ m). That is why the standard deviation of the derived distance is determined only by the directional accuracy, and the high precision of ranging cannot be utilized. As investigations by Schöpe [1] have shown, in this way 1000 km long chords cannot be derived with an accuracy of better than ± 2 m.

To utilize the high precision of modern laser equipment, therefore network forms have to be established the geometry of which is determined only by range measurements. For this, two different types of networks may be used. For the network type I, simultaneous measurements have to be performed from four terrestrial stations to at least six satellite positions, whereas the network type II is based on simultaneous observations from six stations to four satellite positions [2]. The accuracy efficiency of network type I is considerably reduced by critical configurations. A critical configuration, which can be avoided only insufficiently, is given, if the four terrestrial observation stations are coplanar. That is why favourable network configurations have to be selected, and, nevertheless, one will obtain increasing factors k according to (1) between 4 and 5, i. e. standard deviations from the derived terrestrial distances of 0,4 to 0,5 m, if the network sides are 1000 to 2000 km long.

The network type II has more favourable propagation properties. Therefore, the technique of "3-D-multilateration" proposed in [3] has been based on it. Without making any decisive demands on the network geometry, it provides error increasing factors k between 2 and 3. Thus, by means of the 3-D-multilateration an accurate utilization of the high-precision laser measurements can be made possible. At present, however, it cannot be applied yet, since the global distribution of precise laser equipment does not allow simultaneous observations from six cooperating stations. Even after the putting into operation of additional devices there should be taken into account that simultaneous observations from six stations being distributed over an area with a diameter of 2000 to 5000 km will be very rare events. Therefore the efficiency of this technique will be low.

At any rate, methods are desired requiring the cooperation of only two stations. Such methods presuppose that in addition to the range measurements other dynamically derived information on the observed satellite positions is introduced. It is important that the distance to be derived will be influenced as slightly as possible by the errors of the orbit computation. Short-arc methods will be used for the orbit determination, and the correlations existing between neighbouring satellite positions will be utilized for increasing the accuracy. The technique presented here is a geometrical-dynamical hybrid technique. Prerequisite to it are simultaneous range measurements from the two stations A and B, and, in addition, it introduces the distances d_{ij} between the observed satellite positions, which have to be computed dynamically by an orbit determination (Figure 1).

Law has shown by extensive investigations [4] that the distances d between the satellite positions can be obtained with standard deviations of $m_d = \pm 0,3$ m, if d is less than 2000 km. His studies have been based on real observation material of the ISAGEX programme, and for performing the orbit computation he used a relatively simple programme, which was affected with residuals of 30 m in the case of long-arc applications. Even if the satellite positions belong to different successive satellite revolutions, the mean error is increasing only slightly to $m_d = \pm 0,4$ m.

From Figure 1 it can be seen, that with three observed satellite positions a determinate solution is obtained for the terrestrial

distance s . But it can be also seen, however, that the solution is interfered with by critical configurations. Thus, satellite positions must not lie in a straight line or be coplaner with A or B. Useful solutions will be obtained, if the distance AB is almost parallel with the sub-satellite curve at a distance v (Figure 2). With $s = 1000$ km, a satellite height $H = 1000$ km and $v = 500$ to 1500 km, there result error increasing factors k between 2 and 8, i. e. mean errors m_g between 0,2 and 0,8 m. The interferences caused by dangerous loci can be eliminated in this technique, however, if satellite observations are used which belong to two successive satellite revolutions. On examining the ISAGEX material one can state that laser observations for successive transits not at all are rare. The computations were based upon two satellite orbits with altogether five observed satellite positions. The location of the terrestrial chord AB was varied. In Figure 3 and Table 1 the variants 1 (AB perpendicular to the sub-satellite curve) and 2 (AB parallel with the sub-satellite curve) are shown. Table 1 gives the standard deviations m_g for $s = 1000$ km. Here, $m_{\epsilon} = \pm 0,1$ m, $m_d = \pm 0,3$ m and $m_{d'} = \pm 0,4$ m were introduced. The satellite height H was varied between 1000 and 3000 km. The independence of the transfer accuracy of the relative position between the terrestrial chord and the sub-satellite curve is confirmed by other variants, too. In Table 2, moreover, for the variant 1 the distance s is varied between 1000 and 3000 km. It is apparent that a relative accuracy of $3 \cdot 10^{-7}$ will be obtained. If the satellite height is larger than the distance to be derived, a slight decrease of accuracy occurs.

When the results are evaluated there should be taken into account that the mathematical model subjected to the adjustment contained only one surplus observation in each case. In practical applications, in general considerably more observations will be introduced, so that the accuracy will be increased further on. Surely, it can be expected that with an observation accuracy of $m_{\epsilon} = \pm 0,1$ m a relative distance accuracy of 1 to $2 \cdot 10^{-7}$ is obtainable.

References

- [1] Schoeps, D.: Ober die Genauigkeit eines durch Satellitenbeobachtungen bestimmten geodätischen Vektors. Vermessungstechnik 24 (1976) 7
- [2] Stange, L.: Konsequenzen der geodätischen Nutzung von Laserbeobachtungen künstlicher Satelliten. Veröff. ZI Physik der Erde (1974) Nr. 29
- [3] Escobal, P. R. u. a.: 3-D Multilateration, a precision geodetic measurement system. JPL quart. techn. Rev. 2 (1972) 3
- [4] LaBow, R.: Untersuchungen zur Nutzung nichtsynchrone Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten. Unveröffentl. Manuskript.

Table 1

Standard deviations m_s
($s = 1000 \text{ km}$)

H	1000	2000	3000 km
variant 1	0,29	0,37	0,53 m
variant 2	0,25	0,31	0,38 m

Table 2

Standard deviations m_s and precision $\frac{m_s}{s}$
(variant 1)

$s \backslash H$	1000		2000		3000 km	
1000 km	0,29	$2,9 \cdot 10^{-7}$	0,37	$3,7 \cdot 10^{-7}$	0,53	$5,3 \cdot 10^{-7}$
2000 km	0,55	$2,8 \cdot 10^{-7}$	0,57	$2,8 \cdot 10^{-7}$	0,60	$3,0 \cdot 10^{-7}$
3000 km	0,86	$2,9 \cdot 10^{-7}$	0,88	$2,9 \cdot 10^{-7}$	0,88	$2,9 \cdot 10^{-7}$

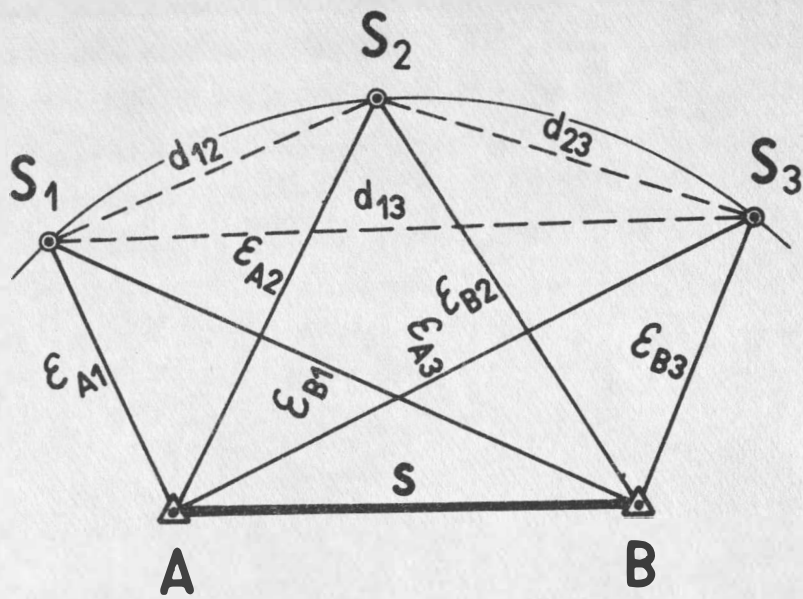


Bild 1

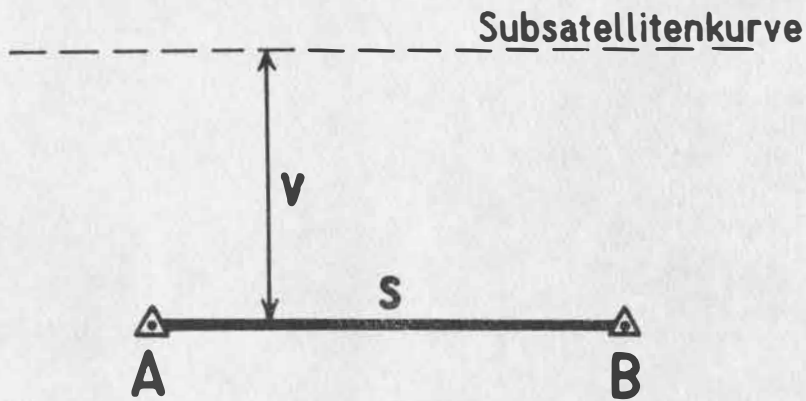


Bild 2

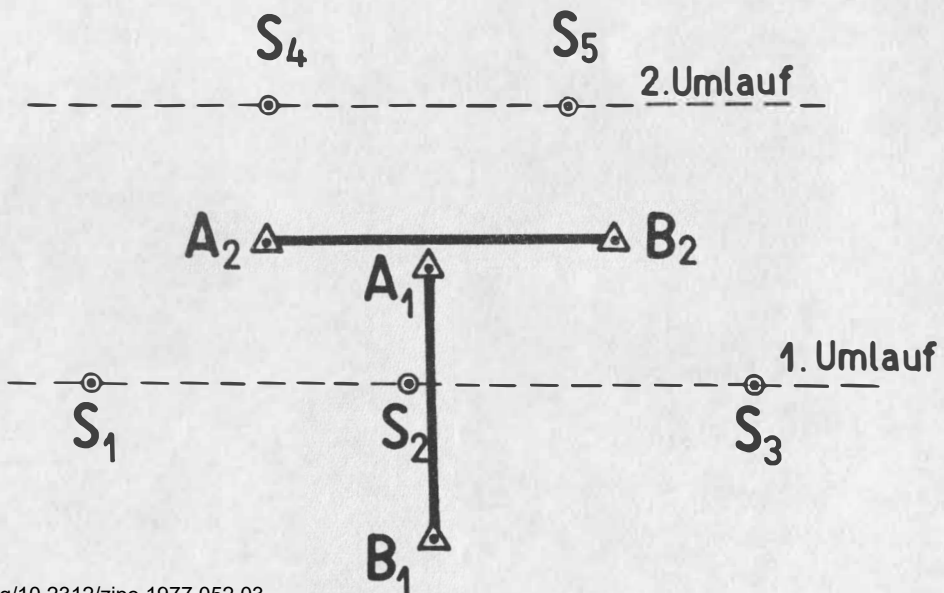


Bild 3

Determination of Station Coordinates From Laser Observations

by

J. ÁDÁM ¹⁾

Summary

Spatial positions of a station can be computed using its laser measurements with known satellite coordinates. Based on the method of least squares adjustment, algorithms were developed for obtaining the unknown station positions. Simple mathematical models are also described in detail. In the paper computational results are presented, characterizing the accuracy of the methods under different geometrical, observing and other conditions.

1. Introduction

The application of laser ranging to artificial Earth's satellites has opened up a number of new and interesting areas of study and has given new opportunities in a number of problems in geodesy and geodynamics. Position range measurements are already made to the order of 50 cm with expectation that this accuracy can be improved to the order of 10 cm. With this quality, it can reasonably be expected that

1)-----
Satellite Geodetic Observatory, Budapest-Penc

laser ranging to satellites will be able to contribute significantly to the measurement of the Earth's motions, such as tectonic, polar, tidal and crustal, and to the determination of the Earth's gravitational field in both space and time.

Our study is devoted to the subject, how the accuracy of determination of station coordinates - based on laser ranging to Earth satellites - depends on different mathematical models, geometric and observing conditions. The aim of our computer modelling was to follow the propagation of different errors in positioning, and thus to get an overall picture of the achievable accuracy in function of measuring errors. The results obtained are in good agreement with VEIS (1960), AARDOOM (1972), BLAHA (1972) and TSIMIS (1973).

2. Determination of laser-station coordinates

Suppose that the position of the satellite is determined (by photographic, laser, Doppler, satellite-to-satellite tracking etc. methods) at several different moments. If a laser-station is ranging to this satellite, then (after calibration, atmospheric corrections etc.) the distance Q_k between the station and the satellite at the moment t_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) is related to the station X, Y, Z and X_{sk}, Y_{sk}, Z_{sk} satellite coordinates (either in geocentric rectangular coordinate (Fig. 1a.) or in a fundamental system) defined by BLAHA (1972) and ONG (1973) (Fig. 1b.) as

$$(1) \quad (X_{sk} - X)^2 + (Y_{sk} - Y)^2 + (Z_{sk} - Z)^2 = Q_k^2, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

At a given instant this second order equation contains three unknowns: X, Y, Z .

Namely, the positioning is given by intersections of spheres with radii of laser-distances Q_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$).

2.1. Principle of determination of coordinates

If the satellite's position is known at three different moments and the distance Q_k ($k = 1, 2, 3$) is measured, of course at the same time, we arrive to a second order system of three equations by writing (1) for t_k ($k = 1, 2, 3$) moments. From three second order equations of this type, coordinates X, Y, Z of the station can be determined by using the POWELL-type method. It is the best solution for such non-linear equations (TARCSAI and ÁDÁM 1976).

A linear system can also be obtained for positioning, if we have four second order equations. Namely, subtracting one of the equations from the others, we get the following equation for the unknown quantities X, Y, Z :

$$(2) \quad \underline{A} \cdot \underline{T} = \underline{b}, \text{ where } \underline{T} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$b_j = \varrho_{j+1}^2 - \varrho_1^2 + R_{s1}^2 - R_{s,j+1}^2 \quad R_{sj}^2 = X_{sj}^2 + Y_{sj}^2 + Z_{sj}^2$$

and the columns of the matrix \underline{A} are given as:

$$\begin{aligned} a_{j1} &= 2(X_{s1} - X_{s,j+1}) \\ a_{j2} &= 2(Y_{s1} - Y_{s,j+1}) \quad (j = 1, 2, 3) \\ a_{j3} &= 2(Z_{s1} - Z_{s,j+1}) . \end{aligned}$$

The solution of (2) for \underline{T} thus yields the coordinates of the laser-station. In this case, the simple GAUSS-procedure can be used.

2.2. Determination of coordinates by least squares adjustment

If a station ranges the distance between the station and the satellite at four or more (or much more) moments, then its coordinates can be computed by least squares adjustment. By using the matrix-orthonormalization procedure improved by VÖLGYESI (1975), our experiences are more favourable (in other investigations too ADAM and TARCSAI (1975)).

Rearranging equation (1), the observed quantities are

$$(3) \quad \varrho_k = \left[(X_{sk} - X)^2 + (Y_{sk} - Y)^2 + (Z_{sk} - Z)^2 \right]^{1/2} \\ (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Equation (3) can be linearized by taking the approximate values X_0, Y_0, Z_0 of the unknown variables, and then the following equation can be constructed for the adjustment of measurements belonging to $n \geq 3$ different moments:

$$(4) \quad \underline{\varrho}_m + \underline{v} = \underline{C} \underline{\Delta w} + \underline{\varrho}_c ,$$

where $\underline{\varrho}_m$ and $\underline{\varrho}_c$ are the column vectors of the measured and the computed distances, resp., \underline{v} is the column vector of observation residuals, with

$$v_k = \varrho_{mk} - \varrho_{adjusted,k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) ,$$

\underline{C} is the $n \times 3$ matrix of partial derivatives with column elements

$$c_{k1} = \frac{\partial \varrho_k}{\partial X} , \quad c_{k2} = \frac{\partial \varrho_k}{\partial Y} , \quad c_{k3} = \frac{\partial \varrho_k}{\partial Z}$$

which are to be taken at the approximate values of unknowns, and finally $\underline{\Delta w}$ is constructed from the required differential corrections, namely

$$\underline{\Delta w}^T = [\Delta X, \Delta Y, \Delta Z] .$$

with

$$\underline{1} = \underline{e}_c - \underline{e}_m$$

we get from (4) the following equation:

$$(5) \quad \underline{v} = \underline{G} \underline{\Delta w} + \underline{1} .$$

Based on the principle of matrix-orthonormalization [TODD (1971); VÖLGYESI (1975)] let us form a hypermatrix \underline{C}' in the following manner:

$$(6) \quad \underline{C}'_{(n+3,3+1)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{C}_{(n,3)} & \underline{1}_{(n,1)} \\ \hline \underline{E}_{(3,3)} & \underline{0}_{(3,1)} \end{array} \right]$$

where \underline{E} is a unit matrix and $\underline{0}$ is a zero vector.

Let us transform (6) by orthonormalization into hypermatrix \underline{H}'

$$(7) \quad \underline{H}'_{(n+3,3+1)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{H}_{(n,3)} & \underline{v}_{(n,1)} \\ \hline \underline{G}^{-1}_{(3,3)} & \underline{\Delta w}_{(3,1)} \end{array} \right]$$

where \underline{H} is a matrix with orthonormal columns, \underline{G}^{-1} is an upper triangular matrix, and $\underline{\Delta w}$ and \underline{v} are the solutions obtained for the corrections to the station coordinates, and the vector of observation residuals, respectively.

Upon improving the approximate values with the obtained corrections, an iteration can be performed.

The weight coefficient matrix $\underline{Q}/\underline{\Delta w}/$ of the solution for $\underline{\Delta w}$ and the mean square error of unit weight are given by

$$\underline{Q}/\underline{\Delta w}/ = \underline{G}^{-1} (\underline{G}^{-1})^T ,$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n v_k^2}{n-3}} \quad (\text{if the weight } p_k = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)).$$

The variancia-covariancia matrix \underline{M} is:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0^2 Q_{ij} \end{bmatrix} \quad (i, j = X, Y, Z)$$

from which the mean square errors of quantities X, Y, Z adjusted are given by

$$m_j = \pm \sqrt{m_{jj}} \quad (j = X, Y, Z)$$

The coefficients of correlation are

$$r_{ij} = \frac{m_{ij}}{|m_i| \cdot |m_j|} \quad (i, j = X, Y, Z) .$$

The elements of the error ellipses (in the XY -system) can be computed by variancia-covariancia matrix \underline{M} [HIRVONEN (1971)].

3. Model computations and the results

For positioning and for simulation of measurements, computer programmes have been written. The efficiency of the methods described above was checked by computing the coordinates after having charged the simulated measurements by different probable errors. Comparing the actual coordinates with the computed ones, the coordinate deviations and the probable values characterize the effect of different errors.

In model computing, 24 satellite-transits were used. Their KEPLERian elements are summarized in Table 1. The subsatellite-lines of the first 12 passages (Table 1.) with the station P to be determined are plotted on Fig. 2.

The results obtained can be summarized as follows:

First, the four measurements (for the (2) mathematical model) were chosen from individual transits (e.g. in the \otimes -points of the E-transit, see on Fig.2.). They were charged by different observing errors ($\pm 0,01 - 6,0$ m) systematically and statistically. Statistically it can be done in four cases (see on Table 6.), but the coordinate-deviations obtained from the first and third row are as from the second and fourth row with reversed signs. In the systematic case, the order of coordinate-deviations obtained is about 100 times larger than the observing errors (see Fig. 3a,b. in case of taking the \otimes -points of E-transit). In the statistic case, it's

about 1000 times larger than the measuring errors (see Fig. 3c,d.).

Assuming different errors in satellite positions, the same investigations were done. In the systematic case, the geometry of the system was shifted (see Fig. 3e). In the statistical case, the order of coordinate-deviations is about 1000 times larger than the errors of satellite positions (see Fig. 3f.).

It's to be noted, that the ratios of the coordinate-deviations are standard under a net configuration (e.g. on Fig. 3a,b,c,d,f.: $\frac{\Delta X}{\Delta Y} \approx 0.5$, $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} \approx -2.0$ and $\frac{\Delta X}{\Delta Z} = -1.0$). Namely, the ratios of the coordinate-deviations computed depend on the net configuration (geometry between the satellite-points observed and the station P to be determined) only. Table 2. and 3. serve for corroborating this fact found above. The coordinate-deviations $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ in Table 2. are computed by taking the four measurements from the c*-transit. Another geometry between the four satellite-points of the c*-transit and the station P deviated the coordinates X, Y, Z another manner than in case of the E-transit, because the value of ratios of the coordinate-deviations are not the same at all. Table 3. shows the ratios of coordinate-deviations computed by using 9 passages. It can be seen, that under the same computation circumstances, observing and other errors, the different net configuration resulted different ratios.

The relatively large deviations in absolute and relative sense can be explained with the sharp-intersection-angles at the station P (see the \otimes -row of Table 5.). For this reason, the four measurements were chosen so, that the intersections should not be too far from 90° ; first from nearly equal (the \bullet -points on Fig.2.) and secondly from different altitudes (the \circ -points on Fig. 2.). The positions ($r_s, \varphi_s, \lambda_s$ and elevation e_s) of satellite in the \otimes -, \bullet - and \circ -points are summarized in Table 4. The intersection-angles arising at the station P are compiled in Table 5. It can be seen, that the computed coordinate-deviations (see Fig. 4. and 5.) are much smaller in both cases as by taking the four measurements from only one satellite-passage (e.g. E-transit; see Fig. 3.). The smaller deviations might be explained by the better determined space-intersections at the point P. The computed deviations by taking the \circ -points (Fig. 5.) are somewhat smaller than by taking the \bullet -points (see Fig. 4a-f.). Considering Fig. 3., 4. and 5. it can be assumed, that the best result arises for determining the coordinates X, Y, Z of station P, if the intersections at P are mutually 90° and the satellites observed are at different altitudes. In this case, the accuracy of positioning is near the measuring errors or a few times larger.

In addition, we were interested in, how the relative position of station and satellite-transit affects the accuracy of individual coordinates? Calculating the coordinate-deviations, the different accuracy measure values (mean square errors m_x, m_y, m_z ; correlation coefficients r_{XY}, r_{YZ}, r_{XZ}) and the elements a, b, ψ of error ellipses e.g. in XY-system, this problem can be analyzed. So, 10 measurements were taken from all of the 12 satellite passages plotted on Fig. 2. to compute the values mentioned above. Measurements were deviated with ± 2 m measuring errors (of course, assuming a GAUSSian distribution with a zero mean value). The elevations of the satellites "observed" were $e_s \approx 10^\circ$ in case of C,D,F,K-passage, $e_s \approx 0^\circ$ in

case of L-passage and $e_s \geq 30^\circ$ in case of other passages. Under the same computing and observing conditions, the different satellite passages and station relative situations resulted different deviations, mean square errors and error ellipses (see Table 7., in which m_o is the mean square error of weight unit, $\Delta R = (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2)^{1/2}$ is the position-error and $M_H = (m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2)^{1/2}$ is the mean point-error in HELMERT-type computed by GROTEN (1969). The weight coefficients Q_{XX} , Q_{YY} , Q_{ZZ} and the joint weight coefficients Q_{XY} , Q_{XZ} , Q_{YZ} were also computed, which are compiled in Table 8.

The largest coordinate-deviations, mean square errors, error ellipses and weight coefficients are in the case of nearly overhead-passages. The correlation coefficients are nearly 1. This fact is in good agreement with BLAHA's (1972) result, because in this case the observed satellite positions, the origin of the used coordinate-system and the station P itself are nearly in the same plane, and in this case there is a near singularity. Some error ellipse is plotted in the orthographical projection (see Fig. 6.). It can be seen, that the major axes of the error ellipses are nearly perpendicular to the satellite passages. It means, that if the observed line of a satellite-passage is nearly parallel to one of the axis, then the coordinate belonging to this axis can be determined relatively well. For instance, using the observations of the A-passage (see Fig. 6.) to determine the coordinates X,Y,Z of the station P, the best determinable coordinate is Y (see Table 6. and 7.), because the observed line of the A-passage is nearly parallel to the Y-axis. It can be explained in analytical geometrical sense: namely, the Y-coordinates of the 10 observed satellite-points are in larger interval as the X- or the Z-coordinates ($\Delta Y_{sk} = 3724225,9020 - (-55726,0784) = 3779951,9804$ m and $X_{sk} = 3812190,3835 - 3627555,5255 = 184634,8580$ m, $Z_{sk} = 6165700,8609 - 4917262,8893 = 1248437,9716$ m only). Considering this fact and the Fig. 6. and Table 6. and 7., we may come to the conclusion that we will get the X,Y,Z-coordinates with nearly the same accuracy, if the projections to the used coordinate-system of the observed line of satellite-passage are nearly equal.

As the projections of the observed line of a satellite-passage -considering the visibility circumstances- are relatively small, so the accuracy of the determined coordinates X,Y,Z is relatively small. On the other hand, the interval of the coordinates of satellite-points used to determine the coordinates X,Y,Z of station P can be increased by taking the measurements from different satellite-passages. So we've investigated the following problem: if we take the measurements from different satellite-passages (from different directions and altitudes) in increasing number, what will be the results? 6, 10, 30, 60, 100, 150 and 210 measurements -distributed proportionally in every direction- were taken consequently to compute the different values as earlier. The coordinate deviations (ΔX , ΔY , ΔZ), mean square errors (m_X , m_Y , m_Z), correlation coefficients (r_{XY} , r_{XZ} , r_{YZ}) and the weight coefficients (Q_{XX} , Q_{YY} , Q_{ZZ} , Q_{XY} , Q_{XZ} , Q_{YZ}) in function of number of the measurements were decreasing (see Table 8. and 9.). After taking 210 measurements, the positioning error was about only 10 % of the measuring error.

The error ellipses are plotted on Fig. 7. This figure shows, in addition, that we do not need much measurements, but rather a good net configuration, that is pro-

proportionally distributed measurements in every direction and from different altitudes. It's in good agreement with WILSON's (1975) work. He determined the coordinates X, Y, Z of the station Wettzell by Doppler point positioning. Using the N.N.S.S. broadcast ephemeris, 208 passages were used to determine the positions. After taking the 70 passages, the results (accuracy of the coordinates X, Y, Z) are hardly improved. The reason for this is that the good geometry (proportionally distributed measurements in every direction and from different altitudes) needed to determine the positions accurately is already given from observations of the first 70 passages and the other observations of 138 passages only strengthened the results obtained by the first 70 passages.

Finally, the effects of the systematic and statistic errors were examined. 80 observations (distances) were taken; first only from one passage (c^* -transit), secondly from 12 passages (a^*-i^* and a -transit). The distances and the positions of the satellite assumed to be known were changed by different errors systematically and statistically. The results obtained are compiled in Table 11. (in case of c^* -transit) and 12. (in case of 12 transits). The dangerous characteristic of the systematic observing errors can be seen besides the experiences obtained up to this point. E.g. 5 m systematic error in laser-ranging to satellites (see the fourth row of Table 11a.) deviated the position of the station P with $\Delta R = 143.573$ m, but the mean point-error of the HELMERT-type $M_H = 3.130$ m only. In practice, the M_H is given (computed) by adjustment only, the ΔR is not, because the true coordinates are not known at all. We might think, however, that the coordinates obtained are rather accurate (surely, $M_H = 3.130$ m), but it is not true at all (because $\Delta R = 143.573$ m). The effects of the systematic measuring errors can not be eliminated but only reduced by taking the measurements from different passages (see the fourth row of Table 12a.).

Referenoes

- AARDOOM, L.(1972). "Geometric Accuracy Obtainable from Simultaneous Range Measurements to Satellites". The Use of Artificial Satellites for Geodesy, AGU Geophysical Monograph 15, pp. 9-18, Washington,D.C.
- ADÁM, J.;TARCSAI, Gy.(1975). "Independent geometrical Doppler geodetic systems". Observations of Artificial Earth Satellites, No. 14(1974), pp. 201-214, Bucuresti.
- BLAHA, G.(1972). "Critical Configurations of Fundamental Range Networks". The Use of Artificial Satellites for Geodesy, AGU Geophysical Monograph 15, pp. 1-7, Washington,D.C.
- GROTEN, E.(1969). "A közepes ponthiba definíciójárd" (Hungarian translation from the ZfV. 1969 11.). Geodéziai és Kartográfiai Tájékoztató, 1970 3, pp. 12-14, Budapest.
- HAZAY, I.(1963). Vetülettan. Tankönyvkiadó, Budapest.
- HIRVONEN, R.A.(1971). Adjustment by least squares in geodesy and photogrammetry. Frederick Ungar publ. co., New York.
- ONG, K.M.(1973). "3-D Multilateration for measurement of Earth crustal deformation and network densification". Proc. Symposium on Earth's Gravitational Field and Secular Variations in Position, pp. 315-327, Sydney.

- TARCSAI, Gy.; ÁDÁM, J.(1976). "Accuracy of satellite platform location techniques: a study of error propagation". Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., (under publication), Sopron.
- TODD, J.Ed. (1962). Survey of numerical analysis. McGraw-Hill Book Co.,Inc.,New York.
- TSIMIS, E.(1973). "Critical Configurations (Determinal Loci) for Range and Range-Difference Satellite Networks". Reports of the Department of Geodetic Science, No. 191, The Ohio State University, Columbus.
- VEIS, G.(1960). "Geodetic Uses of Artificial Satellites". Smithsonian Contributions to Astrophysics, 3 9, pp. 95-161, Washington,D.C.
- VÖLGYESI, L.(1975). "Matrix-orthonormalization method in adjustment". Periodica Polytechnica, Civil Engineering, 19 1-2, pp. 175-185, Budapest.
- WILSON, P.(1975). "Doppler point positioning using the N.N.S.S. broadcast ephemeris". Paper submitted to the General Assembly of the IAG, Grenoble.

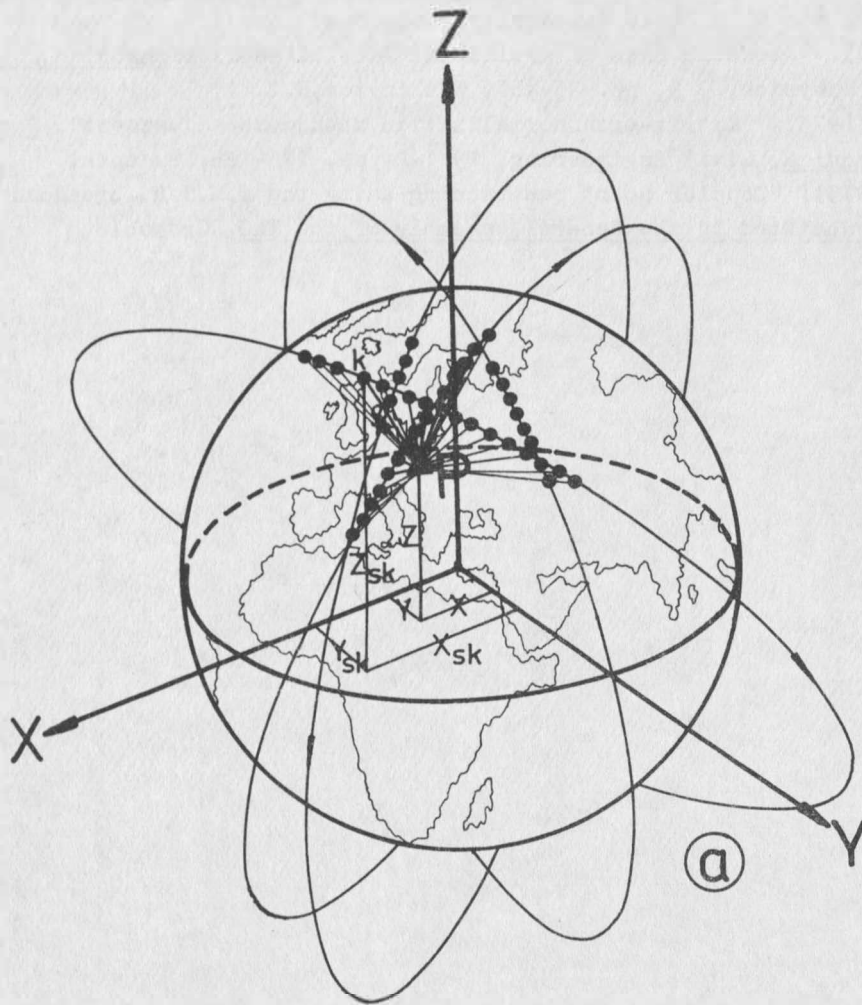


FIGURE 1a.

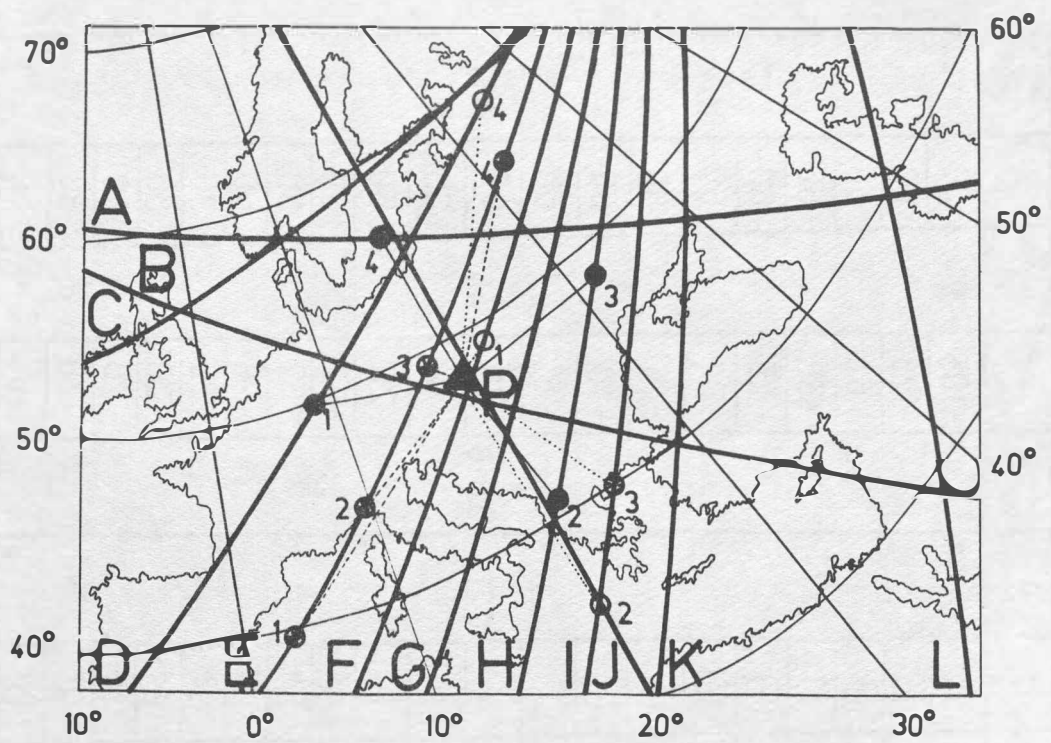


FIGURE 2.

TABLE 1.

	passages	Keplerian elements of the satellites orbit					τ_p (sec)
		a (km)	e	ϱ ($^\circ$)	ω ($^\circ$)	i ($^\circ$)	
1	A	7200	0.010	-105	48	60	900
2	B			-125		60	
3	C			-62		60	
4	D			-35		60	
5	E			-25		60	
6	F			-20		60	
7	G			-15		60	
8	H			-10		60	
9	I			-5		60	
10	J			20		90	
11	K			0		60	
12	L			20		60	
13	a*			-62		60	
14	b*			-62		30	
15	c*			-35		60	
16	d*			-35		30	
17	e*			-20		80	
18	f*			-20		60	
19	g*			-20		30	
20	h*			0		60	
21	i*			0		80	
22	j*			20		90	
23	k*			20		60	
24	a	7400	-20	60			

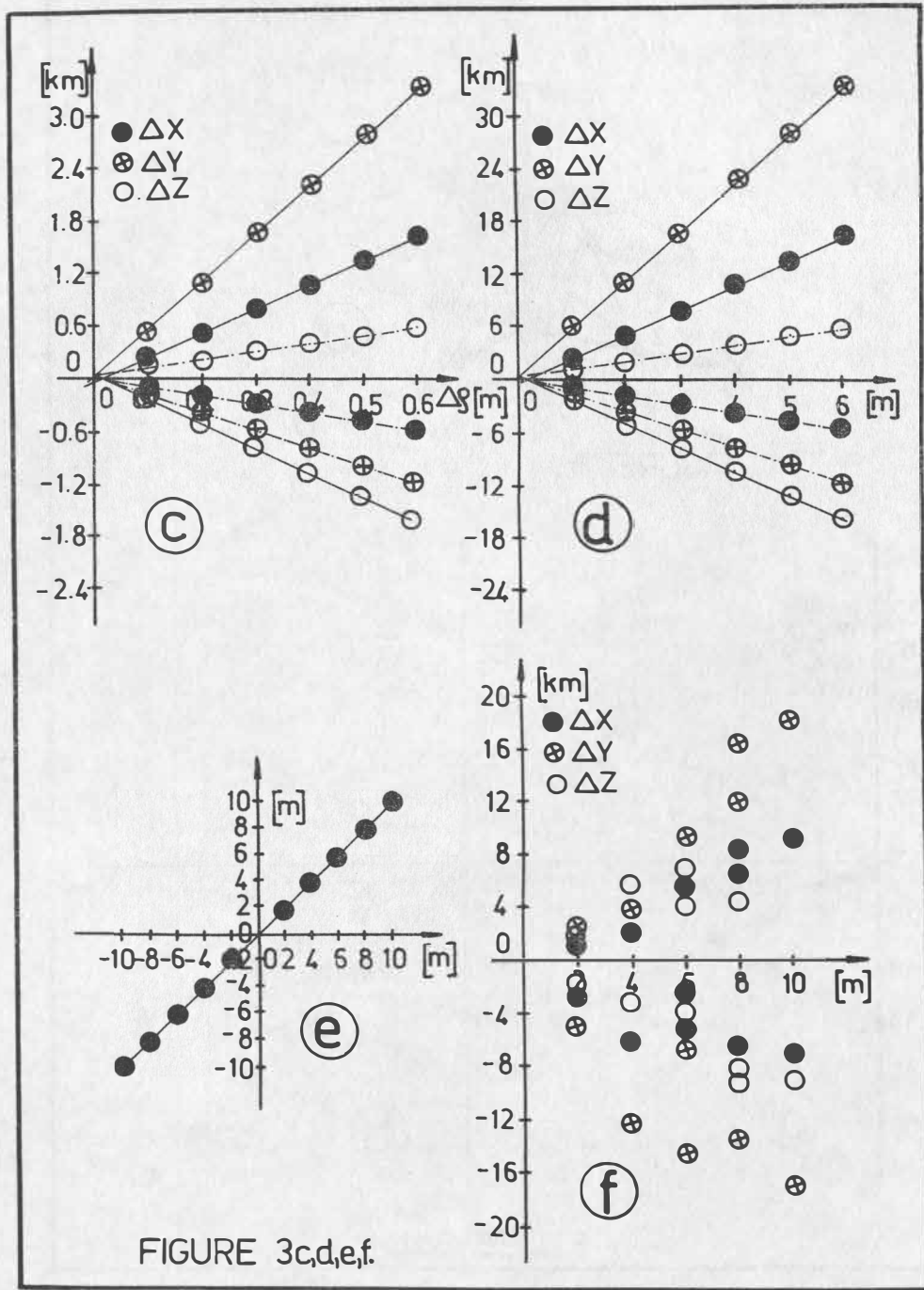


FIGURE 3c,d,e,f.

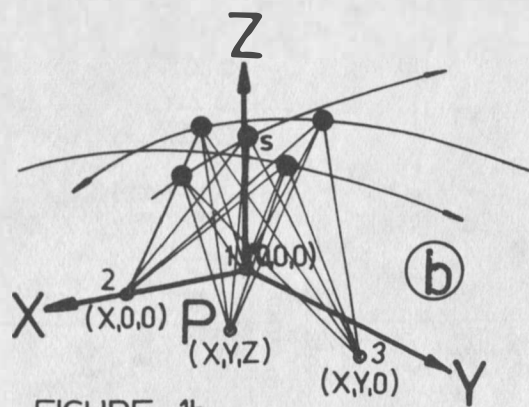


FIGURE 1b.

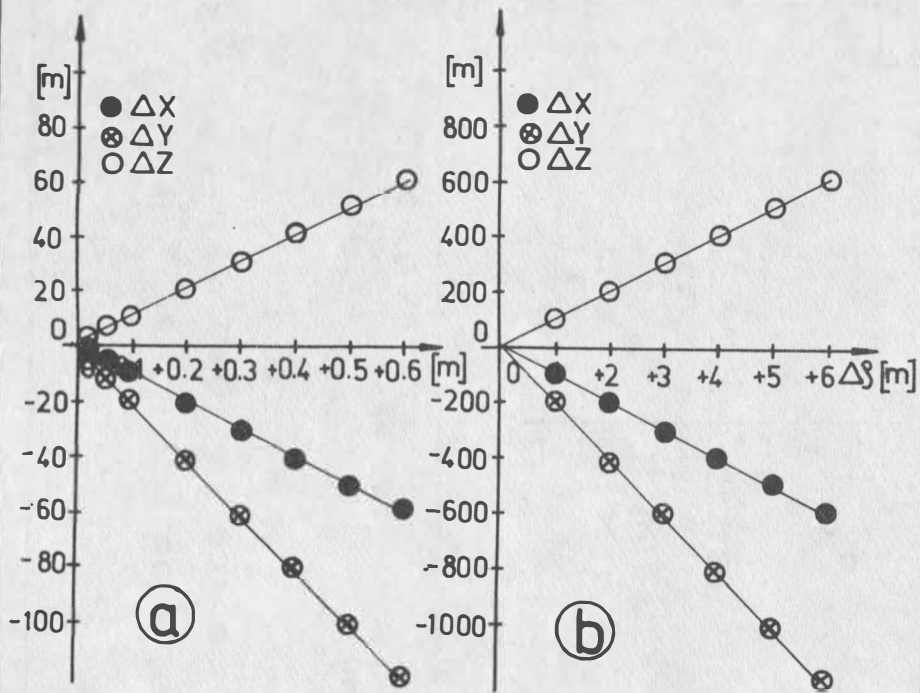


FIGURE 3a,b.

TABLE 2.

	$\Delta X_{(m)}$	$\Delta Y_{(m)}$	$\Delta Z_{(m)}$
1	-0.001	0.005	-0.018
2	0.262	- 3.342	11.016
3	2.696	-24.444	80.619
4	-1296	10.972	-36942
5	1.165	- 0.488	4.230
6	134.868	-1179.361	3975.340
7	- 9.999	125.200	- 403.659
8	269.738	-2358.727	7948.713
9	1.753	- 0.803	6.453
10	-130.215	1094.949	-3676.498
11	3.499	- 1.483	12.592
12	404.608	- 3538.103	11 923.113
13	-238.965	2083.883	- 6985.464
14	224.019	- 1689.891	5759.370
15	4.327	- 1.984	16.174
16	-258.705	2189.904	-7353.014
17	5.833	- 2.483	21.027
18	674.347	-5896.845	19871.879
19	-158.774	1367.443	-4585.100
	$\frac{\Delta X}{\Delta Y} \approx -0.12$	$\frac{\Delta Y}{\Delta Z} \approx -0.30$	$\frac{\Delta X}{\Delta Z} \approx 0.04$

TABLE 3.

passage	$\frac{\Delta X}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta Y}{\Delta Z}$	$\frac{\Delta X}{\Delta Z}$
a	0.12	-0.50	-0.06
b	0.20	-0.26	-0.05
c*	-0.12	-0.30	0.04
d*	-0.13	-0.68	0.08
e*	-0.60	-0.80	0.50
f*	0.50	-2.00	-1.00
g*	-0.64	-0.21	0.13
h*	-0.91	-0.50	0.45
i*	-0.91	-0.70	0.64

TABLE 4.

No.	satellite positions											
	⊗				○				●			
	ψ_s (°)	λ_s (°)	r_s (m)	e_s (°)	ψ_s (°)	λ_s (°)	r_s (m)	e_s (°)	ψ_s (°)	λ_s (°)	r_s (m)	e_s (°)
1	38.85	3.28	7326004.49	19.71	48.86	21.39	7131074.31	71.67	49.82	8.12	7131052.63	35.89
2	43.89	9.39	7326736.99	40.28	35.34	20.01	7129001.76	20.36	41.44	20.64	7128250.90	40.76
3	48.65	16.93	7328709.81	74.36	58.11	34.32	7130265.82	18.53	48.05	31.70	7130634.80	33.89
4	55.85	32.59	7334420.12	29.63	39.62	24.54	7128060.88	30.15	56.18	18.47	7164978.02	34.73

TABLE 5.

s	$\widehat{1-2}$ (°)	$\widehat{2-3}$ (°)	$\widehat{3-4}$ (°)	$\widehat{4-1}$ (°)	$\widehat{1-3}$ (°)	$\widehat{2-4}$ (°)
⊗	21.47	43.32	63.61	128.38	64.78	106.90
○	87.04	24.03	103.10	54.23	73.78	126.46
●	83.44	71.73	65.41	54.19	104.69	104.43

TABLE 6.

s	⊗1	⊗2	⊗3	⊗4
—	+	-	+	-
	-	+	-	+
---	+	+	-	-
	-	-	+	+

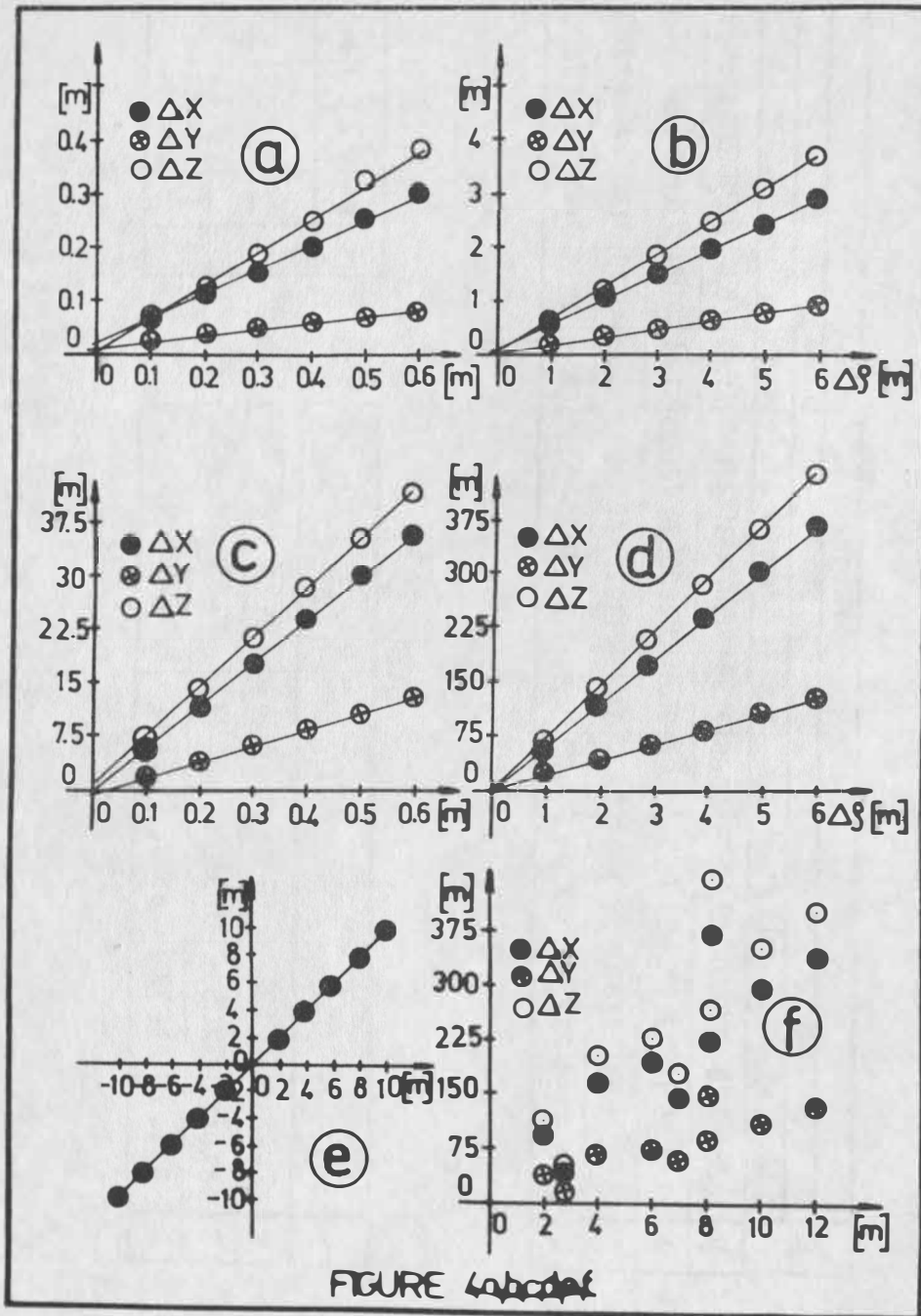


FIGURE 4

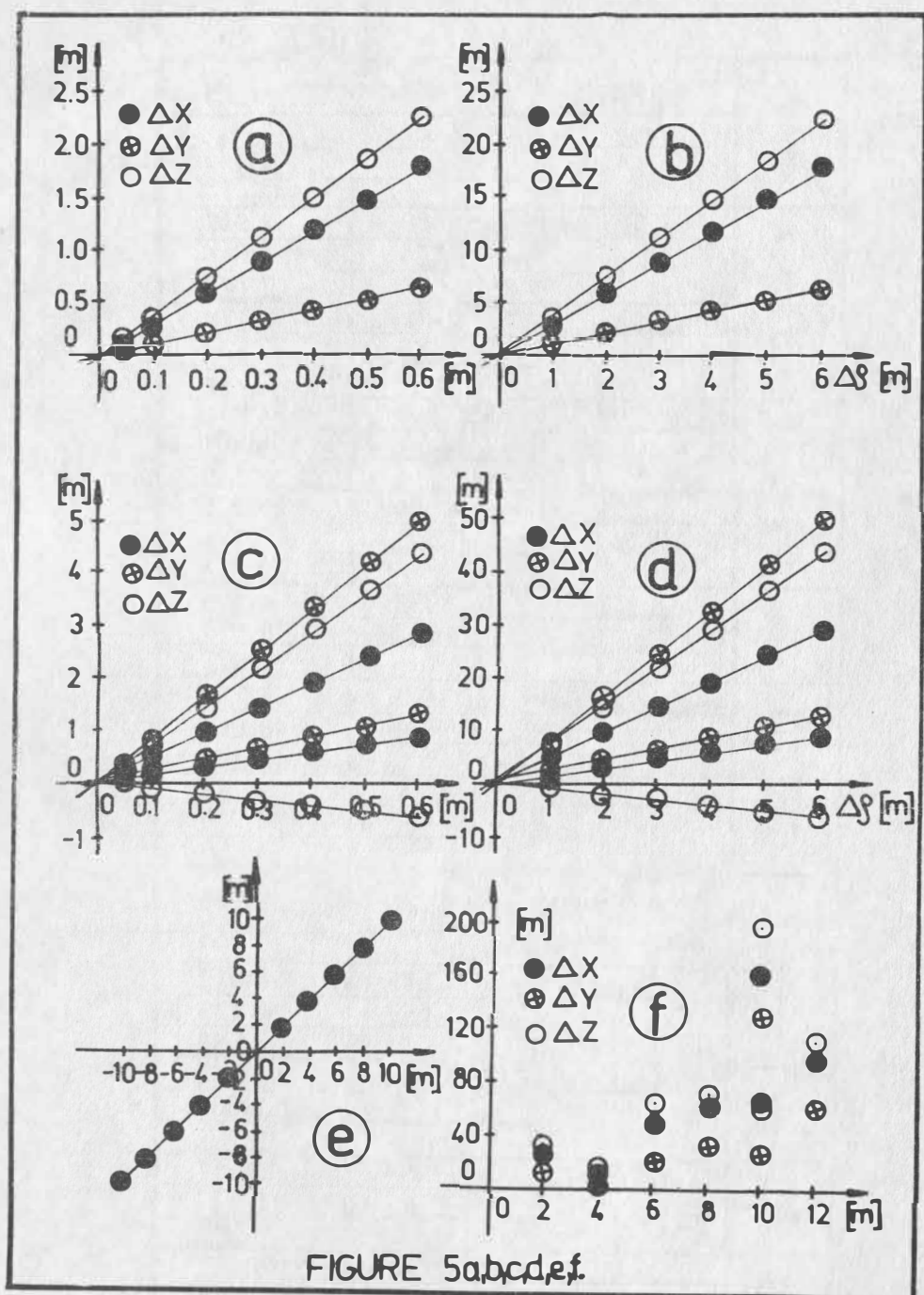
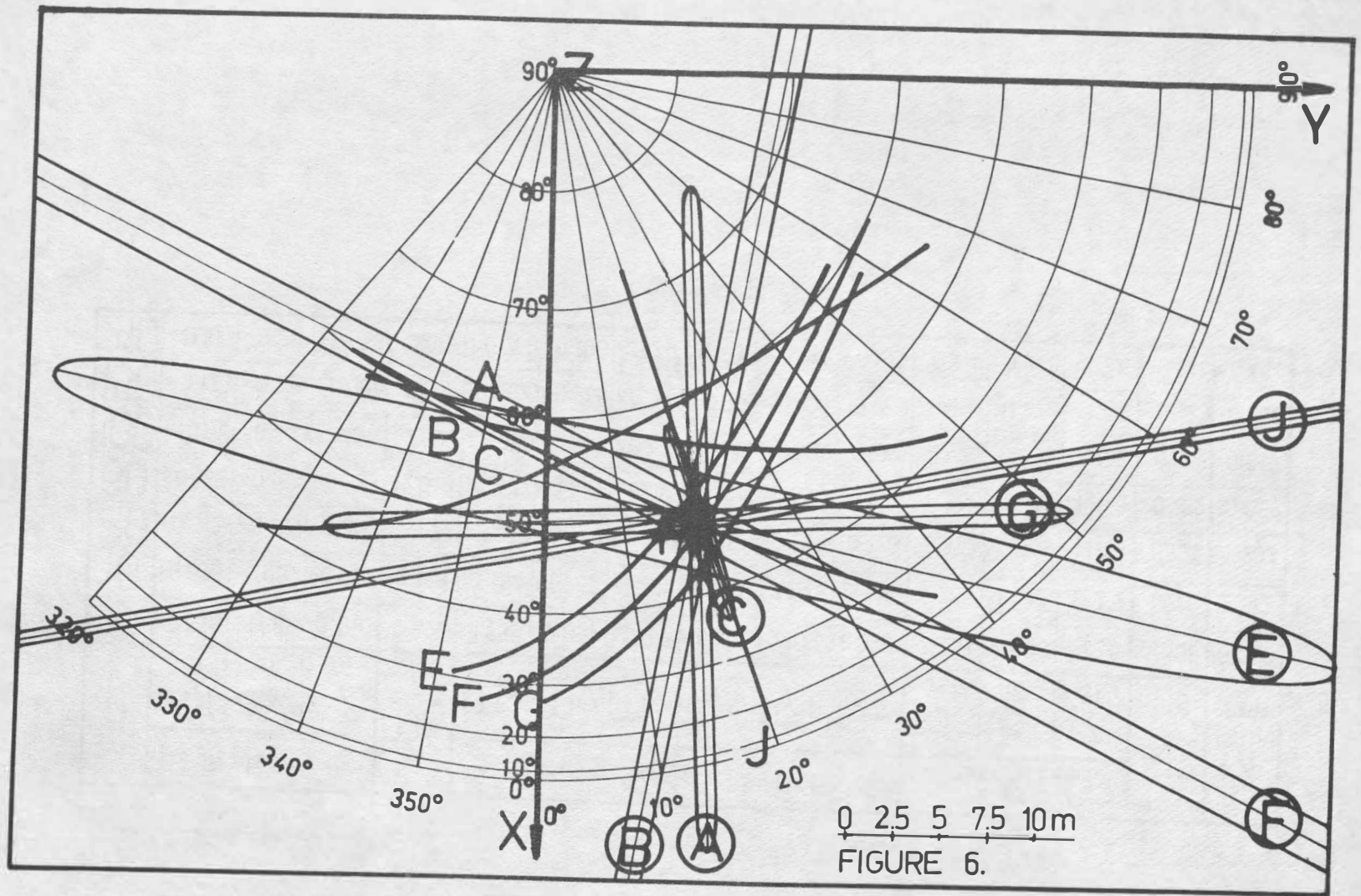


FIGURE 5a,b,c,d,e,f.

TABLE 8.

passages	elements of the inverse weight-matrix		
	Q_{xx}	Q_{xy}	Q_{xz}
		Q_{yy}	Q_{yz}
			Q_{zz}
C	<u>4.843</u>	1.660	2.947
		<u>0.758</u>	1.041
			<u>2.143</u>
D	<u>5.429</u>	4.171	1.271
		<u>3.475</u>	0.900
			<u>0.646</u>
F	<u>544.207</u>	1550.864	-994.194
		<u>4425.497</u>	-2836.200
			<u>1818.170</u>
K	<u>14.503</u>	-4.606	23.820
		<u>1.643</u>	-7.691
			<u>40.132</u>
L	<u>11.377</u>	2.938	11.295
		<u>0.997</u>	3.156
			<u>11.923</u>
E	<u>71.723</u>	103.079	-32.765
		<u>158.920</u>	-48.862
			<u>15.272</u>
G	<u>0.304</u>	-2.804	3.033
		<u>81.507</u>	-86.178
			<u>91.566</u>
H	<u>5.220</u>	-9.138	15.444
		<u>17.037</u>	-28.284
			<u>47.707</u>
I	<u>10.688</u>	-7.581	20.043
		<u>5.659</u>	-14.473
			<u>38.552</u>
J	<u>846.506</u>	-2074.771	94.564
		<u>5086.665</u>	-231.685
			<u>10.778</u>
A	<u>57.456</u>	3.167	13.361
		<u>0.383</u>	0.723
			<u>3.312</u>
B	<u>1529.184</u>	-1057.036	-1269.167
		<u>730.997</u>	877.513
			<u>1053.781</u>



n	coordinate differences			m_0	mean square errors			coefficients of correlation			elements of error ellipses			ΔR (m)	M_H (m)
	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)		m_x (m)	m_y (m)	m_z (m)	r_{xy}	r_{yz}	r_{xz}	a (m)	b (m)	ψ (°)		
6	-0.535	-1.686	+0.360	2.524	± 1.785	± 2.032	± 1.747	+0.288	+0.102	+0.070	2.191	1.583	77.8	1.805	3.220
10	+0.890	-0.952	-0.554	2.173	± 1.154	± 1.265	± 1.236	-0.091	+0.225	-0.018	1.285	1.132	112.2	1.416	2.112
30	+0.512	-0.462	-0.253	2.072	± 0.646	± 0.777	± 0.707	-0.256	-0.151	-0.273	0.822	0.588	116.9	0.735	1.233
60	+0.185	-0.169	-0.023	2.048	± 0.477	± 0.537	± 0.467	-0.213	-0.094	-0.333	0.568	0.434	120.8	0.252	0.857
100	+0.076	-0.333	+0.136	2.024	± 0.356	± 0.421	± 0.338	-0.216	+0.034	-0.286	0.436	0.336	116.6	0.367	0.647
150	+0.123	-0.286	+0.084	2.016	± 0.300	± 0.385	± 0.274	-0.250	+0.150	-0.423	0.398	0.278	112.5	0.323	0.560
210	+0.107	-0.211	+0.058	2.006	± 0.269	± 0.296	± 0.214	-0.213	+0.125	-0.193	0.314	0.248	122.6	0.244	0.454

TABLE 9.

TABLE 10.

n	elements of inverse weight-matrix		
6	0.499	0.164	0.050
		0.648	0.039
			0.480
10	0.282	- 0.028	0.068
		0.339	- 0.006
			0.324
30	0.097	- 0.030	- 0.016
		0.141	- 0.035
			0.116
60	0.054	- 0.013	- 0.005
		0.068	- 0.020
			0.052
100	0.031	- 0.008	0.001
		0.043	- 0.010
			0.028
150	0.022	- 0.007	0.003
		0.036	- 0.011
			0.018
210	0.017	- 0.004	0.002
		0.021	- 0.003
			0.011
n	Q_{xx}	Q_{xy}	Q_{xz}
		Q_{yy}	Q_{yz}
			Q_{zz}

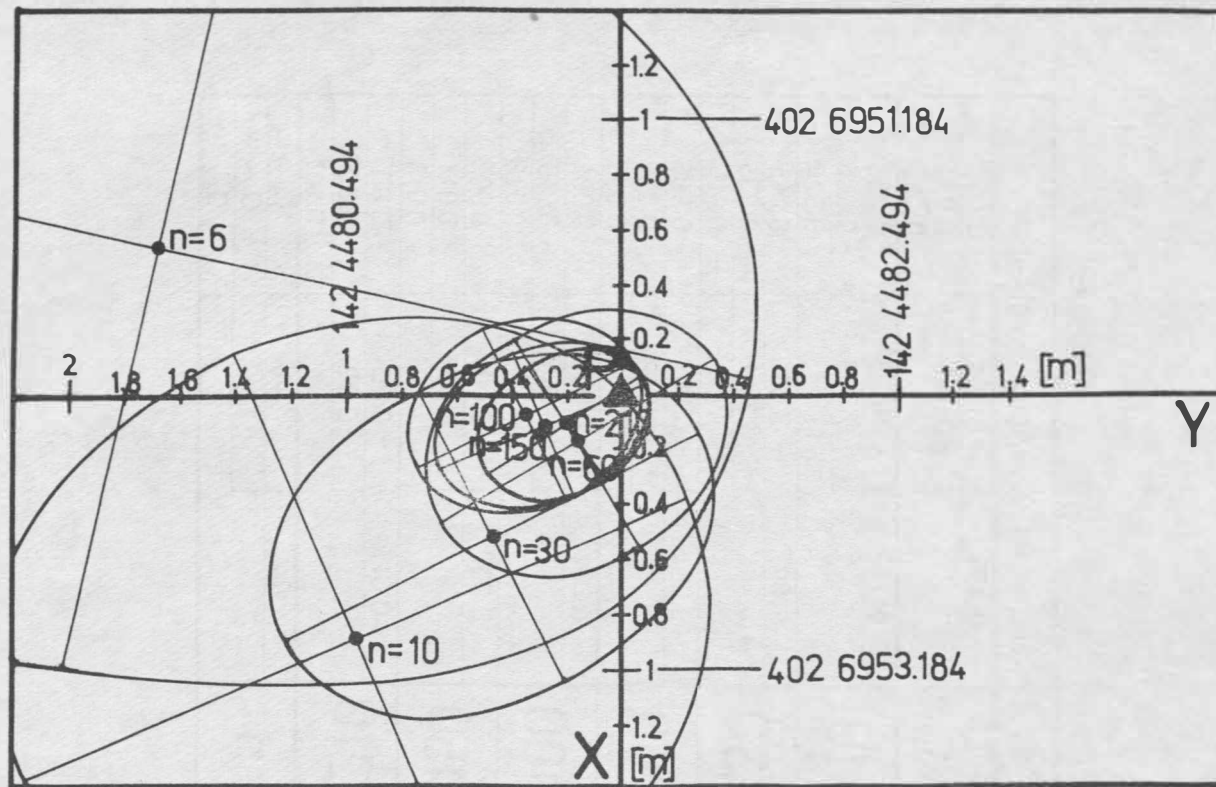


FIGURE 7.

passages	coordinate differences			m_0	mean square errors			coefficients of correlation			elements of error ellipses			ΔR (m)	M_{H_1} (m)
	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)		m_x (m)	m_y (m)	m_z (m)	r_{xy}	r_{yz}	r_{xz}	a (m)	b (m)	ψ (°)		
A	+13.675	+0.559	+3.521	2.269	± 17.201	± 1.405	± 4.130	+0.675	+0.968	+0.642	17.226	1.035	3.2	14.132	17.746
B	-3.383	+1.902	+2.708	2.370	± 92.679	± 64.078	± 76.935	-1.000	-1.000	+1.000	112.667	1.119	169.7	4.733	136.435
C	-1.325	-0.985	-1.352	2.315	± 5.095	± 2.016	± 3.389	+0.866	+0.915	+0.816	5.396	0.950	19.6	2.134	6.443
D	-1.640	-1.600	-1.127	2.296	± 5.350	± 4.280	± 1.845	+0.960	+0.679	+0.601	6.786	0.941	38.4	2.553	7.095
E	-6.689	-10.318	+2.883	2.352	± 19.919	± 29.649	± 9.192	-0.966	-0.990	-0.992	35.455	4.338	78.7	12.630	36.883
F	+13.400	+36.211	-23.657	2.256	± 52.629	± 150.079	± 96.196	+1.000	-1.000	-1.000	159.029	1.813	64.3	56.030	185.869
G	+0.657	-7.613	+7.862	2.339	± 1.289	± 21.116	± 22.382	-0.564	+0.575	-0.998	21.129	1.065	92.0	10.964	30.798
H	+4.113	-6.443	+10.625	2.253	± 5.148	± 9.300	± 15.561	-0.969	+0.979	-0.992	10.570	1.119	118.6	13.088	18.846
I	-2.990	+2.022	-5.809	2.361	± 7.718	± 5.617	± 14.659	-0.975	+0.987	-0.980	9.491	1.020	170.8	6.838	17.493
J	-71.256	+176.409	-9.651	1.528	± 44.457	± 108.978	± 5.016	-1.000	+0.990	-0.989	117.695	0.313	112.2	190.501	117.804
K	+4.894	+1.404	-6.857	2.034	± 7.746	± 2.607	± 12.885	-0.944	-0.947	+0.987	8.132	0.891	152.8	8.541	15.258
L	+1.506	+1.668	+4.441	1.966	± 6.631	± 1.963	± 6.789	+0.872	+0.915	+0.970	6.853	0.928	14.8	4.977	9.691

TABLE 7.

TABLE 11a.

N		errors in satellite-position	errors in distances	coordinate differences			m_0	mean square errors			ΔR (m)	M_H (m)
				ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)		m_x (m)	m_y (m)	m_z (m)		
1	systematically	0	0	-0.022	-0.042	+0.018	0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	0.051	0.000
2		0	+1	-13.832	-23.716	+8.382	0.084	± 0.290	± 0.485	± 0.142	28.706	0.583
3		0	-2	+26.971	+6.329	-16.497	0.256	± 0.886	± 1.484	± 0.435	56.088	1.782
4		0	+5	-69.219	-118.613	+41.868	0.449	± 1.556	± 2.606	± 0.764	143.573	3.130
5		± 10	0	-5.131	-0.192	+10.041	0.075	± 0.260	± 0.435	± 0.127	11.278	0.522
6	statistically	0	± 0.1	+0.014	+0.003	+0.023	0.077	± 0.268	± 0.449	± 0.132	0.027	0.539
7		0	± 1.1	+1.274	+2.309	-0.580	0.926	± 3.206	± 5.367	± 1.573	2.702	6.447
8		0	± 2.0	+2.394	+4.217	-1.032	1.692	± 5.858	± 9.807	± 2.874	4.958	11.775
9		± 3.0	0	-6.335	-9.332	+1.760	2.891	± 10.012	± 16.762	± 4.913	11.416	20.133
10		± 3.0	± 2.0	-3.917	-5.070	+0.710	3.437	± 11.902	± 19.927	± 5.840	6.446	23.934
11		0	± 5.0	+2.462	+5.594	-2.122	4.550	± 15.756	± 26.378	± 7.731	6.470	31.683
12		± 10.0	0	+21.538	+39.585	-13.108	7.496	± 25.957	± 43.457	± 12.737	46.933	52.197
13		± 10.0	± 5.0	+24.019	+45.315	-15.246	8.337	± 28.870	± 48.335	± 14.166	53.505	58.058

TABLE 11b.

N	elements of error ellipses		75.6°
1	0.000	0.000	
2	0.567	0.013	
3	1.728	0.040	
4	3.031	0.070	
5	0.506	0.012	
6	0.520	0.012	
7	6.251	0.145	
8	11.423	0.266	
9	19.517	0.454	
10	23.203	0.540	
11	30.717	0.714	
12	50.605	1.177	
13	56.283	1.309	

TABLE 11c.

elements of inverse weight-matrix		
Q_{xx}	Q_{xy}	Q_{xz}
	Q_{yy}	Q_{yz}
		Q_{zz}
11.990	20.046	-5.831
	33.608	-9.790
		2.887

$r_{xy} = +0.999$
 $r_{xz} = -0.583$
 $r_{yz} = -0.994$

TABLE 12a.

N		errors in satellite-position errors in distances		coordinate differences			m_0	mean square errors			ΔR (m)	M_H (m)
				ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)		m_x (m)	m_y (m)	m_z (m)		
1	systematically	0	0	+0.002	+0.002	+0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000
2		0	+1	+0.512	+1.260	+0.484	0.512	± 0.128	± 0.086	± 0.143	1.444	0.210
3		0	-2	-1.020	-2.516	-0.961	1.020	± 0.256	± 0.171	± 0.285	2.880	0.420
4		0	+5	+2.556	+6.295	+2.411	2.555	± 0.641	± 0.428	± 0.714	7.209	1.051
5		± 100	0	-10.314	+3.804	-1.206	3.070	± 0.771	± 0.514	± 0.857	11.059	1.262
6	statistically	0	± 0.1	+0.047	+0.010	+0.034	0.115	± 0.029	± 0.019	± 0.032	0.059	0.047
7		0	± 1.0	-0.045	+0.130	+0.323	0.866	± 0.217	± 0.145	± 0.242	0.351	0.356
8		0	± 2.0	-0.258	+0.144	+0.569	1.457	± 0.366	± 0.244	± 0.407	0.641	0.599
9		± 10	0	+0.650	-1.223	+2.246	7.422	± 1.863	± 1.242	± 2.073	2.558	3.051
10		± 10	± 2	-0.094	-1.080	+2.813	7.724	± 1.939	± 1.293	± 2.157	3.015	3.176
11		± 3	0	+0.021	-0.547	+0.997	2.817	± 0.707	± 0.471	± 0.787	1.137	1.158
12		± 3	± 1	-0.031	-0.499	+1.117	3.098	± 0.778	± 0.513	± 0.865	1.224	1.271
13		0	± 5	-0.378	+0.217	+0.978	4.678	± 1.174	± 0.783	± 1.307	1.071	1.923

TABLE 12b.

N	elements of error ellipses		21.2°
1	0.000	0.000	
2	0.135	0.076	
3	0.268	0.151	
4	0.672	0.378	
5	0.807	0.454	
6	0.030	0.017	
7	0.228	0.128	
8	0.383	0.216	
9	1.952	1.098	
10	2.031	1.143	
11	0.740	0.417	
12	0.815	0.459	
13	1.230	0.692	

TABLE 12c.

elements of inverse weight matrix		
Q_{xx}	Q_{xy}	Q_{xz}
	Q_{yy}	Q_{yz}
		Q_{zz}
0.063	0.016	0.028
	0.028	0.004
		0.078

$$r_{xy} = 0.381$$

$$r_{xz} = 0.399$$

$$r_{yz} = 0.086$$

Iterative Methods of Determination of Station Co-ordinates and Orbital Satellite
Elements from DOPPLER Observations

by

WLADYSLAW GORAL¹⁾

Summary

Iterative methods of determination of station co-ordinates are given on the basis of minimal number of DOPPLER observations of the satellite of known orbit.

Iterative methods of solution of certain problems in the range of determination of the preliminary orbit are described on the basis of DOPPLER measurements and known co-ordinate station. Methods are given for determining roughly approximate values of roots sought.

On the basis of observations of satellite "Transit" examples of computations illustrating the efficiency of the applied methods are given.

Резюме

Представляются итерационные методы определения координат станций на основании минимального числа доплеровских наблюдений спутника об известной орбите.

Даются итерационные методы решения избранных вопросов в процессе вычисления элементов начальной орбиты на основании доплеровских наблюдений и известных координат станций.

Даются способы определения первого приближения. На базе доплеровских наблюдений спутников "Транзит" устанавливаются числовые примеры, иллюстрирующие эффективность применяемых методов.

¹⁾ Institute of Mining and Industrial Geodesy of the University of Mining and Metallurgy, Poland 30-059 Cracow, Miśkiewicza 30

The technique of DOPPLER observations of satellites permits the determination of relative radial velocity of satellite-observer S-O (Instantaneous DOPPLER Measurements) or difference in topocentric distance S-O (Integrated DOPPLER Measurements).

Theoretically 3 DOPPLER observations are sufficient to determine station coordinates on the basis of the former and the known position of the satellite.

In the "Transit" Satellite System widely used in navigation and in geodetic work the integrated DOPPLER measurements are most frequently applied.

In the following considerations we assume at least 2 consecutive integrated DOPPLER measurements centered about the closest approach. On the basis of a satellite of known orbit and the given theory of movement we determine the position or position and velocity of the satellite in the accepted co-ordinate system and the given time epoch. According to Fig. 1 (for t_i) there is the relation

$$(1) \quad \rho_i = (r_i^2 + R^2 - 2 R r_i \cos \gamma_i)^{1/2},$$

where R - geocentric distance to observer, ρ_i - topocentric distance to satellite, r - geocentric distance to satellite.

In time t_i the position of the subsatellite point on the surface of the Earth sphere (Fig. 2) is illustrated by S_i . The spheric triangles $S_0 S_1 O$, $S_0 S_2 O$, $S_0 S_3 O$ (Fig. 2) give the following relations:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 &= \cos \gamma_0 \cos u_0, \\ (2) \quad \cos \gamma_2 &= \cos \gamma_0 \cos (u_0 + u_1), \\ \cos \gamma_3 &= \cos \gamma_0 \cos (u_0 + u_1 + u_2). \end{aligned}$$

On the basis of integrated DOPPLER measurements we know the quantities $(\rho_2 - \rho_1)_0$, $(\rho_3 - \rho_2)_0$.

From the formulae (1) and (2) it is evident that the observed equivalent to the calculated values $(\rho_{2,c} - \rho_{1,c})$, $(\rho_{3,c} - \rho_{2,c})$ will be the function of 2 unknowns (u_0 and γ_0). These unknowns fulfill the following equation system

$$\begin{aligned} (3) \quad F &= (\rho_2 - \rho_1)_0 - (\rho_{2,c} - \rho_{1,c}) = 0, \\ G &= (\rho_3 - \rho_2)_0 - (\rho_{3,c} - \rho_{2,c}) = 0. \end{aligned}$$

This system (3) will be solved by means of iterative methods. The NEWTON method is worth noting as it is quadratically convergent and yields very rapid results. The iterative procedure of finding roots γ_0, u_0 will be in accordance with the NEWTON method by means of formulae as follows [4]:

$$(4) \quad \gamma_{0,n+1} = \gamma_{0,n} - \frac{1}{J_n} \begin{vmatrix} F_n & F_{u_0,n} \\ G_n & G_{u_0,n} \end{vmatrix} u_{0,n+1} = u_{0,n} - \frac{1}{J_n} \begin{vmatrix} F_{\gamma_0,n} & F_n \\ G_{\gamma_0,n} & G_n \end{vmatrix}, \quad \text{where}$$

$$F_n = F(\gamma_{0,n}, u_{0,n}), \quad G_n = G(\gamma_{0,n}, u_{0,n}), \quad J_n = \begin{vmatrix} F_{\gamma_{0,n}} & F_{u_{0,n}} \\ G_{\gamma_{0,n}} & G_{u_{0,n}} \end{vmatrix},$$

$$F_{\gamma_{0,n}} = \frac{R r_2}{\rho_{2,c}} \sin \gamma_{0,n} \cos (u_{0,n} + u_1) - \frac{R r_1}{\rho_{1,c}} \sin \gamma_{0,n} \cos u_{0,n},$$

$$F_{u_{0,n}} = \frac{R r_2}{\rho_{2,c}} \cos \gamma_{0,n} \sin (u_{0,n} + u_1) - \frac{R r_1}{\rho_{1,c}} \cos \gamma_{0,n} \sin u_{0,n},$$

$$G_{\gamma_{0,n}} = \frac{R r_3}{\rho_{3,c}} \sin \gamma_{0,n} \cos (u_{0,n} + u_1 + u_2) - \frac{R r_2}{\rho_{2,c}} \sin \gamma_{0,n} \cos (u_{0,n} + u_1),$$

$$G_{u_{0,n}} = \frac{R r_3}{\rho_{3,c}} \cos \gamma_{0,n} \sin (u_{0,n} + u_1 + u_2) - \frac{R r_2}{\rho_{2,c}} \cos \gamma_{0,n} \sin (u_{0,n} + u_1).$$

In order to begin calculations according to (4) we must know the initial approximation of roots specified as $\gamma_{0,0}, u_{0,0}$. We assume that $u_{0,0} = 0$ and $\gamma_{0,0}$ which we calculate from formula (5) resulting from triangle OCS (Fig. 1)

$$(5) \quad \frac{\sin(z - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{R}{r} \quad (\text{for } z = 45^\circ).$$

For the satellite on the horizon ($z = 90^\circ$) the angle γ has the maximum value and in accordance with (5) we have)

$$(6) \quad \cos \gamma_{\max} = \frac{R}{r}.$$

Example: For a satellite circling at a height of $h = 1100$ km ($R = 6370$ km, $r = 7470$ km) we obtain: for $z = 45^\circ$, $\gamma = 7^\circ 9'$, and for $z = 90^\circ$, $\gamma_{\max} = 31^\circ 5'$.

If in t_0 the satellite is at a minimal distance from observer then it will achieve the maximal elevation angle during a given pass while the relative velocity $S \rightarrow O$ changes the sign.

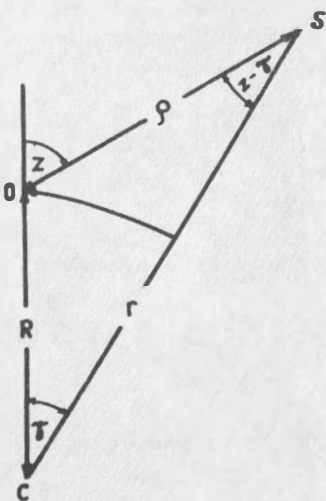


Fig. 1.

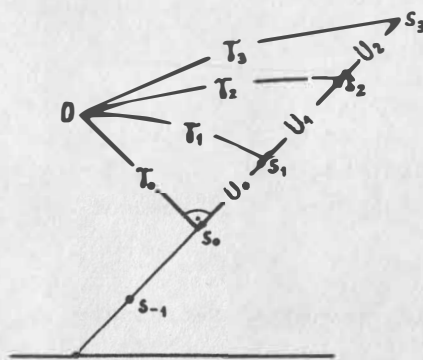


Fig. 2.

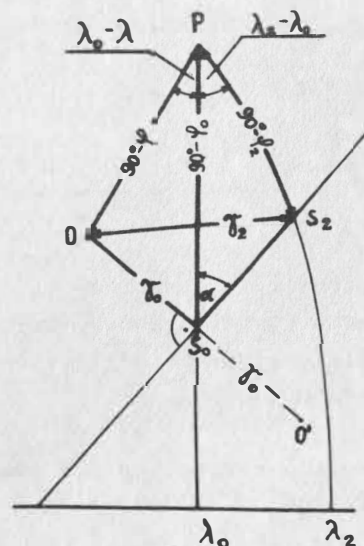


Fig. 3

On the basis of a series of DOPPLER measurements it is possible to determine t_0 and next the co-ordinate of the subsatellite point S_0 (Fig. 2). In such a case on the basis of one of the equations (3) we obtain only γ_0 by means of the NEWTON method.

Having at our disposal the integrated DOPPLER measurements of the satellite "Transit" we know the values $(\rho_2 - \rho_1)_0$, $(\rho_3 - \rho_2)_0$ at 2 minute intervals. In this period the satellite will advance on the orbit about 7° . Knowing the position S_{-1} and 2 minutes later the position of S_1 (Fig. 2) we also know the value of angle $S_{-1}S_1$. From the solution (3) we have $u_0 = S_0S_1$. On the basis of these data - applying linear interpolation - it is possible to find the geocentric co-ordinate of the satellite S_0 (λ_0, φ_0) at the moment t_0 .

Knowing $\gamma_0, \lambda_0, \varphi_0$ on the basis of spheric triangles OS_0P and S_0S_2P (Fig. 3) we find the approximate co-ordinate of the station O (λ, φ) calculated from formulae

$$(7) \quad \sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \cos \varphi_0 \sin \gamma_0 \sin \alpha,$$

$$(8) \quad \sin (\lambda_0 - \lambda) = \frac{\sin \gamma_0}{\cos \varphi} \cos \alpha, \quad \text{where} \quad \sin \alpha = \frac{\cos \varphi_2}{\sin S_0S_2} \sin (\lambda_2 - \lambda_0).$$

The given values $\gamma_0, \lambda_0, \varphi_0$ admit of another solution-namely, the station may be at the point O' (λ', φ') (Fig. 3). The value φ' may be calculated from formula (7) replacing the "+" sign by "-" and from formula

$$(9) \quad \sin (\lambda' - \lambda_0) = \frac{\sin \gamma_0}{\cos \varphi'} \sin \alpha.$$

The correct solution is chosen on the basis of a rough approximation of the co-ordinate station or further observations.

Knowing the first approximation of geodetic co-ordinates of the station they may be improved by means of a corrective co-ordinate method. When the geocentric cartesian co-ordinate station X, Y, Z is corrected then the observer equation for one observation of integrated DOPPLER measurement is [37]

$$(10) \quad W \Delta X + (\rho_{i+1} - \rho_i)_0 - (\rho_{i+1,c} - \rho_{i,c}) = 0, \quad \text{where}$$

$$W = \frac{\bar{x}_i - \bar{X}_0}{\rho_{i,c}} - \frac{\bar{x}_{i+1} - \bar{X}_0}{\rho_{i+1,c}}.$$

The vector \bar{x}_i determines the position of the satellite in the geocentric system at the moment t_i . The topocentric distance $S-O$ was calculated by $\rho_{i,c}$ on the basis of initial values of station co-ordinates (\bar{X}_0) whereas $(\rho_{i+1} - \rho_i)_0$ is known from observation.

If we are correcting the station geodetic co-ordinate λ, φ, h then the equation (10) will be

$$(11) \quad W_\lambda \Delta \lambda + W_\varphi \Delta \varphi + W_h \Delta h + (\rho_{i+1} - \rho_i)_0 - (\rho_{i+1,c} - \rho_{i,c}).$$

The formulae for coefficients $W_\lambda, W_\varphi, W_h$ are obtained after differentiating (12)

$$(12) \quad \begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= \sqrt{(1 - e^2) N + h} \sin \varphi, \quad N = a (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \end{aligned}$$

and putting $\Delta \bar{X}$ ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) to (10) after transforming we get [5]

$$(13) \quad \begin{aligned} W_\lambda &= (N + h)(-W_x \sin \lambda + W_y \cos \lambda) \cos \varphi \\ W_\varphi &= (N_1 + h)(-W_x \sin \varphi \cos \lambda - W_y \sin \varphi \sin \lambda + W_z \cos \varphi) \\ W_h &= W_x \cos \varphi \cos \lambda + W_y \cos \varphi \sin \lambda + W_z \sin \varphi, \quad \text{where} \\ N_1 &= \frac{N(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

To solve the system of equations (10) or (11) we must have at least 3 integrated DOPPLER observations. If the height of station h above the ellipsoid of reference is known (or $h = 0$) then equation (11) based on at least 2 integrated DOPPLER measurements makes it possible to determine co-ordinates λ, φ of the station. Knowing the station co-ordinate $O(\lambda, \varphi)$ (Fig. 3), and t_0 and assuming that the satellite is moving on the circular orbit ($r = a$) and the mean motion is expressed by the formula $n = \mu a^{-3/2}$ we obtain $S_0 S_1 = n(t_i - t_0)$ (Fig. 2). Now taking into consideration formulae (1) and (2) we obtain

$$(14) \quad \rho_{i,c} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2 R a \cos \gamma_0 \cos n(t_i - t_0)}^{1/2}.$$

On the basis of the above formula we may form the equation (3) as a result of which we obtain the values γ_0, a . If t_0 is known only approximately, then, on the basis of additional integrated DOPPLER measurements we form the system of 3 equations ($i = 1, 2, 3$)

$$(15) \quad \begin{aligned} W_{\gamma_0}^i \Delta \gamma_0 + W_a^i \Delta a + W_{t_0}^i \Delta t_0 + (\rho_{i+1} - \rho_i)_0 - (\rho_{i+1,c} - \rho_{i,c}) &= 0 \quad \text{where} \\ W_{\gamma_0}^i &= \frac{\partial(\rho_{i+1,c} - \rho_{i,c})}{\partial \gamma_0}, \quad W_a^i = \frac{\partial(\rho_{i+1,c} - \rho_{i,c})}{\partial a}, \\ W_{t_0}^i &= \frac{\partial(\rho_{i+1,c} - \rho_{i,c})}{\partial t_0}. \end{aligned}$$

The above coefficients are calculated by means of formulae

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial \gamma_0} &= \frac{r a \sin \gamma_0 \cos n(t_i - t_0)}{\rho_{c,i}} \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial a} &= \frac{a - R \cos \gamma_0 \cos n(t_i - t_0) - \frac{3}{2} R n(t_i - t_0) \cos \gamma_0 \sin n(t_i - t_0)}{\rho_{c,i}} \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t_0} &= \frac{R a \cos \gamma_0 \sin n(t_i - t_0)}{\rho_{c,i}} \end{aligned}$$

The calculated values $\Delta\gamma_0$, Δa , Δt_0 are added to the initial approximation then the iterative procedure is repeated till we obtain the required solution. The obtained values γ_0 , a , t_0 treated as initial data may be applied in determining further orbital elements.

For purposes of illustration several numerical examples are given showing the convergence of the described iteration processes. Let the observer station co-ordinates be: $\lambda = 293^{\circ}21'27''84$, $\varphi = 45^{\circ}57'1''17$, $h = 73$ m. Which are equivalent to the following cartesian co-ordinates: $X = 1\ 761\ 266$ m, $Y = -4\ 078\ 297$ m, $Z = 4\ 561\ 476$ m (reference ellipsoid 1967).

In Table 1 the geocentric cartesian co-ordinates of 7 positions of satellite Transit 13 are given on the date 5 X 1970 \overline{E}_7 . On the basis of the above data the values $\rho_{n+1} - \rho_n$ were calculated as well as the zenithal distance z (last 2 columns of Table 1). The calculated values $\rho_{n+1} - \rho_n$ ($n = 1, 2, \dots, 7$) were treated as observed. On the basis of position $n = 3, 4, 5$ by means of (4) the values γ'_0 , u_0 were determined.

Table 2 presents 5 initial values $\gamma_{0,0}$, $u_{0,0}$ on the basis of which the iteration process of calculation began the determination of γ_0 , u_0 . Subscript i is the iterative number by means of which the values $\gamma_0 = 5^{\circ}78$, $u_0 = 0^{\circ}63$ were obtained. By their means on the basis of (7) and (8) the following were evaluated $\alpha = 1^{\circ}52'$, the geocentric co-ordinates point O (Fig. 3) $\lambda = 293^{\circ}55$, $\varphi = 45^{\circ}54'$.

Table 1.

n	t [TU]	x_n [m]	y_n [m]	z_n [m]	$\rho_{n+1} - \rho_n$	z_n
1	4 ^h 24 ^m	3 395669	-5 216968	4 135860	-515864	64 ^o 5
2	4 26	3 072324	-4 799246	4 835209	-184900	47 8
3	4 28	2 715009	-4 310097	5 468074	267470	37 4
4	4 30	2 329817	-3 755687	6 025800	555427	51 4
5	4 32	1 923086	-3 143167	6 500754	673957	67 2
6	4 34	1 501319	-2 480588	6 886476	719176	78 4
7	4 36	1 071070	-1 776778	7 177688		86 6

Table 2.

$\alpha_{0,0}$	5 ^o	14 ^o	10 ^o	8 ^o	10 ^o
$u_{0,0}$	5 ^o	0 ^o	10 ^o	13 ^o	-10 ^o
i	6	5	7	8	13

The above data are a sufficiently good approximation of station co-ordinates and as initial data may be used in the process of their correction.

Table 3 presents the results of successive corrections of station co-ordinates by the method of least squares using (10). Subscript n is the successive iterative

number, whereas $\lambda_n, \varphi_n, h_n$ are co-ordinates after n-iteration, d_n is the length of chord between observing station and the approximate co-ordinates of the station after n-iteration. In this case 6 values of $\rho_{n+1} - \rho_n$ were used (Table 1). The application of the first 5 gave a divergent result. Table 4 gives the results of successive iterations based on the same initial data as in Table 3 ($\Delta \lambda = 0, \Delta \varphi = 4^\circ$), where only λ and φ co-ordinates were corrected by means of (11). In this case the first 3 observations in Table 1 were used.

Table 3.

n	λ_n	φ_n	h_n [m]	d_n [m]
0	293°21'27"8	41°57'01"2	73	444361
1	284 41 24 4	44 36 43 8	335986	793533
2	294 9 48 8	45 58 32 9	-196439	206386
3	294 29 46 5	46 2 42 2	-38927	97026
4	293 17 40 7	45 56 35 4	-545	4987
5	293 21 29 1	45 57 1 3	56	33
·	· · · · ·	· ·		
9	293 21 27 8	45 57 1 2	74	2

Table 4.

n	λ_n	φ_n	h_n [m]	d_n [m]
0	293°21'27"8	41°57' 1"2	73	444361
1	289 55 51 8	45 31 13 4	73	270912
2	293 15 59 3	45 59 20 6	73	8279
3	293 21 26 1	45 57 00 8	73	38

Table 5 presents the iterative process based on the first 2 observations. The results obtained in Table 6 are based on the same observations, but in this case $\Delta \lambda = 4^\circ, \Delta \varphi = 5^\circ 30'$. In the last 3 cases discussed it was assumed that the height above the reference ellipsoid h was known ($h = 73$ m).

Table 5.

n	λ_n	φ_n	h_n [m]	d_n [m]
0	293°21'27"8	41°57' 1"17	73	444361
1	290 5 43 9	45 31 29 04	73	258228
2	293 7 31 6	45 59 37 95	73	18643
3	293 21 28 5	45 56 59 89	73	31
4	293 21 28 1	45 57 1 15	73	5

On the basis of system of equations (15) and the given data the convergence of the iteration process, determining γ_0, a, t_0 were studied numerically. In this case a convergence was found when quantities $\gamma_{0,0}, a_0, t_{0,0}$ differed by $|\Delta \gamma_0| \approx 4^\circ, |\Delta t_0| \approx 2^m, |\Delta a| \approx 300$ km from quantities fulfilling (15).

Table 6.

n	λ_n	φ_n	h_n [m]	d_n [m]
0	279°21'27"8	40°27'01"17	73	691577
1	284 38 14 1	44 28 37 16	73	703575
2	292 38 03 5	46 24 43 00	73	57844
3	293 21 33 9	45 56 05 20	73	1731
4	293 21 27 8	45 57 01 14	73	2

The results of these numerical experiments show that a rough knowledge of the approximate values of the unknowns sought is sufficient (e.g. u_0 , γ_0 or λ, φ).

An especially rapid convergence and a rather significant radius convergence characterizes the evaluating method λ, φ on the basis of (11) (h is given). In fewer observations the use of (11) is better than (10). The above conclusions are valid when we apply instantaneous DOPPLER measurements. By means of 2 such measurements made when the satellite is closest to the observer, we may determine approximately the co-ordinate observer [2].

On the basis of many such observations it is possible to determine the elements of the satellite orbit [1].

It should be noted that, in general, the radius of convergence depends on the number of observations and geometric conditions of the satellite pass above the horizon.

References

- [1] ДРАХОШ, Д.: Оценка доплеровских кривых искусственных спутников Земли. Наблюдения ИСЗ 1966, пр. 5.с.203-215
- [2] GÓRAL, W.: Współrzędne przybliżone i współrzędne poprawione obserwatora na podstawie satelitarnych obserwacji dopplerowskich. Materiały Sympozjum "Wykorzystanie SSZ w nawigacji i kartografii" Szczecin 15-16 III 1976, Wyd. Wyższej Szkoły Morskiej.
- [3] GORAL, W.: Metody wyznaczania współrzędnych stacji oraz elementów orbity SSZ na podstawie obserwacji dopplerowskich. Prace Instytutu Geodezji i Kartografii nr 2 (1976), PPWK, Warszawa 1976
- [4] KOPCHENOVA, N.V.; MARON, I.A.; Computational Mathematics. Mir Publishers, Moscow 1975
- [5] KRAKIWSKY, E.J.; WELLS, D.E.: Mathematical models for positioning by satellite. Department of Surveying Engineering, Lecture Notes No. 17, University of New Brunswick, 1971
- [6] NASSAR, M.M.: Program Dopsats - Phased least squares adjustment of Doppler satellite observations for a single motionless tracking station. Department of Surveying Engineering, Technical Report No. 18. U.N.B., 1972, p. 157

Computation of Geodesics from Chord-Lengths

by

F. HALMOS and GY. SZADECZKY-KARDOSS¹⁾Zusammenfassung

Die Autoren geben neue Gleichungen zur Berechnung der Bogenlänge einer geodätischen Linie aus der Sehnenlänge, der Breite des gegebenen Punktes und der Azimutrichtung an. Außerdem geben sie eine Gleichung, die zur Berechnung von Distanzen entlang von Normalschnitten dient. Schließlich werden Beispiele zur Darstellung der theoretischen Ergebnisse gebracht.

1. Introduction

In the field of satellite geodesy it is one of the main tasks to determine the chord-lengths of Earth. This task plays a significant role e.g. at the determination by VÄISÄLÄ's up-to-date method of the position of points on Earth. Distances usually encountered are in the range of 100 km. When determining the positions of points on the Earth through satellite measurements, however, the distances concerned are several thousands of kilometers long.

The density of the base network established through satellite geodesy can be increased by satellite observations making use of the DOPPLER-effect. The distance between the points to be determined is again several hundred kilometers long. The linking of existing geodetical networks (e.g. the geodetical networks of the socialist countries) is increasingly depending on the determination through satellite measurements of the directions and distances assuring the rigidity. All these problems make it necessary to improve the accuracy of calculations of arc lengths from chord-lengths.

In an earlier work [1] the connection was examined between calculations giving distances, which can be derived using satellite observations and geographical coordinates. One problem, however, remained unsolved: the determination of the length (s) of a geodesic appearing in the reverse problem of geodesy, from the length of chord (k) calculated from geodetical satellite measurements. The equations known from the literature do not have the accuracy necessary for our problem.

¹⁾ Geodetical and Geophysical Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Sopron

2. Connection between the length of arc of a geodesic and the length of chord

To determine the relation

$$(1) \quad s = f(k, \eta^2, \cos^2 A, t)$$

with sufficient accuracy it is necessary to derive some basic quantities with greater accuracy than those of the literature. Splitting k from the power series form of the right-hand side of (1) we get

$$(2) \quad s = k \left\{ 1 + a \frac{k^2}{N^2} + b \frac{k^3}{N^3} + c \frac{k^4}{N^4} + d \frac{k^5}{N^5} + e \frac{k^6}{N^6} + \dots \right\}$$

where s is the length of the geodesic between P_1 and P_2 , A is the azimuth of the same geodesic, N is the radius of curvature in prime vertical referring to point P_1 , and t is the tangent of this point's latitude.

The term (k/N_1) can be approximated in the first order by a central angle σ . For example if k is equal to 3000 km ($k/N_1 = 0.5$) the $(k/N_1)^6 = 0.016$. Later it will be seen that η_1^2 appears in (2) as a factor in the terms b, d, \dots , but among the terms a, c, e, \dots there are some which do not contain η_1^2 . Consequently those terms which are of higher order than e , can be entirely neglected. In the expressions of d and e those terms containing η_1^4 will be omitted. In the case of c , however, all terms containing η_1 , or some higher power of η_1 , will be neglected. In the terms a and b nothing will be omitted. In order to determine the relation (2), some other quantities should be derived first.

2.1. Supplementary relations describing the angle of depression

To determine Eq. (2), the power series of the angle of depression has to be formulated. From the known relation

$$(3) \quad \operatorname{tg}(A_{12} - B_{12}) = \frac{\sin A \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \sigma}{1 + \cos A \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \sigma}$$

and using the equations

$$(4) \quad A_{12} - B_{12} = \sin A \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \sigma - \sin A \cos A \operatorname{tg}^2 \mu \operatorname{tg}^2 \sigma + \\ + \sin A \operatorname{tg}^3 \mu \operatorname{tg}^3 \sigma (\cos^2 A - \frac{1}{3} \sin^2 A)$$

and

$$(5) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{\sin \sigma} \left(\frac{N_1}{S_2} - \cos \sigma \right)$$

where σ is the angle of the directions determined by P_1 and the points of intersection on the axis of rotation of the two normals N_1 and N_2 (K_1 and K_2 , respectively) and S_2 is equal to the distance $P_2 K_1$ it follows that

$$(6) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{2} \sigma (1 + \eta^2 \cos^2 A) - \frac{t}{6} \eta^2 \cos A \sigma^2 [3 + \eta^2 \cos^2 A (1 - 12t^2)] + \\ + \frac{1}{24} \sigma^3 [1 + \eta^2 (3t^2 - 2 \cos^2 A)] + \frac{t}{24} \eta^2 \cos A \sigma^4 (1 - 3 \cos^4 A)$$

where σ is equal to the angle at K_1 between the directions $K_1 P_1$ and $K_1 P_2$.

From formula (6) giving the value of $\operatorname{tg} \mu$ and with the help of the equation

$$(7) \quad \mu = \operatorname{tg} \mu - \frac{1}{3} (\operatorname{tg} \mu)^3 + \frac{1}{5} (\operatorname{tg} \mu)^5$$

the power series for μ becomes

$$(8) \quad \mu = \frac{1}{2} \sigma (1 + \eta^2 \cos^2 A) - \frac{1}{6} t \eta^2 \cos A \sigma^2 [3 + \eta^2 \cos^2 A (1 - 12t^2)] + \\ + \frac{1}{24} \sigma^3 \eta^2 (3t^2 - 5 \cos^2 A) + \frac{1}{24} t \eta^2 \cos A \sigma^4 (4 - 3 \cos^4 A + 7 \eta^2 \cos^2 A) + \\ + \frac{1}{96} \sigma^5 \eta^2 (\cos^2 A - 3t^2).$$

2.2. Supplementary relations describing the central angle

From the extended form of the equation in [2] (p. 21, (5)) the following relation can be derived:

$$(9) \quad \sigma = \frac{s}{N} + \frac{1}{6} \eta^2 \cos^2 A (1 - \eta^2 \cos^2 A) \frac{s^3}{N^3} - \frac{1}{24} t \eta^2 \cos^2 A [3 - \eta^2 \cos^2 A x \\ x (8 + 12t^2)] \frac{s^4}{N^4} + \frac{1}{120} \eta^2 (3t^2 - 4 \cos^2 A) \frac{s^5}{N^5} + \\ + \frac{1}{48} t \eta^2 \cos A (1 - \cos^4 A) \frac{s^6}{N^6}.$$

2.3. Supplementary relations describing the difference of the central angle and the angle of depression

From Eq. (8) the difference of the central angle and the angle of depression can be determined, and using the equation

$$(10) \quad \sec (\sigma - \mu) = 1 + \frac{1}{2} (\sigma - \mu)^2 + \frac{5}{24} (\sigma - \mu)^4 + \dots$$

we have

$$(11) \quad \sec (\sigma - \mu) = 1 + \frac{1}{8} \sigma^2 [1 - \eta^2 \cos^2 A (2 - \eta^2 \cos^2 A)] + \\ + \frac{1}{12} t \eta^2 \cos A \sigma^3 [3 - 2 \eta^2 \cos^2 A (1 + 6t^2)] + \\ + \frac{1}{384} \sigma^4 [5 + 20 \eta^2 \cos^2 A - 24t^2 \eta^2 + 8 \eta^4 \cos^2 A (9t^2 - 5 \cos^2 A)] + \\ + \frac{1}{96} t \eta^2 \cos A \sigma^5 (-3 + 6 \cos^4 A).$$

2.4. The length of chord as a function of the central angle

We start out from the equation [2] (p. 11, (17)):

$$(12) \quad \frac{k}{N} = \sin \sigma \sec (\sigma - \mu).$$

Using this relation we get

$$(13) \quad \sin \sigma = \sigma - \frac{1}{6} \sigma^3 + \frac{1}{120} \sigma^5 - \dots$$

Multiplying Eqs (11) and (13), carrying out the multiplication of terms by terms we get

$$(14) \quad \frac{k}{N} = \sigma \left\{ 1 - \frac{1}{24} \sigma^2 \left[1 + 3\eta^2 \cos^2 A (2 - \eta^2 \cos^2 A) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{72} t \eta^2 \cos A \sigma^3 \left[3 - 2\eta^2 \cos^2 A (1 + 6t^2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{1920} \sigma^4 \left[1 + 180\eta^2 \cos^2 A - 120t^2 \eta^2 + 40\eta^4 \cos^2 A (9t^2 - 6 \cos^2 A) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{96} t \sigma^5 \eta^2 \cos A (7 - 6 \cos^2 A) \right\}.$$

To increase the range of validity of our equation to be derived we have to retain the term of sixth order appearing in braces in (14). As the series we had started with are not so accurate and the building up of the series by this method would be rather tiresome, we shall choose an interesting new possibility.

Let us consider the series (14) expanded to the order of σ^5 . If we take a normal section, the azimuth of which is equal to 90° (that is, instead of the ellipse we consider a principal circle), all terms of an odd power will vanish. Designating the length of chord by k_k we get

$$(15) \quad k_k = \sigma \left\{ 1 - \frac{1}{24} \sigma^2 + \frac{1}{1920} \sigma^4 \right\}.$$

This equation, however, can be formulated more exactly if we use the equation of a chord belonging to a central angle σ of a circle of radius R :

$$(16) \quad \frac{k_k}{2} = R \sin \frac{\sigma}{2}.$$

The half length of the arc of the circle is equal to:

$$(17) \quad \frac{s_k}{2} = R \frac{\sigma}{2}.$$

We can get the more accurate series if, instead of $\sin \frac{\sigma}{2}$ we use the power series of this term. Then we get

$$(18) \quad \frac{k_k}{R} = 2 \sin \frac{\sigma}{2} = \sigma \left\{ 1 - \frac{1}{24} \sigma^2 + \frac{1}{1920} \sigma^4 - \frac{1}{322560} \sigma^6 \right\}.$$

Thus, we get a more accurate relation if in building Eq. (14) we take into account from Eq. (18) the last term

$$(19) \quad - \frac{1}{322560} \sigma^6$$

too.

2.5. The length of chord as a function of the geodesic

The equation for the length of chord as a function of the geodesic can be derived in the following way: Let us substitute into (14) extended by (19) the following powers of σ , using Eq. (9):

$$(20) \quad \sigma^2 = \frac{s^2}{N^2} + \frac{\eta^2}{3} \cos^2 A (1 - \eta^2 \cos^2 A) \frac{s^4}{N^4} - \frac{1}{12} t \eta^2 \cos A \left[3 - \eta^2 \cos^2 A \right. \\ \left. \times (8 + 12t^2) \right] \frac{s^5}{N^5},$$

$$(21) \quad \sigma^3 = \frac{s^3}{N^3} + \frac{1}{2} \eta^2 \cos^2 A \frac{s^5}{N^5},$$

$$(22) \quad \sigma^4 = \frac{s^4}{N^4},$$

$$(23) \quad \sigma^5 = \frac{s^5}{N^5}.$$

Using Eq. (9) for σ , and separating the factor $\frac{s}{N}$ we get

$$(24) \quad \frac{k}{N} = \frac{s}{N} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \eta^2 \cos^2 A (1 - \eta^2 \cos^2 A) \frac{s^2}{N^2} - \frac{1}{24} t \eta^2 \cos A \left[3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \eta^2 \cos^2 A (8 + 12t^2) \right] \frac{s^3}{N^3} + \frac{\eta^2}{120} (3t^2 - 4 \cos^2 A) \frac{s^4}{N^4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{48} t \eta^2 \cos A (1 - \cos^4 A) \frac{s^6}{N^6} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \left[1 + 3 \eta^2 \cos^2 A (2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \eta^2 \cos^2 A) \right] \frac{s^2}{N^2} + \frac{1}{12} t \eta^2 \cos A \left[3 - 2 \eta^2 \cos^2 A (1 + 6t^2) \right] \frac{s^3}{N^3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{5760} \left[3 + 460 \eta^2 \cos^2 A - 360 \eta^2 t^2 - 4 \eta^4 \cos^2 A (280 \cos^2 A - 27t^2) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{s^4}{N^4} - \frac{1}{288} t \eta^2 \cos A (17 - 18 \cos^2 A) \frac{s^5}{N^5} \right\}.$$

After performing the necessary operations we get

$$(25) \quad k = s \left\{ 1 - \frac{1}{24} \left[1 + \eta^2 \cos^2 A (2 + \eta^2 \cos^2 A) \right] \frac{s^2}{N^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} t \eta^2 \cos A (1 + 2 \eta^2 \cos^2 A) \frac{s^3}{N^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1920} \left[1 - 72t^2 \eta^2 + 76 \eta^2 \cos^2 A + 36 \eta^4 \cos^2 A (t^2 - 10 \cos^2 A) \right] \frac{s^4}{N^4} - \right. \\ \left. - \frac{1}{576} \eta^2 t \cos A (19 - 36 \cos^2 A + 12 \cos^4 A) \frac{s^5}{N^5} - \frac{1}{322560} \frac{s^6}{N^6} \right\}.$$

As a reference, we quote the corresponding equation from [2] (p. 12, (20)):

$$(26) \quad k = s \left\{ 1 - \frac{1}{24} [1 + 2\eta^2 \cos^2 A] \frac{s^2}{N^2} + \frac{1}{8} t \eta^2 \cos A \frac{s^3}{N^3} + \frac{1}{1920} \frac{s^4}{N^4} \right\}.$$

2.6. Relation between the geodesic and the length of chord

Using the power series form of the equation

$$(27) \quad k = f(s, \eta^2, t, \cos^2 A)$$

let us formulate the power series form of the function

$$(28) \quad s = f(k, \eta^2, t, \cos^2 A)$$

using the equation

$$(29) \quad s = \frac{k}{1+a} = k(1 - a + a^2 - \dots).$$

It can be seen that the value of a in (29) is equal to the quantity in the outermost parentheses of (25), if we omit the term "1". After performing in (29) the necessary operations we get

$$(30) \quad \frac{s}{N} = \frac{k}{N} \left(1 + c \frac{s^2}{N^2} + d \frac{s^3}{N^3} + e \frac{s^4}{N^4} + f \frac{s^5}{N^5} + g \frac{s^6}{N^6} \right).$$

The symbols used are

$$(31) \quad c = \frac{1}{24} [1 + \eta^2 \cos^2 A (2 + \eta^2 \cos^2 A)],$$

$$(32) \quad d = -\frac{1}{8} t \eta^2 \cos A (1 + 2\eta^2 \cos^2 A),$$

$$(33) \quad e = \frac{1}{5760} [7 + 216 t^2 \eta^2 - 188 \eta^2 \cos^2 A + \eta^4 \cos^2 A (1100 \cos^2 A - 108 t^2)],$$

$$(34) \quad f = \frac{1}{576} \eta^2 t \cos A (13 - 36 \cos^2 A + 12 \cos^4 A),$$

$$(35) \quad g = \frac{31}{967680}.$$

From this formula we have to derive a power series where, instead of different powers of s , different powers of k appear. After a lengthy procedure, omitted here, using the symbols of Eq. (30) we get

$$(36) \quad \frac{s}{N} = \frac{k}{N} + c \frac{k^3}{N^3} + d \frac{k^4}{N^4} + (e + 2c^2) \frac{k^5}{N^5} + (f + 5cd) \frac{k^6}{N^6} + (5c^3 + 3d^2 + 6ce + g) \frac{k^7}{N^7}.$$

Substituting in (36) the respective expression of the symbols we get the relation between the geodesic and the length of chord:

$$(37) \quad s = k \left\{ 1 + \frac{1}{24} (1 + \eta^2 \cos^2 A)^2 \frac{k^2}{N^2} - \frac{1}{8} \eta^2 t \cos A (1 + 2 \eta^2 \cos^2 A) \frac{k^3}{N^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{5760} [27 + 216 t^2 \eta^2 - 108 \eta^2 \cos^2 A + \right. \\ \left. + 4 \eta^4 \cos^2 A (275 \cos^2 A - 27 t^2)] \frac{k^4}{N^4} - \right. \\ \left. - \frac{1}{288} \eta^2 t \cos A (1 + 18 \cos^2 A - 6 \cos^4 A) \frac{k^5}{N^5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{322560} [225 + \eta^2 (3024 t^2 - 2366 \cos^2 A)] \frac{k^6}{N^6} \right\}.$$

The above relation enables us to calculate from a given length of chord the length of geodesic. To use Eq. (37), of course, we have to know the length of chord k , the approximate latitude of the starting point (because of η^2 and t), and the approximate azimuth of the normal section A .

3. Relation between the length of arc in the normal section and the length of chord

In addition to the tasks given at the end of the Introduction we sketch here for sake of completeness the relation between the length of arc in the normal section and the length of chord.

Let us start with the equations [1] (63 - 66). Rearranging Eq. (63) we get

$$(38) \quad S_{12} = s \left\{ 1 + b_4 \frac{s^4}{N^4} + b_5 \frac{s^5}{N^5} + b_6 \frac{s^6}{N^6} \right\}.$$

For the higher powers of s in the braces we may substitute the corresponding powers of k . We substitute the reciprocal of this equation

$$(39) \quad s = f(S_{12}, \eta^2, t, \cos A)$$

into the left hand side of Eq. (37), and after solving for S this equation we have

$$(40) \quad S_{12} = k \left\{ 1 + \frac{1}{24} (1 + \eta^2 \cos^2 A)^2 \frac{k^2}{N^2} - \frac{1}{8} \eta^2 t \cos A (1 + 2 \eta^2 \cos^2 A) \frac{k^3}{N^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{5760} [27 + 216 t^2 \eta^2 - 108 \eta^2 \cos^2 A + \right. \\ \left. + 4 \eta^4 \cos^2 A (106 + 259 \cos^2 A - 27 t^2)] \frac{k^4}{N^4} - \right. \\ \left. - \frac{1}{288} \eta^2 t \cos A (1 + 18 \cos^2 A - 6 \cos^4 A) \frac{k^5}{N^5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{322560} [225 + \eta^2 (3024 t^2 - 2366 \cos^2 A)] \frac{k^6}{N^6} \right\}.$$

An approximative solution for (40) can be found in [3] (p. 74) and in [4] (p. 54, (12)).

4. Example of calculation of arc-length from chord-length

To verify our theoretical procedures we solve here a problem in which a geodesic of length of 6000 km is considered [5] (p. 342-344), and [1] (p. 12).

The two end-points are determined by the following data:

$$\begin{aligned}
 (41) \quad \varphi_1 &= 48^\circ 50' 11.0'' = 48.836\ 388^\circ, \\
 \varphi_2 &= 40^\circ 45' 23.0'' = 40.756\ 388^\circ, \\
 \Delta \lambda_{21} &= 76^\circ 18' 40.0'' = 76.311\ 111^\circ, \\
 A &= 291^\circ 51' 20.749\ 605'' = 291.855\ 7637^\circ.
 \end{aligned}$$

From these data we get

$$\begin{aligned}
 (42) \quad k &= 5645\ 982.2985\ \text{m} \\
 \eta^2 &= 0.002\ 932\ 2578 \\
 t &= +1.143\ 755\ 671 \\
 \cos A &= +0.372\ 271\ 32
 \end{aligned}$$

hence

$$(43) \quad \frac{s}{k} = 1.035\ 775\ 5829.$$

Transporting k to the left hand side of Eq. (37) we have on the right hand side the outer parentheses only in which the values of the terms containing different powers of k/N are the following:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad \text{term of second order:} & \quad +0.032\ 549\ 2461 \\
 \text{term of third order:} & \quad -0.000\ 107\ 7105 \\
 \text{term of fourth order:} & \quad +0.002\ 938\ 8771 \\
 \text{term of fifth order:} & \quad -0.000\ 007\ 8855 \\
 \text{term of sixth order:} & \quad +0.000\ 347\ 4027
 \end{aligned}$$

Increasing by one the sum of these terms (see Eq. (37)) we have the desired value of s/k :

$$(45) \quad \frac{s}{k} = 1.035\ 719\ 9299.$$

The discrepancy from the value of (43) is

$$(46) \quad \left(\frac{\Delta s}{k}\right) = 0.000\ 055\ 6530.$$

Multiplying by k the value of (45) we get the discrepancy of Eq. (37) from the exact value

$$(47) \quad \Delta s = 314.22\ \text{m}.$$

We will solve the problem for computation given here using another approximative method. Using for the points 1 and 2 Eq. (4) in THOMSON-VANIČEK's work [6] (p. 310), and the using Eq. (3) of the same work we calculate the mean radius, so on the basis of the equation

$$(48) \quad s = 2R \arcsin \left(\frac{k_0}{2R} \right)$$

we get

$$(49) \quad s = 5848 \, 391.18 \, \text{m} .$$

The discrepancy from the exact value is

$$(50) \quad \Delta s = -420.57 \, \text{m}$$

being somewhat greater than the value of (47).

If we take an example for a shorter length of arc, the quantity Δs will, of course, be significantly smaller. For example, using data of JORDAN-EGGERT [2] (p. 68 (11)) in case of a distance along normal section of $s = 1320 \, \text{km}$ we get

$$(51) \quad \Delta s = 0.06 \, \text{m} .$$

It can be seen from the given examples that at $s = 6000 \, \text{km}$ the relative error 1 : 18 000 relating to (47) will at $s = 1320 \, \text{km}$ be reduced to the relative error 1 : 23 000 000 relating to (51).

If in case of arc-lengths greater than 3000 km the accuracy of about 1 m is not sufficient then - instead of calculating higher terms of the related expression - the best method is to determine the exact solution of the reverse problem of geodesy.

The satellite technology of today using optical and laser instruments makes it possible to determine chord-lengths with an accuracy of less than about a meter, so it is justified to develop methods by which the problem can be solved with the accuracy mentioned. Research is now already being carried out to develop satellite laser technics the accuracy of which lays in the decimetre range.

References

- [1] HALMOS, F.; SZÁDECZKY-KARDOSS, GY.: Azimut és távolságszámítás szimultán szatellita megfigyelésekből, földrajzi koordináták felhasználásával (Calculation of the azimuth and distance along normal sections from simultaneous satellite observations, using geographical co-ordinates). Geod. és Kart., Budapest 27 (1975), p. 7-14
- [2] JORDAN, W.; EGGERT, O.: Handbuch der Vermessungskunde Bd. 3, Halbband 2, 9. edition, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1948
- [3] BAESCHLIN, C.F.: Lehrbuch der Geodäsie. Oreil Füssli Verlag, Zürich 1948

- [4] RINNER, K.: Über die Reduktion großer elektronisch gemessener Entfernungen.
Z. Vermessungswesen 81 (1956), p. 47-55
- [5] SZÁDECZKY-KARDOSS, GY.: A felsőgeodézia számítási alapfeladatainak korszerűsítése
(Making up-to-date computations of co-ordinates in geodesy).
Dissertation, manuscript, Sopron 1969
- [6] THOMSON, D.B.; VANIČEK, P.: Note on the reduction of spatial distances to a reference ellipsoid.
Survey Review 22 (1974), p. 309-312

A Technology of Stellar Triangulation by Means of Balloon-borne Beacons

by

K.-H. MAREK ¹⁾ and H. REHSE ¹⁾

Zusammenfassung

Die Ballontriangulation stellt ein modernes Verfahren zur Anlage und Kontrolle regionaler geodätischer Grundlagennetze dar. Die Vorteile gegenüber anderen modernen kosmischen Verfahren liegen insbesondere auf ökonomischem Gebiet, da man hierbei von aufwendigen und komplizierten Geräteentwicklungen, von entsprechend verfügbaren Satellitensystemen u.a. äußeren Voraussetzungen völlig unabhängig ist. Die Effektivität des Verfahrens ist besonders hoch in geodätisch wenig erschlossenen Territorien mit guten atmosphärischen Bedingungen.

Am Zentralinstitut für Physik der Erde in Potsdam wurde eine komplette mobile und autonom arbeitsfähige Station für die Durchführung von Ballontriangulationen unter Feldbedingungen entwickelt. Von dieser Station aus werden Hochziele (Lichtblitze verschiedener Helligkeit) in Höhen von 20-30 km über der Erdoberfläche befördert und zu beliebigen Zeitmomenten ausgelöst.

Die positiven Ergebnisse der im Jahre 1976 ausgeführten Felderprobung zeigen, daß in Potsdam ein arbeitsfähiger technologischer Komplex zur Durchführung von Ballontriangulationen bereit steht, der unter verschiedenen geographischen Bedingungen bei der Überbrückung von Entfernungen bis zu 350 km eingesetzt werden kann. Es wird erwartet, daß mit Hilfe dieser Einrichtung in relativ kurzer Zeit geodätische Richtungen mit mindestens der gleichen Genauigkeit abgeleitet werden können wie aus Dreiecksketten herkömmlicher terrestrischer Triangulationen.

¹⁾ Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Physik der Erde, DDR-15 Potsdam, Telegrafenberg A 17

1. General method

The fundamentals of the method of stellar triangulation by means of balloon-borne beacons were established by VÄISÄLÄ (1964), who initiated a new stage in the development of global geodetic research activities by introducing a coordinate system which was referred to the stellar background and hence was standardized for all points of the earth's surface.

It is known that according to VÄISÄLÄ's principle the geodetic direction between two points on the earth's surface can be determined in an absolutely oriented coordinate system, if the light signals are referred to the stellar background simultaneous from these two ground stations. As it has been shown in (MAREK [5]), the mean error of such a space direction \overline{AB} is

$$(1) \quad m_R^2 = m_0^2 \frac{\sum_{k=1}^4 \varrho_k^2}{2 d^2 \sin^2 \gamma} .$$

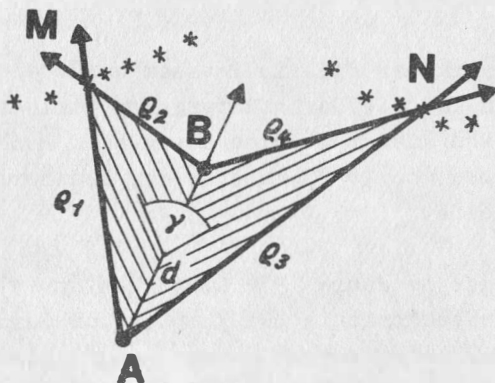


Fig. 1. Geometric principle of stellar triangulation

The symbols of equation (1) are defined as follows:

- m_0 - accuracy of the observed topocentric directions to the light signals
- ϱ_k - topocentric distances to the light signals
- d - length of the space chord \overline{AB}
- γ - intersecting angle between the observation planes ABM and ABN (angular distance between the light signals M and N)

In case of symmetrical position of light signals is

$$(2) \quad m_R = m_0 \frac{\sqrt{2} \varrho_0}{d \sin \gamma} .$$

If the desired direction is derived from the intersection of 2 n observation planes defined by two series of n light signals each, then by analogy we obtain

$$(3) \quad m_R = m_0 \frac{\rho_0}{d \sin \gamma_0} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

where γ_0 denotes the mean angular distance between the two series of light signals.

These relations show that the accuracy of the space direction to be derived depends on both the accuracy m_0 of the astrometric position of the light signals and the geometric configuration of the light signals relatively to the ground observation stations. Here the measure of geometric condition

$$m_g = \frac{\sqrt{2} \rho_0}{d \sin \gamma_0}$$

of a stellar triangulation is $0,75 m_g < \infty$.

In practice it is always desired to minimize m_0 and m_g :

$$m_0 = \min, \quad m_g = \min.$$

While minimizing the value m_0 is in effect a problem of photographic astrometry, which can be treated by known means, the minimization of m_g must be achieved exclusively by applying an adequate technology of light signals generation. The stellar triangulation by means of balloon-borne beacons offers very good conditions to achieve this, because the light signals can be generated practically without any time required and in positions corresponding to geometric configurations which are optimal from an error-theoretical point of view. Due to these conditions, stellar triangulation by means of balloon-borne beacons, like hardly any other modern measuring technique of cosmic geodesy, opens up the possibility to perform a reliable a-priory determination of the accuracy of the final results.

2. Technical equipment

2.1. Field station

a mobile station for launching the balloon sondes which release the light signals represents the basic element of the Potsdam technology of stellar triangulation by means of balloon-borne beacons. This station allows an operative field service adapted to the wind conditions encountered in each particular case, thus ensuring that the above-mentioned optimum light-signals positions are arrived at.

The station (Fig. 2) consists of a specially prepared motor vehicle which accommodates, in addition to working places for the operating staff, the required technical equipment for launching the balloon sondes (balloons, hydrogen, filling weighing-machine, flash sondes) as well as for releasing the light flashes and recording the accurate flashing times (power supply unit, time-signal receiver, crystal clock, data printer, coding device, 10-W transmitter, antennas, electronic accessory units).

The power supply of the station can be provided by a 220 V/50 Hz/1000 W mains connection or an appropriate petrol-driven generator set.

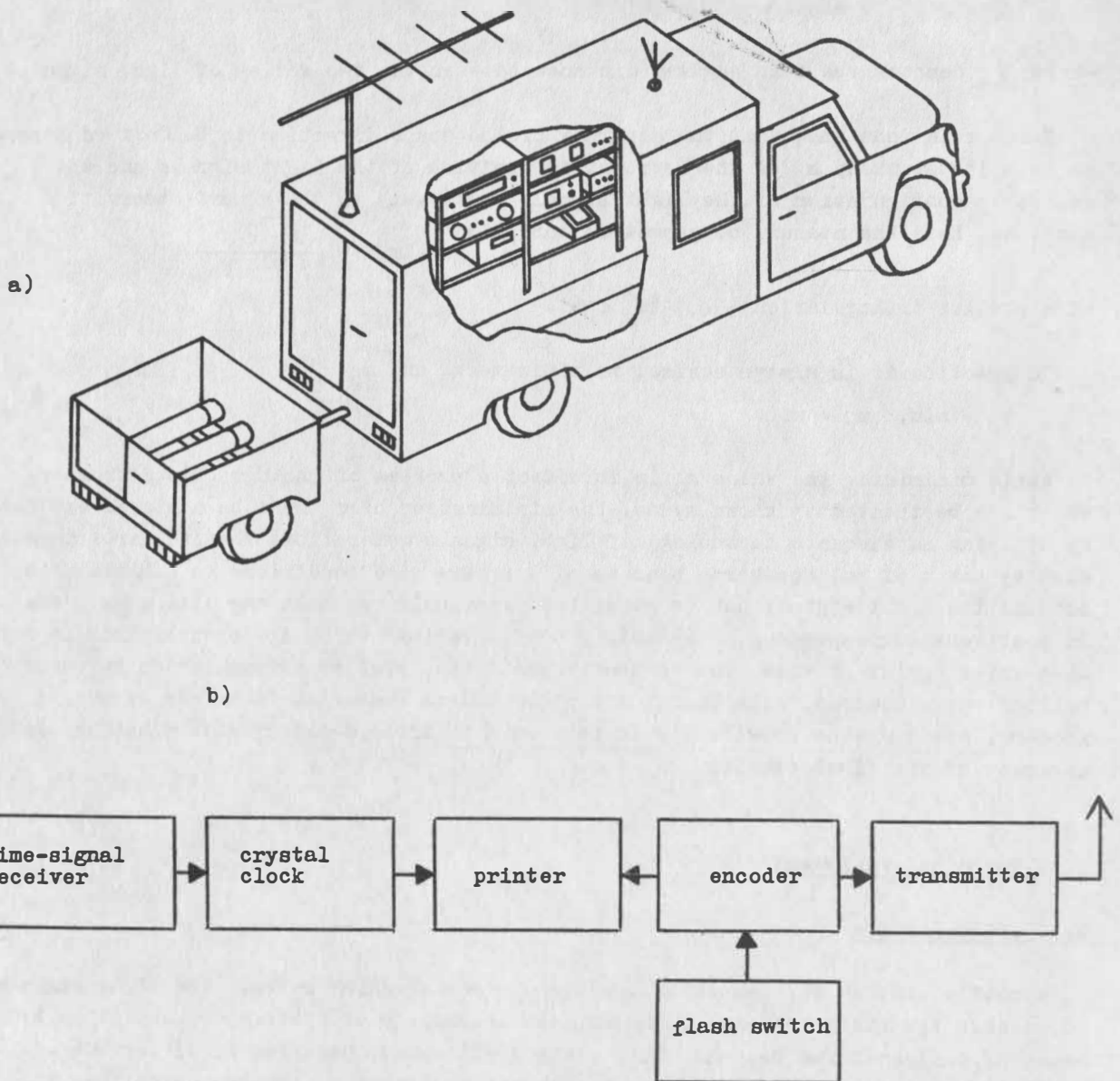


Fig. 2. Field station

a. General view

b. Block diagram of the ground transmitting station

2.2. Flash sonde

The sondes lifted up by meteorological balloons to altitudes of 20 to 30 km above the earth's surface emit light flashes which are photographically recorded by the observation stations A and B (Fig. 1). The flashes are ignited by sending radio signals from the ground field station at the desired times.

Among other things the flash sonde (Fig. 3) contains a power supply unit, a dipole antenna, a decoder and emergency circuit, a step-by-step switch, temperature insulation, a roping set, a parachute, and a flashing matrix. The latter consists of 100 individual flashing cartridges which are ignited by means of low-tension electric igniters. The weight of the complete sonde is 2.2 kg.

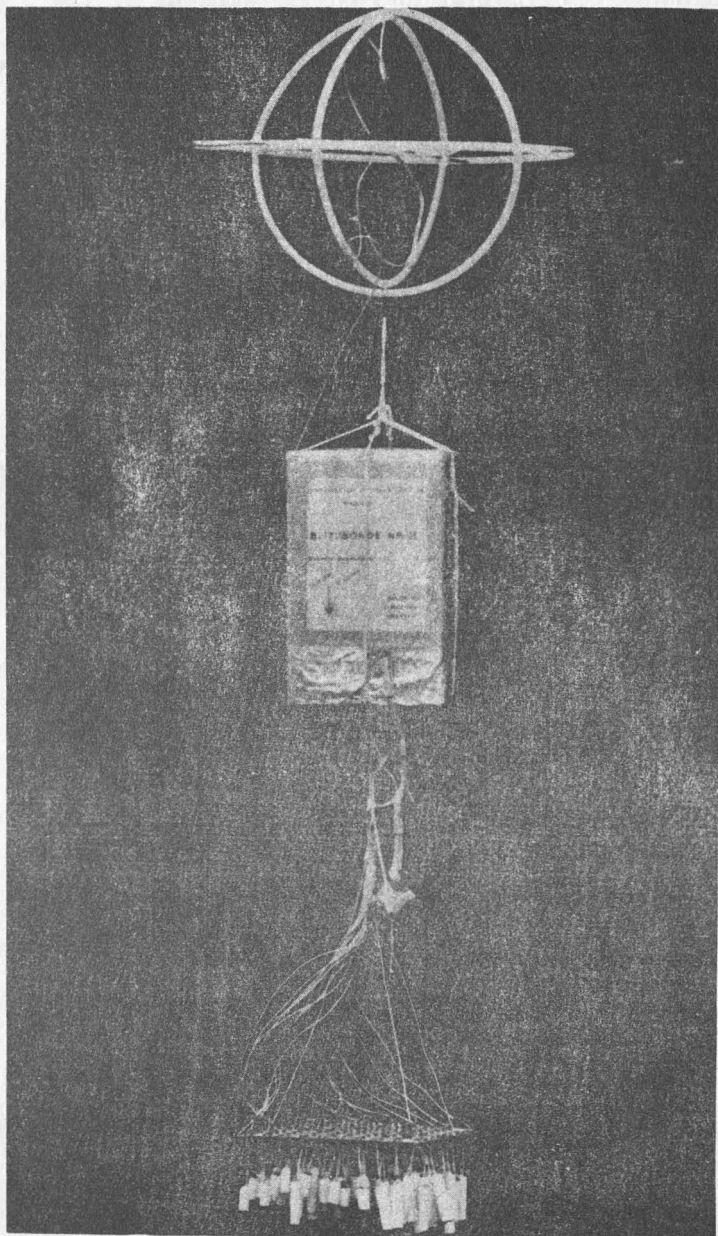


Fig. 3: Flash sonde

- a. Flash sonde incl. antennas and flashing matrix

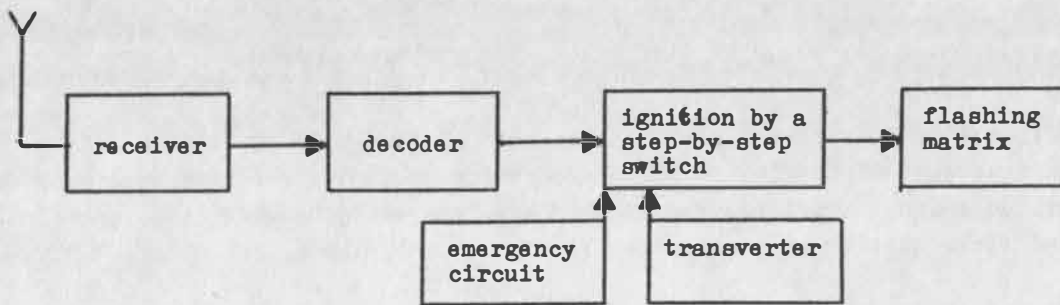


Fig. 3: b. Block diagram of the flash sonde

Due to the positive experience gained from previous experiments (REHSE [6]), again magnesium flash-light powder was used for producing the light flashes. Thus, depending on the atmospheric conditions of the area of application and on the lengths of the space directions to be bridged, the brightness of the light flashes can be varied within as wide limits as desired. By varying the quantity of powder in the flash-light cartridges, light flashes of higher brightness (for orienting the cameras) as well as flashes of lower brightness (for astrometric positioning) are produced during each flight of the sonde. Table 1 lists the delay and the duration of the light flashes as observed by using an oscillograph (cf. Fig. 4).

Table 1. Delay and durations of light flashes

Powder quantity g	Flash duration ms	Delay ms
0.25	9 ± 3	36 ± 14
0.5	15 ± 5	42 ± 16
1.0	20 ± 8	28 ± 9

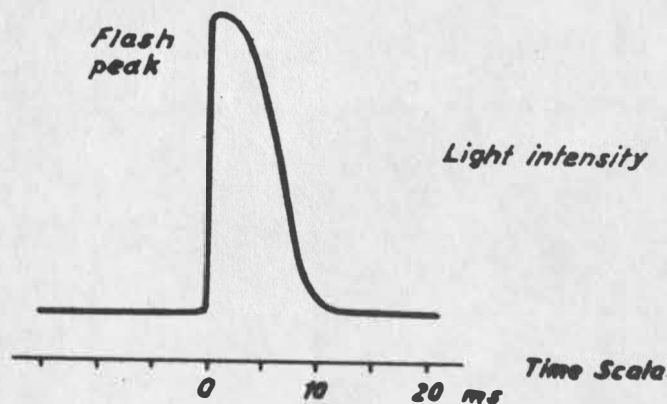


Fig. 4: Light intensity curve of a powder flash

2.3. Cameras

Astrographs (with parallactic mounting and sidereally driving) having a focal length of about 1 metre and a visual field diameter of several degrees are the appropriate instruments to be chosen for a precise positioning of the light flashes. High-precision satellite cameras are well suited for this purpose. Because of the expected high zenith distances of the observation, a maximum-sensitivity emulsion should be used (e.g. ORWO NP 27). The timing is required only in order to allow a definite identification of the flashing photographs.

3. Results of field testing

The technology of light-signal generation developed at Potsdam as well as the instrumentation of the mobile field station and the flash sondes were tested in February/March, 1976, with a test network in the south of the GDR. The distances between the observation stations, which were equipped with mirror-lens-astrographs $D : f = 156 \text{ mm} : 500 \text{ mm}$ and $194 \text{ mm} : 1000 \text{ mm}$ respectively ranged from 50 to 160 km. The mobile field station as a central unit had telephone connections to the observation stations, the air-safety service, and a meteorologic station (Fig. 5). If required, the technology employed also allows a severe restriction of the operative connections to these points (see 3.1.).

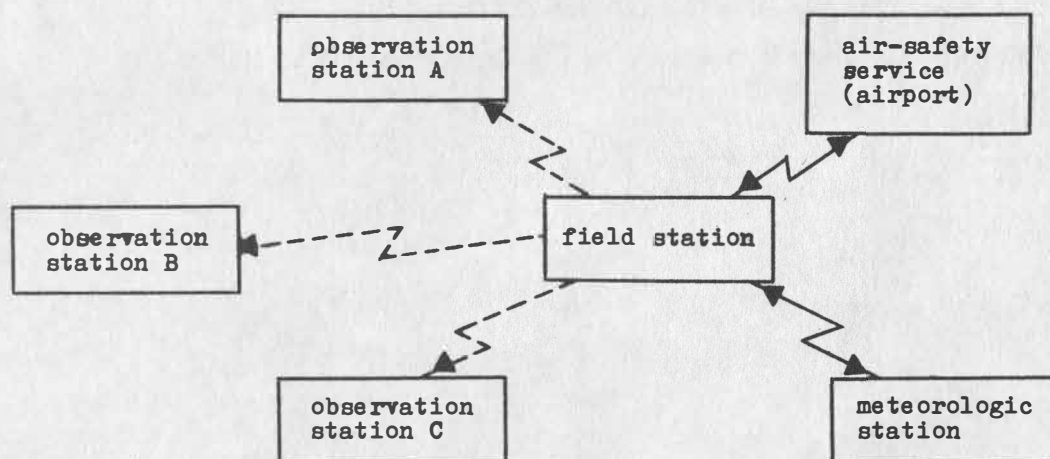


Fig. 5: Communication principle

3.1. On the technology of light-signals release

The technique of the balloon lifting corresponds to the well-known principles which are successfully practiced in launching meteorological balloons. The hydrogen volume M required for filling a balloon, which is determined from the payload L , the balloon weight G , and the free lifting power F , required for reaching a specified ceiling altitude, according to the relation

$$M = L + G + F,$$

amounts to approximately 6 m^3 .

For being able to ignite the light flashes at the optimum space positions, among other things it is necessary to know the flying properties of the balloons and the expected wind conditions, which are reported by a meteorologic station. These parameters determine the location of the balloon launching in the field.

The time succession of igniting the light flashes is likewise adapted to the respective peculiarities. If required, in standard situations, igniting can be performed according to predetermined "igniting programmes". The parameters being taken into account by these programmes include

- the transmission range of the transmitter;
- the field of vision of the cameras;
- the time required for operating the cameras (changing frames and films etc.).

For example, the 100 flashes of a sonde may be ignited in series of 10 flashes each according to the following scheme:

1st series: - - -	- - - flashes for camera line-up
2nd series: - - -	
3rd series: - - - flashes for precise astrometric positioning
:	:
:	:
:	:
10th series: - - -	

Since these programmes as well as the time of igniting of the first flash are also known to all observation stations before the balloon is launched, an operative communication between the field station and the observation stations can be entirely dispensed with.

3.2. Apparent magnitude of the light flashes

The brightness of the light flashes is of fundamental importance for the practical performance of stellar triangulation. During the above-mentioned field testing, a great number of simultaneous observations were made over different distances Q_1 , from which the apparent magnitude of the light flashes could be derived by a method stated in MAREK [4]. This method is based on the fact that the diameters of the images produced on the photographic emulsion depend on the apparent magnitudes of the imaged objects.

The magnitudes m_1 derived from the ASCORECORD measurements by means of the individual density curve of each photograph were reduced to a standard distance of $Q_0 = 100$ km according to

$$(4) \quad m_B = m_1 + 10 - 5 \lg Q_1,$$

and are shown by Fig. 6 for different quantities of powder. By way of example, for a powder charge of 0.5 g and a distance of 100 km we have an apparent magnitude of the light flash amounting to 5.8.

For visually locating the light flash against the stellar background it is of interest to reduce the magnitude of the light flash to the actual flash duration by means of the relation

$$(5) \quad \left(\frac{t_B}{t_s} \right)^P = 2.512 m_v - m_B, \text{ where}$$

t_B - flash duration (according to Table 1),

t_s - time of exposition of the stars ($t_s \approx 50$ s),

m_v - visual magnitude of the light flashes (colour coefficient not being taken into account),

m_B - photographic magnitude of the light flashes,

$P \approx 0.9$ (Schwarzschild's index).

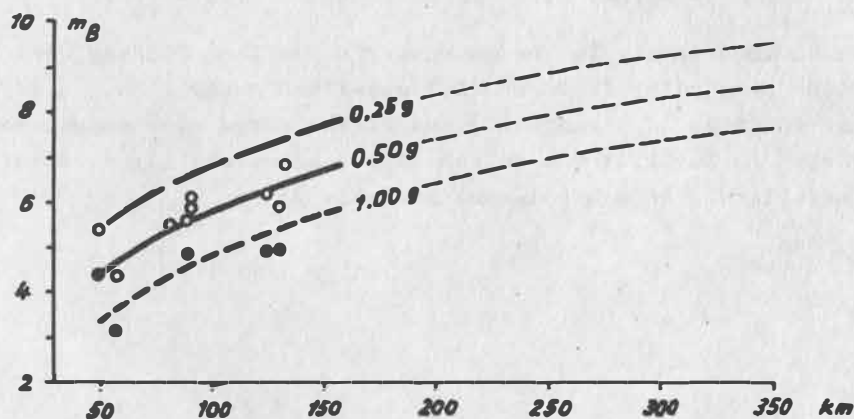


Fig. 6. Apparent magnitude of the light flashes

○ - powder charge = 0.5 g, ● - powder charge = 1.0 g

* Since for astrometric reasons in most cases the magnitude of the light flashes is required to be $m_B \approx 7^m \dots 8^m$, it is necessary to adapt the amount of powder contained quantities required in each case for different distances to be bridged as well as the photographic and visual magnitude of the light flashes achieved by means of these quantities.

Table 2. Bridgeable distances and apparent magnitude of the light flashes for different powder quantities

Powder quantity	Distance	Length d of the space chord for $z = 80^\circ$	Flash m_B	magnitude m_V
0,25 g	110 km	210 km	$7 \dots 8^m$	-1,4...-0,4
0,5	175	340	$7 \dots 8$	-0,9... 0,0
1,0	275	540	$7 \dots 8$	-0,7...+0,3
	440	-		

This table shows that the light flashes produced by means of magnesium powder can be applied practically over as long distances as desired, and hence can be perceived by the observers also without any precise ephemerids. Consequently, the lengths of the space chords are limited only by the height of ascent of the meteorologic balloons, since zenith distances of 80° cannot be considerably exceeded in order to reach a sufficient number of background stars or to record accurately the influence of atmospheric refraction (KAKKURI [1], KUKKAMÄKI [2]).

3.3. Astrometric properties of the light-flash images

The suitability of the produced light flashes for precise geodetic astronomical measurements can be estimated mainly by their astrometric properties.

The contribution to uncertainty in the astrometric position finding, which is exclusively due to the particular features of light-flash generation, in effect consists of the uncertainties of timing (m_t) and of the comparator measurement (m_m). Values of m_m are stated in Table 1; the values of the measurability as obtained from series of 10 adjustments each are listed in Table 3.

Table 3. Mean measuring errors of the images

Image diameter	Pointing Star images	error m_m Light-flash images
0.04 - 0.06 mm	$\pm 1.2 \mu\text{m}$	-
0.06 - 0.10	1.4	$\pm 1.3 \mu\text{m}$
0.10 - 0.12	1.4	1.9

The results are in agreement with previous investigation (MAREK, G. [3]). Significant differences between the components in x- and y-directions or between the qualities of the star images and those light-flash images which are used in position finding were not found to exist. However, the (bright) light flashes emitted for camera line-up have a markedly inferior measurability.

In addition to these quantities, the accuracy of the star catalogue (m_k) as well as those inaccuracies which are not included in the statement of star-plate reduction have an essential influence on the accuracy of calculation of astrometric position. In the above-mentioned statement, the influence of atmospheric refraction (m_R) plays a special role in case of big zenith distances. According to (REHSE [6]), even with a small field of vision and using an affine transformation with 12 unknowns, a satisfactory solution can be obtained only if this influence of refraction was already eliminated in α and δ before the light-flash positions were determined. Otherwise the individual determinations show undesirable mutual correlations and higher uncertainties.

If for the given case the following values are assumed to be the most plausible ones,

$$m_t = \pm 0.016 \text{ s} = \pm 0\%2$$

$$m_m = \pm 1.4 \mu\text{m} = \pm 0\%4$$

$$m_k = \pm 0\%5$$

$$m_R = \pm 1\%3 \quad (\text{according to the results stated in KAKKURI}[1]),$$

then a mean uncertainty of about

$$m_0 = \pm 1\%5$$

can be expected for one topocentric direction towards the one light flash.

3.4. Accuracy of the derived terrestrial directions

As an example for determining the accuracy of a space direction derived by means of the technology described above, we shall consider the results of two balloons M and N, which were carried out in 1976 during the field test. Observations of these balloons for deriving the direction vector \overline{AB} were required from the stations A (Hartha) and B (Bautzen).

The series of synchronous field observations thus obtained are listed in Table 4; the associated sub-points are shown in Fig. 7.

Table 4. Results of synchronous observations

Sonde	Time of observation	ρ_A	z_A	ρ_B	z_B
M	1976 Febr. 19. 22.47 UT	64 km	71°6	39 km	58°5
	22.51	52	71.0	50	70.2
N	1976 March 2. 22.26	81	80.9	65	78.5
	22.31	86	79.8	68	76.9
	22.36	90	78.8	70	75.3
	22.46	91	76.9	71	72.9
	22.51	93	75.6	72	71.0

For this direction measurement the following values were obtained:

- mean topocentric distance to the light signals $\rho_0 = 65$ km
- length of the direction vector $d = 102$ km
- angle between the mean synchronous planes ABM and ANB (according to MAREK, K.-H.[5]) $\gamma_0 = 84^\circ 6$

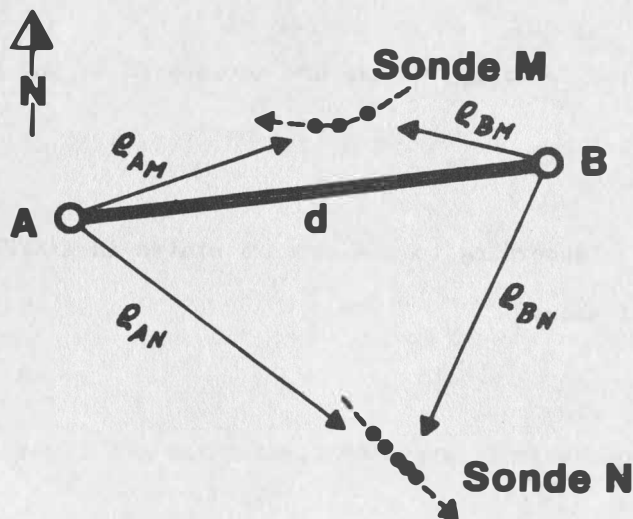


Fig. 7. Geometric configuration for the direction measurement of AB

Thus from (2) the contribution of the geometric condition to the total error of direction measurement is derived to be

$$\frac{m_R}{m_0} = m_g = 0.90.$$

This excellent result proves that, by means of the described technology, in practice it is also possible to achieve a nearly perfect geometric configuration without being faced with any particular problems.



Fig. 8. General view of light flashes at altitudes of 20...30 km above Dresden town-level

Even if not more than about 15 % of all light flashes of the flash series emitted by each of the sondes are included in the further evaluation and the topocentric directions are determined to an accuracy of

$$m_o = \sqrt{m_a^2 \cos^2 \delta + m_\delta^2} = \pm 2'',$$

then, using (3) one obtains a mean uncertainty (random error) of the terrestrial direction AB which is as low as

$$m_R = \pm 0''6.$$

This corresponds to a lateral deviation of point B which amounts to $\pm 2.8 \times 10^{-6}$. As a rule, however, it will be possible to include much more than $n = 10$ evaluable light flashes per sonde (for $n = 30$ one obtains $m_R = \pm 0''33$ in the present case).

References

- [1] KAKKURI, I.: Stellar Triangulation with Balloon-borne Beacons and Satellites
Univeristy of Helsinki, 1973.
- [2] KUKKAMÄKI, T.J.: Stellar Triangulation in Finland.
Observations of Artificial Satellites of the Earth Warszawa (1969) 9
- [3] MAREK, G.: Die Genauigkeit der Koordinatenmessung mit dem ASCORECORD.
Vermessungstechnik, Berlin (1969) 17, 10
- [4] MAREK, G., MAREK, K.-H.: Ein Versuch zur Bestimmung der scheinbaren Helligkeit
von Lichtblitzen aktiver Satelliten aus photographischen Beobachtungen.
Observations of Artificial Earth Satellites Berlin (1972) 11
- [5] MAREK, K.-H.: Zur a-priori-Genauigkeitsabschätzung bei der Stellartriangulation.
Vermessungstechnik, Berlin 22 (1974) 4
- [6] REHSE, H.: Fehlertheorie zur Stellartriangulation und die Bestimmung der Rich-
tung Potsdam-Dresden/Gönnsdorf.
Dissertation, TU Dresden, 1969.

Триангуляция на высокие цели с помощью самолетов,
если измеряются направления и расстояния

Йосеф Кабелач

Обсерватория астрономии и геофизики в Праге

Резюме: В августе 1976 г. был совершен дальнейший эксперимент пространственной триангуляции на высокие цели расположенные на самолете. Кроме измерений направлений были выполнены и измерения расстояний станция - цель с помощью лазерных радаров. Измерения были предварительно обработаны и были получены следующие точности: средняя квадратическая ошибка единицы веса $\pm 1,5$; средняя квадратическая ошибка в прямом восхождении $\pm 0,9''$; средняя квадратическая ошибка в склонении $\pm 0,8''$ и средняя квадратическая ошибка в расстоянии $\pm 1,6$ м. В будущем является желательным дальнейшее повышение точности, так же как и высоты полета, и таким образом и расстояния наземных точек до 150 км.

Abstract: An attempt of the space triangulation using high flying beacons was performed in August 1976. Besides the angular measurements, the ranges to the flying beacons situa-

x/ соединительная линия А,В, рис. 2

ted on the board of the plane, were measured using laser radars. The reduction of the data gave following results:

RMS of one measurement: ± 1.5 ,
 RMS in right ascension: $\pm 0.9''$,
 RMS in declination: $\pm 0.8''$,
 RMS in distance: $\pm 1.6\text{m}$.

In the future, the accuracy of results and altitude of flying beacons will be increased and the distance of measuring points will grow till 150km.

На почве Чешского высшего технического учебного заведения выполняются приблизительно в течение 3 лет эксперименты в отношении триангуляции на высокие цели. Целью этих работ являются теоретическое и практическое обсуждения технологии подготовки, измерения и обработки с целью построения геодезических основ с помощью высоких целей прикрепленных на самолетах. В 1976 г. являлось задачей измерение не только направлений, т.е. прямого восхождения α и склонения σ , но одновременно расстояний d между станцией А и целью С и между станцией В и целью С, рис.1. Имеется несколько вариантов измеренных величин, которые после того участвуют в обработке вычислений, рис. 1.

1. Оба вектора вполне известны $x/$, т.е. заданы направления и расстояния.
2. Вполне известен только один вектор. У второго известно только направление.
3. Вполне известен только один вектор. У второго известно только расстояние.

 $x/$ / Разумеется для того же момента времени.

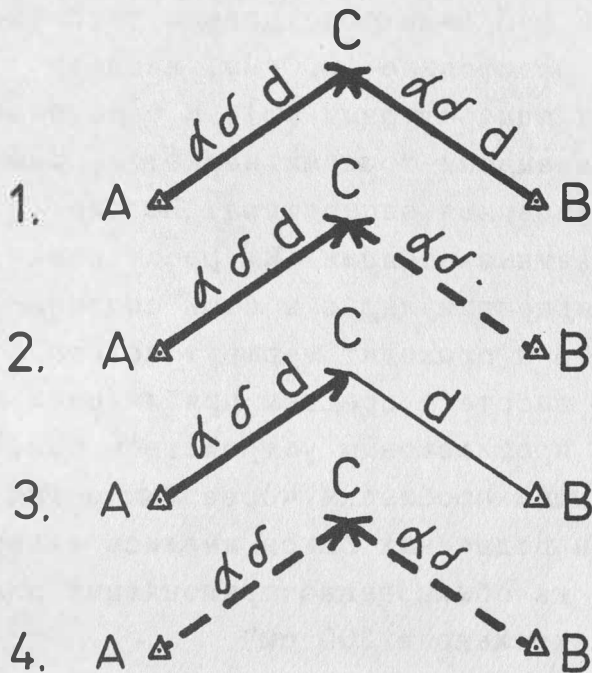


Рис. 1

4. У обоих векторов известны только направления.

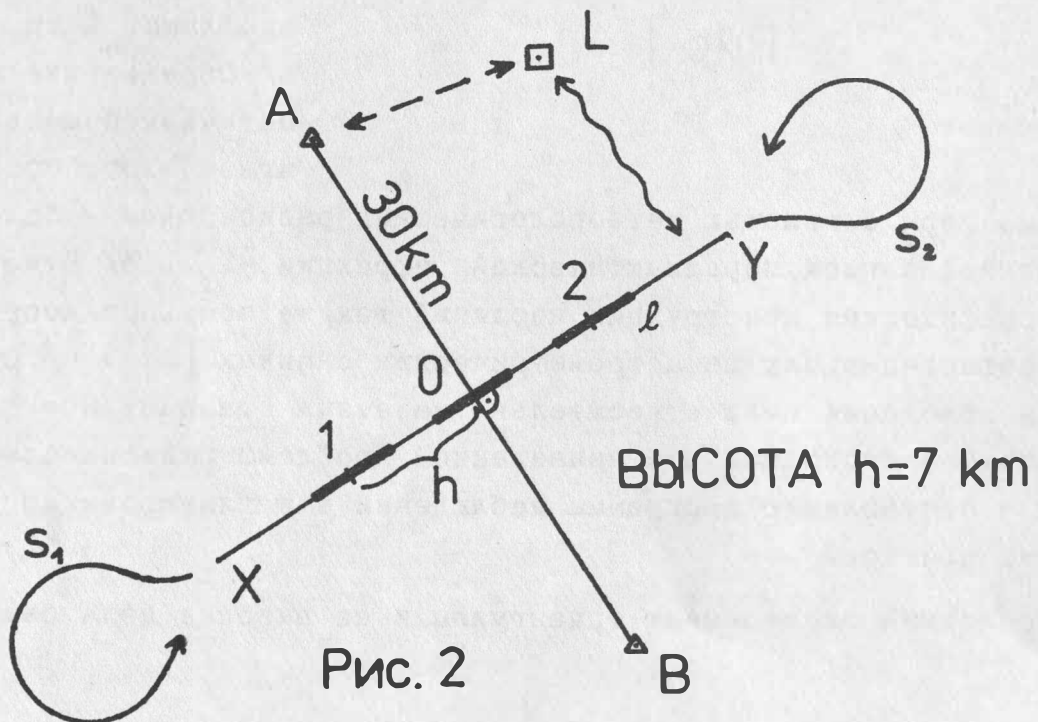
Последний вариант обыкновенно использован в спутниковой и баллонной триангуляции. Другие варианты не приносят избыточных наблюдений.

Прежде чем можно было осуществить практическую реализацию, обсуждены некоторые теоретические проблемы, напр.: а/ Определение математической модели мгновенного состоя-

ния атмосферы с помощью метеорологических радиозондов к более совершенной записи паралактической рефракции [1]. б/ Нумерическо-графическая конструкция изолиний тех же поправок координат референц-звезд на астрометрических снимках. [2]. в/ Оптимизация положения цели относительно наземных станций; и т.п. Результаты в последний раз приведенной проблемы были использованы к составлению программы наблюдений и к планированию маршрута полетов.

Последний эксперимент триангуляции на высокие цели был

выполнен в течение 2 ночей, и именно с 23 на 24 и с 24 на 25 августа 1976 г. в сотрудничестве с Обсерваторией в городе Градец Кралове. Обе станции А и В были оборудованы фотографическими камерами (фокусное расстояние 1000 мм, диаметр объектива 140 мм) и лазерными аппаратами [3]. К определению расстояния между двумя наземными точками является, очевидно, достаточной только 1 лазерная аппаратура. На рис. 2 представляют пункты А и В наземные станции. Их расстояние было приблизительно 30 км. Перпендикулярно к этой соединительной линии и через ее центр О проходит маршрут полета самолета Л 29 - Дельфин. Его высота в среднем приблизительно 7 км. Самолет был оборудован проблесковым устройством помещенным на его спице и передающим проблески через 2с с точностью 1мс. С внешних сторон подвесных баков имелись лазерные отражатели изготовленные из обыкновенно применяемых пластмасс, каждый площадью приблизительно в 100 см².



Связь между главной станцией А и управляющим полетом L была обеспечена по телефону, линия $\leftarrow\text{-----}\rightarrow$, рис. 2, между управляющим полетом L и пилотом по радио, линия $\sim\sim\sim$, рис. 2. Обе связи были непрерывны. Связь между станциями А и В была телефонная и только во время между полетами. В это время уточнялся только режим съемки и полета, который однако в общих чертах прочно определен уже раньше.

В течение приведенных 2 ночей было выполнено 5 полетов. Каждый полет продолжаясь 50 - 60 минут. В течение этого времени, т.е. в течение одного полета, выполнял самолет 6 - 8 перелетов попеременно в направлении $\overline{X, \bar{Y}}$ и $\overline{Y, \bar{X}}$ по маршруте полета ℓ . Обороты выполнялись по петлям S_1 и S_2 . Когда самолет находился вблизи точки О, выполнялись лазерные измерения, т.е. измерялись расстояния станции А - цель и станции В - цель, и одновременно протекало фотографирование лазерных лучей отраженных от отражателей на самолете. Когда самолет находился вблизи точек 1 или 2, выполнялось фотографирование проблесков на спице самолета одновременно с обеих станций. В течение 1 пролета через точки О или 1 или 2 экспонировано на снимках даже и 25 изображений отраженных лазерных лучей или проблесков, и именно на каждой из обеих станций. Времена экспозиций и измеренных расстояний были с точностью 0,1 ms присоединены к шкале времени TUC. Изображения проблесков были симультанны для обеих станций. Изображения отраженных лазерных изображений так же как и измеренные расстояния были квазисимультанны. Их координаты, т.е. прямое восхождение и склонение, и расстояния были после того переведены в симультанные моменты с помощью вычислений.

В течение всего измерения было получено около 500 расстояний, около 300 изображений отраженных лазерных лучей и около

150 изображений проблесков. Мы должны помнить, что некоторые из первых перелетов посвященных лазерным измерениям, были экспериментальны и служили для приучения.

Описанные измерения были выполнены в конце августа 1976 г. Поэтому были до сих пор^{х/} нумерически предварительно обработаны только некоторые измерения. Мы применили 50 пар измеренных величин направлений проблесков, 6 пар измеренных расстояний и то же количество величин направлений изображений отраженных лазерных лучей. Следовательно, это относилось к вариантам 4 и 1, рис. 1. Были получены следующие точности:

средняя квадратическая ошибка единицы веса $\pm 1,5$,
 средняя квадратическая ошибка в прямом восхождении $\pm 0,9''$,
 средняя квадратическая ошибка в склонении $\pm 0,8''$,
 средняя квадратическая ошибка в расстоянии $\pm 1,6$ м,

все для соединительной линии $\overline{A,B}$, рис. 2.

Если установлен полный вектор $\overrightarrow{A,B}$, можно установить напр. высоту точки В, если считаем высоту точки А заданной. Ошибка за перенос высоты составляла 3 дм.

Мы думаем, что технология подготовки, измерения и обработки окончена. Результаты можно применить не только в области высшей геодезии, но также в авиации, метеорологии и других отраслях. Экономическая сторона и возможности планирования показывают большие преимущества предложенной последовательности.

Перспективы дальнейших исследований даны устранением известных недостатков с целью повышения внутренней и внешней точностей. Подходящим являются совместные измерения лазерные и проблесковые как на точке О, так и на точках 1 и 2. Также установление расстояний $\overline{A,B}$ с помощью наземных измерений радиооптическими дальномерами методом трехмерной геодезии будет целью дальнейших стремлений. И конечно, является желательным повышение высоты целей, т.е. самолета на 20 км и таким образом и расстояния наземных станций на 150 км.

^{х/}-----
 Октябрь 1976 г.

Л и т е р а т у р а

- [1] Kabeláč, J. - The Parallaxic Refraction Determined with the Aid of Meteorological Balloon Data. *Studia geophysica et geodaetica*, Praha, 20(1976), p.1.
- [2] Kabeláč, J. - Benutzung der Gauss'schen Frequenzkurve für die Auswertung einer astronomischen Aufnahme. *Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden*, 25(1976), Heft 3.
- [3] Novorka, Fr. - Satellite Laser Ranging at Hradec Králové. *Наблюдения искусственных спутников Земли*, № 16, 1976.

ДИГИТВИЗУАЛЬНЫЙ ТЕЛЕСКОП ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ

А. Хорват -- Астрономический Институт ВАН
 П. Хорват -- Иссл. Институт Приборостроения
 И. Петер -- Центральный Институт Физики ВАН
 (Венгрия)

Резюме: Представлена схема нового инструмента (дигитвизуального телескопа) разрабатываемого в ВНР для оперативного визуального наблюдения ИСЗ. Результаты наблюдений могут быть обработаны непосредственно на ЭВМ.

Astract: DIGITVISUAL TELESCOPE FOR SATELLITE OBSERVATIONS

A. Horváth - P. Horváth - I. Péter -- Hungary

A "Digitvisual Telescope" is developed in Hungary for visual observation of satellites.

The observational result is directly recorded on punched tape and/or on digital magnetic cassette which makes it convenient for further computer processing.

Во Венгрии разрабатывается новый, современный инструмент для быстрого оптического наблюдения спутников под названием дигитвизуальный телескоп (ДВТ).

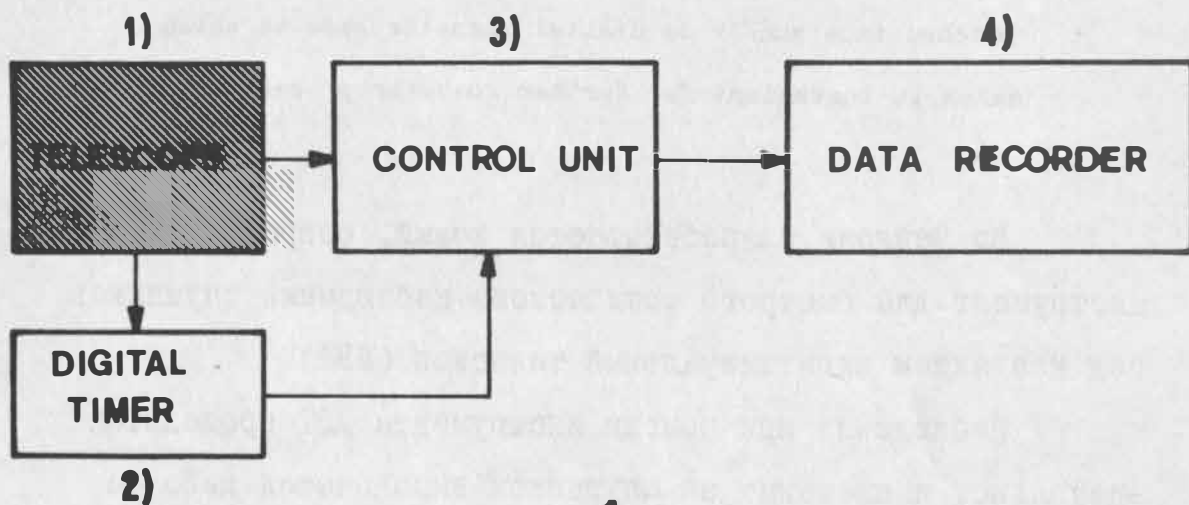
Наблюдение при помощи инструмента ДВТ проводится визуально, и слежение за спутником выполняется либо с наблюдателем, либо с дистанционным управлением, снабженным ТВ-системой.

Данные наблюдения, т.е. время, координаты местонахождения спутника и вспомогательная информация (дата, название ИСЗ, знаки ошибок) с аналоговой формы преобразуются в цифровую (дигитализированную) форму и моментально автоматически регистрируются для дальнейшей обработки на ЭВМ.

Дигитвизуальный инструмент состоит из четырех подсистем :

- 1) подсистема телескопов (ПТ) ,
- 2) подсистема измерения времени (ПВВ) ,
- 3) подсистема для управления и контроля инструмента (ПУК) ,
- 4) подсистема для регистрации и сохранения данных наблюдений (ПРС) ,

(см. Рис. I).



1.

1) Подсистема телескопов (ПТ - см. Рис. 2.)

ПТ служит для слежения за спутником при визуальным контролем наблюдателя, кто либо ручным способом, либо управлением скорости двигателей вращает ПТ по движением спутника. Из ПТ выдаются сигналы импульсов, характеризующих угловых координат спутника и сигнал на определение времени, последующими регистрациями этих данных.

ПТ состоит из системы оси, двух телескопов, двигателей по осям, инкрементального угломера по осям и ТВ - камеры.

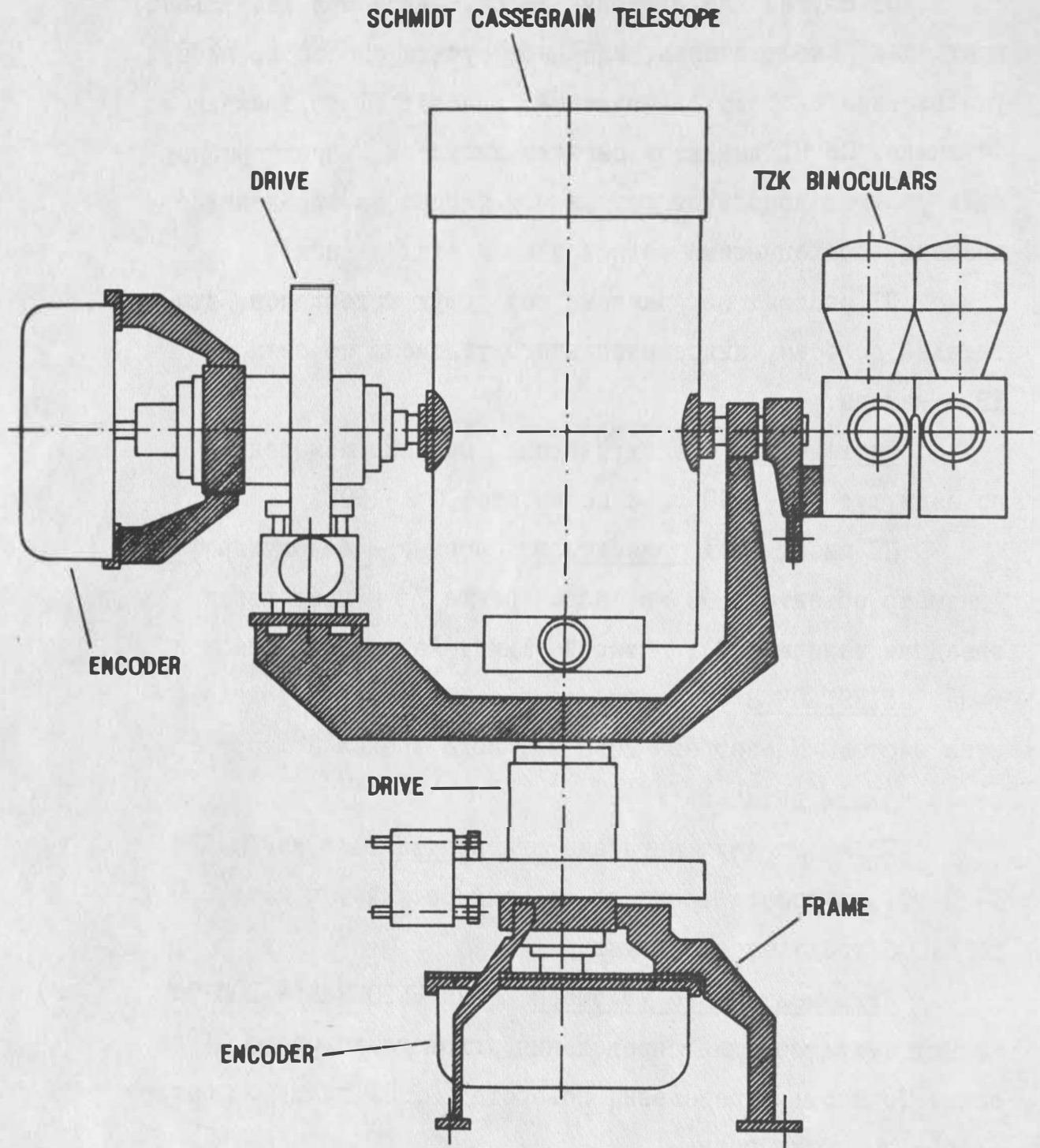
Система оси - азимутальная, границы измерений по азимуту: $0^{\circ} - 360^{\circ}$, а по высоте: $0^{\circ} - 90^{\circ}$.

ПТ имеет двух телескопов: первый - бинокляр ТЗК (диаметр объектива 90 мм, поле зрения 7° и предельная звездная величина 9); второй Шмидт-Кассегрен телескоп типа CELESTRON 8 (диаметр зеркала 203 мм, расстояние фокуса системы Кассегрена 2030 мм, поле зрения 2° , предельная звездная величина 13).

ПТ имеет двух шагающие двигателья типа RAPID SUN 34 H-90I, скорости вращения по осям регулируется от 0,004 до 3,000 градусов на секунд.

Инкрементальные угломеры типа HEIDENHAIN ROD-700 издают импульсов для определения углового поворота ПТ по осям. Точность определения поворота 0,001 градусов (около $4''$) по обоим осям.

ТВ - камера служит для изображения спутника к дистанционному управлению и контроли слежения за спутником.



2.

2) Подсистема измерения времени (ПИБ)

ПИБ служит для определения точного времени по сигналу, полученному от ПТ, и для контроля синхронизации времени с ЦТС.

ПИБ состоит из кварцевого эталона типа RHODE-SCHWARZ SAQ, цифровых часов типа EEDM 31 S-3202.5200 и коммерческих радиоприёмника и осциллоскопа.

3) Подсистема для управления и контроля инструмента (ПУК)

ПУК служит для определения цифровых значений угловых координат и для подготовки данных к регистрации; в случае использования ТВ системы ПУК служит также для проверки дистанционного управления ПТ слежения за спутником.

ПУК состоит из двух счётчиков угловых импульсов, двух систем показателей всемирного времени и координат ПТ, блока определения порядка данных для регистрации, системы для временного хранения промежуточных данных и ТВ-экрана.

4) Подсистема для регистрации и сохранения данных наблюдений (ПРС)

ПРС служит для регистрации и хранения данных наблюдений на пробиточных или магнитных кассетных лентах.

ПРС состоит из телетаппа типа DATA DYNAMICS ASR-33 MOD-390, специального кассетного магнитофона для записи цифровой информации и двух блоков для управления регистрацией.

Инструмент ДВТ планируется разработать в два этапа.

На первом этапе, в 1977 году будет эксплуатироваться первоначальный вариант ДВТ рассчитанный на ручное управление.

На втором этапе в 1979 году предполагается использовать дигитвизуальный телескоп дополненный ТВ-системой для дистанционного управления инструмента и кассетным магнетофоном для регистрации данных.

E. Maase¹⁾ (DDR)

Fernsehaufnahmesystem für die Ortung von Satelliten

Mit Hilfe des 4-Achsensystems eines Satellitenbeobachtungsgerätes ist es möglich, das Fernrohr dieses Gerätes der Bewegung des Satelliten nachzuführen. Durch Startfehler, mechanische Fehler, Refraktionseinflüsse u. a. treten jedoch Nachführfehler auf, die insbesondere bei Geräten mit Laserentfernungsmesser zu einer Verminderung der Zielgenauigkeit führen. Infolge der relativ raschen Bewegung ist die manuelle Korrektur durch visuelle Abweichungsbestimmung am Okular eines Leitfernrohres oder der Laserempfangsoptik mit erheblichen körperlichen Belastungen verbunden. Eine sehr elegante Lösung entsteht durch den Einsatz einer Fernsehkamera und der Korrektur an Hand des Bildes auf einem Fernsehempfangsschirm.

Ein entscheidender Gesichtspunkt bei der Projektierung eines solchen Aufnahmesystems besteht in der Auswahl einer geeigneten Fernsehaufnahmeröhre. Von den beiden das Einsatzgebiet bestimmenden Parametern - Größe der lichtempfindlichen Fläche und Empfindlichkeit - muß letzterem besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Die zu erwartenden hohen Empfindlichkeitsforderungen schließen die Anwendung normaler Aufnahmeröhren aus und bedingen Spezialröhren mit Bildverstärkern. Unter Einbeziehung der mit der Röhre verbundenen Ablenkeinheit stellt dieser Komplex das kostenaufwendigste Bauelement der Elektronik dar. Die Entscheidung für einen bestimmten Röhrentyp setzt die Kenntnis der Spezifik von Fernsehaufnahmesystemen voraus, die sich in einigen wesentlichen Punkten von den bekannten Empfindlichkeitsbetrachtungen bei der Anwendung von Fotovervielfachern unterscheidet.

Fernsehsysteme dienen in erster Linie der Lagedefinition der empfangenen Bildeinheiten. Messungen der Bildpunkthelligkeit müssen naturgemäß von sekundärer Bedeutung sein, weil im Verlauf der komplizierten optoelektronischen Vorgänge größere Unsicherheiten auftreten.

¹⁾ Techn. Univers. Dresden, Sekt. Geod. u. Kartogr., 8027 Dresden

Bei der überwiegenden Zahl der astronomischen Objekte wird die Größe des Bildpunktes durch die Beugungsfigur gegeben. Die normierte Beleuchtungsstärke im Primärfokus eines Spiegel- oder Linsensystems folgt der Funktion

$$\frac{E(r)}{E_{\max}} = \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

wobei
$$x = \frac{\pi D r}{f \lambda}$$

f = Brennweite, D = Objektivöffnung, λ = Wellenlänge
 $J_1(x)$ = Besselfunktion I. Ordnung und 1. Art mit den Nullstellen $x_{01} = 3,8317$; $x_{02} = 7,0156$ usw.

Der dem 1. Minimum zugeordnete Wert von r wird als Beugungsscheibchenradius r_B definiert

$$r_B = 1,22 \frac{f \lambda}{D}$$

Die von einem Objekt mit der Größenklasse m auf der Erde hervorgerufene Beleuchtungsstärke ist

$$E_m = E_0 \cdot 10^{-0,4m} \quad \text{mit}$$

$$E_0 = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ lx}$$

Von Verlusten abgesehen, tritt der von der Eintrittsöffnung mit der Größe

$$F_e = \frac{1}{4} \pi D^2$$

empfangene Lichtstrom in der Austrittsöffnung aus. Da die außerhalb des 1. Maximums konzentrierte Energie relativ gering ist ($\approx 16\%$), kann in guter Näherung die vom Beugungsscheibchenradius bestimmte Fläche als Austrittsöffnung angenommen werden.

Es wird dann

$$E_a = \frac{E_m D^4}{6 f^2 \lambda^2}$$

Dieser Wert entspricht dem bestimmten Integral

$$E_a = C \int_0^{r_B} \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 dr$$

und führt zur Lösung

$$E_a = 0,43 E_{\max} \quad (\text{Bild 1})$$

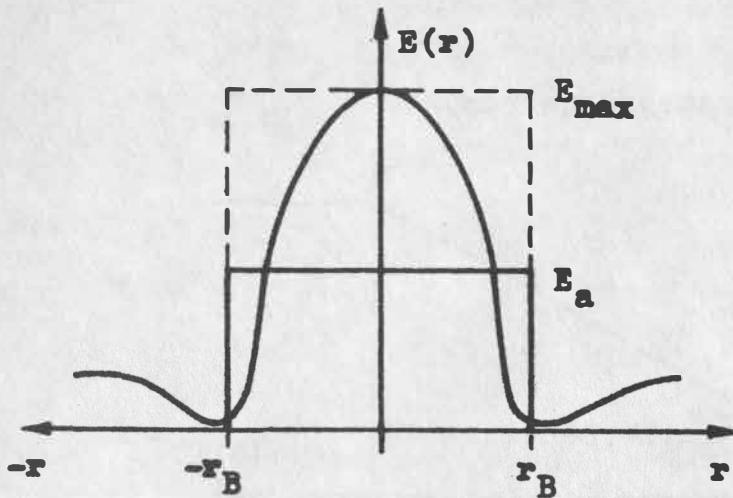


Bild 1: Verlauf einer Beugungsfigur

stammenden Verläufe.

$$E(r) = \left(\frac{F_2 \mathcal{J}_1(\chi_2)}{\chi_2} - \frac{F_1 \mathcal{J}_1(\chi_1)}{\chi_1} \right)^2$$

mit $F_1 = \frac{1}{4} \pi D_1^2$

D_1 = Sekundärspiegeldurchmesser

$$\chi_1 = \frac{\pi D_1 r}{f \lambda}$$

$$F_2 = \frac{1}{4} \pi D_2^2$$

D_2 = Hauptspiegeldurchmesser

$$\chi_2 = \frac{\pi D_2 r}{f \lambda}$$

Der Beugungsscheibchenradius wird durch die Einführung eines Sekundärspiegels nur unbedeutend verringert. Die Beleuchtungsstärke liegt in 1. Näherung bei

$$\frac{D_2^2 - D_1^2}{D_2^2} > \frac{E_{\max} \text{ abgesch.}}{E_{\max} \text{ voll}} ; \frac{E_a \text{ abgesch.}}{E_a \text{ voll}} > \frac{D_2 - D_1}{D_2}$$

z. B. bei $D_2 = 2 D_1$

ist $E_a \text{ abgesch.} \approx 0,6 E_a \text{ voll.}$

Für Bildaufnahmeröhren werden vom Hersteller Empfindlichkeitscharakteristiken angegeben. Die als Beispiel in Bild 2 dargestellte Charakteristik bezieht sich auf ein Vidikon mit einem Bildverstärker. Die untere Grenze des nutzbaren Bereiches wird durch die Rauscheigenschaften des Signalstromverstärkers und die obere durch Sättigungserscheinungen der Aufnahmeröhre be-

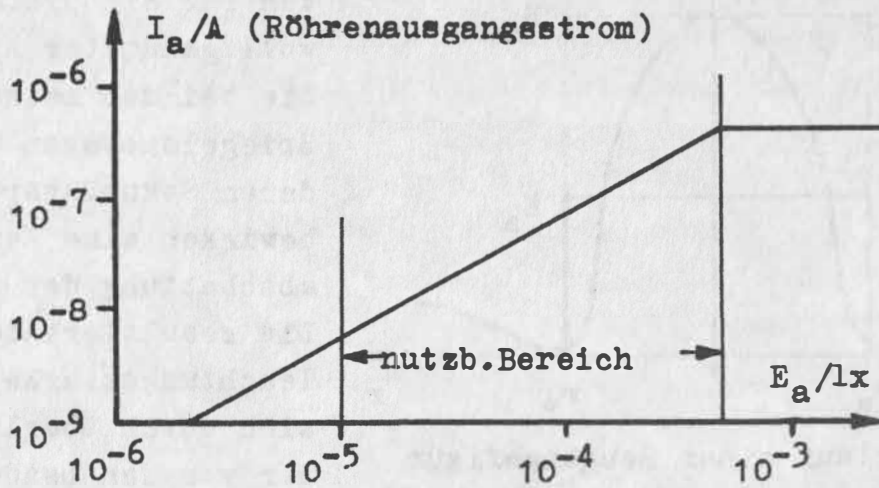


Bild 2: Empfindlichkeitscharakteristik

stimmt. Die angegebenen Werte werden beim Abtasten einer mit der Beleuchtungsstärke E_a homogen ausgeleuchteten Fläche erzielt. Bei der Aufnahme astronomischer Objekte wird dagegen nur ein sehr kleiner Teil der Aufnahmefläche ausgenutzt. In den meisten Fällen ist der Radius r_B der Beugungsfigur kleiner als der Radius r_S des Abtaststrahls in der Aufnahmeöhre. Der Abtaststrahl integriert die Helligkeitsverteilung über die durch seinen Radius gegebene Fläche, folglich ist bei $r_B < r_S$ der Ausgangsstrom niedriger als im Diagramm angegeben.

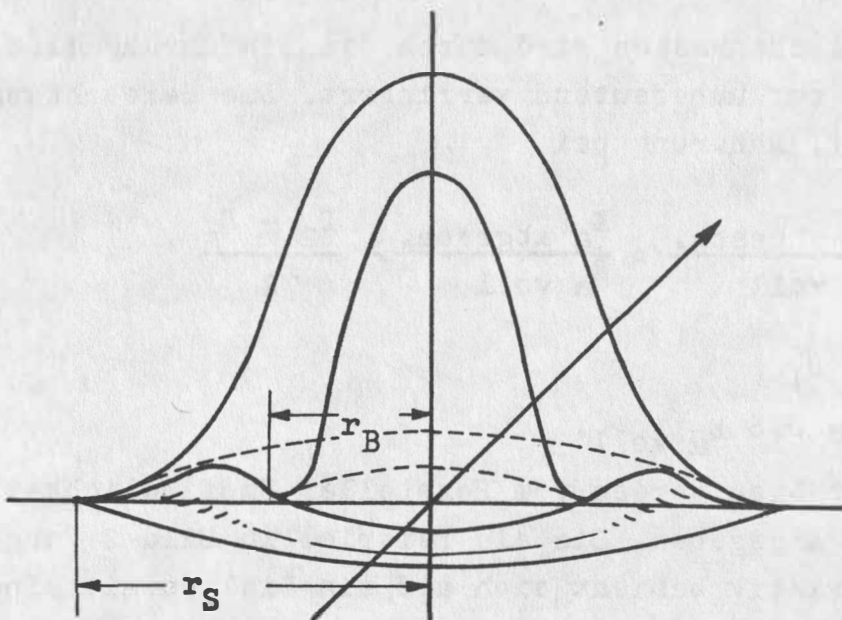


Bild 3: Räumliche Darstellung der Abtastung eines Beugungsverlaufes durch einen Elektronenstrahl

Die exakte Berechnung des entstehenden Bruchteils ist sehr kompliziert, da die Anzahl der Abtastelektronen im Strahl nach Gauß verteilt ist und damit die Berechnung eines Körpers erforderlich wäre, der beim Herausschneiden einer Beugungsfigur aus einer räumlichen Gaußverteilung entsteht (Bild 3). Bei der Annahme eines homogen ausgeleuchteten Lichtflecks vom Radius r_B und der Beleuchtungsstärke E_a , sowie der Näherung der Gaußverteilung durch eine \cos^2 -Funktion entsteht ein lösbarer Ansatz. Hierbei muß berücksichtigt werden, daß der gezeichnete Idealfall der Übereinstimmung von Strahlachse und Achse der Beugungsfigur im allgemeinen nicht erreicht wird. Eine Abschätzung des Faktors e der Empfindlichkeitsverminderung ergibt bei Röhren vom Superorthikontyp mit $r_S \approx 25 \mu\text{m}$: $e \approx 0,15$
 vom Vidikontyp mit $r_S \approx 15 \mu\text{m}$: $e \approx 0,3$
 bei Annahme von $r_B \approx 5 \mu\text{m}$.

Röhren mit Bildverstärker vom Superorthikontyp werden hauptsächlich in der Sowjetunion hergestellt. Sie zeichnen sich durch die höchsten bei Bildaufnahmeröhren erreichbaren Empfindlichkeiten aus, besitzen aber zusammen mit der notwendigen Ablenkeinheit ein sehr großes Volumen und Gewicht. Die in der Hauptsache in den USA gefertigten Röhren mit Bildverstärker vom Vidikontyp besitzen eine niedrigere, aber für Satellitenbeobachtungsgeräte ausreichende Empfindlichkeit. Infolge ihres geringeren Gewichtes und Volumens sowie der einfacheren Bedienbarkeit ist diese Röhre für den vorliegenden Zweck der Vorzug zu geben.

Bei Verwendung der in Bild 4 angegebenen Fernrohrhauptdaten des SBG des Zentralinstituts für Physik der Erde in Potsdam entstehen die folgenden Werte:

$$E_a \approx 10^{-2} \text{ lx für Objekte mit } m = 13$$

Empfindlichkeitsverminderung durch Zentralabschattung: 0,8

Empfindlichkeitsverminderung durch $r_B < r_S$: 0,3

$$\rightarrow E_{a \text{ eff}} \approx 10^{-3} \text{ lx.}$$

Es sind also Aufnahmeröhren geeignet, die bei diesem Wert der Beleuchtungsstärke einen Ausgangsstrom $I_a \gtrsim 10 \text{ nA}$ haben.

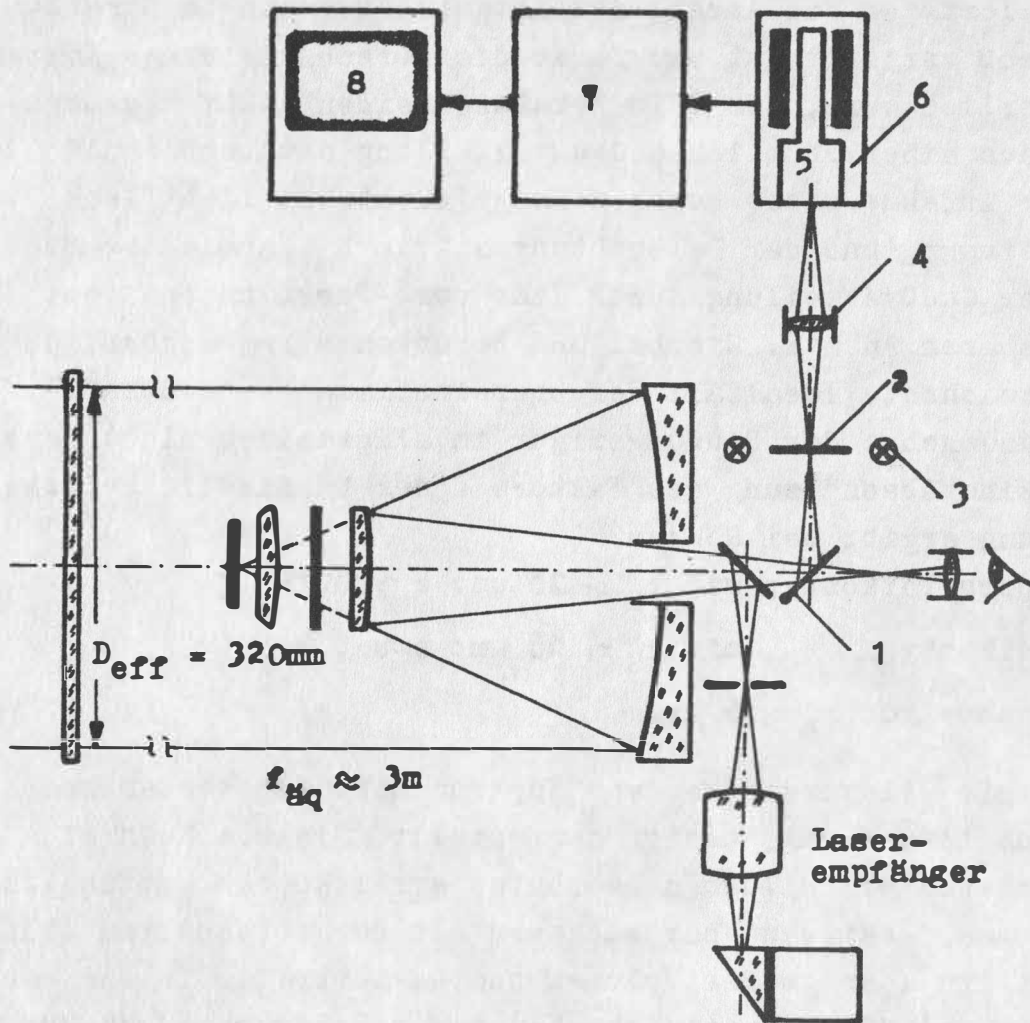


Bild 4: Satellitenbeobachtungsgerät ohne Lasersender, erweitert durch Fernsehsichtungs-system [1]

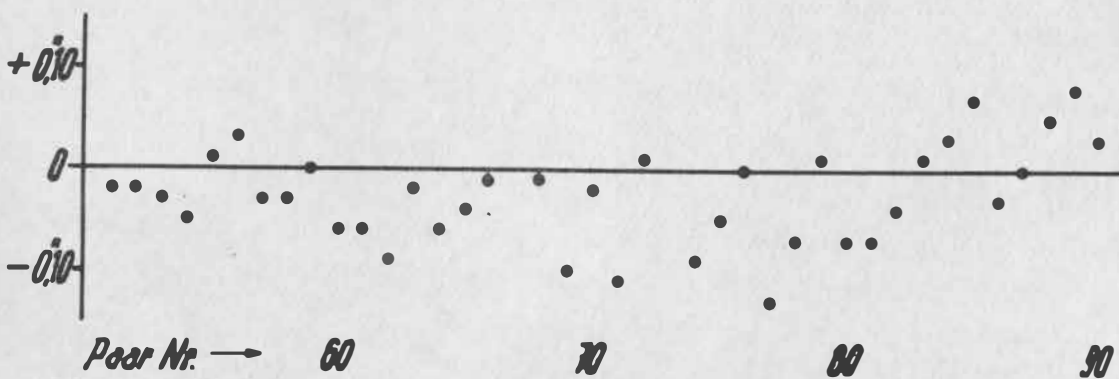
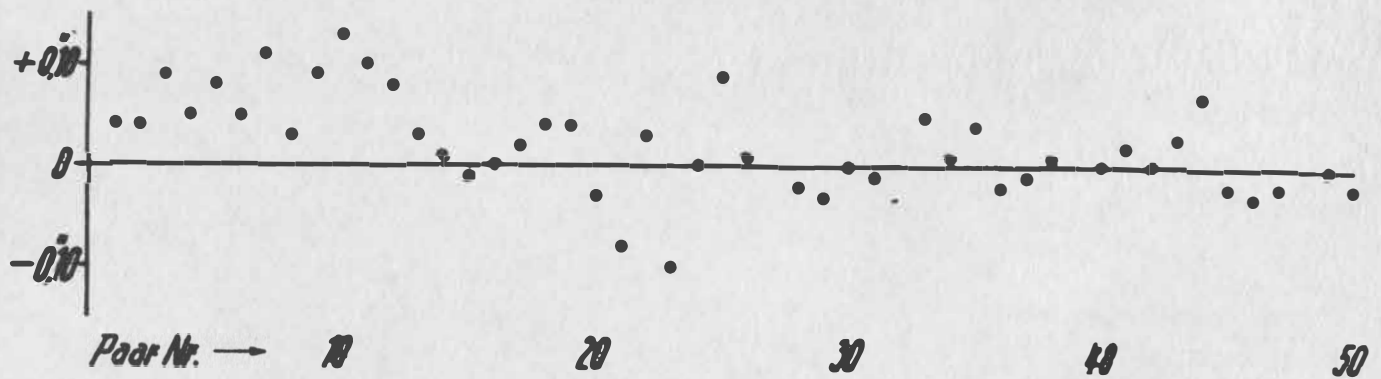
Abschließend sei ein Fernsehsystem zur Ortung von Satelliten vorgestellt. Die durch einen Klappspiegel (1) umgelenkten Strahlen werden in der Ebene der Fadenplatte (2) fokussiert. Auf der Fadenplatte befindet sich ein indirekt beleuchtetes (3) geätztes Kreuz, das durch das Abbildungssystem (4) zusammen mit dem Bild des Satelliten auf der Frontscheibe der Aufnahmeröhre (5) abgebildet wird. Die Kameraeinheit (6) enthält nur die Elemente, deren räumliche Trennung von der Aufnahmeröhre den Betrieb unmöglich machen würde. Alle übrigen Baugruppen sind im Betriebsgerät (7) untergebracht. Die Nachführung geschieht mittels Kontrolle der Deckung von Kreuzmitte und Satellitenbild auf dem Schirm des Bildempfängers (8).

Literatur

- / 1 / H. Fischer, R. Neubert, Ch. Selke, R. Stecher:
 Erweiterung der Satellitenkamera SBG zur Laserent-
 fernungsmessung.
 Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik
 der Erde, Nr. 29

TELEVISION PICK-UP SYSTEM FOR SATELLITE LOCATION

In the optoelectronic registration of astronomical objects by means of television systems some special aspects are to be taken into account, allowing to derive the points of view necessary for the development of a satellite location device. The characteristics of the optimal system and of the scanning beam determine the form and the amplitude of the output signal and define the conditions for the choice of the pick-up tube.



SOME EXPERIMENTS WITH SATELLITE-NAVIGATION DOPPLER RECEIVERSMAGNAVOX 'MX-902' AND 'ITT-6001'

T. Stupak, K. Vorbrich, J. Wieckowski (Poland)

ABSTRACT

In this paper the functional descriptions of 'MX-902' and 'ITT-6001' receivers installed on board the Polish training - merchant ship m/s 'Antoni Garnuszewski' are presented.

'Fixes' results from two different receivers, obtained from the same group of satellite passes are shown. An analysis of some satellite - navigation positions obtained during the mooring and motion of the vessel are made. Some remarks connected with applying NNSS for navigation at sea are discussed.

НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ СО СПУТНИКО-НАВИГАЦИОННЫМИ ДОПЛЕРОВСКИМИ

ПРИЁМНИКАМИ MAGNAVOX "MX-902" и "ITT-6001"

Т. Ступак, К. Форбрих, Й. Виецковски (Польша)

РЕЗЮМЕ

В работе представлено функциональное описание приёмников "MX-902" и "ITT-6001", смонтированных на полубе польского учебного товарного судна "Антони Гарнушевски".

Представлены также результаты одновременных наблюдений идентичных спутниковых перелётов посредством двух приёмников. Проведён анализ спутниково-навигационных позиций корабля во время его привязания и движения. Обсуждены некоторые замечания, связанные с применением спутниковой навигации NNSS на море.

On board of Polish training - merchant ship m/s 'Antoni Garnuszewski' were installed two satellite navigation receivers (working in the Navy Navigation Satellite System 'Transit'), one from the Magnavox Company ('MX-902') and the other from the International Telephone and Telegraph Corporation ('ITT-6001'). The idea of the System and the factors which effect the accuracy of the Doppler position are considered by the authors as generally known and therefore are omitted in this paper. It is worth mentioning here that for the purpose of its training functions all the ships navigation equipment (as for the example the radars, Omega, Loran and Decca Navigator receivers) is entirely up to date. During the route it provides the opportunity for the mutual checking of the satellites' 'fixes' accuracy with those from more conventional equipment.

1. The functional description of the receivers.

Both receivers were operated as standard navigation models, with single channel nominal reference frequency 400MHz. They worked in the Phase Lock mode. The gating of the Doppler counts was based on the satellite time framework.

Fig.1. presents as a sample a block diagram of the receiver (namely 'ITT-6001').

The Magnavox 'MX-902' is a part of 'The Sperry CAS/Integrated Navigation System with Satellite Position Fixing'. The System combines the main integrated navigation idea with the Collision Avoidance Functions. The satellite - Doppler part of the Sperry System consists of:

- 1) An antenna (horizontal diagram: omnidirectional); in order to avoid any blocked azimuth coverage, the aerial was fixed on the main deck's top mast.

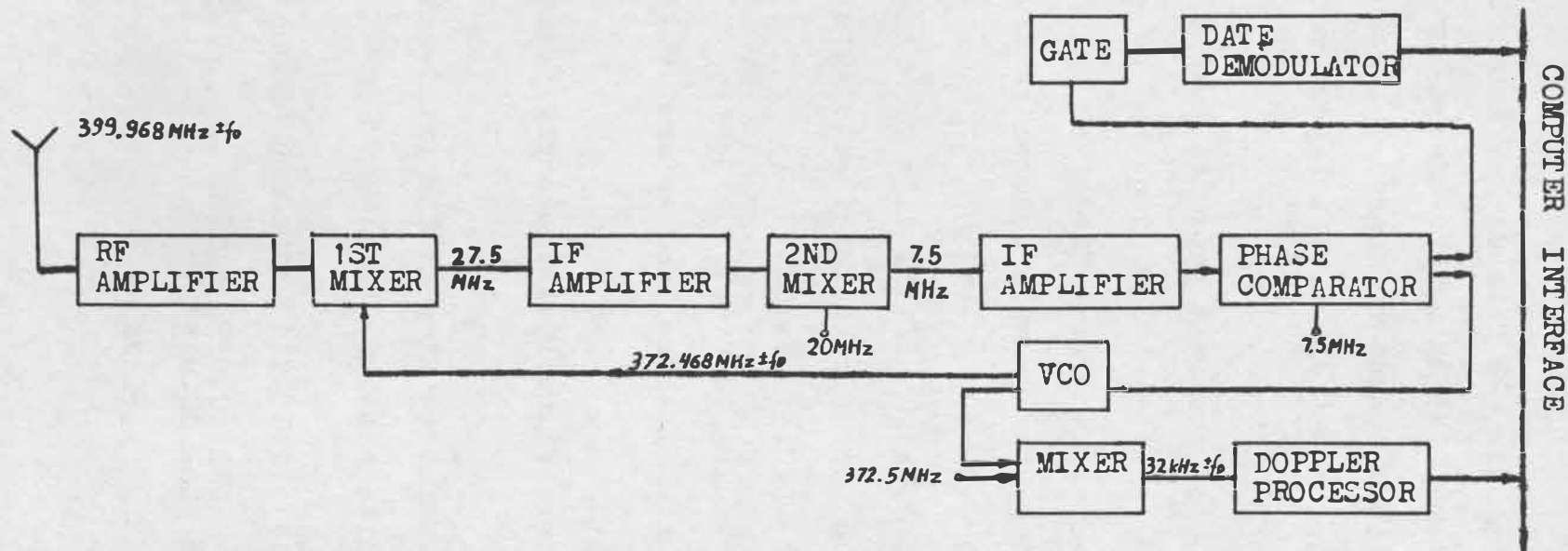


Fig. 1.

The 'ITT-6001' receiver block diagram.

Commentary: the VCO generator serves for accurately tracking the changes in the received Doppler shifted frequency.

sition and the D.R. (DLAT and DLON). In addition there appears a string of characters which is supposed to indicate the reliability of the 'fix'. Forty one characters, left-to-right correspond to the Doppler counts acquired during the satellite pass of approximately 15.7 minutes (one character corresponds to 23-second integration time). The following criteria apply to the validity of the Doppler counts:

=> At least 11 counts integrated when the satellite was at an altitude of at least 7.5° (these counts denoted by 1 or C) were required by the programme to compute a satellite 'fix'. If there were not 11 such counts available then up to a total of 15 counts the programme included counts with satellite elevation less than 7.5° to compute the 'fix'. Counts from a satellite of an elevation of less than 7.5° (adopted threshold of the sizeable tropospheric and ionospheric refraction) were denoted by ? mark.

=> Zero mark denoted a count which was either not received or received but rejected by the programme (mostly in case when sat. elevation less than 7.5°).

=> The total number of non-zero characters indicated the duration of the satellite passage over the antenna's horizon (for ex. the over-head pass of Transit satellite lasts about 18 minutes), therefore indirectly the elevation of the satellite in culmination. The satellite elevation in culmination is an important indication of the probable 'fix's' accuracy [8]. The latitude determination accuracy is directly proportional to the elevation of the pass. Very high passes produce the poorest determination of longitude. Low elevation passes result in poor latitude determination and an increasing influence of refraction. Reliable enough 'fixes' can be computed from passes with an altitude of between 10 and 75 degrees.

= The letter C which indicated the culmination, should be symmetrical about the other characters. If it was not (mostly when sat. injection occurred) a 'fix' could be subject to shift caused by asymmetry.

= If a 'fix' was considered by the programme as not reliable (the appearing string of characters could be not so bad however), the print was denoted by asterisk.

Failure to compute a 'fix' at all generated an 'advisory message' (easy to decode) which contained the information as to why the pass was rejected. The 'advisory message' list not being the subject-matter of this paper, is omitted here.

'ITT-6001' satellite - Doppler receiver devices consists of:

- 1) An antenna (omnidirectional), top mast mounted.
- 2) A receiver 'ITT-6001'; its integration time equal to 2-minute - 'Long Doppler'.
- 3) A standard teletypewriter.
- 4) A general purpose computer. In order to compute the satellite 'fix', programme (namely OPTINAV) require (as the 'MX-902's' programme) estimated own ship position, estimated G.M.T., the day of the year, antenna high (a vertical displacement of the mean sea level with respect to a satellite reference ellipsoid) and the ship's speed and heading. The automatic D.R. can not be used. Satellite 'fix' residuals can be presented on the receiver's digital display and recorded (hard copy - paper and paper punch tape) by a teleprinter. Apart from time and coordinate data, the OPTINAV programme gives the following information:

1- A full quota of 'Broadcast Ephemeris' (easy to decode [1], here not presented); the only usefull information for the navigator seemed to be: satellite identification number and the time and day of last injection.

2- Notices indicated the validity of the single 'fix';

= Values which were residuals from least-squares adjustment for each position line from 2 minute integration time; the OPTINAV programme indicated that if the single residual was less than 100 and the sum of residuals was nearly equal to zero, then probably the 'fix' computed from all 2 minute counts was reliable.

= NO FIX - notation indicating, that the 'fix' was computed, but not displayed because of too great a discrepancy between the satellite 'fix' and D.R.

2. Some results from stationary experiments.

Notice: some results are given not in S.I. system but in Nautical Miles (1NM equal 1852.5 meters).

For presentation here were chosen 11 representative observational groups made during the mooring of the ship in different harbours lying on latitudes between 32°N and 54.5°N .

The columns of Table 1 present the following information:

0. Specifications:

- ΔT - the duration of the observational group (in hours),
- no.- the numeration of the observational group,
- n - the number of the observed passes,
- n1 - the number of passes denoted by 'ad. mess.' ('MX-902') or NO FIX ('ITT-6001'),
- n2 - the number of passes denoted by an asterisk ('MX-902') or BAD FIX ('ITT-6001'),
- n3 - the number of 'fixes' useful for the navigator,
- $n2/n \cdot 100$ - the percentage of erroneous 'fixes',
- $n3/n \cdot 100$ - the percentage of useful 'fixes'.

The observational group from:

1. 'MX-902', Gdańsk, December, 1974, 29, 11^h15^mU.T. + 31, 18^h55^mU.T.
2. 'MX-902', Gdańsk, March, 1975, 17, 16^h15^mU.T. + 19, 16^h50^mU.T.
3. 'MX-902', Gdańsk, April, 1975, 28, 10^h15^mU.T. + 29, 23^h20^mU.T.

4. 'ITT-6001', Oran, October, 1975, 05, 13^h20^mU.T. ÷ 08, 09^h50^mU.T.
 5. 'ITT-6001', Oran, October, 1975, 10, 15^h09^mU.T. ÷ 12, 19^h05^mU.T.
 6. 'ITT-6001', Oran, October, 1975, 15, 21^h10^mU.T. ÷ 18, 10^h13^mU.T.
 7. 'MX-902', Oran, October, 1975, 15, 21^h10^mU.T. ÷ 18, 10^h13^mU.T.
 8. 'MX-902', Oran, October, 1975, 15, 21^h10^mU.T. ÷ 22, 04^h45^mU.T.
 9. 'ITT-6001', Oran, October, 1975, 23, 17^h15^mU.T. ÷ 26, 16^h45^mU.T.
 10. 'ITT-6001', Casablanca, Dec., 1975, 27, 14^h22^mU.T. ÷ 29, 12^h15^mU.T.
 11. 'ITT-6001', Safi, January, 1976, 03, 08^h10^mU.T. ÷ 06, 13^h25^mU.T.
- Notice: the group no. 7 is a part of no. 8 one.

The columns of the Table 2 consists of the following information:

0. Specifications:

no. - the numeration of the observational group (see explanation to Table 1.),

D+N - the results from the whole observational group,

D - the results from the observations from the day time,

N - the results from the observations from the night time,

n - the number of 'fixes' taken for computation of mean antenna position.

Notice: for the obs. groups no. 4., 5., 8., 9., 10. the number of observations for day and night were equalized; 'fixes' from the Sun rise and Sun set times were rejected.

Mn. - notation denoted the thousandth parts of minutes of latitude (LAT) and longitude (LON) of the mean antenna coordinates.

The complete mean antenna coordinates can be achieved by respective adding Mn. values to coordinates:

for groups 1., 2., 3.: LAT 54°23.000'N, LON 018°39.000'E,

for groups 4., 5., 6., 7., 8., 9.: LAT 35°42.000'N, LON 000°38.000'W,

for group 10.: LAT 33°36.000'N, LON 007°35.000'W,

for group 11.: LAT 32°18.000'N, LON 009°13.000'W,

ms - the root mean square error of a single 'fix',

mMn - the root mean square error of a mean antenna position.

Table 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
no											
ΔT	55	75	37	69	52	61	61	151	71	50	77
n	-	-	42	81	63	46	-	106	68	72	68
n1	-	-	17	22	15	12	-	26	18	19	22
n2	-	-	2	5	3	4	-	9	2	3	2
n3	45	19	23	54	44	30	30	71	48	50	44
$\frac{n2}{n} \cdot 100$	-	-	4.8	6.2	4.8	8.7	-	8.5	2.9	4.2	2.9
$\frac{n3}{n} \cdot 100$	-	-	54.8	66.7	69.8	65.0	-	66.9	70.5	69.4	64.7

Table 2.

no.	1		2		3		4		5		6	
n	45		19		21						30	
	LAT	LON	LAT	LON	LAT	LON	LAT	LON	LAT	LON	LAT	LON
D+N Mn.	.240	.892	.401	.089	.251	.810					.612	.351
D+N ms.	+.067	+.116	+.084	+.102	+.086	+.087					+.037	+.085
D+N mMn.	±.010	±.017	±.017	±.022	±.020	±.020					±.007	±.019
n	15						24		22		13	
D Mn.	.250	.870					.628	.278	.592	.504	.603	.363
D ms.	+.052	+.126					+.083	+.153	+.129	+.322	+.030	+.073
D mMn.	±.013	±.032					±.016	±.031	±.027	±.070	±.008	±.020
n	30						24		22		17	
N Mn.	.234	.903					.614	.338	.644	.398	.619	.315
N ms.	+.074	+.110					+.057	+.089	+.114	+.112	+.041	+.097
N mMn.	±.013	±.020					±.011	±.018	±.024	±.024	±.010	±.023
no	7		8		9		10		11			
n	30						55					
D+N Mn.	.593	.351					.242	.395				
D+N ms.	+.028	+.061					+.066	+.091				
D+N mMn.	±.005	±.010					±.009	±.012				
n	13		27		21		25		21			
D Mn.	.596	.363	.573	.326	.614	.325	.253	.416	.362	.788		
D ms.	+.030	+.038	+.071	+.076	+.030	+.097	+.075	+.127	+.085	+.158		
D mMn.	±.008	±.020	±.013	±.014	±.011	±.021	±.015	±.015	±.018	±.036		
n	17		27		21		30		21			
N Mn.	.590	.341	.599	.327	.618	.315	.232	.379	.375	.781		
N ms.	+.026	+.075	+.048	+.067	+.077	+.067	+.060	+.040	+.061	+.090		
N mMn.	±.006	±.018	±.009	±.012	±.016	±.015	±.011	±.007	±.013	±.019		

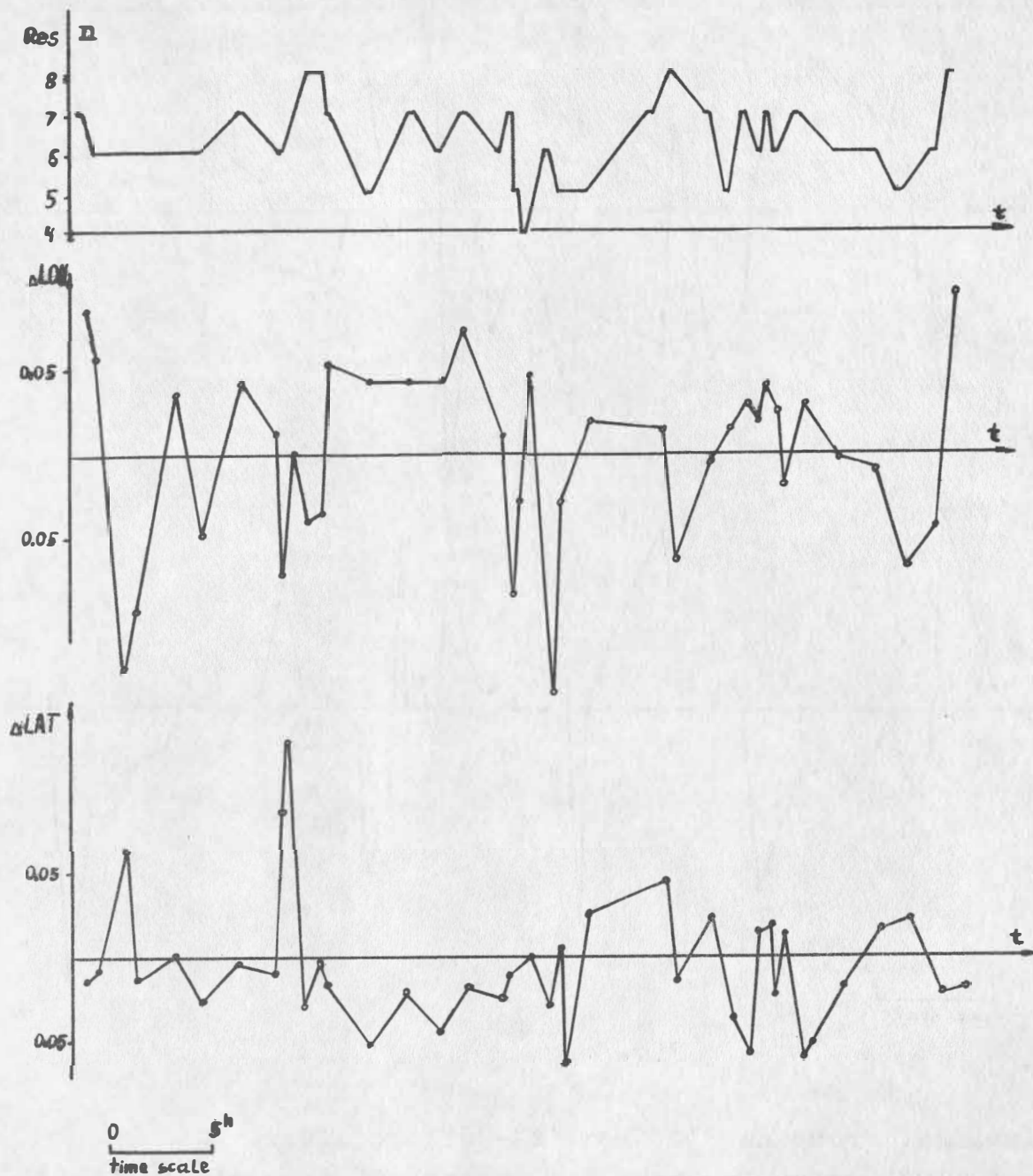


Fig. 3.

Observational group no. 10. from 'ITT-6001' receiver.
 ΔLAT and ΔLON residuals (mean antenna coordinates minus 'fix')
 plotted together with the number n of 2 minute counts.
 Casablanca Harbour; mean antenna coordinates:
 $LAT\ 33^{\circ}36.242'N$, $LON\ 007^{\circ}35.395'W$.

1.	2.	1.	2.
1	2/0/14/1/C15/1/8/0/	24	1/0/9/1/C15/1/1/0/2/1/9/0/
2	2/0/14/1/C14/1/9/0/	25	2/0/16/1/C15/1/6/0/
3	2/0/4/?/3/1/C3/1/4/?/23/0/	26	3/0/4/?/3/1/C3/1/4/23/0/
4	1/0/11/1/C11/1/16/0/	27	1/0/16/1/C18/1/4/0/
5	1/0/16/1/C17/1/15/0/	28	4/0/6/1/C1/1/1/?/22/0/
6	3/0/13/1/C14/1/9/0/	29	1/0/10/1/C10/1/19/0/
7	2/0/17/1/C18/1/2/0/	30	5/0/11/1/C12/1/12/0/
8	-	31	1/0/16/1/C18/1/4/0/
9	1/0/15/1/C16/1/7/0/	32	6/0/15/1/C16/1/1/0/
10	5/0/9/1/C9/1/17/0/	33	1/0/13/1/C12/1/14/0/
11	7/0/7/1/C8/1/17/0/	34	4/0/9/1/C10/1/17/0/
12	1/0/15/1/C17/1/3/0/	35	1/0/12/1/C16/1/11/0/
13	5/0/15/1/C17/1/3/0/	36	1/0/2/1/C15/1/22/0/
14	3/0/16/1/C16/1/4/0/	37	1/0/9/1/C16/1/16/0/
15	4/0/9/1/C9/1/17/0/	38	3/0/14/1/C14/1/9/0/
16	1/0/17/1/C14/1/7/0/	39	6/0/15/1/C15/1/4/0/
17	1/0/5/1/C5/1/4/?/24/0/	40	5/0/12/1/C11/1/12/0/
18	1/0/18/1/C12/1/8/0/	41	2/0/17/1/C16/1/5/0/
19	2/0/20/1/C13/1/4/0/	42	1/0/9/1/C14/1/16/0/
20	6/0/2/?/6/1/C5/1/1/?/19/0/	43	1/0/9/1/C18/1/12/0/
21	7/0/11/1/C11/1/19/0/	44	1/0/12/1/C18/1/9/0/
22	1/0/9/1/C12/1/17/0/	45	12/0/10/1/C9/1/6/0/
23	2/0/12/1/C12/1/13/0/		

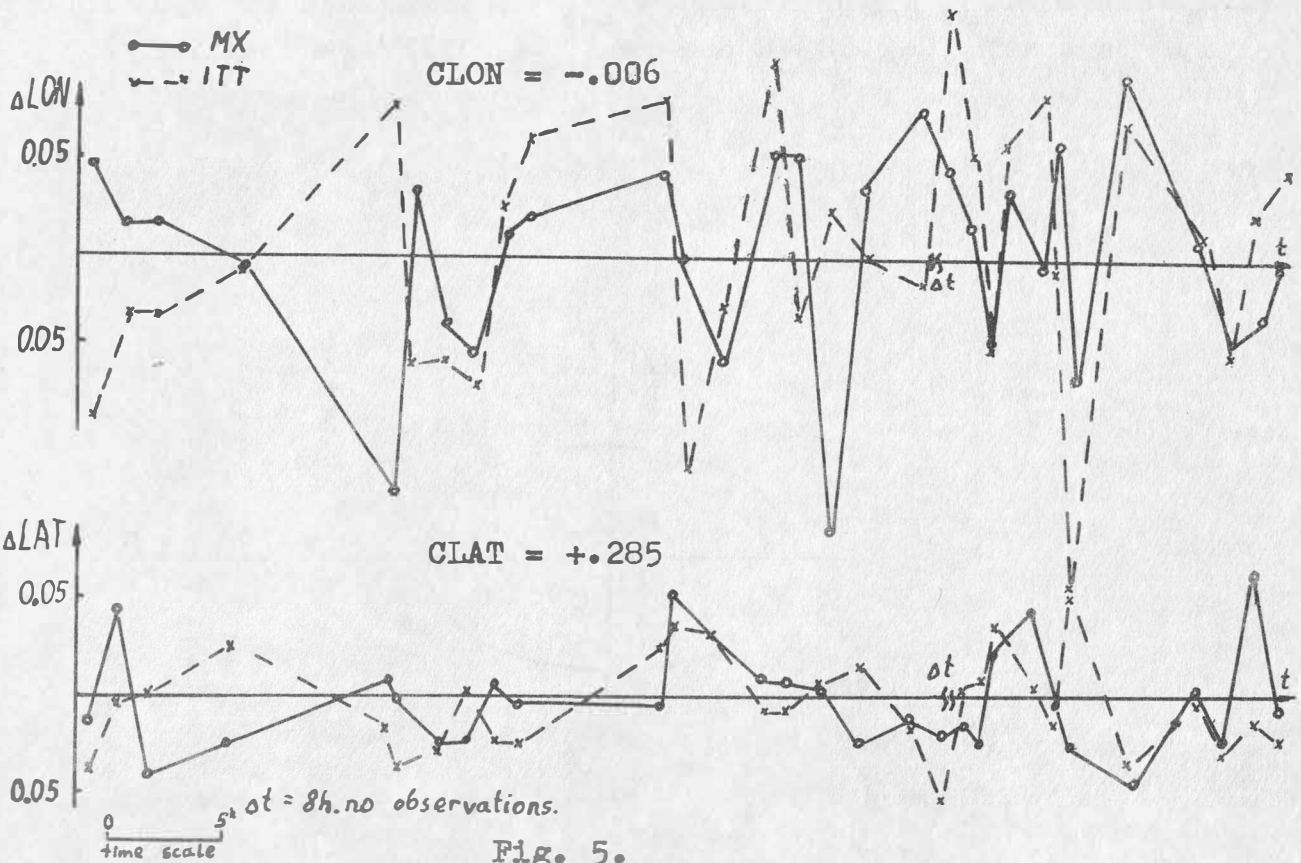


Fig. 5.

Simultaneous observations of both receivers (obs. gr. no. 6.,7.).
 ΔLAT and ΔLON residuals (mean antenna coordinates minus 'fix').

Oran Harbour: mean antenna coordinates:

for 'ITT-6001' - LAT $35^{\circ}42.612'N$, LON $000^{\circ}38.323'W$.

for 'MX-902' - LAT $35^{\circ}42.593'N$, LON $000^{\circ}38.351'W$.

$CLAT$ and $CLON$ - correlation coefficients.

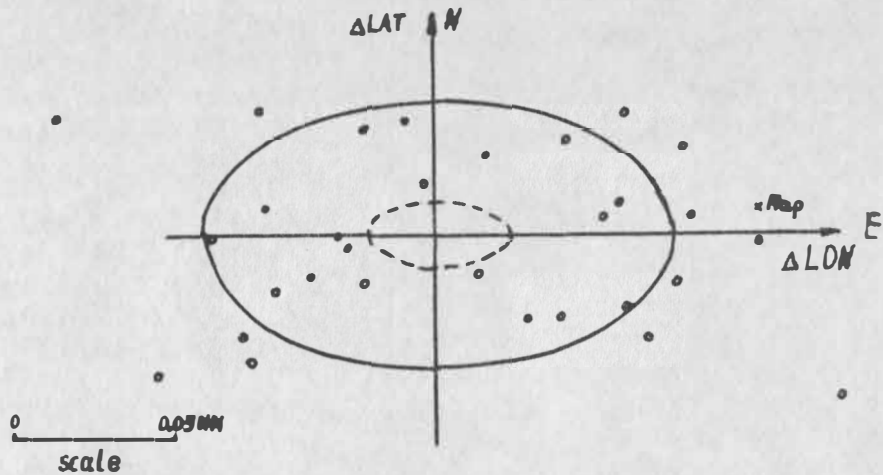


Fig. 6.

Observational group no. 6. from 'ITT-6001' receiver. The scatter plot of 30 radial residuals (mean antenna coordinates minus 'fix'). Semi-minor and semi-major axes of solid line ellipse are $ms_{LAT} = \pm 0.037NM$ and $ms_{LON} = \pm 0.085NM$ and of dashed line ellipse are $mMn_{LAT} = \pm 0.007NM$ and $mMn_{LON} = \pm 0.019NM$ respectively.

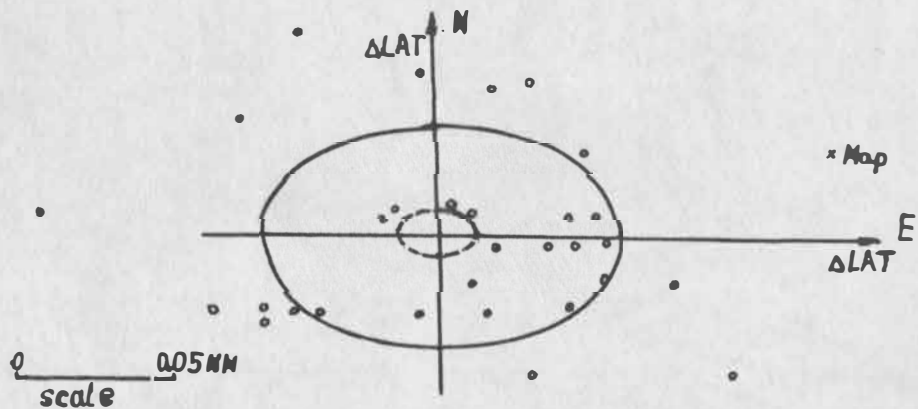


Fig. 7.

Observational group no. 7. from 'MX-902' receiver. The scatter plot of 30 radial residuals (mean antenna coordinates minus 'fix'). Semi-minor and semi-major axes of solid line ellipse are $ms_{LAT} = \pm 0.028NM$ and $ms_{LON} = \pm 0.061NM$ and of dashed line ellipse are $mMn_{LAT} = \pm 0.005NM$ and $mMn_{LON} = \pm 0.010NM$ respectively.

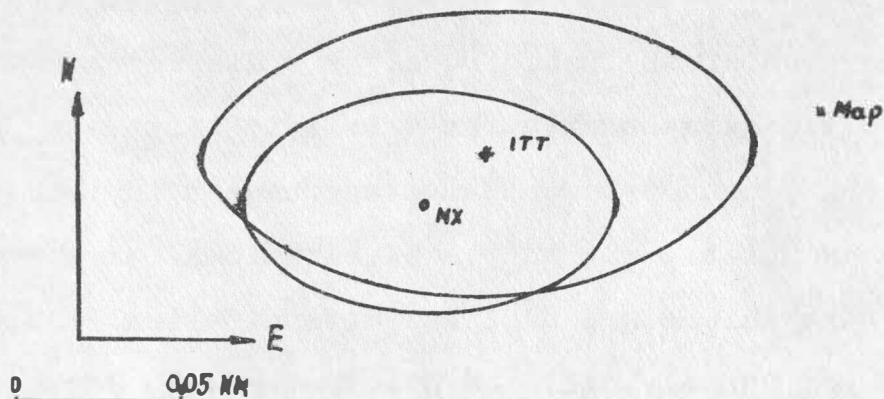


Fig. 8.

Simultaneous observations of both receivers (obs. gr. 6.,7.). The 'ITT-6001' and 'MX-902' mean antenna position and the map antenna position.

For the dimensions of RMS ellipses see explanation to Fig. 5.i 6. The map antenna position: LAT $35^{\circ}41.63'N$, LON $000^{\circ}31.42'E$ was drawn with accuracy $\pm 0.01NM$ on Admiralty Chart no. 812.

3. Some results from experiments when the ship was in motion.

A check of accuracies of satellite 'fixes' obtained during the motion of the ship was possible in this part of the route, where accuracy of the position taken by means of conventional methods was considered to be sufficient. From conventional methods were chosen: the radar (namely Decca AC 1229 with accuracy of the distance measurement better than one percent which gave the single position accuracy (taken from 4 to 5 position lines) to about 0.1 NM; radar distances were checked by optical bearings - if possible) and Decca Navigator (namely Decca Mark 21 receiver with accuracy of the single position to about 10 to 100 meters). The discrepancy between satellite's and radar 'fixes' was influenced by nonsimultaneousness. The radar distance measurements were started at a moment when the satellite 'fix' was performed and lasted 20 to 30 seconds. In this time the ship covered distances from 140 to 230 meters.

The photographs of the Decca receiver's display were taken, so nonsimultaneousness with the satellite 'fix' was partly omitted. The shift caused by nonsimultaneousness in this method was less than 50 meters. The source of additional errors was uncertainty in the ship's ground speed determination. The vessel's pitometer log (namely SAL) and electromagnetic log measured the ship's velocity with respect to the water, and the currents were not detected. The craft's Doppler sonar speed log measured the shift in frequency of sound pulses bounced off the sea floor, but only in reasonably shallow water; in the depths beyond about 200 meters, the bottom echo was lost and the sonar's indications were subject to errors owing to water currents. Table 4 demonstrates results of satellite 'fixes' by means of 'ITT-6001' receiver compared with positions taken by means of the radar Decca AC 1229 and the Decca Mark 21 receiver. The ship's speed and heading were fed into 'ITT-6001's' computer manually. Table 4 presents a sample of experiments made during the rout in January 1976. The observations were made across the satellite track passage (East-West headings - The Gibraltar Straits) and along the satellite track passage (North-South headings - The Kattegat).

The columns of Table 4 present the following information:

1. The consequence number of position determination.
2. The day of January 1976.
3. The Universal Time.
4. The latitude determinations:
 - 4a. from conventional devices (the Gibraltar Str.- radar, the E. Channel and the Kattegat - Decca);
 - 4b. from 'ITT' devices (when the position was satellite 'fix' denoted here by s or when it was dead reckoned by computer, then it was not denoted).
5. The discrepancy (in NM) conventional (CON) minus 'ITT' in latitude.

Table 4.

1	2	3	4			5	6			7	8	9			
			L A T				L O N								
			[deg]	4a	4b		[NM]	[deg]	6a				6b	[NM]	[NM]
				CON	ITT				CON				ITT		
[min of arc]	[min of arc]	[min of arc]		[min of arc]											
GIBRALTAR STRAITS															
1	9	2320	35N	54.6	51.272s	0.3 S	5W	46.35	46.212s	0.14E	0.35	5			
2		2344		54.42	54.224	0.20S		40.4	40.954	0.4 W	0.48	—			
3	10	0000		55.45	55.867	0.42N		36.8	37.503	0.6 W	0.71	—			
4		0031		57.49	57.599s	0.11N		26.24	26.211s	0.03E	0.11	7			
5		0047		57.8	58.228	0.4 N		22.12	21.804	0.26E	0.51	—			
6		0103		58.1	57.940s	0.2 S		17.1	17.492s	0.3 W	0.36	6			
7		0127		58.9	58.804s	0.1 S		09.0	10.272s	0.3 W	0.32	7			
8		0141		59.5	59.288s	0.2 S		06.0	05.880s	0.1 E	0.23	6			
ENGLISH CHANNEL															
9	26	1302	49N	43.8	43.856s	0.0	2W	34.15	34.089s	0.04E	0.06	7			
10		1331		47.7	47.655	0.0		24.80	25.784	0.65W	0.65	—			
11		1356		49.7	49.771s	0.1 N		14.6	14.339s	0.2 E	0.18	8			
12		1430		52.6	52.407	0.2 S		03.2	04.113	0.6 W	0.62	—			
13		1443		53.8	54.025s	0.2 N	1W	57.75	58.217s	0.30W	0.38	4			
14		1455		54.8	54.454s	0.3 S		51.9	52.282s	0.2 W	0.42	5			
15		1525		57.1	56.853	0.2 S		41.2	42.073	0.6 W	0.61	—			
16		1543		58.75	58.433s	0.32S		31.8	32.248s	0.3 W	0.42	6			

Table 4. Cont.

1	2	3		4	5		6	7	8	9		
ENGLISH CHANNEL												
17	26	1557	50N	00.00	00.256s	0.26N	1W	26.30	26.210s	0.06E	0.26	6
18		1635		03.0	03.226	0.2 N		13.5	14.019	0.3 W	0.40	—
19		1654		04.3	04.736	0.4 N		06.2	07.558	0.9 W	0.97	—
20		1720		06.0	06.805	0.8 N	0W	50.9	50.704	0.1 E	0.81	—
21		1742		08.7	08.460s	0.2 S		43.0	43.245s	0.2 W	0.29	8
22		1806		10.3	10.301	0.0		34.6	35.357	0.5 W	0.49	
THE KATTEGAT												
23	28	1603	57N	44.5	44.455s	0.0	10E	47.8	47.855s	0.0	0.0	3
24		1630		39.6	41.337	1.8 N		55.8	56.306	0.3 E	1.80	—
25		1703		35.4	36.371	1.0 N	11E	08.3	07.308	0.5 W	1.10	—
26		1742		28.9	29.067s	0.2 N		21.55	21.192s	0.20W	0.26	7
27		2100	56N	45.2	46.960s	1.8 N		54.4	54.364s	0.0	1.80	6
28	29	0102		02.49	02.071s	0.42S	12E	38.2	38.204s	0.0	0.42	7
29		0130	55N	57.0	57.437	0.4 N		39.6	40.135	0.3 E	0.53	—
30		0205		50.5	49.851s	0.6 S		41.0	40.926s	0.1 W	0.65	4
31		0230		44.6	44.482	0.1 S		41.0	41.079	0.1 E	0.13	—

- 6.,6a.,6b. The longitude determination (see explanation to columns 4.,4a.,4b.).
7. The discrepancy (in NM) CON minus 'ITT' in longitude.
8. The distance (in NM) between CON and 'ITT' or value from:

$$\sqrt{[(\text{CON} - \text{'ITT'})_{\text{LAT}}]^2 + [(\text{CON} - \text{'ITT'})_{\text{LON}}]^2}$$

9. The number of valid 2 minute integrated Doppler counts as denoted by TTY of 'ITT' devices.

Conclusions.

The observational material was too scanty for any deeper analysis, yet allowed for some preliminary conclusions to be drawn.

1. When the ship was moored.

= The maximum shift of a single 'fix' (only passes with satisfactory geometry are taken into consideration here) from the mean antenna coordinates was found to be of the order of 0.5NM.

= It was determined that the tested single channel navigation receivers were capable of providing the mean antenna coordinates with a R.M.S. radial error of up to two hundred meters (about 0.1NM).

= In order to achieve higher accuracy, the survey ship has to employ a two channel receiver, longer observational group and a geodetic computer's programme. Such a programme ought to use observational equations, (one equation formed independently for each integrated Doppler count) from all suitable passes simultaneously.

= It was found during the simultaneous observations of both receivers that R.M.S. error from 'MX-902' 'fixes' was less than that of 'ITT-6001' 'fixes'. This can partly be explained by the fact that generally a 'Short Doppler' programme provides more accuracy than a 'Long Doppler' programme.

986 = For nearly all observational groups, the latitude coordinate was determined with markedly higher accuracy than the longitude coordinate. This was in agreement with theoretical suppositions.

= For the majority of observational groups, the R.M.S. error from night 'fixes' was less than from day 'fixes'. Probably this difference was due to changes in the refraction effect.

= The 'fixes' from simultaneous observations of both receivers were found to be poorly correlated. It could be due, among other factors to different methods of Doppler counting (23 second count and 2 minute count), short term changes in refraction, and short term drift in the reference oscillators.

= Mean antenna position was displaced from the map position from several decades to two hundred meters. It may have resulted from a shift between the adopted satellite reference ellipsoid and the actual map's Datum. Information as how to convert satellite position located on a satellite ellipsoid to a map's Datum are not available to the average navigator. Because of the impossibility of a non-military user obtaining a suitable computer's programme, he can not carry out the full computation procedure which employs the mean translation parameters between satellite ellipsoid and the actual map's reference system.

2. When the ship was in motion.

The important factor which affected the use of satellite-Doppler navigation at sea was the time interval between sequence reliable 'fixes'. The average interval appeared to be 60 minutes. Sometimes two or more satellites passed over within an hour. When two were simultaneously over the antenna's horizon, both were lost. The maximum duration between two suitable passes was four hours.

A check of the accuracy of the satellite's 'fix' and the computer's dead reckoning of the ship's position, with respect to the

Decca and radar systems showed, that the reliable accuracy of the position of a ship with a single channel Doppler receiver and integrated navigation system on board was of the order of 0.5 to 1NM. A significant part of this error could be due to the local shift between the satellite and map's ellipsoids. 0.5 to 1NM suited the required accuracy during an open sea voyage. For making landfall and in difficult navigational circumstances navigator required the two channel Doppler receiver, more frequent 'fixes' and the programme providing predictions of satellite passages, which unfortunately is unobtainable for our ship at the present time. In addition, some improved system was indispensable for precisely determining the vessel's ground speed during the satellite pass, and for the better interpolation of the ship's position between 'fixes'.

R E F E R E N C E S

1. Ashkenazi, V., Gough, R.J.: Determination of Position by Satellite-Doppler Techniques. Proc. of the First Seminar on Satellite-Doppler Methods, Nottingham - December 1975, Department of Civil Engineering - University of Nottingham Press, 1975.
2. Brower, G.N. Morgan, J.G.: Theoretical and Practical Comparison between Two Minute Doppler and Short Doppler Satellite Position Fix Accuracy. Navigation (U.S.A.), Vol. 19, No. 2, September 1972, pp. 128 - 137.
3. Capitane, N., Saint-Crit, L.: Variation of ϕ and λ of station of Gerga from Satellite Tracking and Precise Satellite Ephemeris. Proc. of the 'XVI^e Assamble Internationale de L'AIG', Grenoble, 18 - 24 Aout 1975, unpublished, 1975.
4. Guier, W.H.: Navigation Using Artificial Satellites - the Transit System. Proc. of the First International Symposium on the Use of the Artificial Satellites for Geodesy, Washington, D.C., April 26 - 28, 1962, Amsterdam, 1963, pp.261 - 276.

5. Kershner, R.B., Newton, R.R.: The Transit System. Navigation (U.S.A.), Vol. 15, No. 2, April 1962, pp. 129 - 147.
6. Smith, H.C.; Operational Experience with Satellite Navigation System. Safety at Sea, No. 34, January 1972, pp. 6 - 8.
7. Staff of the S.A.C.G., Applied Physics Laboratory: Planned improvements in the Transit System (1975). Navigation (U.S.A.), Vol. 22, No. 4, Winter 1975/76, pp. 352 - 360.
8. Wells, D.E.: Experience with Satellite Navigation During the Summer of 1968. The Can. Surv., Vol. 23, No. 4, September 1969, pp. 334 - 348.
9. Vorbrich, K.: Doświadczenia z odbiornikiem dopplerowskim firmy Magnavox 'MX-902' do prowadzenia nawigacji za pomocą sztucznych satelitów Ziemi. (Experiments with Doppler Receiver from the Magnavox Company ('MX-902') for the Navigation by Means of the Artificial Earth Satellites). Zeszyty naukowe Wyższej Szkoły Morskiej w Gdyni, (Scientific Issues of the Higher Maritime School at Gdynia), No. 4, 1976, (in press).

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОРБИТ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

Ю.Х.Жагар ¹⁾

Резюме

Сравниваются между собой промежуточные орбиты, являющиеся частными случаями обобщенной задачи двух неподвижных центров и обобщенной задачи Гарфинкеля, для выявления пригодности их для эфемеридной службы. Для ИСЗ с малым эксцентриситетом отдается предпочтение задаче Акснес, для которой приводятся простые алгоритмы пересчета элементов орбиты к кеплеровым элементам и обратно. Пересчет элементов дает возможность пользоваться уже существующими программами для улучшения элементов орбиты, вычисления возмущений и разного рода эфемерид ИСЗ. Координаты промежуточного движения при этом могут вычисляться по замкнутым формулам, не требующим разложения по степеням модуля эллиптических функций.

THE APPLICATION OF THE INTERMEDIATE ORBITS TO SATELLITE
MOTION PREDICTION

J.H.Zhagar

Abstract

Intermediate orbits, representing special solutions of the generalized two fixed-centre problem and the generalized Garfinkel problem, have been compared in order to find the most suitable one for the ephemeris service. For satellites with small eccentricity the Aksnes intermediate orbit should be preferred as it leads to relatively simple conversion algorithms to the keplerian elements and vice versa. By converting the elements all the existing computer programs for orbit improvement, perturbation account and ephemeris computation can be brought into service. Coordinates of the intermediate motion may be obtained by closed expressions which do not require expansion into power series over module of elliptic integrals.

The some numerical examples is given in this paper too.

¹⁾ Латвийский Университет г.о. Рига, бульв. Райниса, 19

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОРБИТ
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

Жагар Ю.Х.

ВВЕДЕНИЕ.

С каждым годом увеличивается точность методов наблюдений ИСЗ, и вместе с этим растут требования к эфемеридной службе. Так, для обеспечения визуальных наблюдений ИСЗ ошибки эфемеридного положения могли достигать 10° по угловым координатам и до 10 минут по времени. Для успешного проведения фотографических наблюдений ошибки эфемерид должны быть менее $1^{\circ} - 3^{\circ}$ по угловым координатам и не хуже 1 минуты по времени. Еще более жесткие требования предъявляют лазерные наблюдения, где необходимо прогнозировать также и топоцентрическое расстояние ИСЗ (с точностью 1 км), и топоцентрическую угловую скорость спутника.

Необходимость постоянного усовершенствования обеспечения эфемерид приводит к двум относительно самостоятельным задачам. Во-первых, к созданию постоянно действующей службы элементов орбит ИСЗ, обеспечивающей необходимую точность элементов. И, во-вторых, к употреблению в службе эфемерид достаточно точной теории движения ИСЗ. Необходимо иметь в виду, что эта теория должна содержать те возмущения в движении ИСЗ, которые способны влиять на качество прогноза, и, вместе с тем, быть предельно простой. В этом отношении привлекательны многие промежуточные орбиты спутников, которые были разработаны в 60-х годах, но не получили широкого практического применения. Можно отметить ряд причин такого отношения к промежуточным орбитам:

а) формулы вычисления координат спутника сложнее и менее удобны для программирования, чем формулы кеплерового движения;

б) вычисление возмущений высших порядков отличается от вычисления возмущений для кеплеровых элементов;

в) формулы улучшения элементов орбиты отличаются от формул улучшения кеплеровых элементов;

г) не разработаны простые алгоритмы перехода от кеплеровых элементов орбиты к элементам промежуточного движения.

Хочется особо отметить значение последнего пункта.

Разработка сравнительно простых алгоритмов пересчета элементов орбиты позволила бы использовать промежуточную орбиту в виде нелинейного метода вычисления основных возмущений в движении ИСЗ. При этом сохраняется возможность пользоваться уже существующими алгоритмами и программами для улучшения элементов орбиты, вычисления возмущений и разного рода эфемерид ИСЗ. Кроме того, во многих задачах отпала бы необходимость вычисления возмущений высших порядков, т.к. при этом возмущающий потенциал уменьшается на два-три порядка.

В предлагаемой работе сделана попытка разработать алгоритм пересчета элементов орбиты с выбором промежуточной орбиты, удобной для использования при вычислении эфемерид ИСЗ. С этой целью анализируются лишь те промежуточные орбиты, которые построены в сферической системе координат. Их математическая запись проще, что в данном случае облегчает и ускоряет вычислительный процесс, и вместе с тем они обеспечивают необходимую точность эфемерид.

I. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОРБИТЫ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Промежуточные орбиты в сферической системе координат имеют потенциал вида (см. [3], [5], [6], [7])

$$U = f(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}, \quad (I)$$

являющийся частным случаем потенциала

$$U^* = f(z) + \frac{G(\varphi, \lambda)}{z^2},$$

который, согласно теореме Лиувилля [3], допускает интегрирование уравнений движения методом Гамильтона-Якоби. Потенциалу (I) соответствует полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

$$W = \alpha_1 t + \alpha_2 \lambda + W_1(z) + W_2(\varphi),$$

где

$$W_1 = \int_{z_0}^z \sqrt{2f(z) - \frac{\alpha_3^2}{z^2} - 2\alpha_1} dz, \quad (2)$$

$$W_2 = \int_0^\varphi \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \varphi} + 2\Phi(\varphi)} d\varphi,$$

а соответствующие импульсы равны

$$p_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \sqrt{2f(z) - \frac{\alpha_3^2}{z^2} - 2\alpha_1},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \varphi} + 2\Phi(\varphi)},$$

$$p_\lambda = \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \alpha_2. \quad (3)$$

Общий интеграл задачи дается формулами

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3,$$

т.е.

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{p_z} = t - \beta_1,$$

$$\int_0^\varphi \frac{\alpha_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3}}{p_\varphi} d\varphi - \alpha_3 \int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2 p_z} = \beta_3,$$

$$\lambda - \alpha_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{p_\varphi \cos^2 \varphi} = \beta_2 \quad (4)$$

Следуя Якоби, введем квазикеплеровые элементы орбиты по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu/2a, & \beta_1 &= \tau, \\ \alpha_2 &= \sqrt{\mu\rho} \cos i, & \beta_2 &= \Omega, \\ \alpha_3 &= \sqrt{\mu\rho'}, & \beta_3 &= \omega, \quad \mu = f(M+m), \end{aligned} \quad (5)$$

где m — масса ИСЗ,

M — масса Земли,

f — гравитационная постоянная,

$a, p, i, \Omega, \omega, \tau$ — квазикеплеровые элементы орбиты,

α_i, β_i — канонические элементы Якоби.

Квазикеплеровые элементы орбиты для промежуточного движения другие авторы вводят иначе. Из условия действительности импульсов (3) следует, что

$$2f(z) - \frac{\alpha_3^2}{z^2} - 2\alpha_1 \geq 0, \quad (6a)$$

$$\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \varphi} + 2\Phi(\varphi) \geq 0. \quad (6b)$$

Полагая, что уравнение

$$2f(z) - \frac{\alpha_3^2}{z^2} - 2\alpha_1 = 0$$

имеет два различных положительных корня

$$0 < z_p < z_a$$

и неравенство (6a) справедливо при $z \in [z_p, z_a]$, элементы орбиты a и e вводятся согласно формулам

$$z_p = a(1-e), \quad z_a = a(1+e).$$

Далее, совершая замену переменных $z = \sin \varphi$ в формуле (6в) и рассматривая уравнение

$$\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{1-z^2} + 2\tilde{\Phi}(z) = 0$$

элемент орбиты i нередко вводится как один из корней полученного уравнения

$$\sin i = z_1.$$

Независимо от метода определения квазикеплеровых элементов орбиты, при $f(z) \rightarrow \mu/z$, $\Phi(\varphi) \rightarrow 0$ в обоих случаях в пределе имеем кеплеровые элементы орбиты. В дальнейшем будем пользоваться квазикеплеровыми элементами, введенными согласно формулам (5).

2. СВЯЗЬ КЕПЛЕРОВЫХ И КВАЗИКЕПЛЕРОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Пусть известны кеплеровые элементы орбиты ИСЗ $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, \tau_0$ и вычисленные согласно этим элементам сферические координаты спутника z, φ, λ . Ищем квазикеплеровые элементы орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$ в предположении, что

$$f(z) = \mu/z + \mu\psi(z), \quad \Phi(\varphi) = \mu F(\varphi).$$

Согласно формулам (3) и (5),

$$p_z^2 = \frac{2\mu}{z} + 2\mu\psi(z) - \frac{\mu p}{r^2} - \frac{\mu}{a},$$

$$p_\varphi^2 = \mu p - \frac{\mu p \cos^2 i}{\cos^2 \varphi} + 2\mu F(\varphi),$$

$$p_\lambda^2 = \mu p \cos^2 i.$$

(7)

Из последних двух уравнений (7)

$$\mu p = p_\varphi^2 + \frac{p_\lambda^2}{\cos^2 \varphi} - 2\mu F(\varphi),$$

но $\mu p_0 = p_\varphi^2 + p_\lambda^2 / \cos^2 \varphi$, следовательно

$$p = p_0 - 2F(\varphi). \quad (8)$$

Тем самым получена первая простая формула перехода от кеплеровых к квазикеплеровым элементам орбиты.

Подобным образом из уравнений (7) находим

$$\cos i = \cos i_0 / \sqrt{1 - \frac{2}{p_0} F(\varphi)}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} + \frac{2}{r^2} F(\varphi) + \Psi(z), \quad (10)$$

а эксцентриситет квазикеплеровой орбиты может быть вычислен по формуле

$$e = \sqrt{1 - p/a}. \quad (10')$$

Формулы (8), (9), (10) наглядно указывают на факт, что кеплеровые элементы орбиты α , e , i испытывают возмущения краткогопериодического типа, независимо от выбора промежуточной орбиты.

Согласно формулам (4), (5) для вычисления квазикеплеровых элементов орбиты τ , Ω , ω имеем соотношения

$$\begin{aligned} \tau &= t - \int_{z_0}^z \frac{dz}{p_z}, \\ \omega &= \int_0^\varphi \frac{\alpha_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3}}{p_\varphi} d\varphi - \alpha_3 \int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2 p_z}, \\ \Omega &= \lambda - \alpha_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{p_\varphi \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (II) невозможно далее упростить, не выбрав определенной промежуточной орбиты ИСЗ. В предельном случае если

$$f(z) = \mu/z, \quad \mathcal{P}(\Psi) = 0,$$

интегралы системы (II) решаются подстановками

$$\begin{aligned} z &= a_0(1 - e_0 \cos E_0), \\ z &= \rho_0 / (1 + e_0 \cos \nu_0), \\ \sin \Psi &= \sin i_0 \cdot \sin u_0, \end{aligned} \tag{I2}$$

что приводит к общеизвестным [I], [8] соотношениям нахождения кеплеровых элементов орбиты $\tau_0, \omega_0, \Omega_0$.

$$\tau_0 = t - \frac{E_0 - e_0 \sin E_0}{n_0}, \quad n_0 = \sqrt{\mu/a_0^3}, \tag{I3}$$

$$\omega_0 = u_0 - \nu_0,$$

$$\Omega_0 = \lambda - \arctg(\cos i_0 \operatorname{tg} u_0),$$

по известным сферическим координатам спутника z, Ψ, λ . В формулах (I3) a_0, e_0, i_0 находятся согласно (8), (9), (10'), а E_0, ν_0, u_0 с учетом (I2) являются функциями сферических координат z, Ψ .

3. ВЫБОР ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ

Полученные выше формулы пересчета элементов значительно проще, чем пересчет с вычислением векторов \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$ [2], но они справедливы, как было отмечено, лишь для промежуточных орбит в сферической системе координат, например, для

а) задачи Баррара [7] :

$$f(\rho) = fM/\rho, \quad \mathcal{P}(\Psi) = -fM\delta \sin \Psi,$$

являющейся предельным вариантом обобщенной задачи двух неподвижных

центров Е.П.Аксенова, Е.А.Гребеняикова, В.Г. Демина [9], [10].

б) обобщенной задачи Гарфинкеля [5]

$$f(r) = \frac{fM}{2} \left(1 + c_3 + \frac{c_4}{r^2} \right), \quad \Phi(\varphi) = \frac{3fMJ_2 R_0^2 c_1}{2r^2} (\sin^2 \varphi - c_2),$$

включающей в себя задачу Акснес [5], при

$$c_1 = \rho^{-1}, \quad c_2 = 1/3, \quad c_3 = c_4 = 0.$$

задачу Штерна [6] при

$$c_1 = \rho^{-1}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \sin^2 i, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{1}{6} P_2(\cos i),$$

и собственно задачу Гарфинкеля [4] при

$$c_1 = \rho^{-1}, \quad c_2 = \cos^2 i, \quad c_3 = \frac{\sqrt{1-e^2} P_2(\cos i)}{2\rho^2}, \quad c_4 = 0.$$

Из перечисленных орбит промежуточная орбита Баррара построена в сферической системе координат, смещенной по аппликате на $\delta = 209.9$ км относительно барицентрической системы координат. В этом случае в формулах (8), (9), 10) под ρ_0 , $\cos i_0$, и a_0^{-1} подразумеваются величины

$$\rho_0 = \frac{1}{\mu} (\rho_\psi^2 + \rho_\lambda^2 / \cos^2 \psi),$$

$$\cos i_0 = \rho_\lambda^2 / \mu \rho_0,$$

$$\frac{1}{a_0} = -\frac{\rho_\psi^2}{\mu} + \frac{2}{\rho} - \frac{\rho_0}{\rho^2},$$

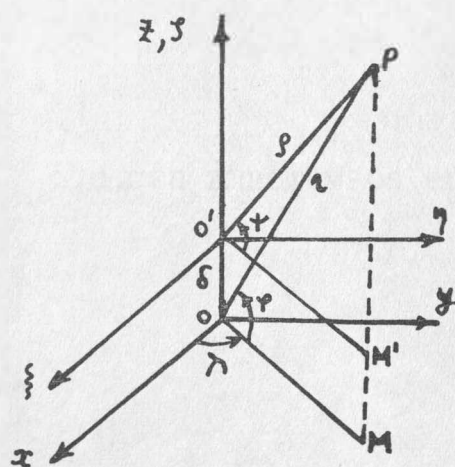


Рис. I.

связь которых с кеплеровыми элементами может быть установлена с помощью формул преобразования координат и импульсов при сдвиге системы

координат (Рис. I.).

$$\rho^2 = z^2 - 2z\delta \sin \psi + \delta^2,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi - \delta / z \cos \psi,$$

$$p_p = p_z \frac{z - \delta \sin \varphi}{\rho} - p_\varphi \frac{\delta \cos \varphi}{z \cdot \rho},$$

$$p_\varphi = p_\varphi \frac{z - \delta \sin \varphi}{z} + p_z \delta.$$

(I4)

Разумеется, необходимость применения формул (I4) осложняет пересчет элементов орбиты в случае задачи Баррара.

Из задачи группы Гарфинкеля задача Штерна имеет сложную структуру функции $f(z)$, что осложняет решение интегралов в первых двух соотношениях системы (II). Из оставшихся двух задач для целей прогнозирования движения ИСЗ предпочтение можно отдать задаче Акнес, как более простой и гибкой К по сравнению с задачей Гарфинкеля.

4. ЗАДАЧА АКСНЕС

Задача Акнес характерна тем, что промежуточный потенциал строится в виде

$$U_0 = \frac{\mu}{z} \left[1 + J_2 c_1 \frac{R_0^2}{z} P_2(\sin \varphi) \right],$$

где c_1 определяется из условия, чтобы вековые возмущения первого порядка от возмущающей функции

$$U_1 = \frac{\mu}{z} J_2 R_0^2 P_2(\sin \varphi) \left[\frac{1}{z^2} - \frac{c_1}{z} \right]$$

были равны нулю, т.е.

$$\langle U_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_1 dM = 0$$

В результате усреднения находится $c_1 = \rho^{-1}$ и промежуточный потенциал Акнес (I965).

$$u = \frac{\mu}{z} \left[1 + \mathcal{J}_2 \frac{R_0^2}{\rho z} P_2(\sin) \right]. \quad (\text{I5})$$

Интегралы системы (II) для задачи Акснес решаются подстановками

$$\begin{aligned} z &= a(1 - e \cos E) \\ z &= \rho / (1 + e \cos v) \\ \sin \varphi &= s \cdot \sin u, \end{aligned}$$

что приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= t - (E - e \sin E) / n, \\ \omega &= \mathcal{D}u - \lambda_1 E(am u, \kappa) - v, \\ \Omega &= \lambda - h \Pi(am u, -s^2, \kappa), \end{aligned} \quad (\text{I6})$$

где $E(\dots)$ - эллиптический интеграл Лежандра II рода [II], [I2], [I3],

$\Pi(\dots)$ - эллиптический интеграл Лежандра III рода [II], [I2], [I3],

а константы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\mu/a^3}, \quad \varepsilon = -3\mathcal{J}_2 \left(\frac{R_0}{\rho} \right)^2, \\ \lambda_1^2 &= 1 + \frac{4}{3}\varepsilon - \varepsilon s^2, \quad \kappa^2 = \varepsilon s^2 / \lambda_1^2, \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon + \lambda_1^2 \right), \quad h = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{(\lambda_1^2 - \varepsilon)(1 - s^2)}. \end{aligned} \quad (\text{I7})$$

где S определяется из уравнения

$$\sin^2 i = s^2 - \varepsilon \Psi(s),$$

где $\Psi(s) = s^4 - \frac{4}{3}s^2 + \frac{1}{3}$.

С точностью до членов порядка ε^2 имеем

$$s^2 = \sin^2 i + \varepsilon \Psi(\sin i).$$

Следует иметь в виду, что квазикешлеровне элементы α , e , i , Ω , ω , \mathcal{T} введены согласно формулам (5) и несколько отличаются от элементов, приведенных в работе [5].

Сферические координаты φ , λ промежуточного движения в задаче Акснес вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\varphi &= \arcsin (s \cdot \sin u), \\ \lambda &= \Omega + k\Pi(am u, -s^2, k),\end{aligned}\tag{18}$$

где u итеративно находится из уравнения

$$\mathcal{D}u - \lambda_1 E(am u, k) = \omega + \nu\tag{18'}$$

При этом ввиду периодичности функций $\sin u$ и $am u$ целесообразно (с вычислительных соображений) искать только главное значение переменной u . Для этого заменим в формуле (18') u на $u + 4K$, где K — полный эллиптический интеграл I рода, m — число полных оборотов спутника вокруг Земли с момента времени τ , и преобразуем ее к виду

$$\mathcal{D}u - \lambda_1 E(am u, k) = \omega + \nu + (2\pi + 4\lambda_1 E - 4\mathcal{D}k)m,\tag{19}$$

где E — полный эллиптический интеграл II рода.

Второе слагаемое в формуле (19) представляет собой вековое возмущение переменной u за m оборотов спутника.

Если под u подразумевать главное значение переменной u , то для вычисления координаты λ следует пользоваться формулой

$$\lambda = \Omega + k\Pi(am u, -s^2, k) + [k\Pi(4k, -s^2, k) - 2\pi]m,\tag{19'}$$

где последнее слагаемое представляет собой вековое возмущение долготы восходящего угла Ω за m оборотов спутника.

Формулы (I9), (I9') предпочтительнее формул (I8), (I8') для проведения численных расчетов, т.к. накопление u , свойственное формулам (I8), (I8') ведет к потере расчетной точности из-за переполнения регистров ЭВМ.

5. АЛГОРИТМ ПЕРЕСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ

На основе изложенного можно составить алгоритм пересчета элементов Аксиес в кеплеровые элементы орбиты спутника. Алгоритм обратного пересчета основан на тех же формулах и является несложным видоизменением приводимого алгоритма.

Итак, пусть даны элементы промежуточной орбиты Аксиес $\alpha, e, i, \Omega, \omega, M_0$. Ищем кеплеровые элементы орбиты $\alpha_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0^{(0)}$ согласно алгоритму:

1) Вычисление геоцентрического расстояния

$$p = \alpha(1 - e^2), \quad n = \sqrt{\mu/a^3},$$

$$M = M_0 + nt, \quad E - e \sin E = M,$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad r = p / (1 + e \cos v),$$

2) Вычисление постоянных

$$\varepsilon = -3J_2 \left(\frac{R_0}{p} \right)^2, \quad s^2 = \sin^2 i + \varepsilon \left(s^4 - \frac{4}{3} s^2 + \frac{1}{3} \right),$$

$$\lambda_1^2 = 1 + \frac{4}{3} \varepsilon - \varepsilon s^2, \quad \kappa^2 = \varepsilon s^2 / \lambda_1^2,$$

$$D = \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon + \lambda_1^2 \right), \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda_1^2 - \varepsilon)(1 - s^2)}.$$

3) Вычисление угловых координат

$$u = \frac{1}{D} (\omega + v) + \frac{\lambda_1}{D} E(am u, \kappa) + \left(\frac{2\pi}{D} + \frac{\lambda_1}{D} 4E - 4K \right) m,$$

$$\sin \varphi = s \cdot \sin u,$$

$$\lambda = \Omega + h\pi(am u, -s^2 \kappa) + [h\pi(4K, -s^2, \kappa) - 2\pi] m,$$

где $m = \varepsilon(M_0 + nt)$ — число полных оборотов спутника.

4) Пересчет элементов орбиты

$$f = \frac{J_2 R_0^2}{p} P_2(\sin \varphi),$$

$$p_0 = p + 2f,$$

$$\cos i_0 = \frac{\cos i}{\sqrt{1 + \frac{2}{p}f}},$$

$$\frac{1}{a_0} = \frac{1}{a} - \frac{2}{r^2}f,$$

$$e_0 = \sqrt{1 - p_0/a_0},$$

$$n_0 = \sqrt{\mu/a_0^3},$$

$$\cos \nu_0 = \frac{1}{e_0} \left(\frac{p_0}{r} - 1 \right),$$

$$\cos E_0 = \frac{1}{e_0} \left(1 - \frac{r}{a_0} \right),$$

$$M_0^{(0)} = E_0 - e_0 \sin E_0,$$

$$\sin u_0 = \sin \varphi / \sin i_0,$$

$$\omega_0 = u_0 - \nu_0,$$

$$\Omega_0 = \lambda - \arctg(\cos i_0 \operatorname{tg} u_0).$$

На этом поставленная задача решена.

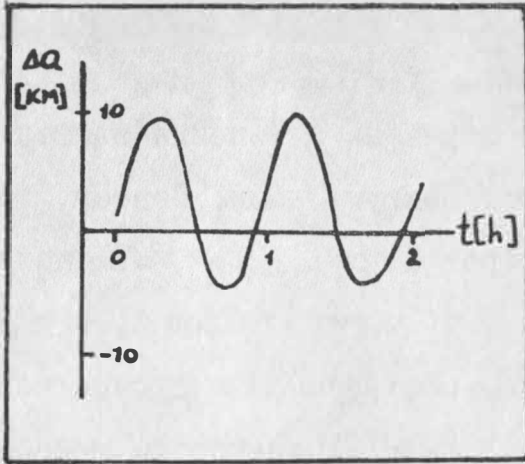
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе предложенного алгоритма была составлена программа на языке АЛГОЛ-60 (ТА-IM) и проведены численные эксперименты со спутниками ГЕОС-А, ГЕОС-Б, АВАНГАРД-2 и ЭКСПЛОРЕР-19. Принимая средние кеплеровы элементы SAO (Смитсоновской астрофизической обсерватории) за элементы Акнес, вычислялись оскулирующие кеплеровы элементы названных спутников на эпоху, отличающуюся от исходной на 14 дней. От вычисленных оскулирующих кеплеровых элементов вычитались средние смитсоновские элементы данной эпохи, и полученные разности для спутника ГЕОС-Б приведены на графиках. Прерывистой линией отмечены значения осредненных кеплеровых элементов, полученных по элементам исходной эпохи с учетом лишь вековых возмущений первого порядка.

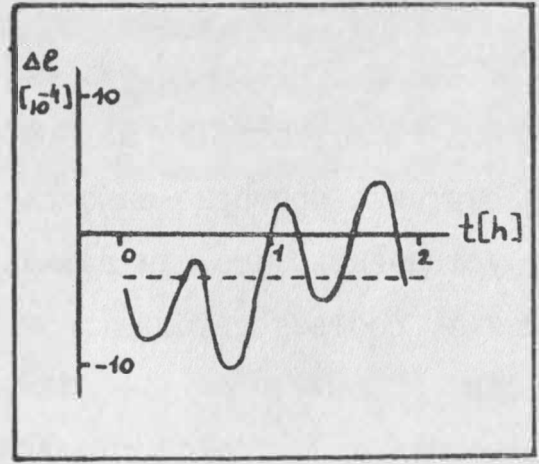
Полученные графики показывают, что проведенным пересчетом элементов орбиты учтены вековые возмущения I порядка и основные короткопериодические возмущения, обусловленные второй зональной

гармоникой геопотенциала. На графиках отражены изменения элементов орбиты спутника примерно за один оборот вокруг Земли. Поэтому нетрудно установить, что для элементов орбиты α , i , Ω получены возмущения, соответствующие гармонике $\cos(2M+2\omega)$, а для элементов e , ω , M_0 - возмущения, соответствующие суперпозиции гармоник $\cos M$, $\cos(M+2\omega)$, $\cos(3M+2\omega)$. Однако это всего лишь качественное сравнение, т.к. учет возмущений, основанный на пересчете элементов орбиты, является строго нелинейным.

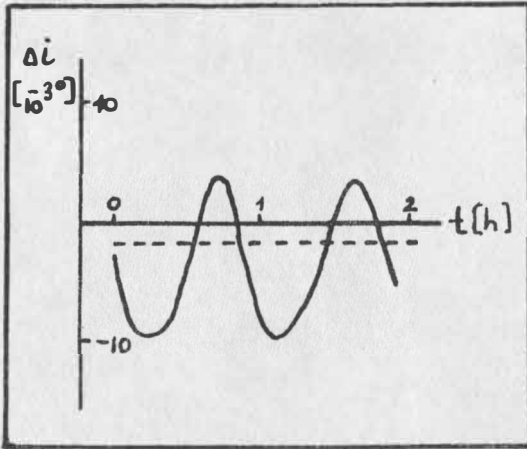
Работа выполнена в лаборатории ИСЗ Астрономической обсерватории Латвийского Госуниверситета им. П.Стучки в 1976 году.



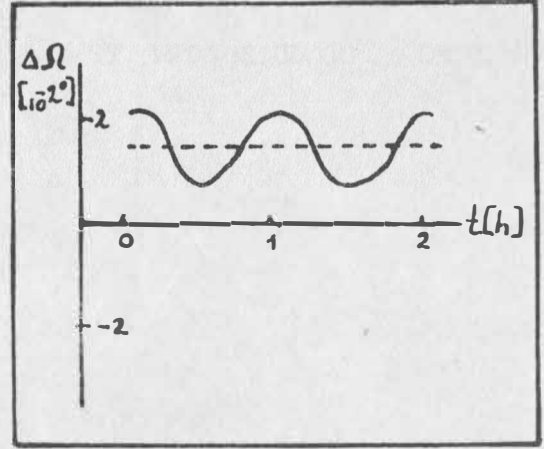
Большая полуось



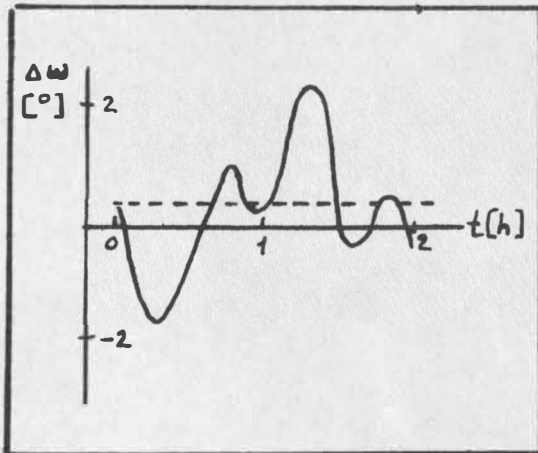
Эксцентриситет



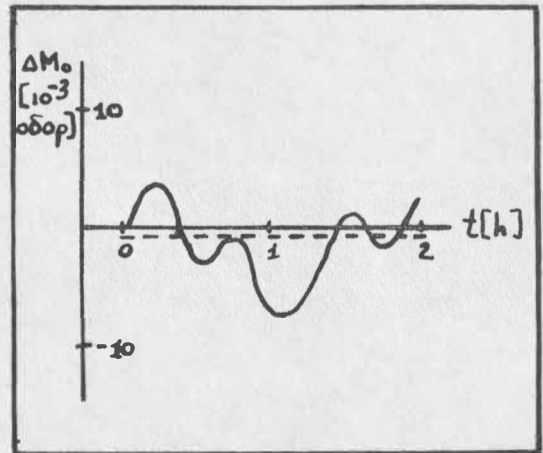
Наклон орбиты



Долгота восходящего узла



Расстояние перигея



Средняя аномалия

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Н.Дубошин. Небесная механика. М. 1963.
2. Е.П. Аксенов. Асимметричные промежуточные орбиты искусственных спутников Земли. Сообщения ГАИШ № 155. 1968.
3. В.Г. Демин. Движение искусственного спутника Земли в нецентральной поле тяготения. М. 1968.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
8. М.Ф. Субботин. Введение в теоретическую астрономию. М. 1968.
9. Е.П. Аксенов, Е.А.Гребенников, В.Г.Демин. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения ИСЗ. АЖ. т. 40 вып. 2. 1963.
10. Е.П.Аксенов, Е.А.Гребенников, В.Г.Демин. Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения ИСЗ. Сб. "Проблемы движения искусственных небесных тел". АН СССР. 1963.
11. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н. Дубошина. М. 1971.
12. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа. М. 1963.
13. Ю.Х. Жагар. Вычисление эллиптических функций и интегралов. (В печати).

Определение орбит по оптическим и лазерным наблюдениям

Е. П. Аксёнов, С. Н. Вашковьяк, Н. В. Емельянов

Резюме

Целью работы является получение точных значений элементов орбит ИСЗ по оптическим и лазерным наблюдениям. Работа основана на аналитической теории движения ИСЗ, учитывающей влияние несферичности Земли, притяжение Луны и Солнца. В разложение потенциала Земли включены все гармоники до 16 порядка. С помощью построенной вычислительной программы, составленной на языке АЛГОЛ-60, были определены элементы орбиты ИСЗ Геос-Б с использованием лазерных наблюдений, выполненных по международной программе ISAGEX.

Abstract

The computer programme of orbital improvement by means of optical and laser observations is present. The orbit derived from the solution of the problem of two fixed centres has been selected as an intermediate orbit. The position of the satellite is determined taking into consideration gravitational and lunisolar perturbations. The programme is given in ALGOL language.

Доклад посвящен изложению методики и описанию программы дифференциального улучшения элементов орбит ИСЗ, разработанной в Государственном астрономическом институте им. П.К.Штернберга. Программа предназначена для обработки высокоточных фотографических и лазерных наблюдений спутников. От имеющихся в настоящее время в мире соответствующих программ она отличается методом вычисления возмущенных координат спутника, системой определяемых параметров, а также методикой решения нормальных уравнений для поправок элементов орбиты.

Полученные точные элементы орбит спутников могут быть использованы в следующих целях: 1) проверка новых аналитических теорий; 2) определение координат точек на земной поверхности; 3) получение эфемерид ИСЗ; 4) получение параметров геопотенциала, а также в задачах геодинамики.

В нашей работе используется аналитическая теория движения ИСЗ. Метод получения элементов - дифференциальное улучшение. При построении аналитической теории движения спутников очень важно выбрать подходящую промежуточную орбиту. В качестве промежуточной орбиты мы взяли орбиту обобщенной задачи двух неподвижных центров. Масса неподвижных центров и расстояние между ними выбраны так, что промежуточная орбита полностью учитывает влияние второй, третьей и частично четвертой гармоник в разложении потенциала Земли в ряд по сферическим функциям.

В формулах промежуточной орбиты учтены члены, пропорциональные первой и второй степени коэффициента при второй зональной гармонике I_2 . Отброшенные члены могли бы дать добавки к координатам спутника, не превышающие 2 см. Формулы применимы

при любых значениях эксцентриситета и наклона орбиты.

Элементами промежуточной орбиты являются шесть параметров, аналогичных кеплеровским элементам. Эти элементы отличаются от кеплеровских на величины порядка I_2 . Преимущество выбранной промежуточной орбиты заключается в том, что возмущения элементов промежуточной орбиты в тысячу раз меньше, чем возмущения кеплеровских элементов. Для геодезических спутников промежуточная орбита представляет наблюдения с точностью около 200 метров.

После выбора промежуточной орбиты была поставлена цель учесть все гравитационные возмущения. Выражения для возмущений получались из решения дифференциальных уравнений для элементов. Эти уравнения аналогичны уравнениям Лагранжа для кеплеровских элементов.

При вычислении возмущений мы использовали тот факт, что на значительном интервале времени элементы, аналогичные большой полуоси, эксцентриситету и наклону орбиты спутника изменяются несущественно. Поэтому задача о возмущениях была разделена на два этапа. На первом этапе возмущения конкретного спутника получались в виде отрезков тригонометрических рядов с численными коэффициентами и аргументами, линейно изменяющимися во времени. Этот этап выполняется на ЭВМ с помощью отдельных программ. Коэффициенты рядов хранятся в памяти машины, могут быть выданы на перфокарты и использованы в любых задачах, где требуется вычислять возмущения. Вторым этапом является получение численных значений возмущений на заданные моменты времени, что сводится к вычислению значений выше указанных рядов. Этот этап выполняется с помощью простого алгоритма и не требует больших затрат времени.

В теории движения ИСЗ включены влияние несферичности Земли, притяжение Луны и Солнца. При получении возмущений от фигуры Земли мы отбрасывали члены, пропорциональные произведению коэффициента I_2 на коэффициенты других гармоник потенциала Земли. Отброшенные члены не превышают 10^{-9} радиана. Это позволило взять уравнения для элементов и разложение возмущающей функции из работ Каулы

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_j = & \sum_{k_1, k_2, k_3} A_{k_1, k_2, k_3}^{(j)} \sin(k_1 M + k_2 \omega + k_3 \Omega) + \\ & + \sum_{k_1, k_2, k_3} B_{k_1, k_2, k_3}^{(j)} \cos(k_1 M + k_2 \omega + k_3 \Omega) \end{aligned}$$

Из формул Каулы возмущения элементов получались в виде отрезков тригонометрических рядов с тремя аргументами. С принятой точностью эти аргументы можно считать линейно меняющимися во времени, но можно подставить их точные значения, если они известны. Коэффициенты рядов являются амплитудами периодических возмущений. При вычислении амплитуд мы задавали для каждого элемента некоторое число. Члены с амплитудами, не превосходящими это число, отбрасывались. Функции эксцентриситета вычислялись с помощью разложений по степеням эксцентриситета. Алгоритм вычисления составлен так, что максимальный порядок гармоник и максимальная степень эксцентриситета могут быть заданы произвольными. Нужно только учитывать, что при увеличении этих параметров количество членов в рядах быстро возрастает. В наших вычислениях учитывались гармоники до 16 порядка. Для

спутника Геос-Б разложения по степеням эксцентриситета проводились до четвертой степени включительно. Амплитуды, меньшие $0^{\circ}04$, отбрасывались.

Для учета лунных возмущений мы исходили из выражений для эклиптических координат и синуса параллакса Луны в соответствии с теорией Хилла-Брауна. Эти выражения заданы в виде отрезков тригонометрических рядов как функции пяти основных аргументов движения Луны. Эти аргументы являются линейными функциями времени.

В соответствии с общим методом мы получали возмущения от Луны и Солнца для конкретного спутника в виде отрезков тригонометрических рядов с восемью аргументами, линейно изменяющимися во времени. Эти ряды были получены следующим образом. Возмущающую функцию, описывающую влияние Луны и Солнца, мы получили в следующем виде

$$R = \frac{m'}{m} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{j,0}) \frac{(k-j)!}{(k+j)!} \times \\ \times F_{kjl}^{(i)} X_{k-2l+q}^{k, k-2l} \frac{a^{k+1}}{a'^{k+1}} (S'_{kj} \sin \mathcal{D} + C_{kj} \cos \mathcal{D})$$

$$\mathcal{D} = (k-2l)\omega + (k-2l+q)M + j\Omega$$

$$S'_{kj} = \left(\frac{a'}{z'}\right)^{k+1} P_{kj}(\sin \delta') \times \begin{cases} \sin(j\alpha') & k-j \text{ четн.} \\ \cos(j\alpha') & k-j \text{ нечетн.} \end{cases}$$

$$C_{kj} = \left(\frac{a'}{z'}\right)^{k+1} P_{kj}(\sin \delta') \times \begin{cases} \cos(j\alpha') & k-j \text{ четн.} \\ -\sin(j\alpha') & k-j \text{ нечетн.} \end{cases}$$

где m - масса Земли, m' - масса внешнего тела, a - большая полуось орбиты спутника, a' - большая полуось орбиты внешнего тела, $\delta_{0,j}$ - символ Кронекера, $F_{k,j,l}$ - функции наклона, $X_{\varphi}^{l,p}$ - коэффициенты Ганзена, α' , δ' , z' - экваториальные координаты и геоцентрическое расстояние внешнего тела. Внешними телами здесь являются Луна и Солнце.

Прежде всего были получены выражения для коэффициентов C_{kj} , S_{kj} в виде тригонометрических рядов от основных аргументов движения Луны. Для получения таких рядов необходимо производить аналитические преобразования с отрезками тригонометрических рядов, содержащих по несколько десятков членов. Эти трудоемкие операции мы выполняли с помощью ЭВМ. Была разработана система процедур на языке АЛГОЛ-60, выполняющих аналитические преобразования с тригонометрическими рядами. Заметим, что выражения для C_{kj} , S_{kj} нужно получить всего один раз.

Амплитуды гармонических возмущений от Луны и Солнца получаются с помощью отдельной программы. При этом члены с амплитудами, не превышающими некоторое число, отбрасываются.

Для спутника Геос - Б мы выбрали это число равным четырем сотым секунды дуги. Тогда возму -

щения элементов от Луны описываются рядами
45 членов.

Возмущения от Солнца вычисляются по тем же программам, по которым вычисляются возмущения от Луны.

Построенный таким образом алгоритм позволяет вычислять возмущения с любой заданной точностью, однако, с увеличением точности время счета быстро возрастает.

В теорию движения ИСЗ мы включили эмпирический коэффициент векового изменения среднего движения спутника. Этот коэффициент включен в список улучшаемых параметров. Таким образом, неизвестными в нашей задаче являются семь величин: шесть элементов промежуточной орбиты и эмпирический коэффициент.

Для улучшения элементов мы использовали оптические и лазерные наблюдения ИСЗ. Из одного оптического наблюдения мы получали два условных уравнения для поправок к неизвестным. Одно лазерное наблюдение дает одно условное уравнение. Для построения условных уравнений необходимо вычислять производные от координат спутника по элементам орбиты. Формулы для этих производных получаются из аналитической теории движения ИСЗ. Система условных уравнений решается методом наименьших квадратов. Так как условные уравнения в силу способа их построения являются приближенными уравнениями, то улучшение элементов приходится повторять несколько раз.

В рассматриваемой задаче, как и в других аналогичных задачах, мы как правило встречаемся с корреляцией между ошибками неизвестных. Вследствие этого нам приходится решать плохо обусловленную систему линейных алгебраических уравнений. Погрешность решения таких уравнений может быть столь велика, что исправление элементов приводит к их ухудшению, сколько бы раз мы ни повторяли этот процесс. Тогда говорят, что процесс улучше-

ния расходится. Примеры улучшения орбит показывают, что плохая обусловленность системы нормальных уравнений зависит от интервала времени, на котором произведены наблюдения, от распределения наблюдений по орбите и от близости орбиты к вырожденной.

В нашей работе применяются три метода обеспечения сходимости процесса улучшения. Первый метод основан на решении плохо обусловленных систем уравнений методом приближенно-обобщенной обратной матрицы. Вторым методом заключается в следующем. Сначала нормализуем матрицу системы нормальных уравнений. Находим среди недиагональных элементов этой матрицы максимальный элемент. Затем делаем такую линейную замену неизвестных, чтобы на месте этого элемента стоял нуль. Такие замены производим до тех пор, пока все недиагональные элементы не станут меньше заданного числа. После решения преобразованной системы переходим к старым неизвестным. В третьем методе улучшаются все неизвестные, но по очереди, причем на каждом шагу улучшаются несколько таких неизвестных, которые не вызывают сильной корреляции. Все три способа не уменьшают погрешности определения элементов, но обеспечивают сходимость улучшения даже при очень сильной корреляции.

Так как элементы орбиты ИСЗ изменяются со временем, точные их значения задаются на некоторый момент времени — эпоху элементов. Все имеющиеся наблюдения мы разбивали на серии, которые могли охватывать от двух до шести суток. При улучшении элементов мы не учитывали периодических возмущений с периодом большим 30 суток, так как на интервале времени серии наблюдений эти возмущения изменяются несущественно. Долгопериодические возмущения мы учитываем после получения улучшенных элементов для ряда моментов на большом интервале времени.

В работе применялась система отсчета времени УТІ. Система координат определялась истинным экватором на эпоху элементов и средней точкой весны на эпоху 1950.0.

При использовании наблюдений ИСЗ приходится иметь дело с разнородным наблюдательным материалом. Данные могут располагаться на перфокартах, на магнитной ленте, на перфоленте, в виде печатного материала. Кроме того, данные могут относиться к разным системам координат и разным системам отсчета времени. Иногда нужно учитывать некоторые инструментальные поправки. Поэтому построена отдельная программа, которая вводит наблюдения с любого носителя информации, производит их предварительную обработку, формирует серии и записывает их на магнитную ленту в некотором стандартном виде.

Предварительная обработка наблюдений из наблюдательной программы ИСАЖЕКС заключалась в исправлении оптических наблюдений за годичную аберрацию и приведение их к орбитальной системе координат. Для лазерных наблюдений учитывалась инструментальная поправка, которая приводится вместе с наблюдениями. Кроме того, моменты всех наблюдений приводились к системе УТІ

В качестве примера рассмотрим результаты улучшения элементов орбиты спутника Геос-Б на интервале времени около 180 суток. Наблюдения разбивались на серии, в каждой серии было от 100 до 300 наблюдений. Ряды, представляющие возмущения от несферичности Земли, содержали 280 членов, от притяжения Луны - 45 членов и от притяжения Солнца - 18 членов. Разложения по степеням эксцентриситета приводились до третьей степени. Средняя невязка наблюдений каждой серии составляла от 2 до 5 метров, при этом точность определения угловых элементов равня-

дась $0^{\circ}1$, а элементы e и n определялись с точностью $5 \cdot 10^{-8}$ и $2 \cdot 10^{-8}$ об/сут соответственно. Вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-4М. Один шаг улучшения элементов по 300 наблюдениям занимал 4 - 6 минут машинного времени. На рисунках 1 - 3 показаны результаты улучшения элементов ИСЗ Геос-Б. Горизонтальная ось - ось времени в модифицированных юлианских сутках. На рисунке 3 изображено изменение эксцентриситета орбиты Геоса - Б после исключения долгопериодических возмущений. На рисунках 1 - 2 показано соответственно поведение элементов i и n .

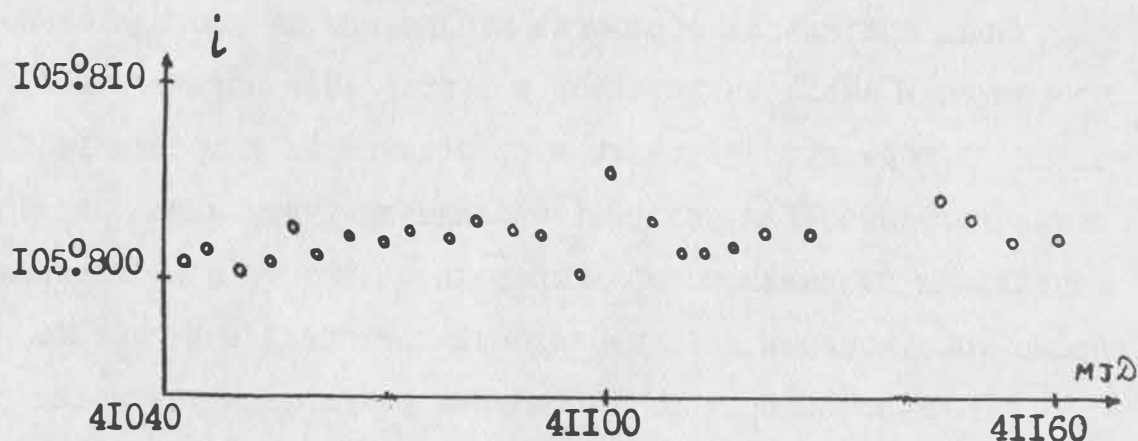


Рис. 1 Значения наклона орбиты Геоса-Б, полученные из наблюдений.

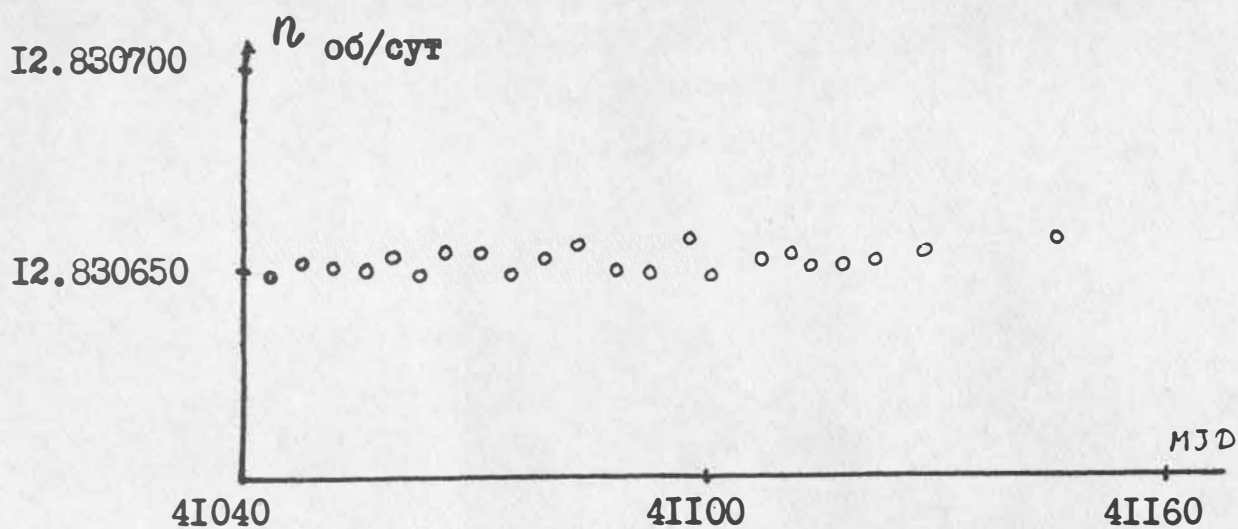


Рис. 2 Значения среднего движения Геоса-Б, полученные из наблюдений.

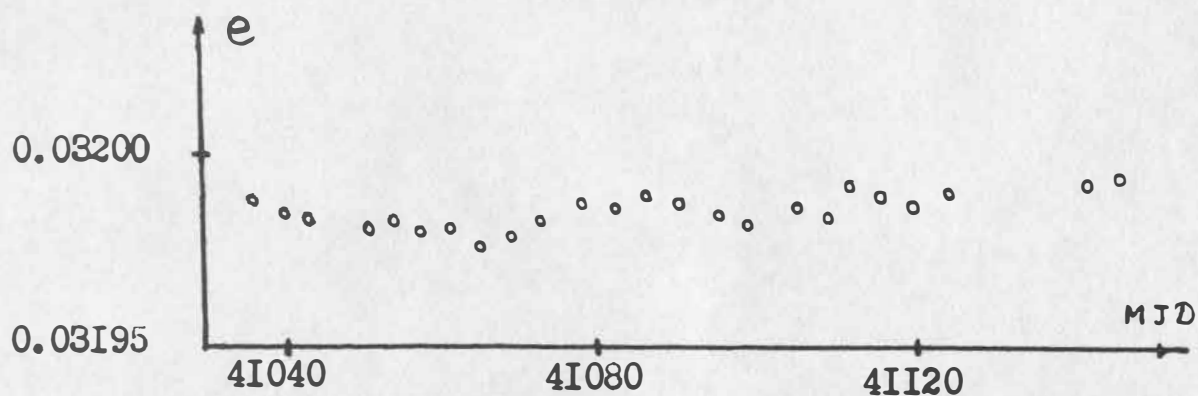


Рис.3 Значения эксцентриситета орбиты Геоса - Б, полученные из наблюдений.

TIDAL MOVEMENT OF SATELLITE STATIONS

J. Kostalecký

Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography
in Prague, Czechoslovakia

Abstract: By means of Love's and Shide's constants $h_2=0.61$, $l_2=0.082$ is the tidal movement of the satellite station computed. The amplitudes are 20 cm for vertical component and 7 cm for horizontal component approximatively.

Резюме: С помощью постоянных Лява и Шиды были вычислены приливные смещения станций наблюдения спутников. Их амплитуды равны примерно 20 см по вертикальному и 7 см по горизонтальному компонентам.

1. Introduction

With the accelerating development of the contemporary technique of observation and rising accuracy of measurement which reached decimeters and approaches centimeters we must take into consideration the influence of tidal deformation of the Earth crust.

2. Influence of the tidal forces on the movement of the station

We can start from formula for the tidal potential which is usual in the satellite theory:

$$(1) \quad \begin{aligned} U(\vec{R}) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} U_{\ell}(\vec{R}), \\ U_{\ell}(\vec{R}) &= GM^* \frac{R_{\ell}}{R^{\ell}} \sum_{m=0}^{\ell} R^{\ell} / (r^{2\ell+1} (2\ell+1)) \cdot \bar{P}_{\ell m}(\sin\phi) \bar{P}_{\ell m}(\sin\phi^*) \\ &\quad \cdot \exp(i m (\lambda^* - \lambda)), \end{aligned}$$

where R, ϕ, λ or r, ϕ^*, λ^* are polar coordinates of the station and disturbing body (Sun or Moon) respectively. By transformation to Keplerian elements (see Plummer, 1918; Jeffreys, 1965) and by formulae

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta H &= \sum_{\ell} h_{\ell} U_{\ell} / g, & \Delta \phi &= \sum_{\ell} l_{\ell} (\partial U_{\ell} / \partial \phi) / g, \\ \Delta \lambda \cos \phi &= \sum_{\ell} l_{\ell} (\partial U_{\ell} / \partial \lambda) / g, \end{aligned}$$

(see Munk, MacDonald, 1960).

we can get for the vertical and horizontal components of the movement :

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\ell} \bar{P}_{\ell m}(\sin\phi) i^{(\ell-m)} \sum_{p=0}^{\ell} D_{\ell mp}(\mathcal{I}) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{\ell pq}(\epsilon) \exp(i\psi_{\ell mpq}), \\
 \Delta H(R, \phi, \lambda) &= (GM^*/g) \operatorname{Re} \sum_{\ell=2}^{\infty} (h_{\ell} R^{\ell} / (2\ell+1) a^{\ell+1}) . \\
 \sum_{m=0}^{\ell} \partial \bar{P}_{\ell m}(\sin\phi) / \partial \phi i^{(\ell-m)} \sum_{p=0}^{\ell} D_{\ell mp}(\mathcal{I}) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{\ell pq}(\epsilon) \exp(i\psi_{\ell mpq}), \\
 \Delta \phi(R, \phi, \lambda) &= (GM^*/g) \operatorname{Re} \sum_{\ell=2}^{\infty} (l_{\ell} R^{\ell} / (2\ell+1) a^{\ell+1}) . \\
 \sum_{m=0}^{\ell} \bar{P}_{\ell m}(\sin\phi) i^{\ell-m} \sum_{p=0}^{\ell} D_{\ell mp}(\mathcal{I}) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{\ell pq}(\epsilon) (-i.m) \exp(i\psi_{\ell mpq}), \\
 (\Delta \lambda \cos\phi)(R, \phi, \lambda) &= (GM^*/g) \operatorname{Re} \sum_{\ell=2}^{\infty} (h_{\ell} R^{\ell} / (2\ell+1) a^{\ell+1}) .
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

where $\psi_{\ell mpq} = (\ell - 2p + q)M + (\ell - 2p)\omega + m(\delta - \lambda^E - \Theta) + (-\ell - 2p + q)\dot{M} - (\ell - 2p)\dot{\omega} - m(\dot{\delta} - \dot{\Theta}) + \Delta t_{\ell mpq}$, G is the gravity constant, M^* is the mass of the disturbing body, g is the gravity at the point R, ϕ, λ , h_{ℓ} and l_{ℓ} are Love's and Shide's constant (see Munk, MacDonald, 1960) and $\Delta t_{\ell mpq}$ is the delay in propagation of the theoretical and actual waves.

The dominant effect - caused by h_2 and l_2 - is for tidal waves $O_1, K_1, N_2, M_2, S_2, P_1$. From (3) it may be written:

$$\begin{aligned}
 \Delta H_{O_1, P_1} &= A_{O_1, P_1} \sin \psi_{2100}, & \Delta \phi_{O_1, P_1} &= B_{O_1, P_1} \sin \psi_{2100}, \\
 (\Delta \lambda \cos\phi)_{O_1, P_1} &= C_{O_1, P_1} \cos \psi_{2100}, \\
 \Delta H_{K_1} &= A_{K_1} \sin \psi_{2110}, & \Delta \phi_{K_1} &= B_{K_1} \sin \psi_{2110}, & (\Delta \lambda \cos\phi)_{K_1} &= C_{K_1} \cos \psi_{2110}, \\
 \Delta H_{N_2} &= A_{N_2} \cos \psi_{2201}, & \Delta \phi_{N_2} &= B_{N_2} \cos \psi_{2201}, & (\Delta \lambda \cos\phi)_{N_2} &= C_{N_2} \sin \psi_{2201}, \\
 \Delta H_{M_2, S_2} &= A_{M_2, S_2} \cos \psi_{2200}, & \Delta \phi_{M_2, S_2} &= B_{M_2, S_2} \cos \psi_{2200}, \\
 (\Delta \lambda \cos\phi)_{M_2, S_2} &= C_{M_2, S_2} \sin \psi_{2200}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

The elements for Moon and Sun in $\psi_{\ell mpq}$ may be taken from ESAENA. The amplitudes A, B, C for a group of different stations (numbers of stations are from (Smith et al., 1976)) and $h_2 = 0.61$, $l_2 = 0.082$ are in table 1. The form of the amplitude curves is depicted in figures.

3. Conclusion

From these results it can be seen that the scattering in height is about 40 cm as a maximum and in $\phi, \lambda \cos\phi$ this is about 14 cm. These values can not be neglected for very precise measurements.

References

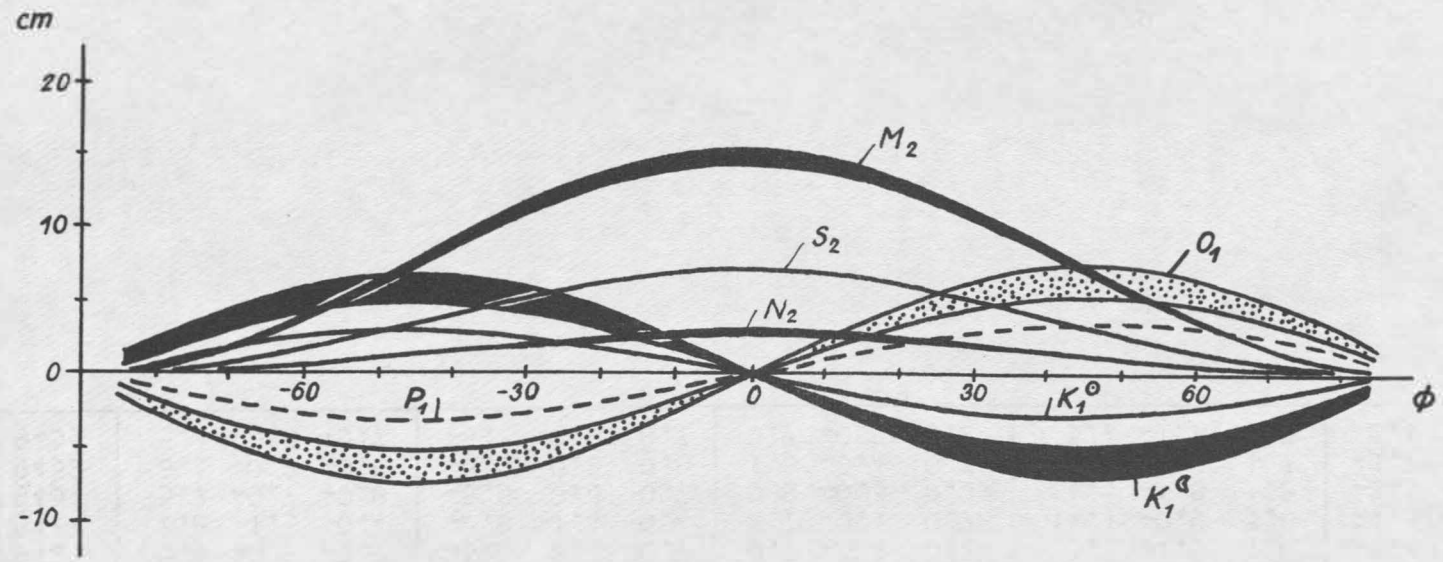
- ESAENA (Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac), 1961, Her Majesty's Stationery Office, London 1961.
- Munk,W.H., MacDonald,G.J.F.:1960,The Rotation of the Earth, Cambridge University Press.
- Plummer,H.C.:1918, An Introduction Treatise on Dynamical Astronomy, Cambridge University Press.
- Smith,D.E. et al.:1976,Journal of Geophysical Research,Vol. 81,No.3
- Jeffreys,B.:1965, The Geophysical Journal, Vol.10, No.2.

Tab. 1 Amplitudes A, B, C for different tidal waves

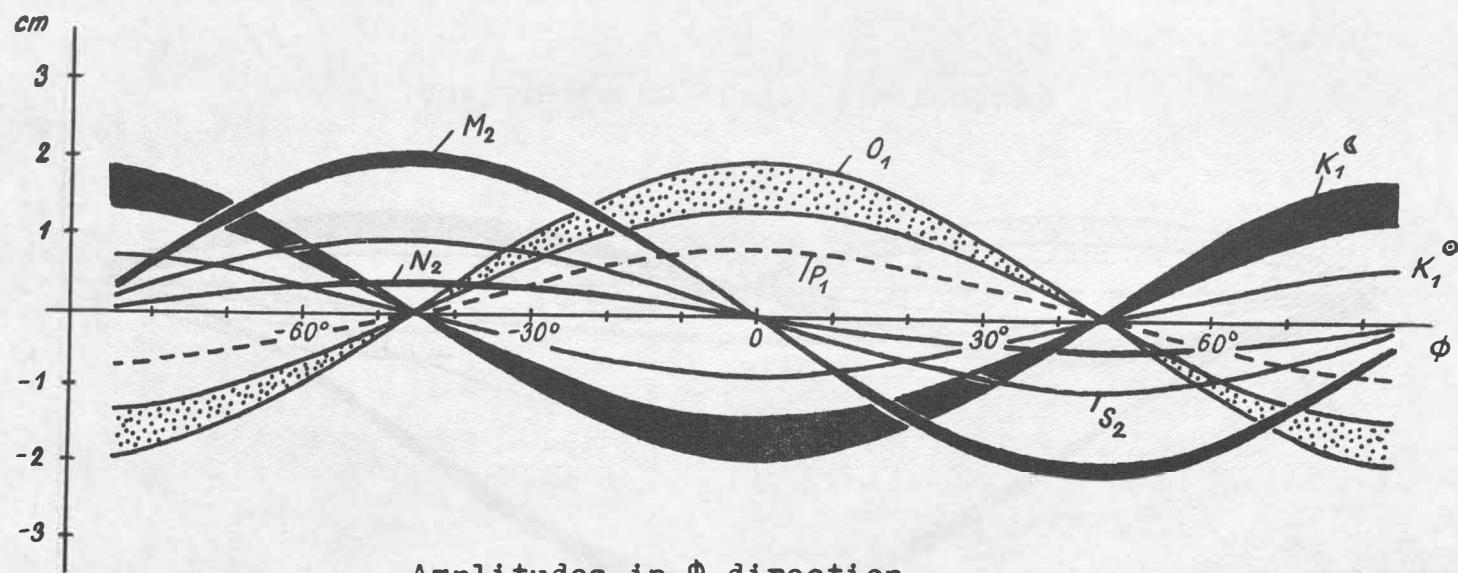
No	O ₁			K ₁ ⁰			N ₂			M ₂			K ₁ ⁰ = - P ₁			S ₂		
1021	6.0	0.4	-0.8	-5.8	-0.4	0.8	1.7	-0.4	0.4	9.2	-2.0	2.0	-2.7	-0.2	0.3	4.2	-0.9	1.1
1022	4.9	1.0	-0.7	-4.8	-1.0	0.6	2.3	-0.3	0.6	12.0	-1.6	3.2	-2.2	-0.4	0.3	5.5	-0.7	1.5
1024	-5.5	0.8	0.7	5.3	-0.7	-0.7	2.1	0.3	0.5	11.0	1.8	3.0	2.4	-0.3	-0.3	5.0	0.8	1.3
1028	-5.7	0.7	0.8	5.5	-0.7	-0.7	2.0	0.3	0.5	10.5	1.8	2.8	2.5	-0.3	-0.3	4.9	0.8	1.3
1030	5.8	0.6	-0.8	-5.7	-0.5	0.8	1.9	-0.3	0.5	10.0	-1.9	2.7	-2.6	-0.2	0.3	4.7	-0.9	1.2
1031	-4.9	1.0	0.6	4.7	-1.0	-0.6	2.3	0.3	0.1	12.2	1.5	3.2	2.2	-0.5	-0.3	5.7	0.7	1.5
1032	6.2	-0.1	-0.8	-6.0	0.1	0.8	1.3	-0.4	0.3	6.8	-2.0	1.8	-2.7	0.1	0.4	3.1	-0.9	0.8
1033	4.8	-1.0	-0.6	-4.6	1.0	0.6	0.5	-0.3	0.1	2.7	-1.5	0.7	-2.1	0.5	0.3	1.2	-0.7	0.3
1034	6.2	-0.2	-0.8	-6.0	0.1	0.8	1.5	-0.4	0.3	6.7	-2.0	1.8	-2.7	0.1	0.4	3.1	-0.9	0.8
1035	6.0	-0.4	-0.8	-5.9	0.3	0.8	1.1	-0.3	0.3	5.8	-2.0	1.5	-2.7	0.2	0.4	2.7	-0.9	0.7
1036	4.8	-1.1	-0.6	-4.6	1.0	0.6	0.5	-0.3	0.1	2.7	-1.6	0.7	-2.1	0.5	0.3	1.2	-0.7	0.3
1037	5.8	0.6	-0.8	-5.7	-0.6	0.8	2.0	-0.3	0.5	10.0	-1.9	2.7	-2.6	-0.2	0.3	4.7	-0.8	1.2
1038	-5.9	0.5	0.8	5.7	-0.5	-0.8	1.9	0.3	0.5	10.0	1.9	2.7	2.6	-0.2	-0.3	4.6	0.9	1.2
1043	-3.8	1.3	0.5	3.7	-1.3	-0.5	2.6	0.2	0.7	13.5	1.2	3.6	1.7	-0.6	-0.2	6.2	0.5	1.7
7034	6.2	-0.2	-0.8	-6.0	0.1	0.8	1.3	-0.4	0.3	6.7	-2.0	1.8	-2.7	0.1	0.4	3.1	-0.9	0.3
7036	4.9	1.0	-0.7	-4.8	-1.0	0.6	2.3	-0.3	0.6	12.0	-1.6	3.2	-2.2	-0.5	0.3	5.6	-0.7	1.5
7037	6.1	0.4	-0.8	-6.0	0.3	0.8	1.7	-0.3	0.4	9.1	-2.0	2.4	-2.7	-0.2	0.4	4.2	-0.9	1.1
7039	5.6	0.7	-0.7	-5.4	-0.7	0.7	2.0	-0.4	0.5	10.2	-1.8	2.8	-2.5	-0.3	0.3	5.0	-0.8	1.3
7040	3.7	1.3	-0.5	-3.6	-1.3	0.5	2.6	-0.2	0.7	13.5	-1.2	3.1	-1.6	-0.6	0.2	6.2	-0.8	1.6
7045	6.1	0.3	-0.8	-5.9	-0.3	0.8	1.7	-0.4	0.4	9.0	-2.0	2.4	-2.7	-0.1	0.4	4.1	-0.9	1.1
7052	6.0	0.4	-0.8	-5.8	-0.4	0.8	1.8	-0.3	0.5	9.3	-2.0	2.5	-2.7	-0.2	0.3	4.3	-0.9	1.2
7054	-4.7	1.1	0.6	4.6	-1.0	-0.6	2.3	0.3	0.6	12.3	1.5	3.3	2.1	-0.5	-0.3	5.7	0.7	1.6
7060	2.8	1.5	-0.4	-2.7	-1.4	0.4	2.7	-0.1	0.7	14.2	-0.9	3.8	-1.2	-0.7	0.2	6.6	-0.4	1.7
7071	5.0	1.0	-0.7	-4.8	-0.9	0.6	2.3	-0.3	0.6	11.9	-1.6	3.2	-2.2	-0.4	0.3	5.5	-0.7	1.5
7075	6.2	-0.1	-0.8	-6.0	0.1	0.8	1.3	-0.4	0.3	7.1	-2.0	1.9	-2.7	0.0	0.4	3.3	-0.9	0.9
7076	3.6	1.3	-0.5	-3.5	-1.3	0.5	2.6	-0.2	0.7	13.6	-1.2	3.6	-1.6	-0.6	0.2	6.3	-0.5	1.7
7079	-4.7	1.1	0.6	4.6	-1.0	-0.6	2.3	0.3	0.7	12.3	1.5	3.3	2.1	-0.5	-0.3	5.7	0.7	1.6
7820	3.0	1.4	-0.4	-2.9	-1.4	0.4	2.7	-0.2	0.7	14.0	-1.0	3.7	-1.3	-0.6	0.2	6.5	-0.4	1.7
8010	6.2	-0.1	-0.8	-6.0	0.1	0.8	1.3	-0.4	0.3	7.0	-2.0	1.8	-2.7	0.1	0.4	3.2	-0.9	0.8
8015	6.2	0.1	-0.8	-6.0	-0.1	0.8	1.5	-0.4	0.4	7.8	-2.0	2.1	-2.7	0.0	0.4	3.6	-0.9	0.9
8030	6.1	-0.2	-0.8	-5.9	0.2	0.8	1.2	-0.4	0.3	7.5	-2.0	1.7	-2.7	0.1	0.4	3.0	-0.9	0.8
9001	5.6	0.7	-0.7	-5.4	-0.7	0.7	2.0	-0.3	0.5	10.7	-1.8	2.9	-2.5	-0.3	0.3	4.9	-0.8	1.3
9002	-4.9	1.0	0.6	4.7	-1.0	-0.6	2.4	0.3	0.6	12.1	1.6	3.2	2.2	-0.5	-0.3	5.6	0.7	1.5
9004	5.9	0.5	-0.8	-5.7	-0.5	0.8	1.9	-0.4	0.5	9.8	-1.9	3.6	-2.6	-0.2	0.3	4.6	-0.9	1.2
9006	5.3	0.9	-0.7	-5.1	-0.8	0.7	2.2	-0.4	0.6	11.4	-1.7	3.0	-2.3	-0.4	0.3	5.3	-0.8	1.4
9007	-3.4	1.4	0.4	3.3	-1.4	-0.4	2.7	0.2	0.7	13.8	1.1	3.7	1.5	-0.6	-0.2	6.4	0.5	1.7
9009	2.5	1.5	-0.3	-2.4	-1.5	0.3	2.7	-0.2	0.7	14.3	-0.8	3.8	-1.1	-0.7	0.1	6.7	-0.4	1.8

Tab. 1

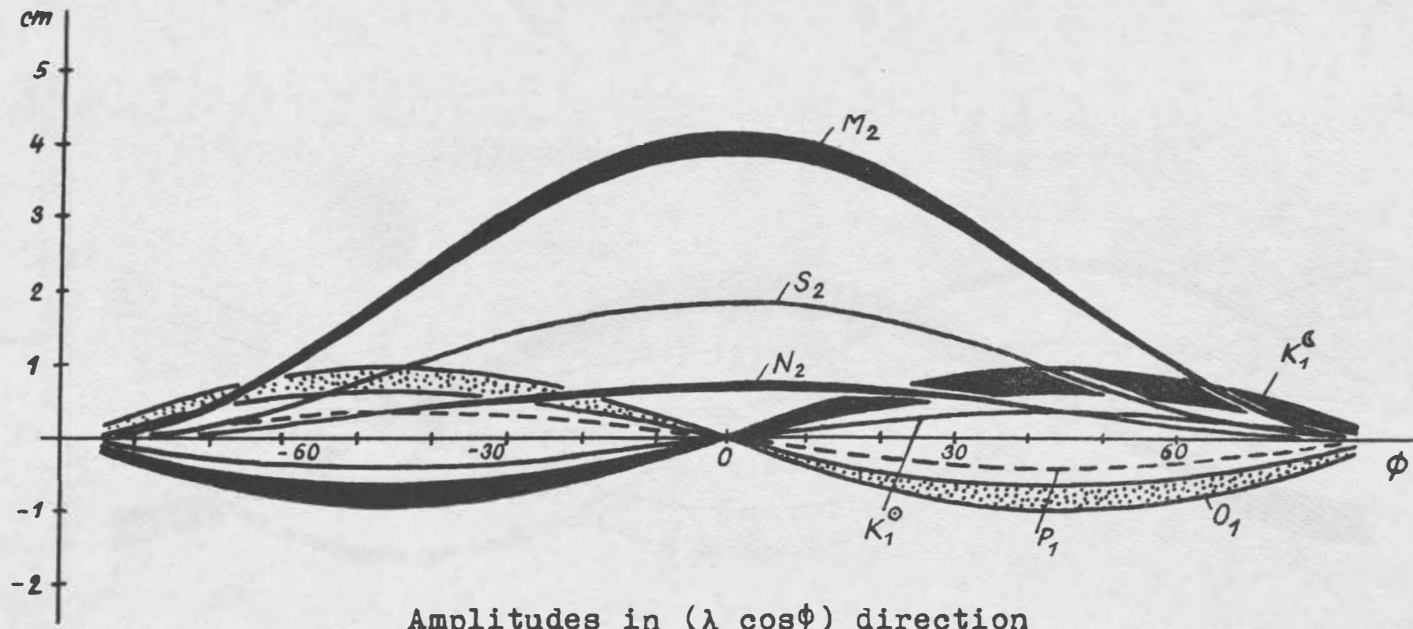
№	O_1			K_1^0			N_2			M_2			$K_1^0 = -P_1$			S_2		
9011	-5.6	0.7	0.7	5.4	-0.7	-0.7	2.1	0.3	0.5	10.8	1.8	2.9	2.5	-0.3	-0.3	5.0	0.8	1.3
9012	4.1	1.3	-0.5	-4.0	-1.2	0.5	2.5	-0.2	0.7	13.2	-1.3	3.5	-1.8	-0.5	0.2	6.1	-0.6	1.7
9021	5.6	0.8	-0.7	-5.4	-0.7	0.7	2.1	-0.3	0.5	10.9	-1.8	3.0	-2.5	-0.3	0.3	5.0	-0.8	1.3
9023	-5.5	0.8	0.7	5.3	-0.7	-0.7	2.1	0.3	0.5	11.0	1.8	3.0	2.4	-0.3	-0.3	5.0	0.8	1.3
9025	5.9	0.5	-0.8	-5.7	-0.5	0.8	1.9	-0.3	0.5	9.8	-1.9	2.6	-2.6	-0.2	0.3	4.5	-0.9	1.2
9028	1.9	1.5	-0.2	-1.8	-1.5	0.2	2.8	-0.1	0.7	14.7	-0.6	3.9	-0.8	-0.7	0.1	6.8	-0.2	1.8
9029	-1.3	1.6	0.2	1.2	-1.6	-0.2	2.9	0.0	0.7	14.8	0.4	4.0	0.6	-0.7	-0.1	8.8	0.2	1.8
9031	-6.2	0.0	0.8	6.0	0.0	-0.8	1.4	0.4	0.3	7.3	2.0	2.0	2.7	0.0	-0.4	3.3	0.9	0.9
9050	6.2	0.1	-0.8	-6.0	-0.1	0.8	1.5	-0.4	0.4	8.1	-2.0	2.2	-2.7	-0.1	0.4	3.8	-1.0	1.0
9091	6.0	0.4	-0.8	-5.8	-0.4	0.8	1.8	-0.3	0.5	9.3	-2.0	2.5	-2.7	-0.2	0.3	4.3	-0.9	1.1
9424	5.9	-0.5	-0.8	-5.7	0.5	0.8	0.9	-0.3	0.2	5.0	-1.9	1.3	-2.6	0.2	0.3	2.3	-0.8	0.6
9425	5.8	0.6	-0.8	-5.6	-0.6	0.7	2.0	-0.3	0.5	10.1	-1.9	2.7	-2.6	-0.2	0.3	4.7	-0.8	1.2
9426	5.4	-0.8	-0.7	-5.2	0.8	0.7	0.7	-0.4	0.2	3.7	-1.7	1.0	-2.4	0.4	0.3	1.7	-0.8	0.4
9427	2.8	1.5	-0.4	-2.8	-1.4	0.4	2.7	-0.1	0.7	14.1	-0.9	3.8	-1.5	-0.6	0.2	6.3	-0.5	1.7
9431	5.7	-0.7	-0.8	-5.5	0.6	0.7	0.8	-0.3	0.2	4.4	-1.8	1.2	-2.5	0.3	0.3	2.0	-0.8	0.6
9432	6.1	-0.2	-0.8	-6.0	0.2	0.8	1.3	-0.4	0.3	6.6	-2.0	1.7	-2.7	0.1	0.4	3.0	-0.9	0.8
9435	5.4	-0.8	-0.7	-5.2	0.8	0.7	0.7	-0.3	0.2	3.7	-1.7	1.0	-2.4	0.4	0.3	1.7	-0.8	0.4



Amplitudes in H direction



Amplitudes in ϕ direction



DETERMINATION OF THE LUMPED COEFFICIENTS OF 14TH-ORDER
FROM THE INCLINATION CHANGES OF
THE INTERKOSMOS 9 AND 10 SATELLITES.

Jaroslav Klokočník ¹⁾
 (Czechoslovakia)

ABSTRACT. The lumped coefficients of the 14th-order were computed from the changes in the inclination of orbits of the INTERKOSMOS 9 and 10 satellites, at the time of the 14/1- resonance. The results obtained were compared with the lumped coefficients given by Walker (1975) and those evaluated using the individual harmonic coefficients for $m=14$ from various contemporary Earth gravity field models and the resonant Reigber and Balmino (1976) solution.

The results:	IK 9	IK 10
$10^6 \overline{C}_{14}^{0,1}$	= $-0,074 \pm 0,032$	$-0,046 \pm 0,010$
$10^6 \overline{S}_{14}^{0,1}$	= $+0,179 \pm 0,035$	$+0,040 \pm 0,005$

РЕЗЮМЕ. Определены линейные комбинации гармонических коэффициентов 14-го порядка из изменений наклона орбит спутников ИНТЕРКОСМОС 9 и 10 во время резонанса 14/1. Результаты сравнены с линейными комбинациями гармонических коэффициентов, которые были вычислены Волкровой (1975) и теми, которые были вычислены из гармонических коэффициентов для $m=14$ из разных современных моделей гравитационного поля Земли. и из решения Райгбера и Балмино (1976).

Результаты:	ИК 9	ИК 10
$10^6 \overline{C}_{14}^{0,1}$	= $-0,074 \pm 0,032$	$-0,046 \pm 0,010$
$10^6 \overline{S}_{14}^{0,1}$	= $+0,179 \pm 0,035$	$+0,040 \pm 0,005$

¹⁾ Astronomical Institute of Czech. Acad. Sci.

Уточнение поправок за влияние атмосферы
при изучении колебаний полюса Земли

М.Т. Прилепин, Н.С. Заболотный I)

Делается расчет точности определения поправок в измерениях лазерными дальномерами расстояния до ИСЗ с использованием масштаба высот биэкспоненциальной модели показателя преломления. Численные значения масштаба высот предлагается определять по измерениям зенитных расстояний звезд, наблюдаемых одновременно с ИСЗ.

Повышение интереса к задаче уточнения положения полюса Земли связано с тем обстоятельством, что анализ колебаний полюса позволяет определить ряд геофизических параметров, характеризующих внутреннее строение Земли. В настоящее время основными способами определения колебаний полюса являются классический - астрономический и новый, быстро развивающийся - спутниковый, в котором текущее положение полюса относительно некоторой эпохи определяется линейными лазерными или доплеровскими измерениями. Как отмечается многими авторами / 1, 2 /, и в том и другом способе одним из важных источников ошибок является влияние атмосферы. Изучение тех работ, в которых оценивается влияние атмосферы показывает, что они направлены, главным образом, на получение точных аналитических зависимостей, дающих возможность вычислить поправку за влияние атмосферы в результате измерения, используя или стандартную модель атмосферы или данные радиозондирования. Следует отметить, что в целом ряде случаев такие способы учета влияния атмосферы недостаточны. Введение поправки за атмосферу по стандартной модели плохо отвечает именно геофизическому аспекту использования данных о колебаниях полюса Земли. Здесь должны использоваться малые интервалы осреднения измерений, а параметры атмосферы в конкретные моменты времени могут сильно отличаться от стандартных.

I) Московский Институт Инженеров Геодезии, Аэрофотосъемка и Картографии

Что же касается второго метода, радиозондирования, следует иметь в виду его недостаточную точность, связанную с одновременностью измерения метеорологических параметров на различных высотах.

Отмеченные обстоятельства оправдывают поиски других методов учета влияния атмосферы на результаты измерений, выполненные с целью вывода положения полюса Земли. В перспективе для указанных целей могут оказаться значимыми так называемый лидарный способ зондирования атмосферы, позволяющий определить "плотностный разрез" всей толщи атмосферы/3,4/ и дисперсионный метод, нашедший уже применение при наземных измерениях расстояний / 5 /.

В настоящее время одним из легко реализуемых способов уточнения влияния атмосферы на результаты спутниковых измерений может быть способ, основанный на точном измерении угла между подходящим образом выбранными звездами, наблюдение которых ведется одновременно со спутниками.

Имея в виду выполнить в дальнейшем оценку влияния атмосферы на результаты измерения расстояний лазерным дальномером до ИСЗ используем, как это делает Г.Вейс / 6 / удобную для наших целей экспоненциальную модель изменения фазового индекса преломления с высотой

$$N_{\varphi} = A_0 e^{-\frac{H}{H_a}} + B_0 e^{-\frac{H}{H_b}} \quad (I),$$

где A_0 , B_0 - соответственно значение сухой и влажной компонент индекса преломления в точке наблюдения ($H=0$)

H - текущая высота над земной поверхностью

H_a и H_b - масштабы высот для сухой и влажной компонент.

По смыслу записи (I) масштаб высот - параметр, характеризующий высоту над поверхностью, где соответствующая компонента уменьшается в e раз. Следует отметить, что несмотря на некоторую искусственность вве-

дения этих параметров, формула (1) довольно хорошо представляет распределение показателя преломления в атмосфере.

В диапазоне световых волн для длины волны рубинового лазера формула (1) может быть записана в виде

$$N_{\phi} = 105,2 \cdot 10^{-6} \frac{P}{T} e^{-\frac{H}{H_a}} - 14,2 \cdot 10^{-6} \frac{e}{T} e^{-\frac{H}{H_b}} \quad (2)$$

Как показывает формула (2) второй член существенно меньше первого ($e \ll P$) и при оценочных расчетах им можно пренебречь. Для получения масштаба высот и оценки его дисперсии нами были обработаны результаты зондирования атмосферы в 2-х пунктах Советского Союза:

Центральной аэрологической обсерватории (г. Долгопрудный) и на метеостанции в п. Диксон. В обоих пунктах радиозондирование осуществлялось в 12 часов местного времени до высот 30 км с шагом примерно 0,5-1,5 километра. Результаты расчетов приведены для некоторых месяцев в таблице I. В ней даны масштабы высот H_a и H_b и дисперсии значений $D(H_a)$ и $D(H_b)$. При больших интервалах осреднения ошибки разновременности и малой точности будут существенно уменьшены. Как показывают цифры таблицы, даже в среднем за месяц имеется систематическая разница в масштабах высот этих двух пунктов, составляющая около 10% для H_a и около 30% для H_b . Показательны также значения дисперсии для среднемесячных данных. В среднем дисперсия составляет величину для приведенных месяцев 0,08, достигая максимума 0,18. Отсюда можно заключить, что значения масштаба высот для одного пункта в отдельные дни может различаться на величины одного километра и более. Эти цифры определенно говорят, что для введения поправок при точных измерениях недостаточно поль-

Таблица I.

Д и к с о н					Д о л г о п р у д н а я				
месяц / масштаб	IУ	У	УI	УII	УIII	месяц / масштаб	УI	УII	УIII
H_a	8.14	8.33	8.52	8.54	8.54	H_a	9.36	9.61	9.29
H_b	1.34	1.53	1.72	1.74	1.77	H_b	2.56	2.83	2.49
$D(H_a)$	0.06	0.17	0.08	0.12	0.04	$D(H_a)$	0.06	0.05	0.06
$D(H_b)$	0.06	0.17	0.08	0.12	0.04	$D(H_b)$	0.06	0.05	0.06

зоваться осредненными параметрами биэкспоненциальной атмосферы.

Рассмотрим теперь метод определения параметра N_a по наблюдениям звезд на различных зенитных расстояниях. Пусть для некоторого момента времени t измерено зенитное расстояние звезды \bar{z} . Как известно, поправка за рефракцию \mathcal{U} при наблюдении звезды может быть вычислена, если определена широта места φ , измерено зенитное расстояние \bar{z} и зафиксирован момент времени t . По основной формуле сферической астрономии

$$\cos z^{\circ} = \cos(\bar{z} - \mathcal{U}) = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(t - \alpha) \quad (3),$$

где z° - теоретическое зенитное расстояние

α, δ - экваториальные координаты звезды

Формула (3) позволяет определить \mathcal{U} , однако, имея в виду исключение влияния ошибок широты и некоторых систематических ошибок измерения, целесообразно использовать две звезды, расположенные в одном азимуте. Тогда

$$\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1 = \frac{\cos z_2^{\circ} - \cos \bar{z}_2}{\sin \bar{z}_2} - \frac{\cos z_1^{\circ} - \cos \bar{z}_1}{\sin \bar{z}_1} \quad (4)$$

С другой стороны, выразим рефракцию через параметр, подлежащий определению, - масштаб высоты / 6 /

$$\mathcal{U} = N_0 \operatorname{tg} \bar{z} + \frac{N_0 N_a}{R} \operatorname{tg} \bar{z} \operatorname{sec}^2 \bar{z} \quad (5),$$

где R - радиус Земли.

Для разности рефракции двух звезд будем иметь

$$\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1 = N_0 (\operatorname{tg} \bar{z}_2 - \operatorname{tg} \bar{z}_1) + \frac{N_0 N_a}{R} (\operatorname{tg} \bar{z}_2 \operatorname{sec}^2 \bar{z}_2 - \operatorname{tg} \bar{z}_1 \operatorname{sec}^2 \bar{z}_1) \quad (6)$$

Из (6) и (5) получим искомый параметр

$$N_a = \frac{R}{N_0} \left[(\cos z_2^{\circ} - \cos \bar{z}_1) \operatorname{cosec} \bar{z}_1 - (\cos z_1^{\circ} - \cos \bar{z}_1) \operatorname{cosec} \bar{z}_1 - N_0 (\operatorname{tg} \bar{z}_2 - \operatorname{tg} \bar{z}_1) \right] \frac{1}{\operatorname{tg} \bar{z}_2 \operatorname{sec}^2 \bar{z}_2 - \operatorname{tg} \bar{z}_1 \operatorname{sec}^2 \bar{z}_1} \quad (7)$$

В частном случае наблюдения двух звезд в меридиане будем иметь

$$H_a = \frac{\frac{R}{N_0} (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (\delta_2 - \delta_1) - N_0 (\operatorname{tg} \bar{z}_2 - \operatorname{tg} \bar{z}_1)}{\operatorname{tg} \bar{z}_2 \sec^2 \bar{z}_2 - \operatorname{tg} \bar{z}_1 \sec^2 \bar{z}_1} \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, в этом случае ошибки определения широты не влияют на точность определения искомого параметра H_a . При расчете погрешности определения параметра H_B в зависимости от азимута и различия зенитных расстояний звезд для ошибок входящих в формулу (7) величин приняты следующие значения:

$$m_{\bar{z}_2} = m_{\bar{z}_1} = 1''$$

$$m_{\delta_2} = m_{\delta_1} = 0''3$$

$$m_{\varphi} = 0''3$$

$$m_t = 0,01$$

Результаты расчетов сведены в таблицу № 2.

Таблица 2.

\bar{z}_1	\bar{z}_2	A	m_{H_a}	\bar{z}_1	\bar{z}_2	A	m_{H_a}	\bar{z}_1	\bar{z}_2	A	m_{H_a}
15°	60	0°	0,41	15°	60	45°	0,49	15°	60	90°	0,57
	70		0,17		70		0,33		70		0,35
	80		0,07		80		0,12		80		0,14
	85		0,02		85		0,05		85		0,07
	88		0,004		88		0,009		88		0,02

Как следует из таблицы № 2 при надлежащем выборе зенитных расстояний ($\bar{z}_1 \approx 15^\circ$ и $\bar{z}_2 \approx 85-88^\circ$) масштаб высот может быть определен с ошибкой 0,01 - 0,05 км. Это дает нам основание рекомендовать указанный способ определения H_a при измерении дальностей лазерными импульсными дальномерами с целью определения движений полюса, поскольку здесь требуется максимальная точность.

Рассчитаем, с какой точностью может быть введена поправка в измеряемую дистанцию, если параметр H_a определен с погрешностью 0,05 км. Обозначив текущее значение группового показателя преломления воздуха через n_i^{zp} будем иметь

$$D = \int_0^D n_i^{zp} \cdot dD = \int_0^D (1 + A_0^{zp} e^{-\frac{H}{H_a}} + B_0^{zp} e^{-\frac{H}{H_B}}) dD \quad (9)$$

и

$$\Delta D = D - D_0 = \int_0^D A_0 l^{-\frac{H}{H_a}} dD + \int_0^D B_0 l^{-\frac{H}{H_b}} dD \quad (10)$$

где D - длина линии вдоль траектории

D_0 - длина измеренная в вакууме.

Делая замену переменных для случая плоской Земли, т.е. полагая

$$H \approx D \cos \chi \quad (11)$$

получим после интегрирования

$$\Delta D \approx \frac{A_0^{zp}}{\cos \chi} H_a + \frac{B_0^{zp}}{\cos \chi} H_b \quad (12)$$

Расчет ошибок определения величины ΔD по формуле 12 дан в таблице № 3.

χ	m_{H_a}	$m_{\Delta D_{см}}$
30	0,05	1,7
40		1,9
50		2,3
60		3,0
70		4,4
80		8,7
85		16,6

Таблица 3

Как показывают результаты таблицы №3 погрешность определения поправки ΔD не будет превосходить 9 см даже для $\chi = 80^\circ$, если определять H_a описанным ранее способом с ошибкой не более 0.05. Значение масштаба H_b , ввиду малости параметра B_0 , достаточно брать для стандартных условий. Разумеется, полученное таким образом значение масштаба высот может быть использовано и при вычислении поправки за рефракцию при фотографических наблюдениях ИСЗ по формулам, известным в литературе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л.В.Рыклова - Использование наблюдений ИСЗ для решения задач геодинамики. Наблюдение ИСЗ №13 1973г.
2. Ф.Хенриксен, А.Манчини, Б.Човиц - "Использование ИСЗ для геодезических целей" Мир, 1975г.
3. В.Е.Зуев - "Вопросы лазерного зондирования атмосферы", Новосибирск, 1976г.
4. В.М.Захаров, О.К.Костко - "Лазеры и метеорология" Гидрометеоиздат, 1972г.
5. М.Т.Прилепин, А.Н.Голубев - "Оптические квантовые генераторы в геодезических измерениях" Недра, 1972г.
6. Г.Вейс - "Геодезическое использование искусственных спутников Земли" Недра, 1967г.

Stellar Testing Catalogue

by

STANISLAWA SWIERKOWSKA¹⁾Summary

This paper allocates the photographic positions of 126 stars, the majority of which are included in the catalogue given in the work [1, 7]. The photographs were taken in two instruments: a satellite camera PO-2 ($F = 996$ mm, $f = 140$ mm), and SCHMIDT reflector (1800/900/600). The reference catalogue is the SAO catalogue.

Prof. Dr. F. KOEBCKE abandoned the project of reviewing and checking with the photographic method the catalogue of the "Triangulum" constellation, as given in von F. DOLBERG's "Mittlere Sternörter für das erweiterte Bonner Prüffeld in Triangulum ..." (Mitteilungen der Hamburger Sternwarte in Bergedorf, Bd. 6, No. 32, 1930), which is further referred to in this paper as the BP catalogue. The first author created a stellar catalogue to test instruments employed in joint research programs. The need exists today as well, since synchronic observations employ also stations with varying types of equipment. There is also a feasible risk that the material yielded by synchronic observations may become scarce, owing to present weather anomalies, when distant satellite stations are included in the co-operation, and observations are based on satellites close to the Earth (i.e. satellites of the GEOS type). In the circumstances it seems recommendable to conduct periodic tests of the cameras taking part in regular programs. Testing with a random field of stars may cause incidental results. The position of a testing field of stars is convenient for various geographical latitudes. If we assume $2^{\text{h}}22^{\text{m}}$ and $34^{\circ}50'$ as the centre (the approximate centre of a testing field) and photograph it in the meridian, then, for latitudes within the range of 0° to 70° , the zenithal distance of that point will be only 35° , and that will allow us to discard all higher ranges of refraction than the first one.

The BP catalogue includes 130 stars, of which four are at a distance from what is otherwise a field of an almost even distribution. The stellar magnitudes range between $6^{\text{m}}.9$ and $9^{\text{m}}.5$. The size of the field of even distribution is about $10^{\circ} \times 10^{\circ}$. The photographs of the field which include the stars of the BP catalogue were taken with two instruments:

1. A satellite camera PO-2 (Poznań, January 9, 10, and 11th, 1971). The focusing length of the camera $F = 996$ mm, the diameter of the objective $f = 140$ mm. The plates worked with were NP-27, encompassing the areas of rectangles $7^{\circ} \times 10^{\circ}$. The instrument's scale: $4.8 \mu\text{m} = 1''$. The exposition time of the pictures was equal 2^{m} .

¹⁾ Uniwersytet im. A. Michiewicza
Poland 60-286 Poznań, Stoneczna 36

2. SCHMIDT reflector (Torun, October 10, 1971) (1800/900/600). The pictures were obtained on plates encompassing the areas of circles with the radii of $2^{\circ}25'$. The scale of the instrument $8.8 \mu\text{m} = 1''$.

To photograph the entire field of the stars included in the catalogue, we had to take a series of pictures. We decided, that the catalogue field should be covered with overlapping plates, so that at least half of one plate would overlap the plate next to it.

In the case of the PO-2 camera, a series of five plates were enough to cover the entire field (with the exception of four distant stars No. 2, 3, 129, and 130). In this series, the central plate included the centres of the plates around it. We chose two series of plates as data for investigation. In the case of SCHMIDT reflector, a series encompasses 11 plates, which do not include stars No. 1, 2, 3, 5, 7, 9, 74, 123, 125, 129, and 130. We picked one series as data.

This catalogue includes 124 stars from the BP catalogue, as well as two stars not included there - those with No. 62x and 102x - which were erroneously identified. Out of those 126 stars only 15 were not included in the SAO catalogue, those with No. 14, 33, 37, 45, 51, 54, 58, 60, 64, 66, 95, 99, 112, 121, and 122. It should be stressed, that the BP catalogue was consulted during the creation of the SAO catalogue, which persuaded the author of this paper to use only the SAO catalogue for checking the testing field, and to treat the stars included in it as reference stars in calculating the positions of stars not included in this catalogue. The decision to do so seems all the more justified, since we can assume that the positions of stars as given in the BP catalogue are more accurate than the positions of stars not included in it.

The measurements were done on a "KOMES" measuring engine Zeiss No. 12944. Every plate was measured in two positions differing by 90° . Four adjustments were made in each position (two with a prism and two without a reversion prism). The measurements taken in the 90° position in the measuring engine were reduced to the mean position in 0° with linear equations:

$$a_0 + a_1 x_{90,i} + a_2 y_{90,i} = X_{0,i} \quad (1)$$

$$b_0 + b_1 x_{90,i} + b_2 y_{90,i} = Y_{0,i}$$

calculating

$$\frac{1}{2} (x_{0,i} + X_{0,i}) = x_i$$

$$\frac{1}{2} (y_{0,i} + Y_{0,i}) = y_i$$

those values become the initial data in further calculations.

The right ascensions and declinations of stars not included in the SAO catalogue were calculated from all the plates on which those stars were measured, while the remaining stars were treated as reference stars. The final value of their right

ascensions and declinations is the arithmetical mean of all calculated values. The ideal co-ordinates were smoothed and determined with the sequences:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 x y + a_5 y^2 + a_6 r^2 x &= \xi \\ b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 x y + b_5 y^2 + b_6 r^2 y &= \eta \\ r^2 &= x^2 + y^2 . \end{aligned}$$

After supplementing the right ascension and declination of stars not included in the SAO catalogue, we proceeded to smooth all the plates with sequences of the form (2). The sums of deviations of ideal co-ordinates became the result of smoothing. The values of $(1/n) x (\sum \Delta \xi)$, $(1/n) x (\sum \Delta \eta)$, where n = the number of plate on which the star was measured, became input data for smoothing to the possible relation between the deviation and stellar magnitude. Data concerning stellar magnitudes was taken from the SAO catalogue, with lacking data supplied from the BP catalogue. Stars No. 58 and 112 were not considered in the reductions. Smoothing was done with the sequences:

$$I. \quad a_0 m_v + a_1 m_{pg} + a_2 (m_v - m_{pg}) = (1/n) x \begin{cases} \sum \Delta \xi \\ \sum \Delta \eta \end{cases}$$

and

$$II. \quad a_0 m_v + a_1 m_{pg} + a_2 m_v + a_1 m_{pg} + a_4 (m_v - m_{pg}) = (1/n) x \begin{cases} \sum \Delta \xi \\ \sum \Delta \eta \end{cases}$$

for every series of plates individually. After analysing the changes in the deviations after smoothing in two series from the PO-2 instrument, it seems feasible that the smoothing is artificial, therefore we assumed, that the influence is negligible. It seems more interesting to analyse the scatter of results and in this way to find the weight of the observations. It should be considered, that many focusings were done individual stars and the measurements were carried out in two different positions of the plate in the measuring engine, and so it seemed worth while to analyse the relation between the scatter of the results of an individual measurement and the deviation of the confrontation of measurements obtained in two different position of the plate in the measuring engine (that is, the deviation of equations (1)). The values should be proportional, if the measuring instrument is not grossly erroneous. So it was in our case. Therefore, the absolute value of the deviation of the equations (1) can be, and was, taken as the measure of the precision of the test. As the lowest value we have assumed 0.0001 mm. Considering that the photographs were taken with two different instruments, we introduced into the weights the relation between the tested camera and the PO-2 camera. The final form of the weight became:

$$P_j = \frac{\sqrt{2} \times F}{996.2 \times |\Delta| \times 1000} .$$

The weighing of the deviations of the ideal co-ordinates was done separately for each camera. In the last stage, we found the arithmetical mean of the obtained values, and after converting them into an appropriate code, they were added to the appropriate values of the right ascension and declination of the stars of the SAO catalogue.

The catalogue we are working out here should serve in testing instruments. Therefore it is of primary importance not to introduce systematic errors that would arrange themselves centrifugally. In view of that we took the pictures with the method of overlaying fields. Besides that, we have conducted additional analysis whether deviations of sequences (2) do not show a tendency for symmetrical arrangement. To do that, the distance of every star on a given plate from the center $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ was calculated, and on this axis we projected the value $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, with the formula

$$z = \frac{x \cdot \Delta x + y \cdot \Delta y}{\rho}.$$

The values thus determined for every star on every plate, taken with one instrument, allow for a hierarchical arrangement of all deviations according to their rising values, and for putting them on a diagram according to a formula

$$z = f(\rho).$$

We have made such diagrams and we have not noticed any patterns. The points are arranged evenly on both sides of the axis.

In conclusion to this paper the author would like to offer some suggestions as to the usage of the catalogue.

It is best to choose star 77 as central. It is the brightest star of the catalogue and it lies almost in the centre of the field of even distribution. Within the diameter of 1.05 there are already 16 stars of the catalogue. It is advantageous to work at two different positions of the plate in the measuring engine. We can thus avoid the errors of the measuring instrument, and at the same time we find the precision of independent tests. During the first tests of the instrument, especially if we know nothing about optics, it is advisable to use a greater number of stars, to find out if the field has no great local anomalies. For control tests, 20 stars should be sufficient.

Calculations and reductions were carried out according to our own programs, on an ODR-1204 computer. The programs were prepared in the MOST-II language.

References

- [1] DOLBERG, F. von: Mittlere Sternörter für das erweiterte Bonner Prüffeld in Triangulum und das Bergedorfer Prüffeld in Ursa major.
Mitt. d. Hamburger Sternwarte in Bergedorf Bd. 6 (1930) No. 32
- [2] Smithsonian Astrophysical Observatory STAR CATALOG 1966

No. BP	m_V	m_{PG}	α	μ_α	δ	μ_δ	No. SAO
1	8.4	8.9	1 50 14.208	-.0012	+35 2 30.53	.006	55059
4	7.8	8.7	1 55 33.383	-.0018	+36 0 31.36	.002	55156
5	8.2	9.0	1 57 28.979	-.0007	+39 43 31.63	-.019	55182
6	8.9	9.9	1 58 19.068	-.0011	+35 13 32.65	-.019	55193
7	8.0	9.3	1 58 50.743	-.0008	+31 52 49.73	.005	55198
8	7.0	8.6	2 0 49.338	-.0050	+35 21 6.39	-.016	55233
9	7.8	7.7	2 3 23.080	-.0010	+38 39 41.60	.010	55264
10	8.1	9.6	2 3 50.734	.0024	+37 24 2.87	-.006	55271
11	8.9	9.2	2 3 52.918	-.0004	+33 59 23.06	-.027	55272
12	8.8	9.3	2 4 1.343	.0141	+35 7 32.75	-.092	55273
13	8.2	7.5	2 4 54.278	-.0042	+35 19 1.30	-.030	55281
14	9.4	11.2	2 5 6.571	-	+32 2 33.44	-	-
15	9.0	9.6	2 5 34.122	-.0026	+33 6 13.87	-.050	55291
16	8.8	9.4	2 6 57.330	.0009	+34 34 42.97	.002	55313
17	8.6	9.6	2 7 3.284	.0008	+36 33 14.39	-.023	55316
18	8.7	9.5	2 7 12.340	.0025	+32 17 1.23	-.051	55319
19	9.2	10.1	2 8 9.510	.0002	+37 50 57.39	-.017	55334
20	8.9	9.5	2 8 32.771	-.0008	+35 30 13.46	-.060	55340
21	8.5	8.4	2 9 15.787	.0006	+37 7 57.74	-.023	55345
22	9.4	11.2	2 9 27.504	-.0016	+36 14 46.02	-.075	55346
23	7.5	9.3	2 9 33.143	.0002	+31 54 56.49	-.001	55348
24	8.7	10.1	2 9 38.347	.0012	+37 6 33.49	-.024	55349
25	9.1	10.4	2 9 54.341	.0003	+35 5 17.52	.013	55354
26	8.4	8.7	2 10 32.381	.0041	+33 23 3.41	-.034	55361
27	8.0	9.1	2 10 42.314	.0062	+32 44 51.85	.026	55363
28	8.3	9.4	2 10 54.128	.0028	+38 10 27.09	-.012	55365
29	8.7	9.3	2 10 54.706	.0085	+37 22 58.62	-.125	55366
30	8.5	9.2	2 11 23.462	.0004	+34 40 28.18	-.078	55372
31	8.2	8.0	2 11 24.962	.0026	+34 13 40.30	-.032	55374
32	8.3	9.2	2 11 32.603	-.0012	+32 33 0.50	.053	55377
33	9.3	10.8	2 12 1.390	-	+34 42 6.99	-	-
34	8.8	9.3	2 12 22.436	.0056	+32 42 7.41	-.032	55393
35	7.8	7.8	2 12 53.120	.0008	+36 32 20.34	-.032	55396
36	8.3	9.8	2 13 9.486	.0012	+34 4 27.37	-.038	55402
37	9.5	10.3	2 13 26.723	-	+37 25 6.13	-	-
38	8.4	9.7	2 13 31.064	.0043	+36 52 26.69	-.022	55409
39	7.8	8.4	2 13 31.521	.0021	+35 13 3.23	.009	55410
40	8.9	9.9	2 13 36.045	.0018	+38 30 29.40	-.030	55411
41	8.6	9.6	2 13 48.249	.0024	+35 59 36.01	-.016	55414
42	8.3	8.8	2 14 9.625	.0005	+37 15 9.25	-.030	55425
43	8.7	9.0	2 14 31.407	.0006	+33 32 25.47	-.021	55429
44	9.2	10.7	2 14 51.538	-.0029	+37 58 39.60	-.013	55434
45	9.4	10.9	2 15 4.691	-	+32 38 35.19	-	-
46	9.0	9.8	2 15 10.913	.0043	+36 20 40.24	-.130	55440
47	8.5	9.1	2 15 11.827	-.0006	+35 5 7.77	-.027	55441
48	7.7	9.2	2 15 34.041	-.0016	+36 50 12.45	.009	55444

No. BP	m_v	m_{pg}	α	μ_α	δ	M_δ	No. SAO
49	8.5	9.7	2 15 39.112	-.0003	+31 53 50.60	-.013	55445
50	8.5	9.7	2 15 44.512	-.0014	+33 20 45.38	-.023	55447
51	9.4	10.7	2 15 55.721	-	+34 36 26.12	-	-
52	8.0	8.6	2 16 17.893	-.0014	+33 48 11.07	.001	55448
53	8.7	9.8	2 17 2.265	.0010	+35 43 51.09	-.041	55461
54	9.5	10.5	2 17 15.534	-	+36 19 2.28	-	-
55	8.7	9.3	2 17 27.564	.0019	+32 27 42.14	-.022	55468
56	8.5	9.4	2 17 34.594	.0002	+33 17 34.48	-.003	55469
57	7.8	7.5	2 17 59.493	.0103	+36 50 32.17	-.039	55475
58	8.9	-	2 18 11.093	-	+35 49 3.70	-	-
59	8.9	10.3	2 18 23.003	.0012	+34 55 4.14	-.022	55479
60	9.2	10.3	2 18 33.715	-	+33 51 5.10	-	-
61	7.8	8.9	2 19 20.022	.0021	+37 28 16.79	-.007	55494
62x	7.1	7.1	2 20 13.138	.0020	+38 1 33.45	-.012	55503
63	7.8	8.1	2 19 45.712	-.0008	+33 28 34.95	.004	55500
64	9.2	10.5	2 19 58.955	-	+34 26 18.62	-	-
65	9.0	10.6	2 20 4.513	-.0004	+32 47 57.76	-.003	55501
66	9.1	10.3	2 20 6.859	-	+31 55 45.01	-	-
67	6.9	7.6	2 20 27.559	-.0019	+35 12 52.64	-.017	55505
68	8.2	9.5	2 20 28.950	.0007	+35 36 23.90	-.005	55507
69	8.0	9.1	2 20 27.783	-.0010	+32 27 41.03	-.005	55506
70	8.6	9.3	2 20 35.598	.0025	+33 51 46.19	-.027	55508
71	8.7	8.8	2 20 38.826	-.0006	+36 52 34.21	-.026	55509
72	8.9	10.9	2 21 31.034	.0016	+36 5 11.01	-.002	55519
73	8.5	9.8	2 21 43.625	-.0003	+32 25 14.10	.003	55523
74	8.4	8.6	2 21 54.534	-.0036	+30 5 24.65	-.184	55525
75	7.2	8.6	2 22 10.060	-.0004	+33 38 29.04	-.006	55527
76	8.9	9.5	2 22 21.365	-.0020	+37 5 26.60	-.016	55532
77	6.9	7.7	2 22 25.511	-.0002	+34 48 59.68	.012	55537
78	8.6	9.2	2 23 8.420	-.0008	+34 37 43.28	-.005	55551
79	8.1	10.0	2 23 19.399	.0036	+38 21 54.03	-.008	55555
80	7.0	7.2	2 23 46.353	.0020	+35 23 25.02	-.019	55560
81	8.3	8.9	2 24 8.970	.0003	+32 39 10.63	-.007	55567
82	7.2	8.9	2 24 11.379	.0008	+36 44 35.94	-.029	55568
83	8.6	9.2	2 24 47.159	.0142	+35 11 6.21	-.100	55572
84	7.7	9.1	2 25 14.099	.0009	+33 58 20.35	-.001	55579
85	9.0	10.6	2 25 27.210	-.0025	+31 57 45.35	-.031	55584
86	8.7	9.7	2 25 28.114	.0022	+31 56 51.82	-.049	55586
87	9.0	9.8	2 25 52.619	.0023	+35 26 41.45	.012	55590
88	9.0	10.4	2 25 53.785	.0001	+33 28 53.01	-.010	55591
89	9.0	10.0	2 26 44.305	.0042	+37 27 20.97	.019	55603
90	8.3	9.1	2 27 28.803	-.0015	+33 5 12.42	-.018	55613
91	8.2	7.8	2 27 44.076	.0007	+35 53 45.66	-.010	55615
92	8.0	8.1	2 28 5.668	.0093	+34 42 36.26	-.039	55621
93	7.7	7.8	2 28 23.182	.0017	+37 13 59.98	-.016	55625
94	8.6	9.5	2 28 32.520	.0003	+36 56 31.99	-.044	55627

No. BP	m_v	m_{pg}	α	μ_α	δ	μ_δ	No. SAO
95	9.1	10.1	2 28 41.623	-	+33 53 7.59	-	-
96	7.2	8.2	2 28 44.433	.0036	+37 54 5.22	-.026	56630
97	7.5	8.3	2 29 16.241	-.0019	+31 52 42.03	-.004	55641
98	8.7	9.9	2 29 40.920	.0025	+36 18 4.16	-.024	55645
99	9.2	10.5	2 29 44.226	-	+33 19 1.88	-	-
100	7.1	7.5	2 29 50.684	.0056	+37 6 52.09	-.075	55649
101	8.7	9.5	2 30 7.320	-.0018	+35 27 22.80	.001	55652
102x	9.1	9.9	2 30 5.472	.0011	+32 52 45.17	.001	55651
103	7.5	7.7	2 30 40.904	.0007	+34 7 20.86	-.014	55659
104	8.7	9.2	2 31 30.406	.0058	+34 57 18.01	-.023	55670
105	8.2	8.7	2 31 31.549	-.0015	+33 41 48.42	.032	55671
106	9.0	9.5	2 32 3.282	.0065	+35 39 42.39	-.067	55676
107	7.8	8.9	2 32 14.382	.0000	+32 38 45.57	.000	55679
108	7.5	8.3	2 32 49.933	-.0035	+36 50 26.38	-.016	55690
109	8.4	9.6	2 32 58.657	.0013	+32 50 58.43	.004	55692
110	9.0	9.6	2 33 11.639	.0006	+34 31 52.08	-.018	55696
111	8.1	9.3	2 33 51.605	-.0014	+37 8 15.51	-.004	55706
112	var		2 34 0.024	-	+34 2 51.86	-	-
113	9.2	9.8	2 34 7.438	.0009	+38 30 55.07	-.012	55713
114	8.9	9.4	2 34 18.327	.0003	+32 27 0.23	-.011	55718
115	7.5	8.1	2 34 47.250	.0006	+34 56 43.96	-.061	55723
116	8.7	9.5	2 35 7.704	-.0032	+37 17 36.04	-.021	55727
117	9.3	10.4	2 35 17.018	-.0014	+36 11 56.30	-.021	55733
118	8.2	8.6	2 36 30.949	.0029	+33 18 25.80	-.020	55758
119	8.0	8.1	2 37 14.592	.0006	+34 22 20.50	-.120	55771
120	7.3	7.7	2 37 25.447	.0019	+32 6 23.15	-.001	55773
121	8.8	9.7	2 37 27.691	-	+35 4 28.90	-	-
122	9.1	9.9	2 38 0.980	-	+37 45 35.33	-	-
123	8.7	8.7	2 40 5.537	-.0001	+39 9 15.86	-.004	55808
124	8.7	9.4	2 40 7.074	.0087	+35 44 50.93	-.090	55809
125	8.7	9.1	2 41 47.287	.0003	+31 16 48.60	-.025	55838
126	7.8	9.0	2 42 43.654	.0021	+34 13 11.77	-.001	55849
127	7.7	8.5	2 42 58.067	.0030	+35 14 27.94	-.012	55855
128	8.6	8.4	2 44 4.929	.0019	+36 21 17.32	-.013	55876

The Influence of Refraction on Positional Observations of Earth's Artificial Satellites

by

KRYSTYNA KURZYŃSKA¹⁾Summary

This paper was written in consideration of the small number of synchronic observations obtained hitherto in practice. Owing to considerable distances between stations, the arc of mutual visibility is not big, and the program of observations should be set up to ensure its greatest length (the beginning and the end of the observations should not be limited by the altitude of $h = 30^\circ$).

It is worth considering, whether we could not switch to low-altitude observations, keeping in mind, of course, the phenomenon of refraction and extinction. While analysing the observations carried out on an SBG camera at the altitudes of $5^\circ < h < 90^\circ$, it appeared that for altitudes not lower than 10° the influence of refraction can be totally eliminated in the course of reduction, by selecting a smoothing sequence of an appropriate degree for a given camera.

In the case of the SBG Pecny-Skalka camera, the mean square error for all observations performed between the altitudes of 10° and 90° , is equal $4''$. The matter becomes complicated when we pass on to low-altitude observations, that is $5^\circ < h < 10^\circ$. Employing the smoothing sequence adopted for higher observations, we notice a rapid increase in the mean error with a decrease in altitude. The number of photographed stars also decreases owing to extinction, which for those altitudes reaches the value of about 2^m to 3^m . Therefore we should very carefully analyse the influence of refraction at those altitudes to achieve precision of the same degree as we did for higher observations.

Refraction was introduced into reduction in two ways: We employed BLAZKO's method, and as an alternative, GARFINKEL's method. GARFINKEL's method yielded better results, and so the analysis was based on this model. We found, that the influence of refraction at such small altitudes cannot be eliminated, however, we can free ourselves from it to a large extent, and in critical situations ($h = 5^\circ$) the mean error will not be bigger than 1.5ξ $h > 10^\circ$ (Fig. 1).

Better results can be achieved by using a refraction model specially worked out for a given observation station (KAKKURI, 1972). The problem involves determining the

¹⁾ Astronomical Observatory, A. Mickiewicz University,
Poland 60-682 Poznań, Stoneczna 36

explicit coefficients of a refraction sequence:

$$R = \tan z \sum_{i=0}^8 (-1)^i M_i \sec^{2i} z$$

by way of numerical integration based on aerological data, obtained by sounding the atmosphere in a given spot.

Such sounding of Poznań's atmosphere has been undertaken and research is in progress.

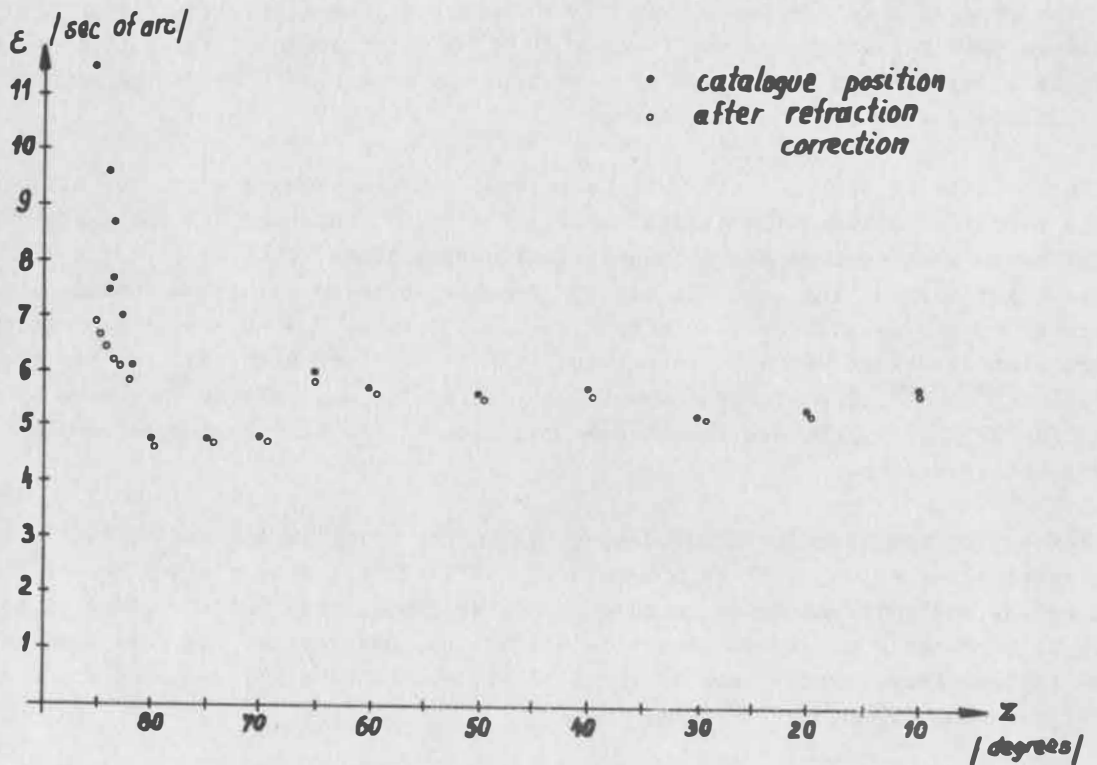
References

BLAZKO, S.: Sfiericheskaja Astronomia, Moskwa 1948

GARFINKEL, B.: Astron. J. 50 (1944), p. 169

GARFINKEL, B.: Astron. J. 72 (1967), p. 235

KAKKURI, J.: Publications of the Finish Geodetic Institute 72 (1972)



Исследование вариаций плотности атмосферы Земли
по торможению спутника "Ореол"

1047

Т.В.Касименко, И.А.Янковская

Астрономический совет АН СССР

Резюме. Приводятся результаты исследования вариаций плотности атмосферы на высоте 400 км по фотографическим и визуальным наблюдениям спутника "Ореол" в 1972 г. Определялись кратковременные изменения аномалистического периода (методом SPACECOOR) и долгопериодические вариации плотности по изменению баллистического коэффициента в 1972 г.

Zusammenfassung. Einige Ergebnisse der Untersuchungen der Variationen der Luftdichte in der Höhe von 400 km auf Grund fotografischer und visueller Beobachtungen des Satelliten "Aureol" in 1972 sind angegeben. Kurzzeitige Änderungen der anomalistischen Periode nach der Methode "SPACECOOR" sowie langperiodische Variationen der Luftdichte auf Grund der Änderungen des ballistischen Koeffizients in 1972 wurden bestimmt.

I. Введение

Точный учет атмосферных возмущений в движении спутников крайне важен для многих задач научного и прикладного характера. В частности, динамическая спутниковая геодезия уже достигла таких точностей, что неучет влияния атмосферы может значительно исказить полученные результаты (возмущения из-за торможения атмосферой спутника с высотой перигея до 300 км могут достигать, например, 30 км за сутки вдоль орбиты спутника).

Ясно, что точный учет атмосферных возмущений предполагает использование современных моделей атмосферы и хорошее знание аэродинамических характеристик спутника. Поэтому представляется интересным исследовать отдельные свойства атмосферы (например, трудно

учитываемые моделями кратковременные вариации плотности) в связи с конкретными практическими задачами определения атмосферных возмущений в движении спутников.

2. Цель исследования

Нами было выполнено одновременное исследование кратковременных и долгопериодических вариаций плотности по торможению спутника "Ореол". По средним элементам орбиты (интервал определения 10-14 дней) определялся баллистический коэффициент спутника в 1972 г. По наблюдениям (визуальным и фотографическим) этого спутника вычислялся также аномалистический период спутника и его изменения на интервале 1-2 суток. При этом мы пытались ответить на следующие вопросы:

1. Реагирует ли баллистический коэффициент спутника (а его изменения в данном случае можно отнести лишь за счет вариаций плотности) на сильные, но кратковременные геомагнитные возмущения?
2. В каких случаях кратковременные изменения плотности, прослеживаемые на кривой аномалистического периода, не сказываются на кривой баллистического коэффициента?
3. Наконец, при каких абсолютных значениях и амплитуде колебаний индекса солнечной активности $S_{10.7}$ наблюдаются соответствующие изменения в величинах баллистического коэффициента?

3. Метод обработки

3.1. Определение аномалистического периода и его изменений.

Для получения кратковременных изменений плотности по визуальным и фотографическим наблюдениям спутника "Ореол" был использован метод "SPACECOOR", разработанный А.Хорватом и реализованный для ЭВМ типа М-20 [1]. Комплекс программ (OBS, ORBEL, SPACECOOR) позволяет определять прямоугольные геоцентрические координаты спутника на моменты наблюдений, а также момент прохождения спутником точки перигея орбиты. На основании этих моментов

для соседних прохождений и близких дат определялся аномалистический период и его изменения.

Точность определения периода ± 0.5 I для интервала в одни сутки.

Аномалистический период и его изменения вычислены для следующих интервалов:

6 - 23 апреля
 28 - 30 апреля
 3 - 17 мая
 23 - 30 июня
 3 - 15 июля
 12 октября - 17 ноября

3.2. Определение баллистического коэффициента спутника.

Баллистический коэффициент определялся по методу, описанному в работе Г.М.Соловьева и др. [2].

Выражение для баллистического коэффициента имеет вид:

$$\delta = \frac{-\Delta a}{a^2 \rho_0 C_{10} \Delta t}$$

где Δa - изменение большой полуоси на интервале Δt , ρ_0 - плотность в точке перигея, C_{10} - коэффициент, зависящий от элементов орбиты и от принятой модели атмосферы.

По нашим оценкам, средняя квадратическая ошибка значений составляет около $\pm 1 \cdot 10^{-3} \frac{м^2}{кг}$, т.е. порядка 3-5% от определяемого значения.

Баллистический коэффициент определялся для периода 5 февраля-7 декабря 1972 г.

Подробный алгоритм решения приводится в работе Г.М.Соловьева и др. Мы воспользовались программой определения баллистического коэффициента для ЭВМ типа М-20, любезно предоставленной нам Г.М.Соловьевым. Счет производился на машине М-222 сектора прикладной

4. Анализ полученных результатов.

На рис. I представлена кривая изменения баллистического коэффициента δ в 1972 г. Одновременно нанесены также значения солнечного индекса $S_{10.7}$, геомагнитного индекса A_p и угла γ освещенности спутника.

Как можно видеть из графика, баллистический коэффициент показывает вариации большие, чем ошибки его определения.

Заметные вариации индекса солнечной активности (февраль, $\Delta S \sim 70$, $S_{max} \sim 200$, май, $\Delta S \sim 70$, $S_{max} \sim 170$, июль-август, $\Delta S \sim 60$, $S_{max} \sim 160$, ноябрь, $\Delta S \sim 80$, $S_{max} \sim 180$) четко сопровождаются подобными изменениями баллистического коэффициента.

Из анализа полученных результатов можно сделать вывод, что сильные, но кратковременные геомагнитные возмущения практически не прослеживаются на кривой баллистического коэффициента. Исключение составляет, может быть, большая магнитная буря ($A_p \sim 180$) 4-6 августа. Здесь максимум в значении баллистического коэффициента можно объяснить совместным влиянием геомагнитного возмущения и суточного горба (перигей освещен).

На рис. 2-4 представлены кривые баллистического коэффициента, аномалистического периода и солнечной и геомагнитной активности. К сожалению, в апреле, мае и июле наблюдения пришлись на интервалы времени, когда не было не только сильных, но даже заметных геомагнитных возмущений [3]. Лишь в одном случае наблюдения захватили магнитную бурю (октябрь-ноябрь 1972 г.). Как уже было показано нами раньше, на кривой аномалистического периода замечен некоторый подъем, который можно объяснить возрастанием плотности в результате геомагнитного возмущения. Кривая баллистического коэффициента также имеет максимум в этот период, и здесь можно говорить о связи пика солнечной активности с данной геомагнитной бурей и соответст-

Вующим изменением плотности.

В тех случаях, когда геомагнитные возмущения не связаны с изменениями солнечного индекса $S_{10.7}$, на кривой баллистического коэффициента (т.е. на долговременных колебаниях плотности) они не выявляются. Так, магнитная буря с $A_p \sim 130$ 10.6 совершенно не отражается на кривой δ ; то же самое можно сказать и о возмущениях $A_p \sim 50$ (15.09); $A_p \sim 40$ (30.04. и 8.03.).

Заключение.

Атмосферные возмущения в движении спутников можно учитывать двояким образом: 1) эмпирически, определяя по наблюдениям вековые возмущения в средней аномалии (этот путь с успехом применяется в аналитических решениях при дифференциальном улучшении элементов орбит, например, Ю.В.Батраковым и др., Д.Кинг-Хили и др. [4-7]) 2) учитывая сопротивление атмосферы при получении усредненных дифференциальных уравнений, в общем виде записываемых как

$$\frac{dq_k}{dt} = \delta \rho Q_k G_k(q) + \Psi_k(q)$$

Здесь δ - баллистический коэффициент спутника, ρ - плотность атмосферы, $G_k(q)$, $\Psi_k(q)$ - известные функции: Q_k - некоторые множители.

Первое слагаемое учитывает в этом уравнении сопротивление атмосферы. Этот путь применяется для методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Баллистический коэффициент возможно получить так, как это делает Г.М.Соловьев, по изменениям средних элементов орбит, и далее использовать полученные величины для дифференциального улучшения.

С этой точки зрения представляется заслуживающим внимание полученный нами результат, что сильные, но кратковременные геомагнитные возмущения практически не прослеживаются на кривой баллисти-

ческого коэффициента. Можно заключить также, что для данного спутника при значениях индекса солнечной активности S_{max} порядка 180-200 и амплитуде колебаний $\Delta S \sim 60-70$ наблюдаются изменения баллистического коэффициента около $0.01 \frac{м^2}{кг}$, т.е. на порядок больше ошибки. Это следует иметь в виду при использовании значений баллистического коэффициента при дифференциальном улучшении элементов орбит.

Л и т е р а т у р а

1. А.Хорват, Научные информации Астросовета, № 25, Москва, 1973.
2. Г.М.Соловьев и др., Набл. иск.небесных тел, Москва, 1976.
(в печати)
3. Solar - geophysical data, No. 342 p. 1, Febr. 1973.
4. Ю.В.Батраков, Бюлл. ИТА АН СССР, т.УП № 7 (90), 1960.
5. Г.А.Чеботарев, Е.И.Макарова, Бюлл. ст.опт.набл.иск.сп.З, № 27, 1962.
6. D.G.King-Hele, E.Quinn. Planet.Space Sci., vol. 13, 1965.
7. Д.Кинг-Хили, Теория орбит искусственных спутников в атмосфере (перев. с англ.) изд-во "Мир", Москва, 1966.

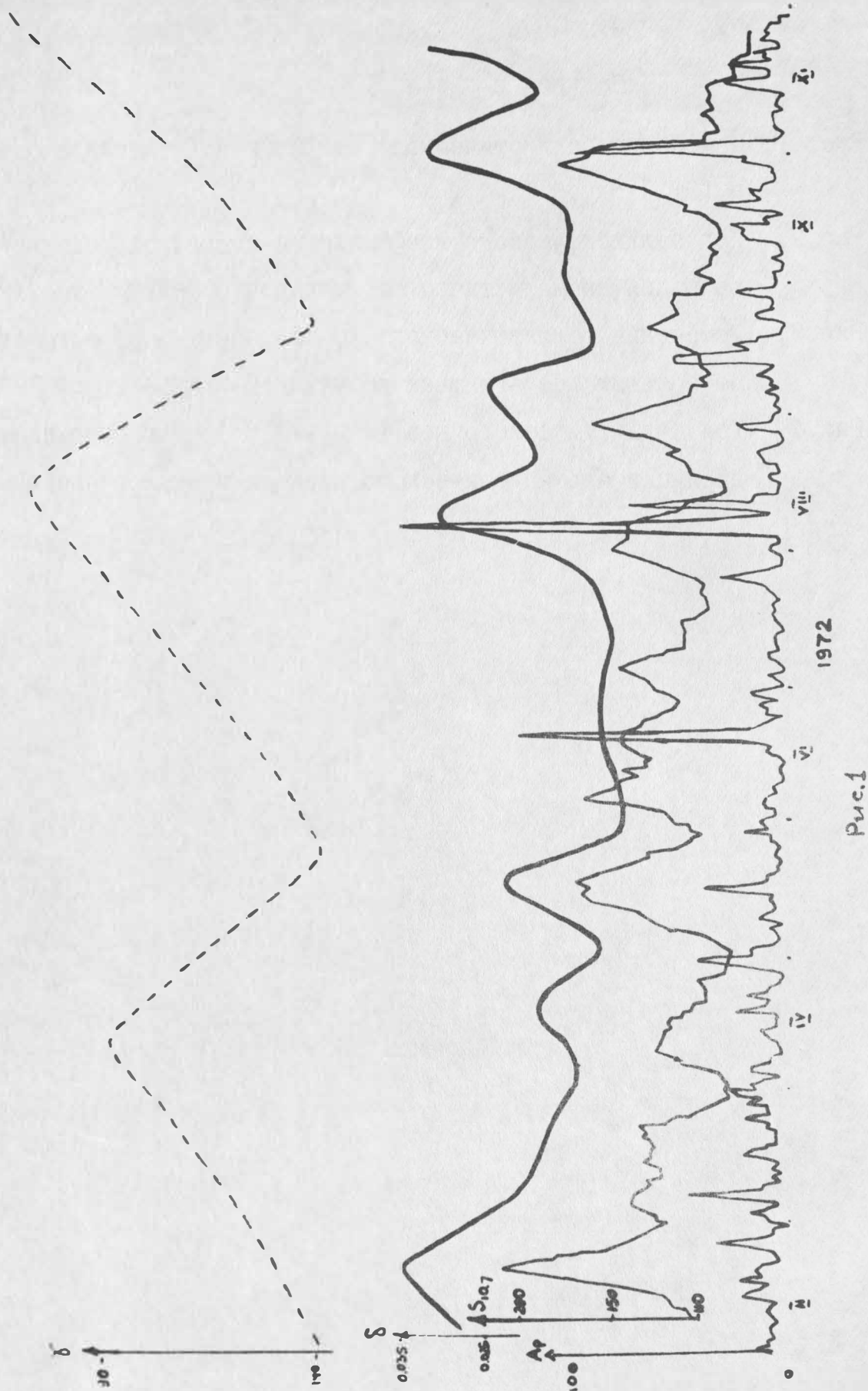
Подписи к рисункам

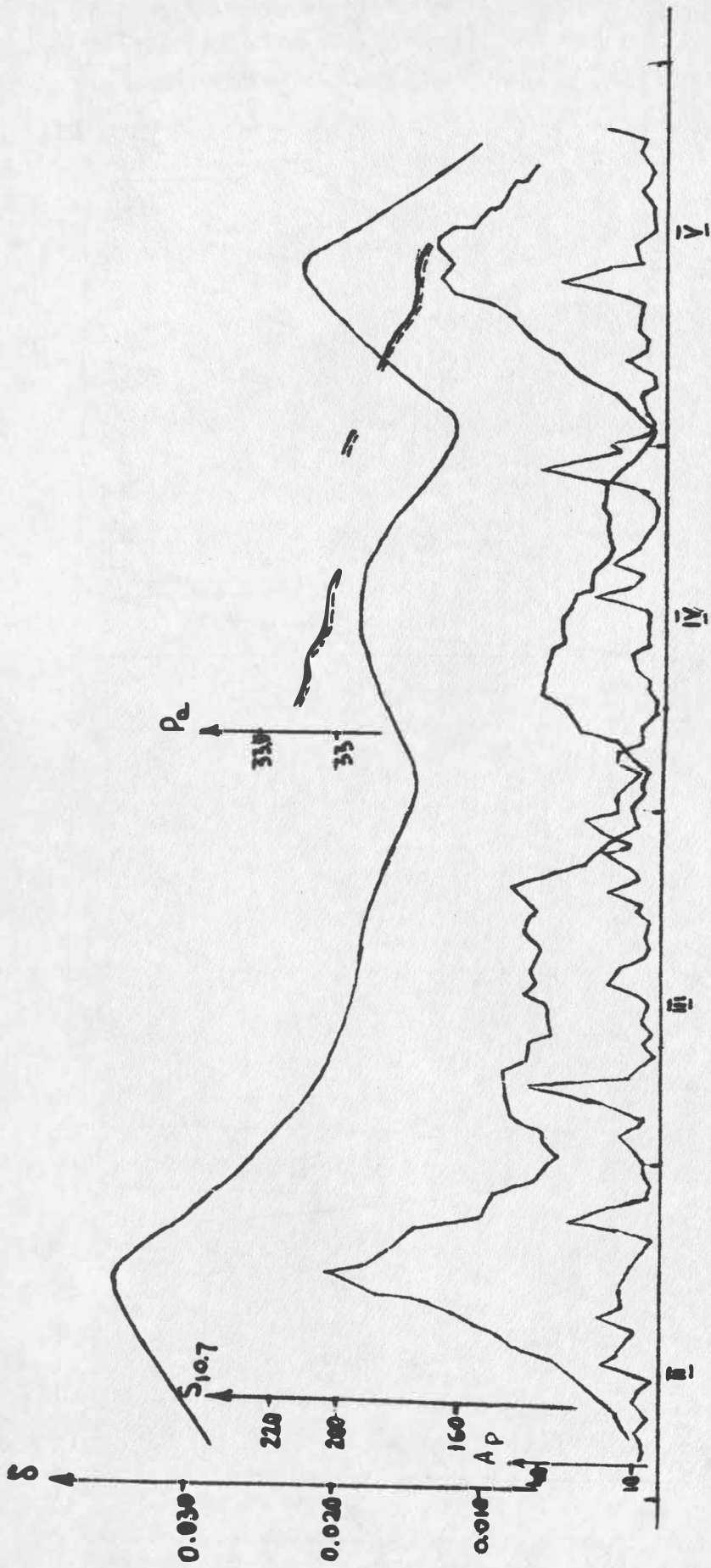
Рис. 1. Изменения баллистического коэффициента спутника Орел в 1972 году.

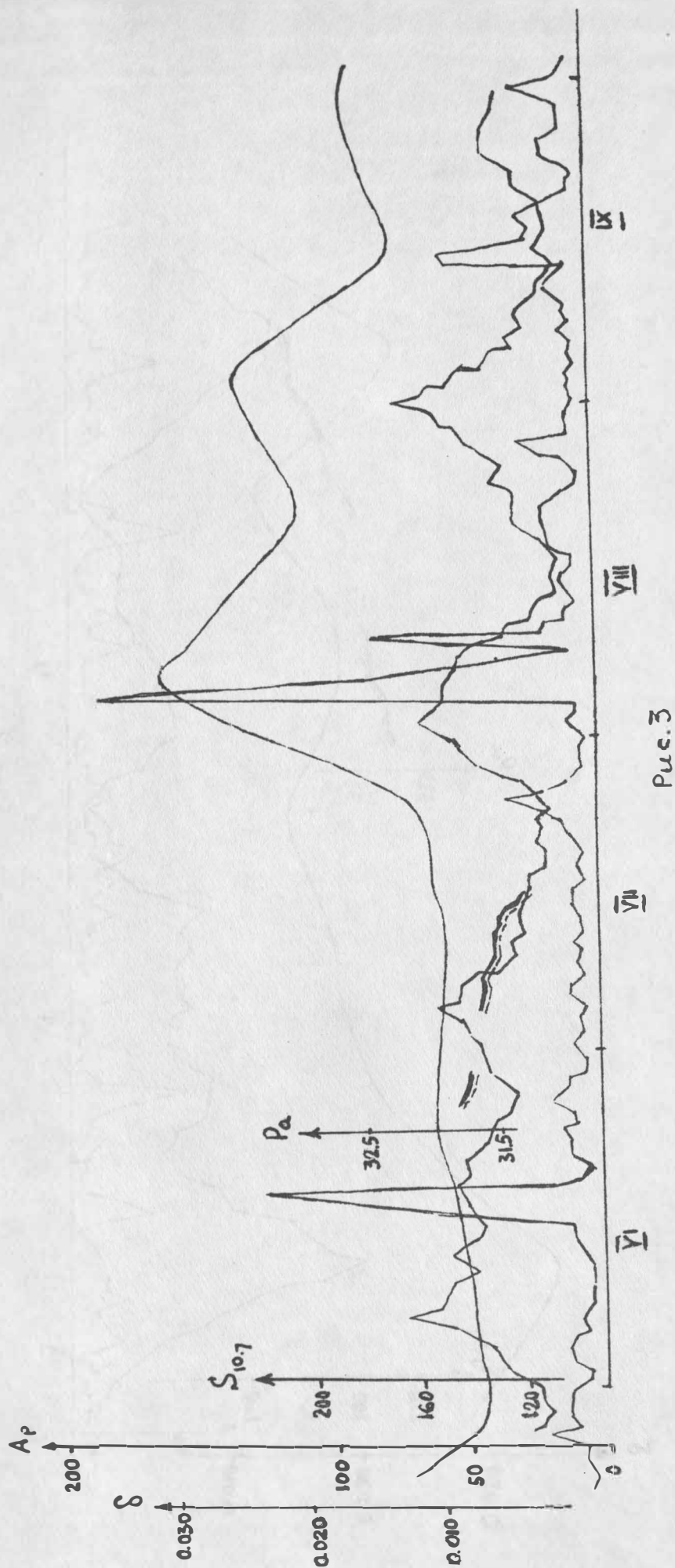
Рис. 2. Ход баллистического коэффициента и кратковременные вариации аномалистического периода в феврале-мае 1972г.

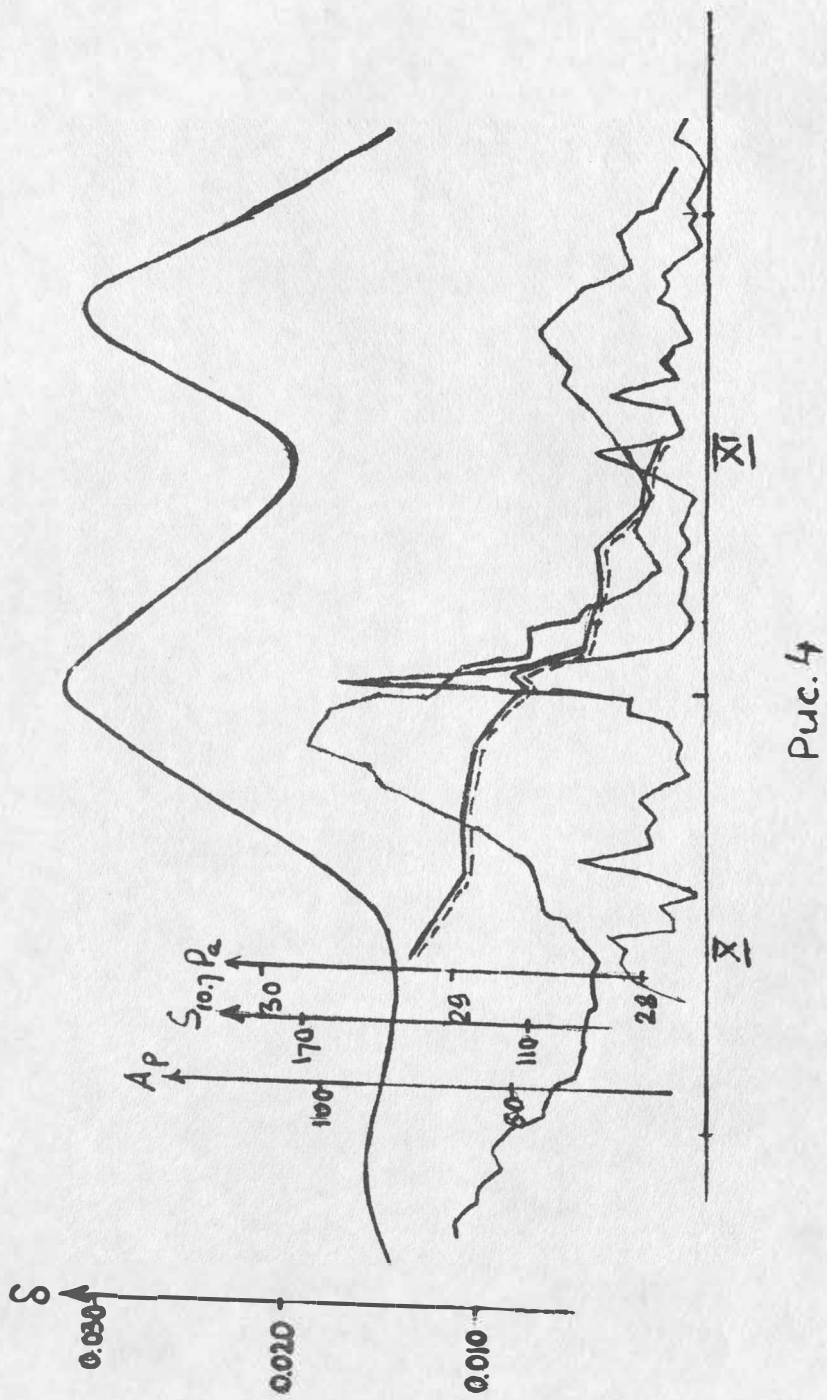
Рис. 3. Изменения баллистического коэффициента в зависимости от больших геомагнитных возмущений (июнь-август 1972г.)

Рис. 4. Ход баллистического коэффициента и кратковременные вариации аномалистического периода в октябре-ноябре 1972г.









ACCURACY INVESTIGATION OF SIMULTANEOUS PHOTOGRAPHIC
AND LASER OBSERVATIONS OF ARTIFICIAL SATELLITES

J. Ádám

Satellite Geodetic Observatory, Pécs
Hungary

Abstract: Topocentric vector components can be computed using simultaneous photographic observations and laser range measurements carried out at the station. The accuracy of components depends on the observational accuracy and on geometrical conditions. Based on the error propagation principle, an algorithm is developed to determine the mean square errors of the components. Simple accuracy investigations are described making use of partial derivatives too. Results of model computations are also presented characterizing the accuracy of the components under different geometrical and observing conditions. Those sections of space are pointed out, in which the components may be relatively well or badly determined.

Резюме: ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ОДНОВРЕМЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НАПРАВЛЕНИЯ И РАССТОЯНИЯ ИСЗ

Компоненты топоцентрических векторов могут быть определены по одновременным фотографическим и лазерным наблюдениям станции. Точность компонентов зависит от точности наблюдения и от конфигурации. Для вычисления средних квадратических ошибок компонентов разработаны алгоритмы, составленные с помощью общего принципа распространения ошибок. Проведена и простая оценка точности с помощью частичной производной. Кроме того, даются результаты проведенного моделирования, характеризующие точность компонентов при различных геометрических и наблюдательных условиях. Отмечены те секторы пространства, в которых отдельные компоненты определяются экстремальной /хорошей или плохой/ точностью.

1. Introduction

The following investigations are of general interest, because more and more satellite geodetic observatories carry out simultaneous photographic observations and laser ranging to Earth's satellites. As it's well-known, from these measurements /after several reductions; e.g. shutter, aberration, atmospheric-refraction corrections, calibration, etc./ the components of the topocentric vector can be computed. We were interested in the following problem: assuming a given observing accuracy, how the accuracy of the components depend on different geometric conditions and, under a given geometric condition, how they depend on different observing conditions. The accuracy dependence can be well pointed out by making use of partial derivatives and by analyzing the variancia-covariancia matrix of components of the topocentric vector. By illustrating the partial derivatives, mean square errors and error ellipsoids in orthographical projections, the changes of accuracy circumstances can be visually followed.

2. Expressions of the topocentric vector

The geometry of the topocentric vector in different cartesian coordinate systems used in satellite geodesy [Veis, 1960; Mueller, 1964] can be seen on Fig. 1.

In a topocentric cartesian coordinate system /XYZ/ defined by the observing station P, the expressions for computing the components of the topocentric vector are:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_S \cdot \cos \delta_S \cdot \cos \alpha_S \\ r_S \cdot \cos \delta_S \cdot \sin \alpha_S \\ r_S \cdot \sin \delta_S \end{bmatrix} \quad /1/$$

where

r_S is the topocentric range to the satellite measured by the laser-system,

α_s is the topocentric right ascension and
 δ_s is the topocentric declination.

Similar expressions are used in other coordinate systems; e.g. in the mean terrestrial coordinate system $X^3Y^3Z^3$ [Mueller et al., 1973a /page 6./] if we know the Greenwich hour angle $/h_G/$:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} X_S^3 - X_P^3 \\ Y_S^3 - Y_P^3 \\ Z_S^3 - Z_P^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s \cdot \cos \delta_s \cdot \cos h_G \\ r_s \cdot \cos \delta_s \cdot \sin h_G \\ r_s \cdot \sin \delta_s \end{bmatrix} \quad /2/$$

or in the horizontal coordinate system:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} r_s \cdot \cos h_s \cdot \cos A_s \\ r_s \cdot \cos h_s \cdot \sin A_s \\ r_s \cdot \sin h_s \end{bmatrix} \quad /3/$$

where

h_s is the elevation angle of the satellite and
 A_s is the azimuth.

We can change over from one coordinate system to another by making use of the transformations /e.g. from the mean sidereal system $X^1Y^1Z^1$ to the instantaneous sidereal system $X^2Y^2Z^2$ by precession- and nutationmatrix transformations [Veis, 1960 /page 99 and 100/] and from the instantaneous sidereal system to the mean terrestrial coordinate system $X^3Y^3Z^3$ by an \underline{S} -matrix transformation [Mueller et al., 1973b /page 54/]. So, by transforming the coordinates, the accuracy values of the individual components are also transformed.

We have examined only the expressions /1/, but the results obtained here are valid in other coordinate systems having been described above.

Properly speaking, the expressions /1/ give the coordinates of the satellite in the topocentric cartesian coordinate system XYZ.

3. Accuracy investigations by model computations and the results

Using partial derivatives, the following investigations can be carried out [Ádám, 1976]:

The small changes Δr_s , $\Delta \alpha_s$, $\Delta \delta_s$ in the measured quantities r_s , α_s , δ_s cause small changes

$$\begin{aligned} \Delta X_s &= \frac{\partial X_s}{\partial r_s} \cdot \Delta r_s, & \Delta X_s &= \frac{\partial X_s}{\partial \alpha_s} \cdot \Delta \alpha_s, & \Delta X_s &= \frac{\partial X_s}{\partial \delta_s} \cdot \Delta \delta_s, \\ \Delta Y_s &= \frac{\partial Y_s}{\partial r_s} \cdot \Delta r_s, & \Delta Y_s &= \frac{\partial Y_s}{\partial \alpha_s} \cdot \Delta \alpha_s, & \Delta Y_s &= \frac{\partial Y_s}{\partial \delta_s} \cdot \Delta \delta_s, & /4/ \\ \Delta Z_s &= \frac{\partial Z_s}{\partial r_s} \cdot \Delta r_s \text{ and } \Delta Z_s = \frac{\partial Z_s}{\partial \delta_s} \cdot \Delta \delta_s \end{aligned}$$

in the components X_s, Y_s, Z_s , where the coefficients of the right sides of expressions /4/ are the partial derivatives of the components with respect to the measured data r_s, α_s, δ_s . Let us assume that the small changes $\Delta r_s, \Delta \alpha_s, \Delta \delta_s$ in the measured r_s, α_s, δ_s are observing errors, giving rise to the errors in the components of the topocentric vector /it is possible, because they are very small relative to the measured data/. It is obvious that the effects of the observing errors in the components /the error propagation/ are determined by the variations of the partial derivatives. So, we have computed the values of partial derivatives in function of the topocentric right ascension α_s and declination δ_s . α_s was changed from 0° to 360° by steps of 5° , δ_s was changed from 0° to 90° by steps of also 5° . The computed values of the partial derivatives are plotted in the orthographical projection [Hazay, 1964 /page 169/], drawing lines on points with the same values.

Fig. 2a-f. show the following partial derivatives one after the other:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_s}{\partial r_s} &= \frac{g''}{r_s} \cdot \left(\frac{\partial Y_s}{\partial \alpha_s} \right), & \frac{\partial Y_s}{\partial r_s} &= -\frac{g''}{r_s} \cdot \left(\frac{\partial X_s}{\partial \alpha_s} \right), & \frac{\partial Z_s}{\partial r_s} &, \\ & -\frac{g''}{r_s} \cdot \left(\frac{\partial X_s}{\partial \delta_s} \right), & -\frac{g''}{r_s} \cdot \left(\frac{\partial Y_s}{\partial \delta_s} \right), & \frac{g''}{r_s} \cdot \left(\frac{\partial Z_s}{\partial \delta_s} \right). \end{aligned}$$

The areas in Fig. 2a-f marked and shadowed by solid line show such sections of the space in which less than 30 % of measuring errors propagate into the individual components causing their errors. And the areas marked and shadowed by dashed line show such sections of the space in which more than 80 % of errors of the measured quantities r_s, α_s, δ_s propagate into the individual components giving rise to their errors.

It can be seen from these figures, that the variations of the partial derivatives reflects the accuracy circumstances very truly. On the other hand, the variations of the partial derivatives /their numerical values/ is determined by the relative geometry of the station and satellite.

It is to be noted, that the coefficient $\frac{g''}{r_s} / g'' = 206264.806 /$ in some cases makes the effects of partial derivatives more or less sensible.

As the errors of individual components are caused by all the observing errors together, we have investigated the accuracy of the components by analyzing the variancia-covariancia matrix. Taking different accuracy values /table 2., in which the $m_{r_s}, m_{\alpha_s}^2 = m_{\alpha_s} \cdot \cos \delta_s, m_{\delta_s}$ are the mean square errors of measured data r_s, α_s, δ_s / for the variancia-covariancia matrix of the measured data, the variancia-covariancia matrix of the components can be computed [Detrekői, 1973 /page 75/] as follows:

$$\underline{N} = \underline{F}^T \underline{M} \underline{F}, \quad /5/$$

where

\underline{M} is the variancia-covariancia matrix of the measured data,

\underline{F} contains the partial derivatives and

\underline{F}^T is transponent of the matrix \underline{F} .

Given the topocentric range /assumed to be 1000 km/, the elements of the variancia-covariancia matrix of the components were computed as a function of the topocentric right ascension α_s and declination δ_s . They were sistematically changed as earlier. The elements of the error ellipsoids were also computed [Hirvonen, 1971 /page 165-176/]. The mean square errors of the com-

ponents and the error ellipsoids are also plotted in orthographical projections.

Those sections of space in which the mean square errors of the individual components are relatively small or large, are specially marked on the graph. So, on Fig. 3a. those space sections are marked and shadowed by solid line, in which the mean square errors of the components denoted as on Fig., are smaller than 50 % of their existing maximum value. Fig. 3b. shows those space sections, in which the mean square errors of the components denoted also as on Fig., are larger than 80 % of their existing maximum value.

It is to be noted, in addition, that the mean square errors of X_s and Y_s in the sections $\alpha_s = 0^\circ - 45^\circ / \pm k \cdot 90^\circ / k=1,2,3$; $0^\circ \leq \delta_s \leq 90^\circ$ are the same as in $\alpha_s = 45^\circ - 90^\circ / \pm k \cdot 90^\circ / k=1,2,3$; $0^\circ \leq \delta_s \leq 90^\circ$, but their accuracy values are transposed symmetrically to the planes of $\alpha_s = 45^\circ \pm k \cdot 90^\circ / k=1,2,3$; $0^\circ \leq \delta_s \leq 90^\circ$.

Assuming errors of α_s and δ_s to be equal /it is the general case/, Fig. 4. shows those sections of space in which the mean square errors of the individual coordinates, as denoted on the figure, are nearly equal.

Fig. 5a,b. show the computed error ellipsoids in orthographical projectin. Supposing a given observing accuracy, the changes of the accuracy circumstances can be well followed /see on Fig. 5a./. And on Fig. 5b., under a given geometric condition, the changes of accuracy circumstances can also visually^(be) followed in function of different observing conditions.

REFERENCES

- Ádám, J. /1976/. "Mesterséges holdra egyidejűleg végzett távolság- és iránymérések pontossági vizsgálata". Geodézia és Kartográfia, 28/6/, 397-405.
- Detrekői, Á. /1973/. Kiényenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Hazay, I. /1964/. Vetülettan. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Hirvonen, R.A. /1971/. Adjustment by least squares in geodesy and photogrammetry. Frederick Ungar Publ. Co., New York.
- Mueller, I.I. /1964/. Introduction to Satellite Geodesy. Frederick Ungar Publ. Co., New York.
- Mueller, I.I.-Reilly, J.P.-Kumar, M.-Saxena, N. /1973a/. "Free geometric adjustment of the DOC/DOD cooperative worldwide geodetic satellite /BC-4/ network". Reports of the Department of Geodetic Science, No. 193, The Ohio State University, Columbus.
- Mueller, I.I.-Kumar, M.-Reilly, J.P.-Saxena, N.-Soler, T. /1973b/. "Global Satellite Triangulation and Trilateration for the National Geodetic Satellite Program /Solutions WN-12, 14 and 16/". Reports of the Department of Geodetic Science, No. 199, The Ohio State University, Columbus.
- Veis, G. /1960/. "Geodetic Uses of Artificial Satellites". Smithsonian Contributions to Astrophysics, 3/9/, pp. 95-161, Smithsonian Institution, Washington, D.C.

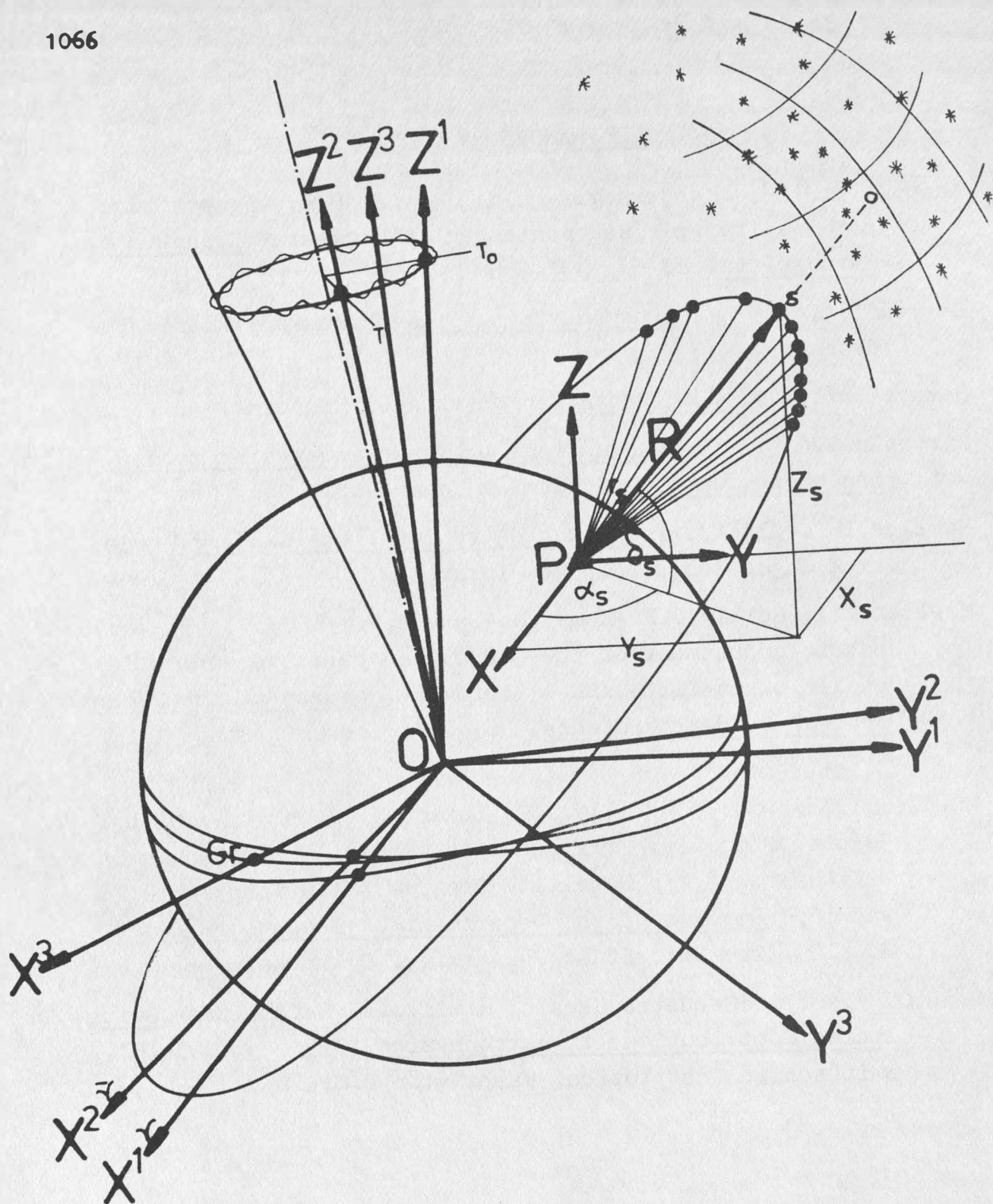


FIGURE 1

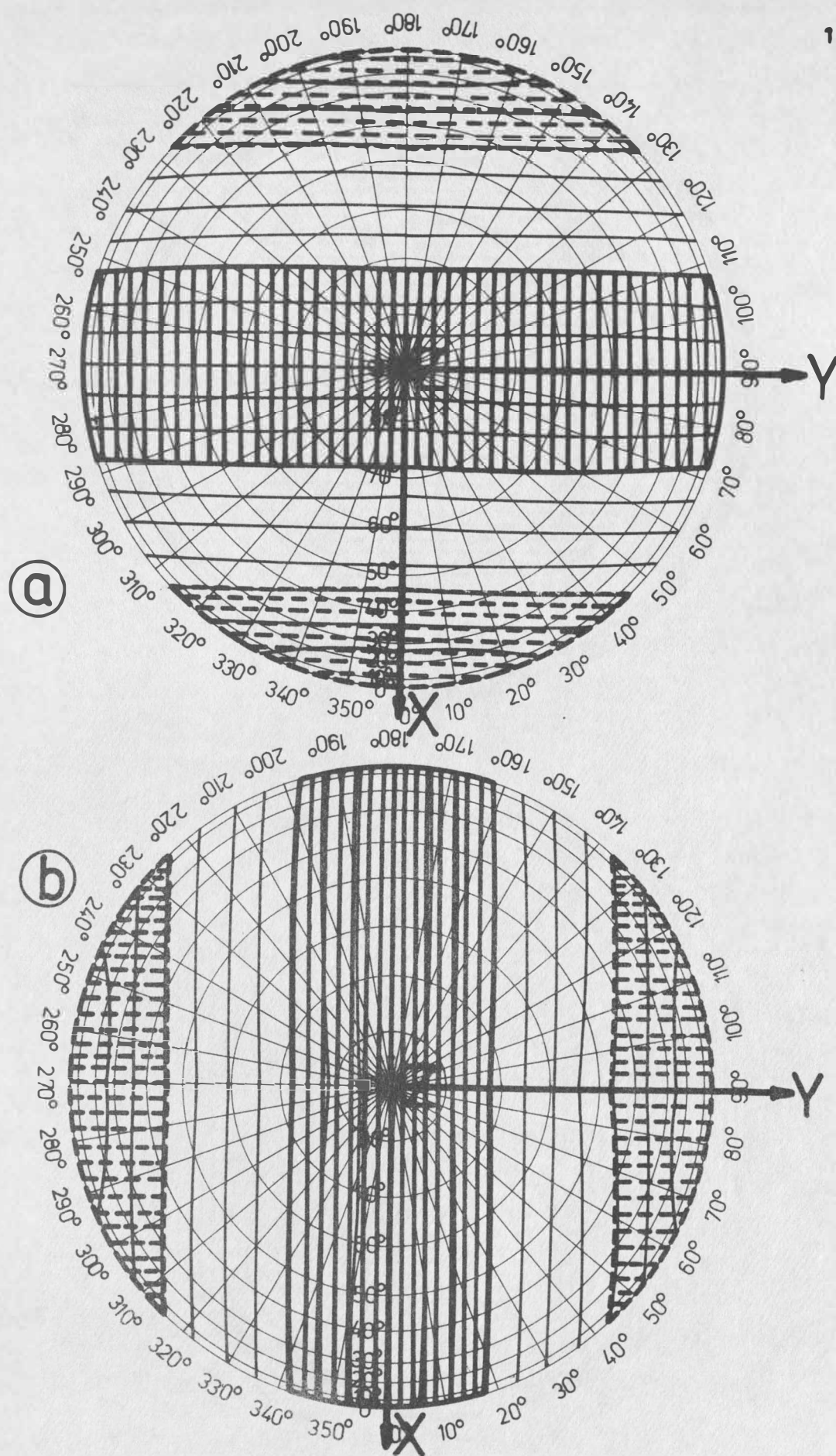


FIGURE 2

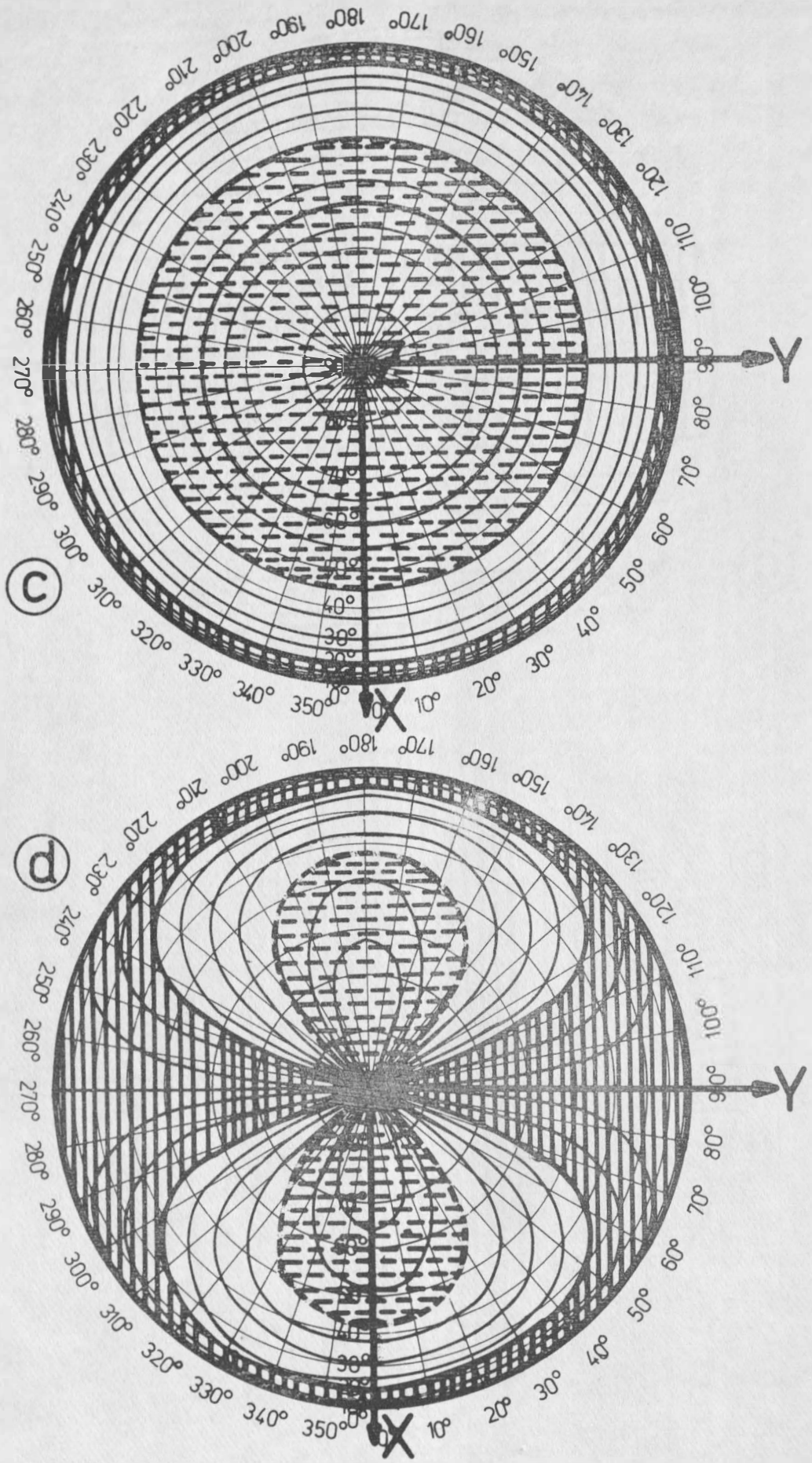


FIGURE 2

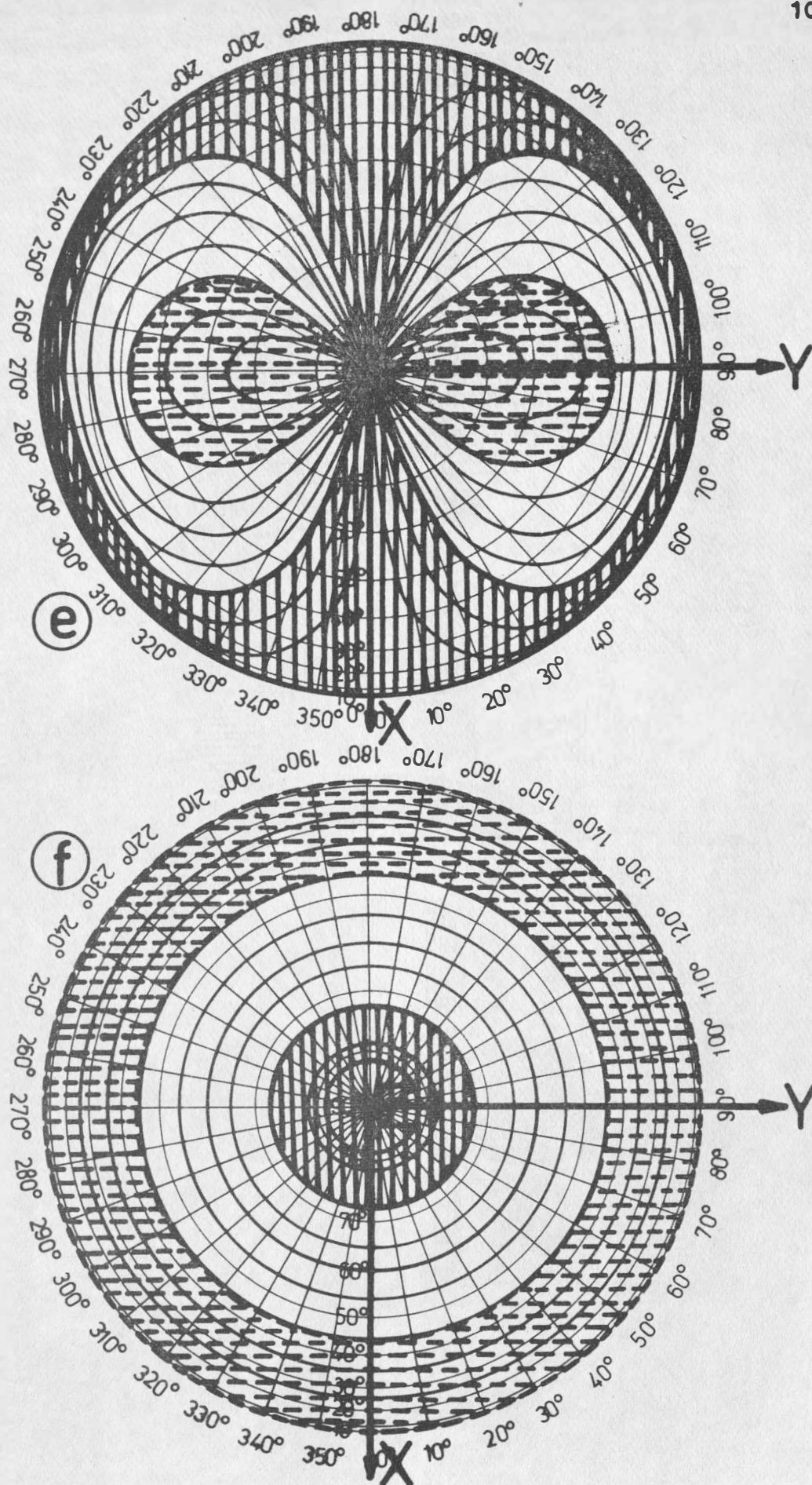


FIGURE 2

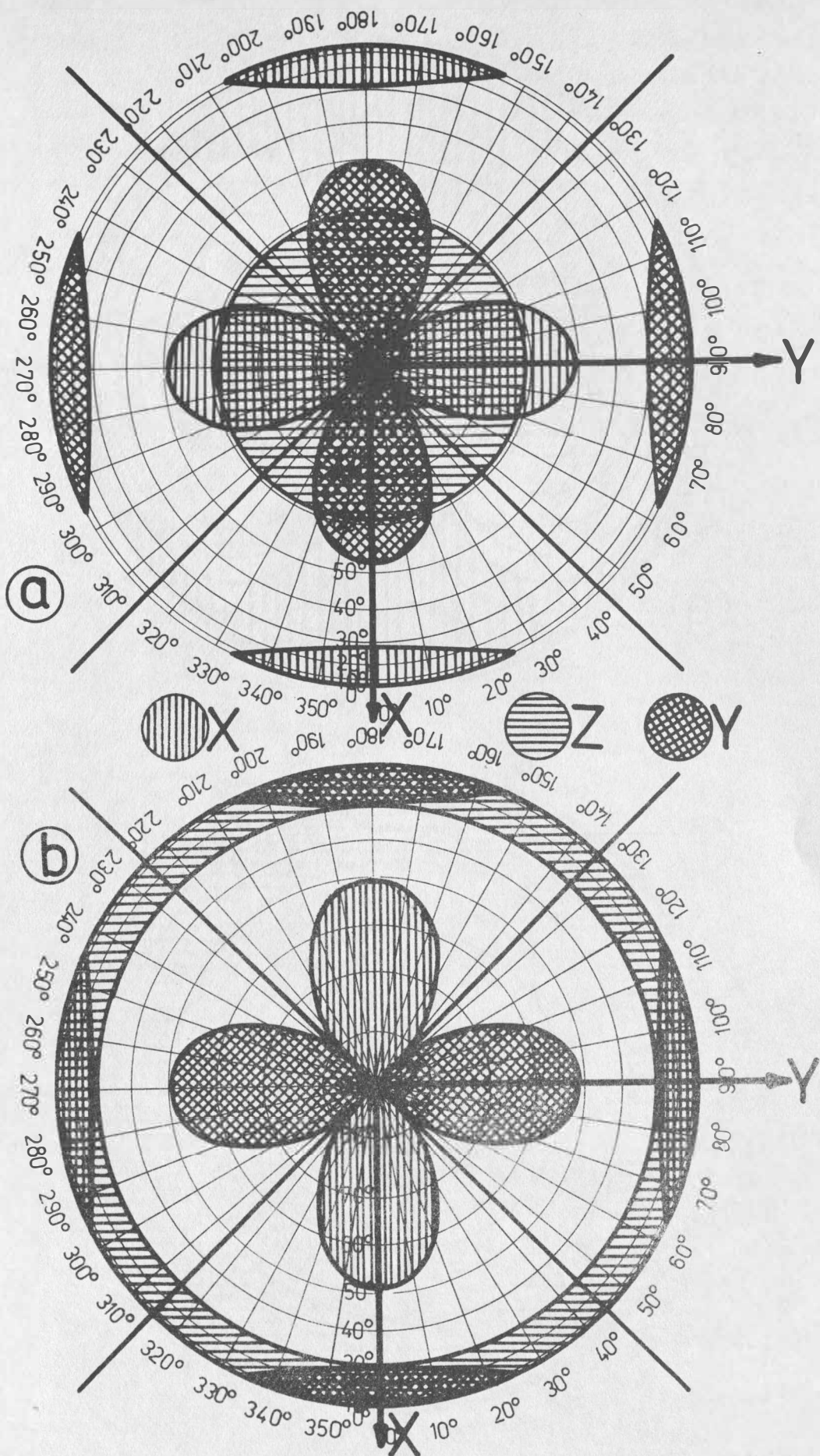


FIGURE 3

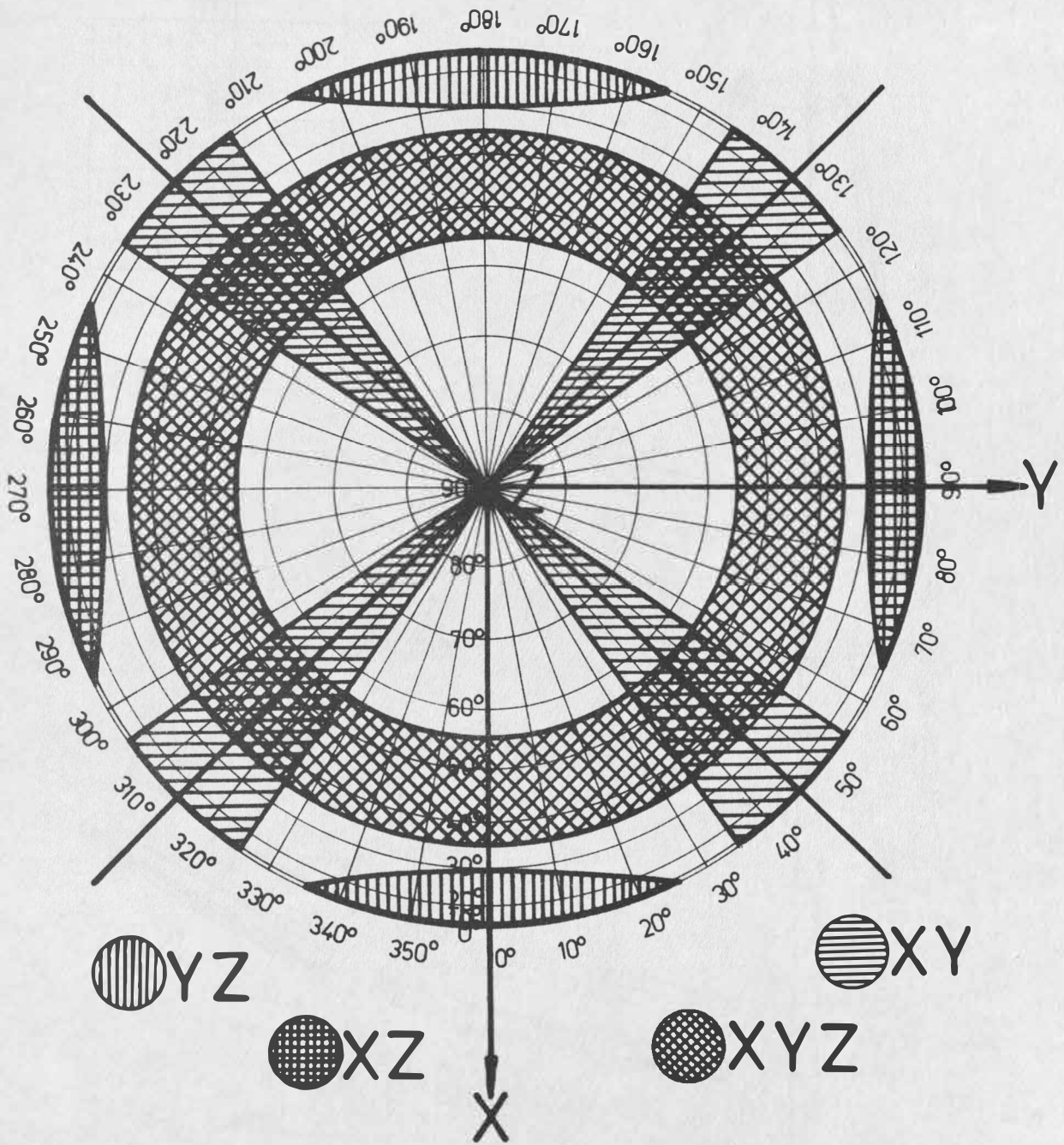


FIGURE 4

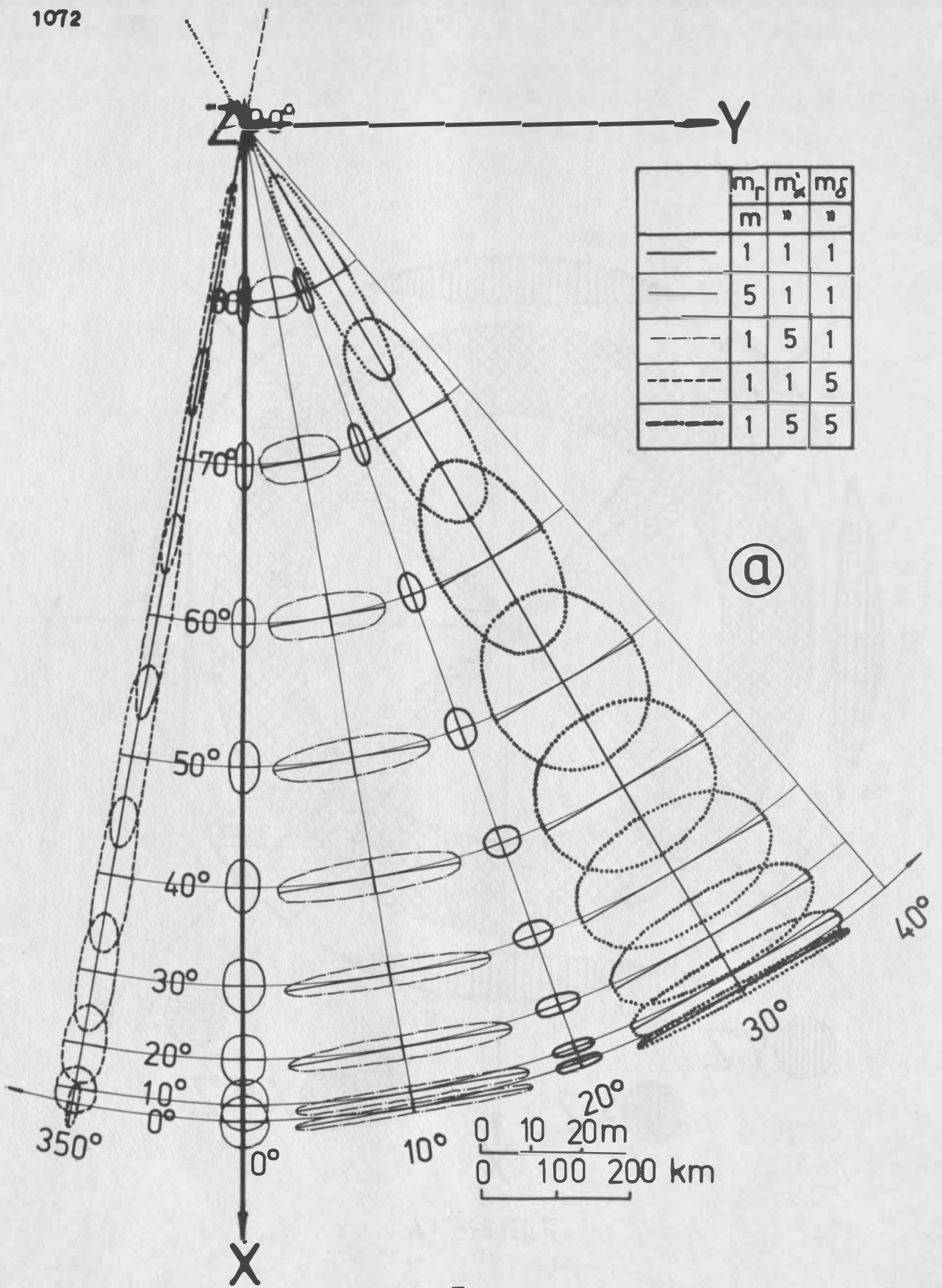


FIGURE 5

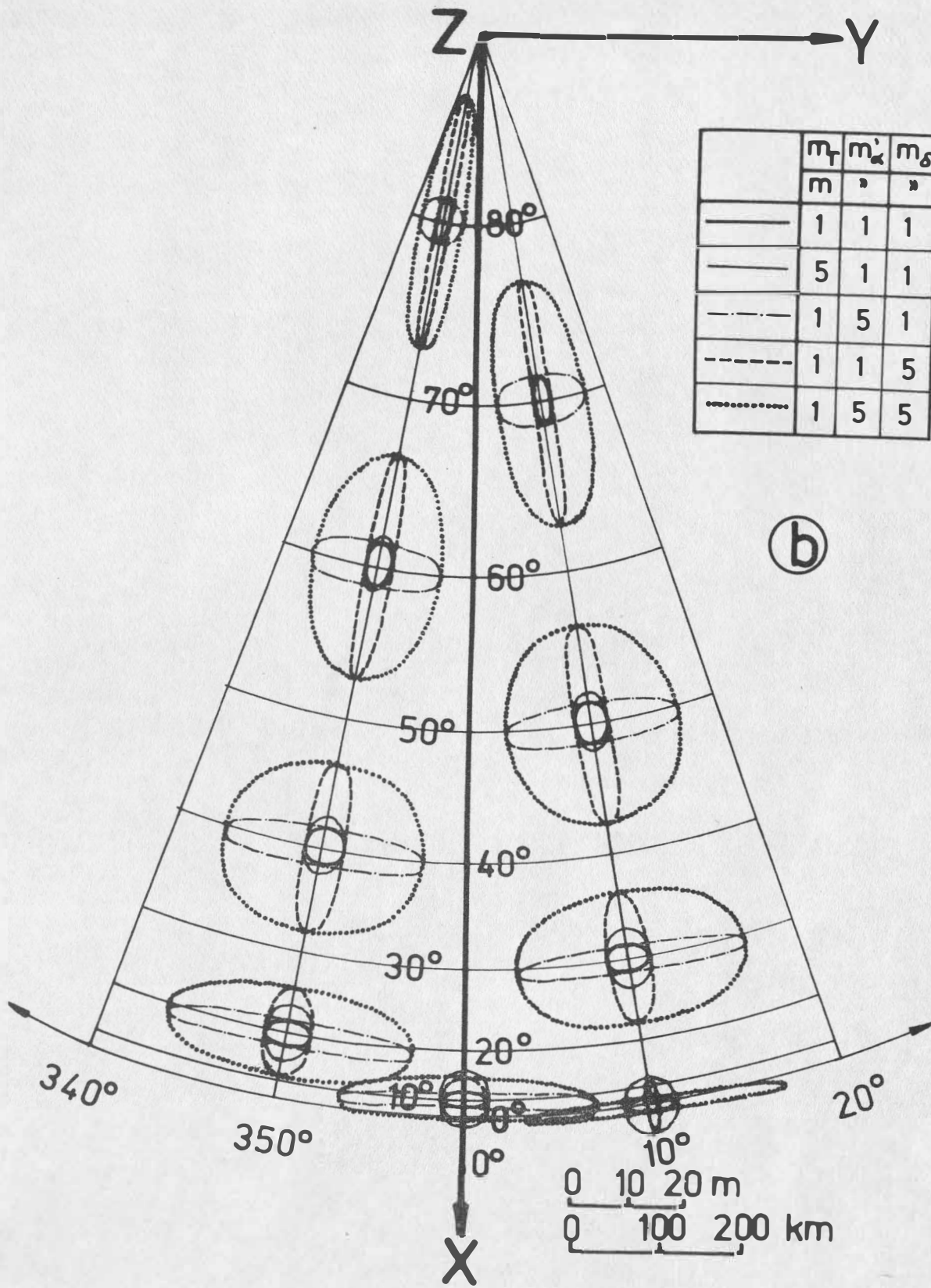


FIGURE 5

Retroreflector Shape - One of the Sources of Errors

by

PETR HIRŠL¹⁾Summary

In this notion we have made a presentation of the influence of the satellite reflector shape. When very complicated it causes some shifts of the centre of weight in the reflected pulse.

Резюме

В этой заметке привлекается внимание к тому факту, что сложная форма цели способствует смещению центра тяжести импульса совсем нерегулярным образом.

No one has had noted yet the influence of the shape of the retroreflector placed on the satellite. It is possible to show the complicated for of the retroreflector should cause some complicated shift of the centre of weight in the reflected pulse.

For simplicity we have taken an assumption the shape of the retroreflector takes a sphere by itself as first. For second the reflected signal is only a function of the surface projection in the plane perpendicular to the direction of the ray. It is possible to show in that case the reflectivity characteristic of such a retroreflector is not too different from that of Starlet or Lageos satellite.

Maximal reflection portion is from the part of the sphere near the section A (Fig. 1). The deformation of the reflected pulse is shown on the Fig. 2 and 3. The centre of weight for a symmetrical pulse is in accord with the point of maximal reflection (Fig. 2). Very different result we get by an asymmetrical pulse. In that case the centre of weight is shifted at a distance twice greater from the point of the maximal reflection, but in the different direction than in the laser pulse (in our case to left from the previous right one - see Fig. 3). These results were achieved by graphical evaluations of the shown pulses.

¹⁾ Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering, Prague

Conclusion

The longer the pulse is the greater the shift of the centre of weight should be. That means the greater is the error of the position determination of the satellite. By the spherical shape of the retroreflector there is possible to determine the position of the centre of the satellite if all parameters of it are known. For this purpose we must determine the shift of the centre of weight for both the laser pulse and the reflected one. Much worse we are with same retroreflector of more complicated shape. In that case we know nothing about the instantaneous shape of the retroreflector because of changes of the satellite position in the space.

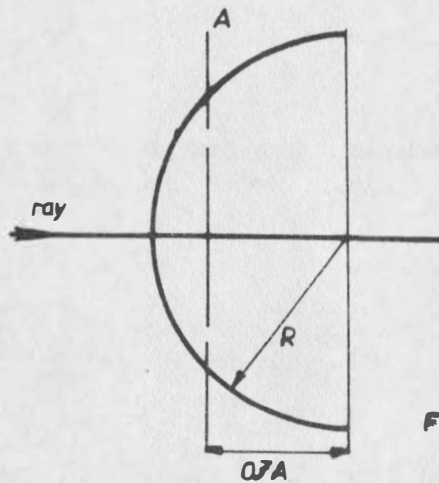


FIG. 1.

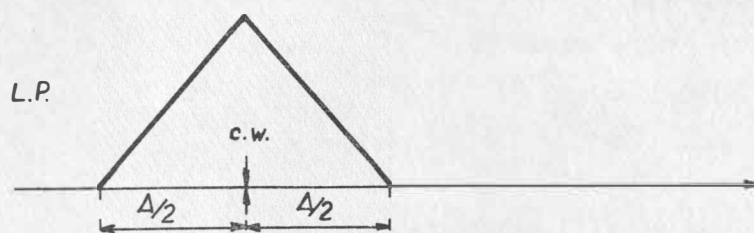


FIG. 2.

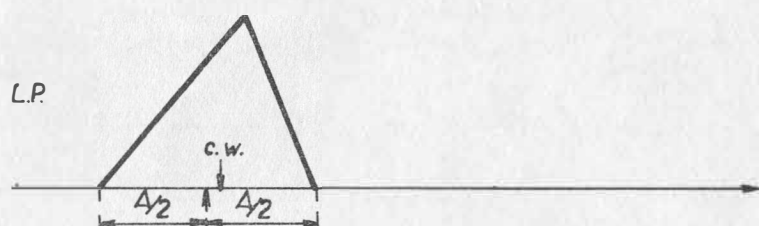
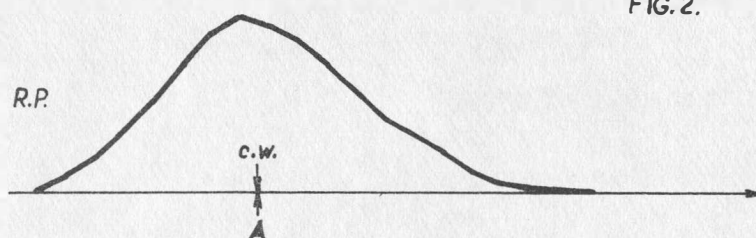
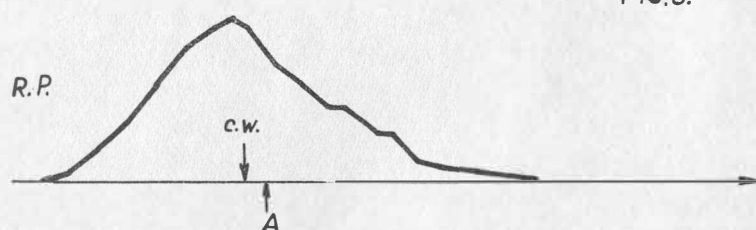


FIG. 3.



Adam, J.	3/1059
Adam, J.	3/ 885
Aksénov, E.P.; Vaškov'jak, S.N.; Emel'janov, N.V.	3/1007
Almar, I.; Horváth, A.; Illes-Almar, E.	3/ 739
Altmann, W.; Dittfeld, H.-J.; Elstner, Cl.	2/ 521
Anger, G.	2/ 633
Arnold, K.; Schoeps, D.	2/ 667
Balmino, G.; Reigber, Ch.; Moynot, B.	1/ 193
Barta, G.	2/ 369
Batrakov, Ju.V.; Nikol'skaja, T.K.	3/ 871
Bodri, B.; Bodri, L.	2/ 441
Bulygina, O.M.; Surnin, Ju.V.	1/ 175
Burša, M.	1/ 83
Burša, M.	2/ 257
Cannon, W.H.; Langley, R.B.; Petrachenko, W.T.	2/ 281
Chovitz, B.H.	1/ 43
Dittrich, J.; Felsmann, E.	2/ 581
Dobaczewska, W.	2/ 397
Dufour, H.M.	2/ 405
Elstner, Cl.; Harnisch, G.; Altmann, W.; Conrad, W.	2/ 541
Erzanov, Sz.	1/ 129
Galas, R.	2/ 569
Georgiev, N.	3/ 763
Gerstenecker, C.	2/ 547
Goral, W.	3/ 913
Grafarend, E.; Hauer, K.	2/ 239
Groten, E.	2/ 379
Groten, E.; Schaab, H.	2/ 333
Halme, S.J.; Paunonen, M.; Sharma, A.B.R.; Kakkuri, J.; Kalliomäki, K. (Presented by T.J. Kukkamäki)	3/ 791
Halmos, F.; Szádeczky-Kardoss, Gy.	3/ 921
Harnisch, G.	2/ 611
Harwardt, H.; Simon, D.	2/ 511
Hiršl, P.	3/1075
Hiršl, P.; Krajiček, V.; Pfeifer, M.	3/ 813
Holota, P.	2/ 269
Horvath, A.; Horvath, P.; Peter, I.	3/ 953
Hovorka, F.; Konrád, M.; Utekal, J.	3/ 853
Hristov, W.	2/ 327
Hurnik, H.	2/ 585
Ill, M.	3/ 695
Illes-Almar, E.	3/ 719
Jochmann, H	2/ 323
Kabelač, J.	3/ 945
Kasimenko, T.V.; Jankovskaja, I.A.	3/1047
Kautzleben, H.	1/ 17
Klokočník, J.	3/1027
Kolaczek, B.	2/ 589
Kostalecký, J.	3/1019
Kugaenko, B.V.	3/ 727
Kurzýnska, K.	3/1045
Latka, J.	3/ 785
Lelgemann, D.	2/ 419

Maase, E.	3/ 959
Marek, K.-H.; Rehse, H.	3/ 931
Massewitsch, A.	1/ 31
Mather, R.S.	1/ 59
Meier, S.	2/ 623
Mihály, Sz.	3/ 859
Montag, H.; Gendt, G.	1/ 185
Neubert, R.; Fischer, H.	3/ 795
Ostrovsky, A.E.	2/ 673
Parijskij, N.N.; Perzev, B.P.	2/ 683
Pellinen, L.P.	1/ 145
Perzev, B.P.	2/ 493
Ponomarev, D.; Wächter, S.	2/ 575
Prilepin, M.T.; Zabolotnyj, N.S.	3/1029
Rother, K.; Wiegank, F.	2/ 617
Schillak, S.; Wnuk, E.	3/ 803
Schmitz-Hübsch, H.	2/ 529
Schneider, M.M.; Simon, D.	2/ 499
Schwahn, W.	2/ 657
Sehnal, L.	3/ 691
Stange, L.; Swiatek, K.	3/ 877
Stupak, T.; Vorbrich, K.; Wieckowski, J.	3/ 967
Swierkowska, S.	3/1037
Thurm, H.	2/ 599
Treder, H.-J.	1/ 119
Tscherning, C.C.	2/ 261
Völgyesi, L.	2/ 561
Vorbrich, K.	3/ 753
Vysocil, P.	1/ 169
Wilson, P.; Seeger, H.; Nottarp, K.	3/ 823
✓ Zagar, Ju.Ch.	3/ 989

