

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR

Forschungsbereich Kosmische Physik

**ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE**

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde

Nr. 24

Q  
2548  
—  
24

# Ausbreitung von seismischen Oberflächenwellen in Medien mit vertikalen Diskontinuitäten

55759

Zentralinstitut Physik d. Erde  
Bibliothek  
Potsdam Bereich II

von

Peter Malischewsky



Als Manuskript gedruckt

Potsdam 1973

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR

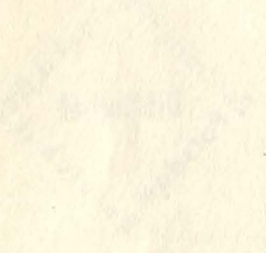
Forschungsbereich Klassische Physik

ZENTRALBLATT FÜR PHYSIK DER ERDE

Vorbereitungen des Zentralblatts für Physik der Erde

Nr. 22

Ausbreitung von seismischen Oberflächenwellen  
in Medien mit vertikalen Diskontinuitäten



von

Leopold Hildebrandt



52. Monographienreihe

Berlin 1973

1.	Einleitung	5
1.1.	Allgemeine Bemerkungen	5
1.2.	Geologische und seismologische Aspekte der Diskontinuitäten	5
1.3.	Mathematische Konventionen	8
2.	Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten aus mathematischer Sicht	9
2.1.	Grundlegende mathematische Probleme und historische Übersicht	9
2.2.	Die Eigenfunktionsmethode	10
2.3.	Die Methode des GREENSchen Tensors	10
2.4.	Das Verfahren von ALSOP	11
3.	Der elastische Halbraum und seine Eigenfunktionen	14
3.1.	Das diskrete Spektrum der Eigenfunktionen, repräsentiert durch die Oberflächenwellen	14
3.1.1.	Die Lösung der Bewegungsgleichungen	14
3.1.2.	Die Orthogonalitätsrelation	20
3.1.3.	Der Energietransport	22
3.2.	Das kontinuierliche Spektrum, repräsentiert durch die Raumwellen	24
4.	Der elastische Halbraum mit Vertikaldiskontinuität	30
4.1.	Das SNELLIUSsche Brechungsgesetz	30
4.2.	Die Formulierung der Randbedingungen	34
4.3.	Die Bestimmung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Oberflächenwellen	38
5.	Der elastische Halbraum mit unebener Diskontinuität	50
5.1.	Formulierung der Randbedingungen	50
5.2.	Einführung eines neuen Koordinatensystems	53
5.3.	Die Randbedingungen im $\bar{\sigma}$ -System	58
5.4.	Die Auflösung nach den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Oberflächenwellen	60
6.	Die numerische Durchführung der Rechnung	62
6.1.	Die Ankopplung an die Ergebnisse des HASKELLSchen Matrizenverfahrens	62
6.2.	Bemerkungen zum FORTRAN-IV-Programm	70
7.	Ausblick auf Möglichkeiten der praktischen Anwendung	72
8.	Zusammenfassung der Ergebnisse	74
	Literatur	76

### Zusammenfassung

Es wird die Ausbreitung seismischer Oberflächenwellen in geschichteten elastischen Medien mit lateralen Störungen auf der Basis einer Methode von ALSOP untersucht. Insbesondere werden die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten schräg einfallender seismischer Oberflächenwellen für vertikale Diskontinuitäten genähert berechnet. Die RAYLEIGH- und LOVE-Wellen werden dabei zu einem einheitlichen Eigenfunktionensystem zusammengefaßt und ihre wechselseitige Umwandlung ineinander zugelassen. Die Einbeziehung des kontinuierlichen Spektrums, repräsentiert durch die Raumwellen, ist möglich. Durch Einführung eines krummlinigen Koordinatensystems gelingt es erstmalig, auch unebene Diskontinuitäten auf dieser Basis zu behandeln.

### Summary

On the basis of ALSOP's method the propagation of seismic surface waves in layered elastic media with lateral inhomogeneities is considered. For a vertical discontinuity approximate reflection and transmission coefficients of obliquely incident seismic surface waves are obtained. RAYLEIGH and LOVE waves are arranged in such a way that they form a homogeneous eigenfunction system and their mutual conversion into each other is allowed. The inclusion of the continuous spectrum represented by the body waves is possible. To use curvilinear coordinates succeeds in this connection for the first time in treating curved discontinuities, too.

### Résumé

En se basant sur une méthode élaborée par ALSOP, l'auteur a étudié la propagation d'ondes de surface séismiques dans des milieux élastiques stratifiés présentant des perturbations latérales et il a, en particulier, fait des calculs approchés pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission d'ondes de surface séismiques à incidence oblique pour des discontinuités verticales. Il a groupé les ondes de RAYLEIGH et les ondes de LOVE en un système unique de fonctions propres en admettant la possibilité de la conversion de l'un type d'ondes en l'autre et vice versa. L'inclusion du spectre continu, représenté par les ondes de volume, est possible. L'utilisation d'un système de coordonnées curviligne a permis pour la première fois de traiter par la méthode susmentionnée également des discontinuités courbes.

### Резюме

Рассматривается распространение сейсмических поперностных волн в слоистых упругих средах с латеральной неоднородностью на базе метода Альзопа. В частности приближённо вычислены коэффициенты отражения и прохождения наклонно падающих сейсмических поперностных волн для вертикальных разрывностей. Волны Рэлея и Лява при этом соединяются в единой системе собственных функций и допускается их взаимное преобразование одно в другое. Возможно включение непрерывного спектра, представляемого объёмными волнами. Пользование криволинейных координат позволяет впервые обрабатывать тоже неровные разрывности на этой базе.

## 1. Einleitung

### 1.1. Allgemeine Bemerkungen

Die Pionierarbeiten von RAYLEIGH (1885) [72] und KNOTT (1888) über die Theorie der elastischen Oberflächenwellen und die Reflexion und Brechung elastischer Raumwellen regten eine große Anzahl von Autoren an, sich eingehend mit diesen Problemen zu befassen mit dem Erfolg, daß eine unübersehbar große Anzahl von Arbeiten zu diesem Gegenstand existiert. Es wurden große Fortschritte in Richtung auf ein Verständnis der Erdbebenphänomene gemacht, und trotzdem blieben viele Fragen, deren Klärung für ein völliges Verstehen der komplizierten Natur von seismischen Wellen notwendig wäre, offen. Die Schwierigkeiten resultieren einerseits aus dem komplexen Erdbebenmechanismus und andererseits aus der komplizierten Struktur der Erde, in welcher sich die Erdbebenwellen ausbreiten. Die Trennflächen, die zwischen verschiedenen Medien innerhalb der Erde existieren, geben Anlaß zu vielen Reflexionen und Brechungen der Wellen auf ihrem Weg von der Quelle zum Empfänger. Darum haben die Seismogramme von Erdbeben ein verwirrendes Aussehen. In ihnen ist Information über das Erdinnere enthalten. Da die Grundabsicht der Geophysik darin besteht, eine dritte Dimension für die geologischen Karten zu erschließen, d. h. in die Tiefe zu gehen, kommt es darauf an, die Seismogramme unter diesem Gesichtspunkt zu interpretieren. Als Schlüssel für die Gewinnung der gewünschten Information aus den Seismogrammen bieten sich theoretische Studien über die Ausbreitung von elastischen Wellen in gestörten Medien an. In erster Näherung stellt man sich die Erde aus konzentrischen Schichten aufgebaut vor. Dieser Normalzustand kann durch lokale Anomalien gestört sein, und eine solche Anomalie stellt die vertikale oder geneigte Diskontinuität dar, mit deren Einfluß auf die Ausbreitung von Oberflächenwellen sich diese Arbeit beschäftigt. Diese Diskontinuitäten ergeben einerseits eine gewisse Modifikation für die Ausbreitung von Oberflächenwellen in geschichteten Medien, andererseits interessieren sie als solche selbst und können mittels der Oberflächenwellen näher erforscht werden.

MINTROP äußerte einmal: „Ein alter Bergmannsspruch lautet: ‚Hinter der Hacke ist es duster‘ und - wie wir hinzufügen können - unter dem Meißel und der Bohrkrone auch. Dieses Dunkel vor dem Ansetzen von Bohrungen so weit wie möglich aufzuhellen, ist Aufgabe der Geologie und Geophysik.“

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die Wechselwirkung von seismischen Oberflächenwellen mit einer (vertikalen) Diskontinuität unter Berücksichtigung von Wechselwellen theoretisch zu erfassen und auf dieser Grundlage den Einfluß von realen lateralen Störungen auf dem Territorium der DDR abzuschätzen.

### 1.2. Geologische und seismologische Aspekte der Diskontinuitäten

Unter Diskontinuitäten im Sinne dieser Arbeit verstehen wir Flächen, auf denen sich die Materialparameter Longitudinalwellengeschwindigkeit, Transversalwellengeschwindigkeit und Dichte sprunghaft ändern und deren sämtliche Tangentialebenen einen von Null verschiedenen Winkel mit der Einfallsebene der Oberflächenwellen einschließen. Die sogenannten vertikalen Diskontinuitäten, mit denen sich der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt, sind ebene Flächen, die auf der Einfallsebene der Oberflächenwellen senkrecht stehen. Zu den hier betrachteten Diskontinuitäten gehö-

ren die Gruppen:

1. Kontinentalränder,
2. Verwerfungen.

Die Diskontinuitäten der ersten Gruppe kommen durch die Unterschiede des kontinentalen und ozeanischen Krustenaufbaus zustande. Dabei sind die auffälligsten Unterschiede die Tiefe der MOHORoviČIĆ-Diskontinuität, die unter Kontinenten zwischen 30 und 50 km schwankt und unter Ozeanen etwa 10 - 12 km beträgt, und das Fehlen einer Granit-schicht in der ozeanischen Kruste. Die Kontinentalränder sind Diskontinuitäten von globalem Ausmaß.

Verwerfungen sind relativ steil oder vertikal einfallende Bruchstörungen mit wesentlichen Verschiebungen an den Bruchflächen. Durch eine Verwerfung in horizontalen Schichten werden im allgemeinen in Abhängigkeit von der Sprunghöhe verschiedene Schichten miteinander in Berührung gebracht (Abb. 1).

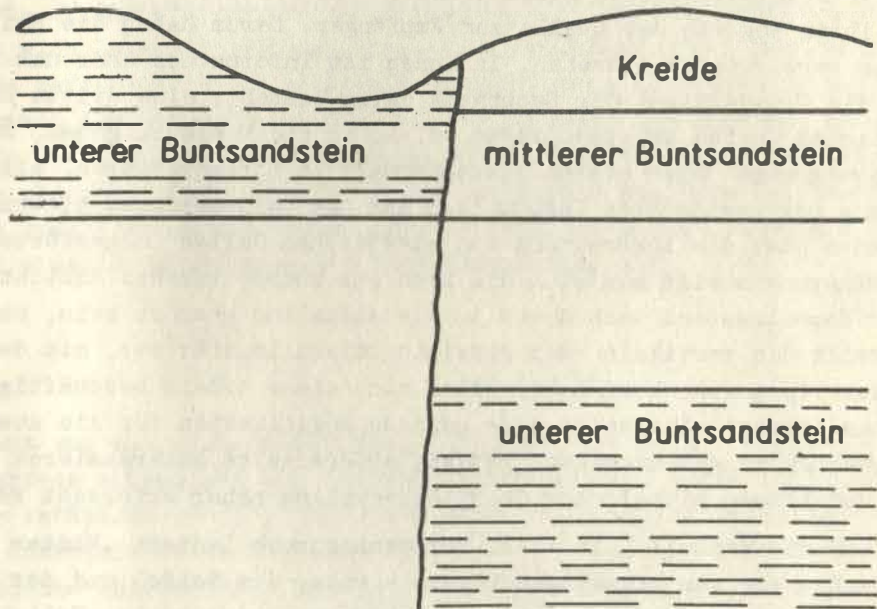


Abb. 1 Schematisches Profil durch den Westheimer Abbruch, südlichster Teutoburger Wald, Sprunghöhe ca. 350 m

Das Ausmaß von Verwerfungen schwankt zwischen kleinen und gewaltigen Beträgen. So besaß die bei dem großen Erdbeben in Assam 1897 entstandene Chedrang-Verwerfung eine Sprunghöhe bis zu 11 m. Die Verwerfung, die den südlichen Schwarzwald gegen die Rheintalsenke begrenzt, wird auf 1500 m geschätzt.

Es gibt seichte und tiefgreifende Verwerfungen. Zur ersten Gruppe gehören alle Verwerfungen, die genetisch mit der Faltenbildung zusammenhängen, während Bruchsysteme mit einer schon in geologisch frühen Zeiten beginnenden Aktivität und Eruptivgänge zur zweiten Gruppe zu zählen sind. Es muß darauf hingewiesen werden, daß kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Sprunghöhe und der Tiefenerstreckung von Verwerfungen besteht. Im allgemeinen herrscht die Tendenz, daß eine an der Oberfläche vorhandene Verwerfung mit der Tiefe allmählich in eine bruchlose Deformation übergeht. Da verschiedene Druckbedingungen den Winkel der Zerschierung beeinflussen,

weisen Verwerfungen oft Krümmungen und schaufelförmige Verbiegungen auf.

Auf dem Territorium der DDR und darüber hinaus in Mitteleuropa treten Verwerfungen größeren Ausmaßes an den Nord- und Südrändern der Mittelgebirgszüge auf, wobei die Randstörungen im Norden die ausgeprägteren sind (Abb. 2).

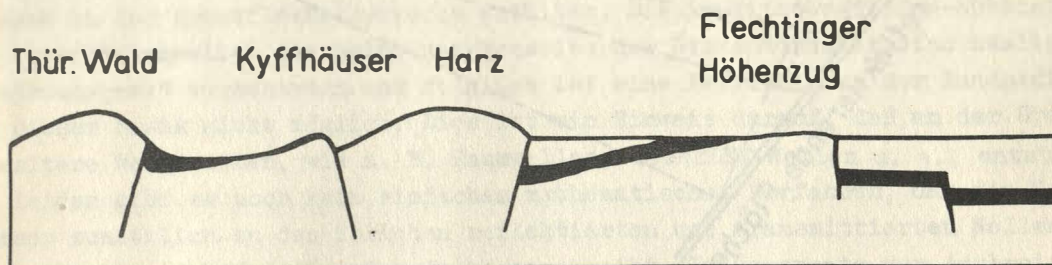


Abb. 2 Schematisches S-N-Profil durch das NW-Ende des Thüringer Waldes, das Thüringer Becken, den Kyffhäuser und Harz, das Subherzyne Becken, den Flechtinger Höhenzug und dessen Vorland (schwarz - ungefähre Lage von Rhät-Lias als tektonischer Leithorizont)

In einer Arbeit von McGARR [62] wird der Einfluß des Kontinentalrandes in Kalifornien auf die Ausbreitung von RAYLEIGH-Wellen experimentell untersucht und mit den Ergebnissen der Theorie verglichen. McGARR weist darauf hin, daß von allen lateralen Variationen, die in der Kruste und im oberen Mantel auftreten, am wahrscheinlichsten diejenigen an der Grenze zwischen Kontinent und Ozean einen meßbaren Effekt auf RAYLEIGH-Wellen mit Perioden zwischen 30 und 5 Sekunden ausüben. Aber auch die anderen erwähnten Störungen haben einen Einfluß auf die Ausbreitung von Oberflächenwellen. So wird von SICHARULIDSE [78] gezeigt, daß man auf Grund der Seismogramme von Erdbeben mit einem Herdgebiet in der Süd-Tienschan-Region annehmen muß, daß entlang der Grenze zwischen der Mesopotamischen Depression und dem Zagros-Gebirge im Iran eine reflektierende Fläche für Oberflächenwellen existiert (Abb. 3).

Geologisch gestörte Zonen haben ebenfalls einen Einfluß auf die Mikroseismik [21], die zu einem großen Teil aus Oberflächenwellen besteht. Die Umwandlung der Oberflächenwellen, die an einem Kontinentalrand einfallen, von einem Typ in einen anderen hat eine große Bedeutung für das Studium der Mikroseismik.

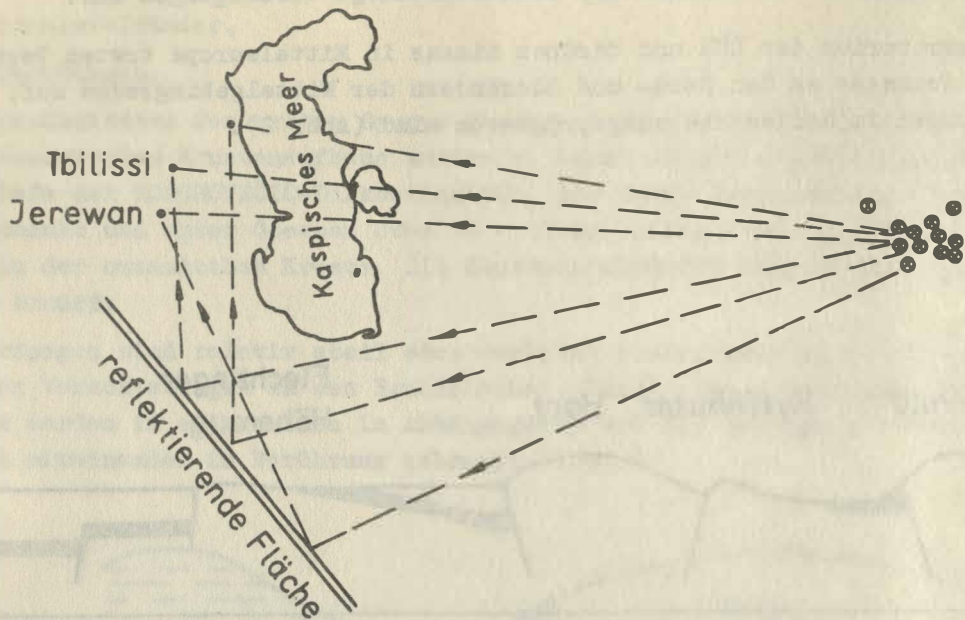


Abb. 3 Die Reflexion von Oberflächenwellen bei Süd-Tienschan-Erdbeben [78]

Allgemein kann es beim Auftreffen von Oberflächenwellen auf eine Diskontinuität

1. zu einer relativen Schwächung oder Verstärkung der modalen Oberflächenverrückung infolge Transmission von einem Medium ins andere,
2. zur Erzeugung von neuen transmittierten und reflektierten Oberflächenwellenmoden, Raum- und anderen Wellen

kommen. Dabei scheint die mögliche Erzeugung von Wechselwellen, d. h. die Umwandlung von RAYLEIGH- in LOVE-Wellen und umgekehrt, die bei schrägem Einfall durchaus denkbar ist, besonders interessant zu sein.

### 1.3. Mathematische Konventionen

Kleine lateinische Buchstaben als Indizes mögen die Zahlen 1, 2, 3 repräsentieren, wobei gemäß der EINSTEINschen Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes in einem Term von 1 bis 3 zu summieren ist. Während kleine griechische Buchstaben zur Numerierung der Eigenfunktionen, Eigenwerte und daraus abgeleiteter Größen verwendet werden, dienen große griechische Buchstaben zur Kennzeichnung des Entartungsgrades und laufen von 1 bis 3; für die griechischen Buchstaben gilt die EINSTEINsche Summenkonvention nicht. Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten  $x_i$  werden im allgemeinen mit Hilfe der Kommaschreibweise und kovariante Ableitungen nach den krummlinigen Koordinaten  $\bar{x}_i$  mit Hilfe der Semikolonschreibweise gekennzeichnet (siehe z. B. [39]).

Zur Darstellung der Wellenvorgänge dient der komplexe Formalismus, und man hat bei der Ermittlung einer physikalischen Größe zum Realteil überzugehen.

Die imaginäre Einheit wird mit  $i$  bezeichnet, und komplexe Konjugation wird durch einen Stern symbolisiert. Der Faktor für die harmonische Zeitabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$  wird bei zeitabhängigen Feldgrößen mitunter fortgelassen und muß dann hinzugedacht werden.



## 2. Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten aus mathematischer Sicht

### 2.1. Grundlegende mathematische Probleme und historische Übersicht

Eine exakte Lösung des Randwertproblems für den Durchgang von Oberflächenwellen durch eine vertikale Diskontinuität ist bisher noch nicht gefunden worden. Die Ursache hierfür ist darin zu suchen, daß es mit Hilfe eines einfachen Ansatzes, der nur einfallende, reflektierte und transmittierte Wellen enthält, unmöglich ist, die Randbedingungen an der Grenzfläche exakt zu erfüllen. Die Amplituden-Tiefen-Abhängigkeiten der Oberflächenwellen diesseits und jenseits der Diskontinuität sind nämlich voraussetzungsgemäß verschieden, und folglich ist eine Befriedigung der Randbedingungen auf dieser Basis nicht möglich. Dies ist ein Hinweis darauf, daß an der Grenzfläche weitere Wellenarten, wie z. B. Raumwellen, STONELEY-Wellen u. a., entstehen müssen. Leider gibt es noch kein einfaches mathematisches Verfahren, das die Erzeugung dieser zusätzlich zu den üblichen reflektierten und transmittierten Wellen entstehenden Anteile in befriedigender Weise beschreibt. Im Gegensatz zur Ausbreitung von Wellen in horizontal geschichteten Halbräumen ist die Wellenausbreitung in Halbräumen mit vertikalen Diskontinuitäten in der Literatur bisher nur wenig untersucht worden. Man muß zunächst unterscheiden zwischen Arbeiten, die sich mit der Lösung der inhomogenen Wellengleichung befassen, und solchen, die die Anfangsbedingungen vernachlässigen, d. h. von der homogenen Wellengleichung ausgehen. Zur ersten Gruppe gehört die Arbeit von VISWANATHAN [86], die die Wellenausbreitung in zwei ungeschichteten, sich miteinander in Kontakt befindenden Viertelräumen mit Hilfe von Integraltransformationen und der Eigenfunktionsmethode näherungsweise behandelt. Als Quelle dient hierbei eine impulsförmige Linienquelle auf der Oberfläche des einen Viertelraumes. Die bisher praktikabelste Lösung wird in den zur zweiten Gruppe gehörenden Arbeiten von ALSOP [2] und McGARR und ALSOP [61] mit Hilfe eines Variationsverfahrens auf der Basis der Eigenfunktionsmethode gegeben.

Eine ganze Reihe von Autoren beschäftigt sich, zum Teil als Vorstufe für das Problem der vertikalen Diskontinuität gedacht, mit dem Verhalten von Oberflächenwellen an Keilen und Höhenstufen. Die Arbeiten von MAL und KNOPOFF [56,57] sowie HUDSON und KNOPOFF [37] basieren auf der Methode des GREENschen Tensors, während LAPWOOD [50] die Operatorenmethode anwendet. Die auftretenden Integrale werden in allen Fällen näherungsweise unter Vernachlässigung störender Terme berechnet. Besondere Verfahren zur iterativen Erfüllung der Randbedingungen werden von KANE und SPENCE [40] und GUT-DEUTSCH [28] verwendet.

In neuerer Zeit beschäftigte sich eine Reihe von Autoren erfolgreich mit der Ausbreitung von elastischen Wellen in Viertelräumen [5] und zwei aneinanderstoßenden Viertelräumen [69] auf der Basis der Differenzenmethode. Durch Aufspaltung des Mediums in verschieden geformte endliche Elemente gelang kürzlich die Behandlung der Ausbreitung von LOVE-Wellen in nichthorizontalen geschichteten Strukturen [54].

Von den zahlreichen modellseismischen Arbeiten zur Wellenausbreitung an Keilen, Höhenstufen und ähnlichen Störungen seien hier stellvertretend genannt die Veröffentlichungen von DE BREMAECKER [13], KNOPOFF und GANGI [44], LEWIS und DALLY [52] sowie ABE und SUZUKI [1]. Die Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Arbeiten ist sehr unterschiedlich, jedoch zeigen alle Arbeiten gleichermaßen die Komplexität des Wechselwirkungsprozesses von Oberflächenwellen mit den entsprechenden Störungen.

## 2.2. Die Eigenfunktionsmethode

Die Eigenfunktionsmethode zur Lösung von Randwertproblemen besteht darin, daß man die partiellen Differentialgleichungen in einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen separiert, die gewisse Separationskonstanten enthalten. Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Eigenfunktionen, werden nach geeigneter Wahl der Amplitudenkoeffizienten miteinander kombiniert, um eine Lösung zu bilden, die den geforderten Randbedingungen genügt. Kombination kann Summation über eine Reihe von Separationskonstanten, die sogenannten Eigenwerte, oder Integration über dieselben bedeuten, je nachdem ob die Eigenwerte ein diskretes oder kontinuierliches Spektrum bilden. Bei der Integration kann es sich um Linienintegrale über komplexe Werte der Separationskonstanten handeln. Voraussetzungsgemäß ist diese Methode nur für die begrenzte Anzahl von Koordinatensystemen verwendbar, in denen einerseits die Ausgangsgleichungen separierbar sind und die andererseits den auftretenden Grenzflächen angepaßt sind.

Dem Problem der Vertikaldiskontinuität ist das kartesische Koordinatensystem prinzipiell gesehen angepaßt, denn die Wellengleichungen für die elastischen Potentiale sind in **kartesischen** Koordinaten **separierbar** (siehe z. B. [21]), und die Grenzflächen fallen mit bestimmten Koordinatenflächen zusammen (siehe Abb. 4). Die praktische Durchführung dieser Methode bereitet jedoch wegen der auftretenden Integrale in der komplexen Ebene schon im einfachen Falle der aneinanderstoßenden homogenen elastischen Viertelräume ganz erhebliche Schwierigkeiten, wie man aus der Arbeit von VISWANATHAN [86] ersehen kann.

In der Seismologie interessieren aber geschichtete Medien, und für diese erscheint die konsequente Anwendung der Eigenfunktionsmethode als zu aufwendig. Darum stützt sich die vorliegende Arbeit auf die Methode von ALSOP, die einen Kompromiß darstellt und im übernächsten Abschnitt beschrieben werden soll.

## 2.3. Die Methode des GREENSchen Tensors

Diese Methode ist physikalisch sehr anschaulich. Sie eignet sich gleichermaßen zur Lösung von homogenen und inhomogenen partiellen Differentialgleichungen. Um das Feld zu erhalten, das durch verteilte Quellen (oder was immer es ist) verursacht wird, berechnen wir die Effekte von jeder Elementarquelle und addieren sie alle. Ist  $\Theta(r, r_0)$  das Feld im Beobachtungspunkt  $r$ , verursacht durch eine Einheitspunktquelle im Punkt  $r_0$ , dann ist das Feld in  $r$ , verursacht durch eine Quellenverteilung  $\mathfrak{J}(r_0)$ , das Integral von  $\Theta \cdot \mathfrak{J}$  über den ganzen Bereich  $r_0$ , der durch die Quellen eingenommen wird. MÜLLER [68] betrachtet den GREENSchen Tensor  $\Theta$  als Antwortfunktion eines linearen Systems, in unserem Fall des ideal-elastischen Mediums, auf einen Einheitsimpuls.

Es verwundert nicht, daß man in ähnlicher Weise eine Lösung der homogenen Gleichung mit vorgegebenen Werten auf einer Berandungsfläche finden kann, wenn man das Produkt dieser Randwerte mit einem zweiten GREENSchen Tensor über die Begrenzungsfläche integriert. Das Erstaunliche und zugleich Günstige ist die Tatsache, daß diese beiden GREENSchen Tensoren identisch sind [66]. Physikalisch gedeutet besagt dieses Ergebnis, daß **Randbedingungen** auf einer Begrenzungsfläche als gleichwertig mit einer Störquellenverteilung auf dieser Fläche angesehen werden können. Angewendet

auf unser Problem folgt aus dieser Überlegung, daß man sich die Diskontinuitätsfläche mit virtuellen Quellen besetzt denken kann, die durch das einfallende Oberflächenwellenfeld angeregt werden und ihrerseits Wellen unterschiedlicher Art in die Medien diesseits und jenseits der Diskontinuität abstrahlen.

Das Problem für die Anwendung dieses an und für sich eleganten Verfahrens besteht darin, daß es oftmals für eine konkrete Aufgabe sehr schwierig ist, den GREENSchen Tensor aufzufinden. Für ein unbegrenztes homogenes Medium kann der GREENSche Tensor zwar in geschlossener Form abgeleitet werden [68], jedoch schon die Einführung einer Grenzfläche in endlicher Entfernung von der Störquelle bringt infolge der auftretenden Reflexionen erhebliche Komplikationen mit sich. Man kann sich den resultierenden GREENSchen Tensor als additive Überlagerung eines Tensors für den unendlich ausgedehnten Raum mit einem Tensor, der den Einfluß der Grenzflächen beschreibt, vorstellen [68]. Es gibt, wie bei MORSE und FESHACH [66] dargelegt, im wesentlichen zwei Verfahren, die zum Aufbau von brauchbaren GREENSchen Tensoren für im Endlichen begrenzte Medien verwendet werden können, nämlich das Spiegelungsverfahren und die Entwicklung des GREENSchen Tensors nach Eigenfunktionen. Beim Spiegelungsverfahren werden zur Erzeugung der reflektierten Wellen virtuelle (gespiegelte) Quellen jenseits der Grenzfläche angenommen. Wir haben bei unserem Problem zahlreiche verschiedenartige Grenzflächen zu berücksichtigen

1. die Ebene, die die im Endlichen gelegene Oberfläche des elastischen Halbraums bildet,
2. die horizontalen Grenzflächen infolge der Schichtung des elastischen Halbraums,
3. die Vertikaldiskontinuität.

Für den ungeschichteten elastischen Halbraum wurde der vollständige GREENSche Tensor von CASE und HAZELTINE [16] hergeleitet. Die Oberflächenwellenanteile des GREENSchen Tensors werden in ebenso einfacher wie eleganter Weise von HERRERA [35] für den geschichteten elastischen Halbraum mit Hilfe der Entwicklung nach Eigenfunktionen gewonnen. Ausgehend von diesem Ereignis, müßte es nun prinzipiell möglich sein, die Vertikaldiskontinuität durch das Spiegelungsverfahren zu behandeln. Aber das schon erwähnte ALSOPsche Verfahren führt hier viel einfacher zum Ziel. Man kann überhaupt sagen, daß die Integrallösungen von partiellen Differentialgleichungen zwar allgemeiner als die separierten Lösungen, dafür aber schwerer zu handhaben sind. Die Bestimmung des kompletten GREENSchen Tensors für den geschichteten elastischen Halbraum ist wahrscheinlich außerordentlich kompliziert. Es kommt aber in dieser Arbeit auch nicht darauf an, die theoretisch allgemeinste und exakteste Lösung zu konstruieren. Vielmehr soll ein praktikabler Lösungsweg gefunden werden, der relativ rasch zu physikalisch und seismologisch leicht zu interpretierenden Lösungen führt und für den Einsatz von Computern geeignet ist. Darum wollen wir uns nun endgültig dem ALSOPschen Verfahren, das diese Voraussetzungen zu erfüllen scheint, zuwenden.

#### 2.4. Das Verfahren von ALSOP

ALSOP und MCGARR behandeln den Durchgang von elastischen Oberflächenwellen, und zwar entweder RAYLEIGH- oder LOVE-Wellen, durch eine vertikale Diskontinuität bei senkrechter Inzidenz. Die Methode basiert im wesentlichen auf der Tatsache, daß die durch das einfallende Oberflächenwellenfeld verursachte Bewegung als eine Funktion der Tiefe im Medium auf der einen oder anderen Seite der Diskontinuität (Abb. 4)

durch eine Summe über diejenigen Eigenfunktionen, die zu dem Medium gehören würden, wenn es ein Halbraum anstatt eines Viertelraumes wäre, ausgedrückt werden kann. Dies ist verständlich, denn man kann eine beliebige Bewegung durch eine Summe (bzw. ein Integral) über irgendeinen vollständigen Satz von Eigenfunktionen, bei denen die abhängigen Variablen den gleichen Bereich wie bei der gesuchten Funktion durchlaufen, darstellen. Folglich erhält man zwei verschiedene Summen, eine für jede Seite der Diskontinuität. Die Randbedingungen am Ort der Diskontinuität verlangen die Stetigkeit der Verrückungs- und Spannungskomponenten. Diese Bedingungen machen es theoretisch möglich, die Entwicklungskoeffizienten der beiden Summen, die wir später als verallgemeinerte Reflexions- und Transmissionskoeffizienten interpretieren werden, zu bestimmen. Das vollständige Eigenfunktionssystem des geschichteten elastischen Halbraums, das einen diskreten und einen kontinuierlichen Anteil hat, ist aber explizit nicht bekannt. Da die Handhabung des kontinuierlichen Spektrums, wie man von der Quantentheorie her weiß, mit gewissen Schwierigkeiten verbunden ist, beschränkt sich ALSOP auf das diskrete Spektrum, das durch die Oberflächenwellenmoden repräsentiert wird. Nun ist es jedoch nicht mehr möglich, die Randbedingungen exakt zu erfüllen.

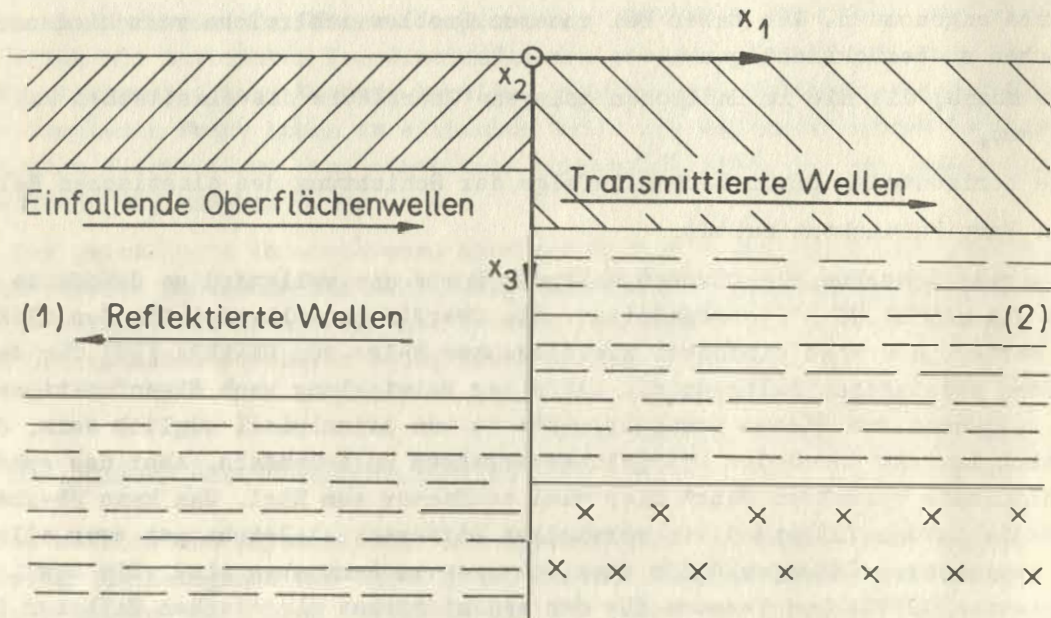


Abb. 4 Der geschichtete Halbraum mit Vertikaldiskontinuität

Vielmehr wird ein Variationsverfahren benutzt, um die bezüglich des verwendeten (nicht vollständigen) Eigenfunktionssystems bestmögliche Anpassung zu erreichen. Diesem Variationsverfahren liegt die noch näher zu diskutierende Annahme ad hoc zugrunde, daß diejenigen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, die die Randbedingungen optimal erfüllen, die Lösung der Aufgabe darstellen. Die Grundvoraussetzung des ALSOPschen Verfahrens ist die, daß beim Wechselwirkungsprozeß zwischen einfallenden Oberflächenwellen und vertikaler Diskontinuität der größte Teil der Energie im Oberflächenwellenfeld verbleibt, d. h., daß im wesentlichen nur reflektierte und transmittierte Oberflächenwellenmoden entstehen.

Modellseismische Versuche, die von ALSOP und McGARR durchgeführt wurden, zeigten eine gute Übereinstimmung mit der Theorie in den Fällen, wo der Kontrast zwischen den

Medien auf beiden Seiten der Diskontinuität nicht zu groß war.

Der prinzipielle Vorteil dieses Verfahrens besteht, abgesehen von seiner physikalischen Anschaulichkeit, darin, daß es auf vertikale Diskontinuitäten zwischen geschichteten Medien mit einem beliebigen Grad an Komplexität angewendet werden kann, wenn nur die Eigenfunktionen für diese Medien bekannt sind. Diese sind aber für beliebig geschichtete Medien mit Hilfe des HASKELLSchen Matrizenverfahrens [33] vollständig berechenbar. Damit ist ein günstiger Anknüpfungspunkt für die numerische Lösung der Aufgabe unter Einsatz von elektronischen Rechenanlagen gegeben. Da die Oberflächenwellen in der Natur im allgemeinen nicht senkrecht auf die Diskontinuität treffen, liegt es nahe, das ALSOPSche Verfahren für diesen Fall zu verallgemeinern. Dabei wird sich zeigen, daß die RAYLEIGH- und LOVE-Wellen völlig gleichberechtigt eingehen und sich an der Diskontinuität wechselseitig ineinander umwandeln können. Im allgemeinen theoretischen Formalismus wird es dann nicht mehr wie bei ALSOP notwendig sein, zwischen dem Einfall von RAYLEIGH- und LOVE-Wellen zu unterscheiden. Wir werden auch das kontinuierliche Eigenfunktionssystem der Raumwellen in die Theorie mit einbeziehen und schließlich diskutieren, inwieweit das ALSOPSche Verfahren auch für die Behandlung unebener Diskontinuitäten geeignet ist.

An dieser Stelle kann darauf hingewiesen werden, daß solche Betrachtungen, bei denen die verschiedenen Typen elastischer Wellen zu einem einheitlichen Eigenfunktionssystem mit einem diskreten und kontinuierlichen Anteil zusammengefaßt werden, bisher noch nicht angestellt worden sind. Die Behandlung der schrägen Inzidenz von Oberflächenwellen an einer vertikalen Diskontinuität unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Wechselwellen stellt eine wesentliche Erweiterung der bisher vorhandenen Theorie dar.

### 3. Der elastische Halbraum und seine Eigenfunktionen

#### 3.1. Das diskrete Spektrum der Eigenfunktionen, repräsentiert durch die Oberflächenwellen

##### 3.1.1. Die Lösung der Bewegungsgleichungen

Wir wollen unsere Betrachtungen grundsätzlich auf ein isotropes und ideal elastisches Medium beschränken, welches durch nur drei Materialparameter, nämlich durch die LAMÉ-Koeffizienten  $\lambda$ ,  $\mu$  und die Dichte  $\rho$ , vollständig beschrieben werden kann. So unvollkommen dieses einfache Modell im Vergleich mit der realen Erde auch anmutet, es lassen sich doch mit seiner Hilfe viele Phänomene der Seismologie gut erklären. Weiterhin nehmen wir an, daß sich im Endlichen keine Quellen befinden, was mit der Betrachtung ebener Wellen identisch ist, und geben eine zeitlich harmonische Anregung vor. Diese Bedingungen sind näherungsweise dann erfüllt, wenn der Beobachtungspunkt genügend weit vom Herdgebiet entfernt ist und genügend Zeit zur Herausbildung eines stationären Schwingungsvorganges verstrichen ist. Unter diesen Voraussetzungen lautet die Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums in kartesischen Koordinaten [42]:

$$(1) \quad \sigma_{ik,k} + \rho \omega^2 u_i = 0.$$

Hierin bedeuten  $\sigma_{ik}$  die kartesischen Koordinaten des Spannungstensors,  $u_i$  die kartesischen Koordinaten des Verrückungsvektors und  $\omega$  die Kreisfrequenz. Der Spannungstensor ist mit dem Verrückungsvektor über das HOOKEsche Gesetz

$$(2) \quad \sigma_{ik} = C_{iklm} u_{l,m},$$

$$C_{iklm} = C_{kilm} = C_{ikml} = C_{lmik},$$

verknüpft, wobei die  $C_{iklm}$  die kartesischen Koordinaten des Tensors der Elastizitätsmoduln sind, die im isotropen Raum die einfache Gestalt

$$(3) \quad C_{iklm} = \mu (\delta_{il} \delta_{mk} + \delta_{im} \delta_{lk}) + \lambda \delta_{ik} \delta_{lm}$$

annehmen. Das Materialgesetz (2) ist linearisiert und demzufolge nur für hinreichend kleine Verrückungen gültig. Als Modell der Erde betrachten wir einen elastischen Halbraum, das ist ein sich einseitig bis ins Unendliche erstreckendes elastisches Medium, welches durch eine im Endlichen gelegene Ebene begrenzt wird. Da wir sowieso nur Oberflächenphänomene untersuchen werden, ist diese Näherung sinnvoll, allerdings wird hierbei die Erdkrümmung vernachlässigt.

Wir führen nun ein kartesisches Koordinatensystem  $\mathcal{G}$  ein, dessen Koordinatenursprung auf der Oberfläche liegen und dessen  $x_3$ -Achse senkrecht zur Oberfläche in den Halbraum zeigen möge (Abb. 5). Die Oberfläche des Halbraumes wird somit durch die Gleichung  $x_3 = 0$  repräsentiert. Die Parameter des elastischen Mediums sind im realen Erdkörper Funktionen von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ , wobei die  $x_3$ -Abhängigkeit der horizontalen Schichtung entspricht, während die  $x_1$ - und  $x_2$ -Abhängigkeiten die lateralen Variationen, also z. B. die von uns betrachteten Vertikaldiskontinuitäten, darstellen. Für den geschichteten elastischen Halbraum lassen wir per definitionem nur eine  $x_3$ -Abhängigkeit zu, und zwar mögen die Größen  $\mu$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  stückweise stetige und differenzierbare Funktionen von  $x_3$  sein. Es ist so, daß jede  $x_1$ - und  $x_2$ -

Abhängigkeit der Parameter des elastischen Mediums eine virtuelle Quelle bezüglich einfallender Oberflächenwellen darstellt und zur Erzeugung reflektierter Wellen führt. Die  $x_3$ -Abhängigkeit hingegen bestimmt die Wellenleitereigenschaften des elastischen Halbraumes für die Oberflächenwellen. Wir nehmen also zunächst für den elastischen Halbraum

$$(4) \quad \mu = \mu(x_3), \quad \lambda = \lambda(x_3), \quad \rho = \rho(x_3), \quad \text{stückweise stetig und differenzierbar}$$

an. Die Berechnung der Eigenfunktionen des elastischen Halbraumes gestaltet sich nach HASKELL [33] besonders einfach, wenn über die schon gemachten Voraussetzungen hinaus  $\mu$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  als stückweise konstant angenommen werden. Auf diese Weise kommt man zu einem Halbraum, der aus planparallelen homogenen isotropen elastischen Schichten besteht.

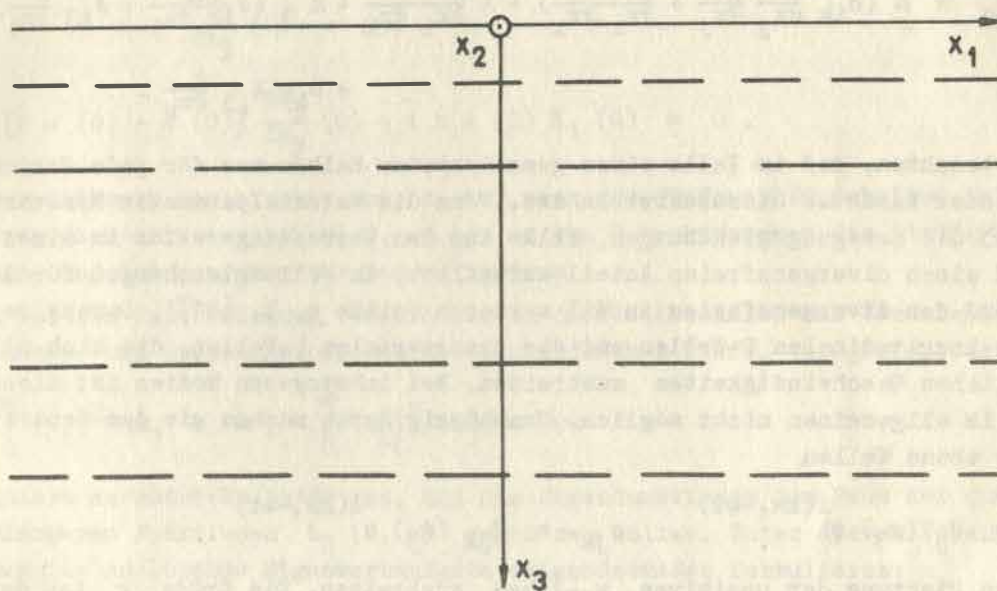


Abb. 5 Der geschichtete elastische Halbraum

An dieser Stelle ist es noch nicht erforderlich, diese speziellen Voraussetzungen zu machen. Wir nehmen zunächst lediglich an, daß die Tiefenabhängigkeiten (4) so beschaffen sind, daß sie die Ausbildung von Oberflächenwellen im elastischen Halbraum gestatten. Prinzipiell ist es immer möglich, wenn auch aufwendig, die Eigenfunktionen für die allgemeineren Abhängigkeiten (4) numerisch zu bestimmen, wenn man die partiellen Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen annähert. Eine elegantere Lösungsmöglichkeit ist vielleicht nach der Arbeit von GILBERT und BACKUS [23] durch Anwendung der Theorie der Ausbreitungsmatrizen gegeben. HARJES [31] löst Probleme der Ausbreitung seismischer Wellen in inhomogenen Medien approximativ mit Hilfe der aus der Quantentheorie bekannten NEUMANN'schen Reihe. Ausgangspunkt ist hierbei die Lösung für das homogene Medium, welche dann sukzessiv verbessert wird. Dieses interessante Verfahren dürfte ebenfalls für die Bestimmung der Eigenfunktionen des inhomogenen Halbraums geeignet sein.

Wir führen nun den Spannungsoperator  $\mathcal{T}$  ein, dessen kartesische Komponenten durch

$$(5) \quad t_{ijk} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} + \mu (\delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i}), \quad t_{ijk} = t_{jik},$$

gegeben sind. Mit  $\delta_{ij}$  wird wie allgemein üblich das KRONECKER-Symbol bezeichnet. Durch Vergleich von (2), (3) und (5) gewinnt man für den Spannungstensor den Ausdruck

$$(6) \quad \sigma_{ij} = t_{ijk} u_k,$$

und die Bewegungsgleichungen (1) nehmen die Gestalt

$$(7) \quad t_{ijk,j} u_k + \rho \omega^2 u_i = 0$$

an.

Der Operator  $t_{ijk,j}$  lautet unter Berücksichtigung von (4) explizit:

$$(8) \quad t_{ijk,j} = \mu (\delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}) + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \mu_{,3} (\delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{k3} \frac{\partial}{\partial x_i}) + \delta_{i3} \lambda_{,3} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Es ist zu beachten, daß im Falle eines geschichteten Halbraumes für jede Schicht ein entsprechender Ausdruck hinzuschreiben ist. Wenn die Materialparameter konstant sind, lassen sich die Bewegungsgleichungen, falls man den Verrückungsvektor in einen rotations- und einen divergenzfreien Anteil aufspaltet, in Wellengleichungen für den rotations- und den divergenzfreien Anteil zerlegen (siehe z. B. [81]). Daraus resultieren die longitudinalen P-Wellen und die transversalen S-Wellen, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Bei inhomogenen Medien ist diese Entkoppelung im allgemeinen nicht möglich. Unabhängig davon machen wir den Separationsansatz für ebene Wellen

$$(9) \quad u_j = U_j(x_3) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad \sigma_{jk} = S_{jk}(x_3) e^{i(kx_1 - \omega t)},$$

die sich in Richtung der positiven  $x_1$ -Achse ausbreiten. Die Größe  $k$  ist der Betrag des Wellenzahlvektors, der in diesem Fall mit der  $x_1$ -Komponente des Vektors zusammenfällt, und  $U_j(x_3)$  bzw.  $S_{jk}(x_3)$  stellen Amplituden-Tiefen-Abhängigkeiten der Verrückungen bzw. Spannungen dar. Man kann nun in (8) die Ableitungen nach  $x_1$  und  $x_2$  gemäß

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{j1} i k$$

ausführen und die Bewegungsgleichung mit Hilfe des Operators  $L_{jm}$ , definiert durch

$$(11) \quad L_{jm} = \delta_{jm} (\mu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2) + \delta_{j3} \delta_{m3} (\mu + \lambda) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + (\delta_{j1} \delta_{m3} + \delta_{j3} \delta_{m1}) (\mu + \lambda) i k \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{jm} \mu_{,3} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{j3} \delta_{m3} (\lambda_{,3} + \mu_{,3}) \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad L_{jm} = L_{mj},$$

und der Eigenmatrix  $\lambda_{jm}$ , definiert durch



$$(12) \quad \lambda_{jm} = \delta_{jm} \mu k^2 + \delta_{j1} \delta_{m1} (\mu + \lambda) k^2 - \delta_{j1} \delta_{m3} i k \mu_{,3} - \delta_{j3} \delta_{m1} i k \lambda_{,3},$$

in Form einer Eigenwertgleichung

$$(13) \quad L_{jm} U_m = \lambda_{jm} U_m$$

schreiben, wobei der Operator  $L_{jm}$  nur noch Ableitungen nach  $x_3$  enthält. Die Randbedingungen erfordern erstens die Spannungsfreiheit der Oberfläche, d. h.

$$(14) \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{für} \quad x_3 = 0$$

oder unter Benutzung von (6), (9) und (10) explizit

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dU_1}{dx_3}(0) + i k U_3(0) = 0, \\ \frac{dU_2}{dx_3}(0) = 0, \\ [2\mu(0) + \lambda(0)] \frac{dU_3}{dx_3}(0) + i k \lambda(0) U_1(0) = 0. \end{cases}$$

Wenn der Halbraum geschichtet ist, d. h., wenn die Tiefenabhängigkeiten der Materialparameter diskontinuierlich sind, so ist an den Schichtgrenzen die Stetigkeit der Verrückungs- und Spannungskomponenten zu fordern.

Als weitere Randbedingung fordern wir in diesem Abschnitt das Verschwinden der Verrückungs- und Spannungskomponenten in unendlicher Tiefe, was gleichbedeutend mit

$$(16) \quad \int_0^{\infty} |U_1|^2 dx_3 < \infty, \quad \int_0^{\infty} |S_{1j}|^2 dx_3 < \infty$$

ist. Anders ausgedrückt heißt das, daß die Eigenfunktionen dem Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen  $L_2(0, \infty)$  angehören sollen. Unter diesen Voraussetzungen kann man die zu lösende Eigenwertaufgabe folgendermaßen formulieren:

$$(17) \quad \begin{cases} L_{jm} U_m = \lambda_{jm} U_m, \\ \text{Definitionsgebiet von } L_{jm} = \{U_m \mid U_m \text{ zweimal stetig differenzierbar}, \\ S_{m3}(0) = 0, \quad U_m \in L_2(0, \infty), \quad L_{jm} U_m \in L_2(0, \infty). \end{cases}$$

Infolge des unendlichen Grundgebietes lassen sich funktionalanalytisch keine allgemeinen Aussagen über die Existenz und Eigenschaften der Eigenwerte des Operators  $L_{jm}$  machen. Es zeigt sich aber in der Praxis, daß für bestimmte Tiefenabhängigkeiten der Materialparameter, insbesondere im Fall der Schichtung, das Spektrum des Operators  $L_{jm}$  aus einem ganzen Satz diskreter Eigenwerte  $\lambda$  besteht, die sowohl reell als auch komplex sein können. Den reellen positiven Eigenwerten entsprechen die normalen Oberflächenwellenmoden und den komplexen die verlustbehafteten Moden (leaking modes). Mit den letzteren wollen wir uns im Rahmen dieser Arbeit nicht beschäftigen, obwohl sie für die Seismologie sehr interessant geworden sind. Wie man jedoch sieht, lassen sie sich durchaus in die hier entwickelte Theorie einfügen.

An dieser Stelle sei noch etwas zu den hier verwendeten Begriffen Eigenwerte und Eigenfunktionen gesagt. Eigenfunktionen kennzeichnen Vorgänge, die in einem System ohne äußere Erregung möglich sind. In einem begrenzten Körper sind das stehende Wellen mit ganz bestimmten Frequenzen, den Eigenfrequenzen. Bei unserem Problem haben

wir es nicht mit stehenden Wellen zu tun, sondern der elastische Halbraum ist ein Wellenleiter, in dem sich für eine beliebig vorgegebene Frequenz fortlaufende Wellen mit ganz bestimmten Wellenlängen, unseren Eigenwerten  $k^\alpha$ , ausbreiten können. PEKERIS [70] vergleicht diesen Vorgang mit der Schallausbreitung in langen, an beiden Enden offenen Korridoren. Man kann die Oberflächenwellen- oder normalen Moden als Interferenzphänomen verstehen. Sie entstehen durch konstruktive Interferenz aufwärts und abwärts laufender Longitudinal- und Transversalwellen, die an den Grenzen des Wellenleiters total reflektiert werden (geführte Wellen).

Die Eigenfunktionen sind die Amplituden-Tiefen-Abhängigkeiten der Oberflächenwellen. Man erkennt aus dem vollständigen Ausdruck für die Verrückungen der Oberflächenwellen

$$(18) \quad u_j^\alpha = U_j^\alpha(x_3) e^{i(kx_1 - \omega t)},$$

daß es sich um ebene inhomogene Wellen handelt, d. h., die Flächen konstanter Phase sind Ebenen (senkrecht zur  $x_1$ -Achse), auf denen die Amplitude nicht konstant ist, sondern mit der Tiefe abklingt, so daß der Vorgang auf die oberflächennahen Regionen beschränkt bleibt. Aus den Gleichungen (11) und (12) ist zu ersehen, daß

$$(19) \quad \begin{cases} L_{12} = L_{23} = 0, & L_{13} \neq 0, \\ \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = 0, & \lambda_{13}, \lambda_{31} \neq 0 \end{cases}$$

gilt. Folglich spaltet die Eigenwertgleichung in ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die Komponenten  $U_1, U_3$  und in eine einzelne Differentialgleichung für die Komponente  $U_2$  auf. Gemäß dieser Aufspaltung unterscheiden wir die RAYLEIGH-Wellen, die Komponenten in  $x_1$ - und  $x_3$ -Richtung besitzen, und die LOVE-Wellen, die nur eine Komponente in  $x_2$ -Richtung haben. Wie man aus (11) erkennt, ist der Operator  $L_{jm}$  von der Kreisfrequenz  $\omega$  abhängig, und daraus folgt eine Abhängigkeit der Eigenwerte von  $\omega$ :

$$(20) \quad k^\alpha = k^\alpha(\omega).$$

Wenn die Materialparameter nicht konstant sind, insbesondere im Falle der Schichtung, ist diese Abhängigkeit nicht nur eine reine Proportionalität, sondern es liegt Dispersion vor, d. h. eine Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit  $c^\alpha$  von  $\omega$  und damit von der Periode  $T = 2\pi/\omega$ :

$$(21) \quad c^\alpha = \frac{\omega}{k^\alpha(\omega)} = c^\alpha(\omega), \quad \frac{dc^\alpha}{dT} \neq 0.$$

In diesem und nur in diesem Fall gibt es eine unendliche Anzahl von Moden. Für eine bestimmte Periode ist allerdings, wie KEILIS-BOROK [41] gezeigt hat, die Zahl der Moden beschränkt. Wir wollen die Oberflächenwellenmoden durch den ganzzahligen Modenindex  $\alpha$  folgendermaßen bezeichnen:

$$(22) \quad \alpha = \begin{cases} 1, \dots, M : & \text{RAYLEIGH-Moden,} \\ M+1, \dots, N : & \text{LOVE-Moden.} \end{cases}$$

Hierbei bedeuten  $M$  die maximal mögliche Zahl der RAYLEIGH- und  $N - M$  die maximal mögliche Zahl der LOVE-Moden für eine bestimmte Periode. Die Schar der Eigenfunktionen nimmt mit diesen Bezeichnungen die Form

$$(23) \begin{cases} \alpha \\ U_i \end{cases} = \delta_{1i} \alpha U_1 + \delta_{3i} \alpha U_3 \quad \text{für } 0 < \alpha \leq M, \\ \alpha \\ U_i \end{cases} = \delta_{2i} \alpha U_2 \quad \text{für } M < \alpha \leq N$$

an. Im ungeschichteten Halbraum mit konstanten Materialparametern existiert als einzige Oberflächenwellenmode die RAYLEIGH-Grundmode, und Dispersion ist nicht vorhanden.

Trägt man in einem Koordinatensystem z. B. die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen in Abhängigkeit von der Periode auf, so erhält man für jede Mode eine bestimmte Dispersionskurve. Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Dispersionskurven und Erdschichtmodell, wie sie von der praktischen Geophysik verlangt wird, ist nur bei Berücksichtigung sämtlicher Moden möglich.

Es kann nach der bisherigen Theorie nicht ausgeschlossen werden, daß sich die Dispersionskurven für die Phasengeschwindigkeiten zweier RAYLEIGH- oder LOVE-Moden bei einem bestimmten Modell überschneiden (Abb. 6). Physikalisch gesehen hat man es bei der kritischen Periode  $T_{kr}$  mit der merkwürdigen Tatsache zu tun, daß zwei unterschiedliche Gruppengeschwindigkeiten existieren je nachdem, welche Kurve wir gerade betrachten. Schon in den Arbeiten von SEZAWA und KANAI [77] sind Unstetigkeiten bei Dispersionskurven im Zusammenhang mit höheren Moden diskutiert worden. In mathematischer Hinsicht haben wir es bei  $T_{kr}$  mit dem Verschwinden einer Eigenfunktion zu tun, denn gleichzeitig mit den Eigenwerten fallen auch die Eigenfunktionen zusammen, wie man der HASKELL'schen Theorie entnehmen kann.

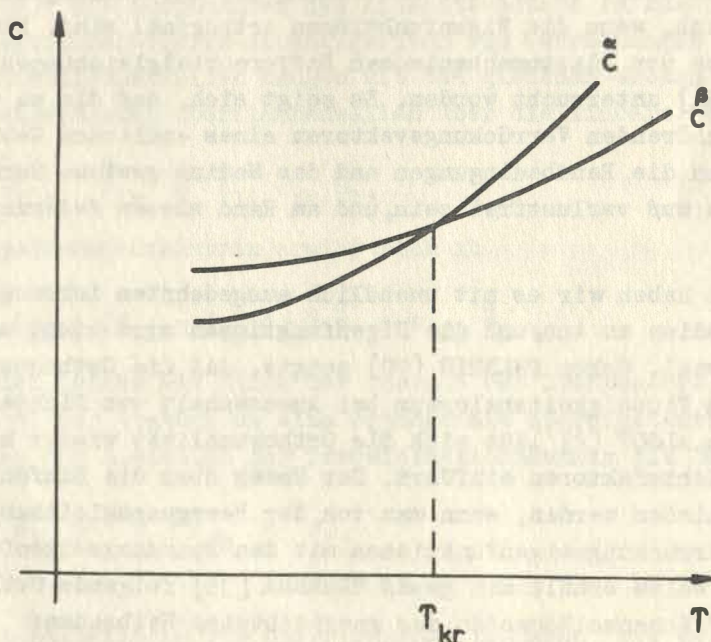


Abb. 6 Darstellung eines kritischen Punktes bei der Dispersion der Phasengeschwindigkeit;  $\alpha, \beta < M$  oder  $\alpha, \beta > M$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

Bei Dispersionskurven der Gruppengeschwindigkeit sind Überschneidungen, die häufig vorkommen, ohne Bedeutung für unsere Theorie. Eine andere Situation liegt vor, wenn sich Dispersionskurven der Phasengeschwindigkeiten von RAYLEIGH- und LOVE-Moden überschneiden, was in der Praxis durchaus vorkommt. In diesem Fall sind zwar die Eigenwerte gleich, denn es gilt

$$(24) \quad \alpha(T_{kr}) = \beta(T_{kr}),$$

jedoch die Eigenfunktionen sind verschieden, da z. B.  $\alpha < M$  und  $\beta > M$  ist. Also liegt eine zweifache Entartung vor, d. h., zu einem Eigenwert gehören zwei verschiedene Eigenfunktionen. Auch im ersten Fall können bei  $T_{kr}$  noch weitere Eigenfunktionen existieren, so daß ebenfalls Entartung vorliegen kann.

Es zeigt sich, daß die Dispersionsbeziehungen

$$(25) \quad \frac{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k}(\omega) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha}{c} = \frac{\alpha}{c}(T)$$

unabhängig von der Anregungsart der seismischen Wellen sind. Demzufolge gelten für die normalen Moden die gleichen Dispersionsbeziehungen wie etwa für Oberflächenwellen, die von einer Punktquelle erzeugt werden. Hieraus leitet sich die Tatsache her, daß es für viele Fälle ausreichend ist, ebene harmonische Wellen zu betrachten, wie wir es tun. Schließlich soll noch erwähnt werden, daß das diskrete Eigenwertspektrum im Gegensatz zum kontinuierlichen Spektrum sehr empfindlich gegenüber Änderungen von  $\omega$  und der Materialparameter ist.

### 3.1.2. Die Orthogonalitätsrelation

Wenn man eine gesuchte Funktion nach den Eigenfunktionen eines homogenen Randwertproblems entwickeln will, so ist die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten in einfacher Weise möglich, wenn die Eigenfunktionen orthogonal sind. Die Orthogonalität der Eigenfunktionen von elastomechanischen Differentialgleichungen ist für homogene Medien von LENK [51] untersucht worden. Es zeigt sich, daß die zu verschiedenen Eigenfrequenzen gehörenden Verrückungsvektoren eines endlichen Gebietes nur dann orthogonal sind, wenn die Randbedingungen und das Medium gewisse Voraussetzungen erfüllen: Das Medium muß verlustfrei sein, und am Rand müssen federartige Impedanzen wirken.

In unserem Fall haben wir es mit unendlich ausgedehnten inhomogenen bzw. stückweise homogenen Medien zu tun, und die Eigenfunktionen sind nicht mehr im herkömmlichen Sinne orthogonal. Schon PEKERIS [70] zeigte, daß die Orthogonalität der normalen Moden in einem Flüssigkeitshalbraum bei Anwesenheit von Dichtediskontinuitäten verletzt ist. Nach ALSOP [2] läßt sich die Orthogonalität wieder herstellen, indem man geeignete Gewichtsfaktoren einführt. Der Umweg über die Einführung von Gewichtsfaktoren kann vermieden werden, wenn man von der Bewegungsgleichung in der Form (1) ausgeht und die Verrückungseigenfunktionen mit den Spannungseigenfunktionen verknüpft. Auf diese Weise erhält man gemäß HERRERA [35] folgende Orthogonalitätsrelation für die Oberflächenwellenmoden des geschichteten Halbraums:

$$(26) \quad \int_0^{\infty} [\alpha_1 \beta_{11}^* - \beta_1^* \alpha_{11}] dx_3 = 0, \quad \alpha_1 \neq \beta_1.$$

Sie gilt für in Richtung der  $x_1$ -Achse fortschreitende ebene RAYLEIGH- oder LOVE-Wellen, d. h.,  $0 < \{\alpha, \beta\} \leq M$  oder  $M < \{\alpha, \beta\} \leq N$ . Da analog zu (23) die Komponenten des Spannungstensors die Gestalt

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \overset{\alpha}{S}_{ij} = \delta_{i1} \delta_{j1} \overset{\alpha}{S}_{11} + \delta_{i2} \delta_{j2} \overset{\alpha}{S}_{22} + \delta_{i3} \delta_{j3} \overset{\alpha}{S}_{33} + \\ \quad + (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) \overset{\alpha}{S}_{13} \quad \text{für } 0 < \alpha \leq M, \\ \overset{\alpha}{S}_{ij} = (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1}) \overset{\alpha}{S}_{12} + (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) \overset{\alpha}{S}_{23} \quad \text{für } M < \alpha \leq N \end{array} \right.$$

besitzen, ist (26) trivialerweise auch für  $0 < \alpha \leq M$  und  $M < \beta \leq N$  oder umgekehrt erfüllt.

Von MALISCHEWSKY [59] ist gezeigt worden, daß die Orthogonalitätsrelation (26) bei Beachtung einer Zusatzbedingung auch für Oberflächenwellen mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung Gültigkeit hat. Wir bezeichnen die Verrückungen und Spannungen der Oberflächenwellen, die sich nicht parallel zur  $x_1$ -Achse ausbreiten, mit

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} \overset{\alpha}{u}_j = \overset{\alpha}{U}_j(x_3) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ \overset{\alpha}{\sigma}_{jk} = \overset{\alpha}{S}_{jk}(x_3) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \end{array} \right.$$

wobei

$$(29) \overset{\alpha}{k}_1 = \overset{\alpha}{n}_1 \overset{\alpha}{k}, \quad \overset{\alpha}{k}_2 = \overset{\alpha}{n}_2 \overset{\alpha}{k}$$

ist und  $(\overset{\alpha}{n}_1, \overset{\alpha}{n}_2, 0)$  die Komponenten des Einheitsvektors in Ausbreitungsrichtung darstellen. Die Amplituden-Tiefen-Abhängigkeiten von Verrückungen und Spannungen der schräg laufenden Oberflächenwellen hängen mit den gleichen Größen der sich parallel zur  $x_1$ -Achse ausbreitenden Oberflächenwellen über die lineare Tensortransformation

$$(30) \overset{\alpha}{U}_i = c_{ki} \overset{\alpha}{U}_k, \quad \overset{\alpha}{S}_{ik} = c_{li} c_{jk} \overset{\alpha}{S}_{lj}$$

zusammen. Die Transformationsmatrix ergibt sich zu

$$(31) c_{ik} = \delta_{i3} \delta_{k3} + (\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}) \overset{\alpha}{n}_1 + \varepsilon_{ik3} \overset{\alpha}{n}_2,$$

was man zum Beispiel leicht mit Hilfe der Theorie des Drehtensors [20] verifizieren kann. Da es sich bei der Drehung um eine orthogonale Koordinatentransformation handelt, sind zwischen den Elementen der Transformationsmatrix die Beziehungen

$$(32) c_{j1} c_{jk} = \delta_{lk}, \quad c_{ik} c_{jk} = \delta_{ij}$$

erfüllt.

Die Orthogonalitätsrelation für Oberflächenwellenmoden, die sich in unterschiedliche Richtungen ausbreiten, hat ein analoges Aussehen wie (26), nämlich (siehe [59])

$$(33) \int_0^{\infty} [\overset{\alpha}{U}_i \overset{\beta}{S}_{1i}^* - \overset{\beta}{U}_i^* \overset{\alpha}{S}_{1i}] dx_3 = 0, \quad \overset{\alpha}{k}_1 \neq \overset{\beta}{k}_1 \text{ \& } \overset{\alpha}{k}_2 = \overset{\beta}{k}_2.$$

Hierbei ist zu beachten, daß einmal  $\alpha$  und  $\beta$  beliebig sind und zum anderen die Zusatzbedingung

$$(34) \overset{\alpha}{k}_2 = \text{const} \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, N$$

erfüllt sein muß. Durch diese Bedingung werden aus den unzählig möglichen Richtungen, in die sich Oberflächenwellen in der  $x_1, x_2$ -Ebene ausbreiten können, bestimmte ausgesucht, für die die Orthogonalitätsrelation in der Form (33) Gültigkeit besitzt (Abb. 7).

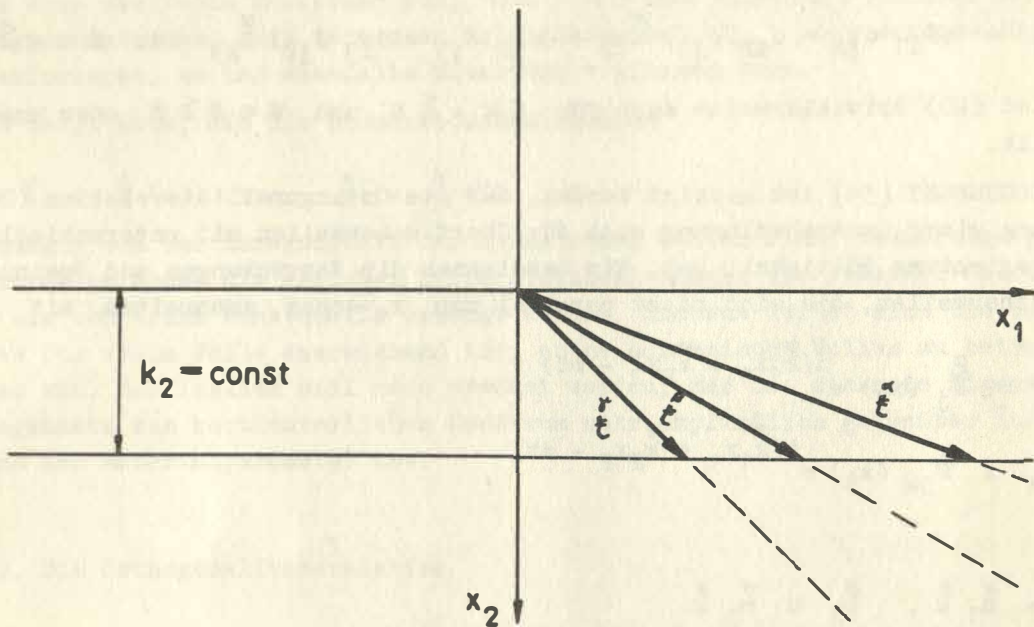


Abb. 7 Veranschaulichung der Zusatzbedingung für die Orthogonalitätsrelation

### 3.1.3. Der Energietransport

Um in unseren Betrachtungen später etwas über die Energieverteilung bei der Wechselwirkung von Oberflächenwellen mit einer vertikalen Diskontinuität aussagen zu können, muß der Betrag der Energie, der durch die Oberflächenwellenmode transportiert wird, bekannt sein. Da die Phasengeschwindigkeit nicht die Ausbreitungsgeschwindigkeit irgendeiner realen physikalischen Größe darstellt [48], verknüpfte bereits RAYLEIGH [73] den Energietransport mit der Gruppengeschwindigkeit und kam so zu einer vertieften Auffassung von der Theorie der Gruppengeschwindigkeit. Bei einer ebenen Welle in einem ideal elastischen Medium ändert sich die Energiedichte bei der Ausbreitung nicht, und die Gesamtenergie setzt sich aus der potentiellen und der kinetischen Energie zusammen. Die potentielle und kinetische Energie sind phasengleich und von gleichem Betrag [74]. Daraus folgt, daß die Gesamtenergie einer harmonischen Welle gleich der doppelten kinetischen Energie ist.

Bezeichnet man die mittlere (d. h. zeitlich über eine Periode gemittelte) kinetische Energie pro Einheitsoberfläche der Mode  $\alpha$  mit  $\bar{T}$  und deren Gruppengeschwindigkeit mit  $\bar{C}$ , so erhält man gemäß ALSOP [2] für den Energietransport  $\bar{S}_1$  durch eine Fläche in der  $x_2, x_3$ -Ebene mit Einheitsbreite und unendlicher Tiefe der sich in  $x_1$ -Richtung ausbreitenden Mode  $\alpha$  den Ausdruck

$$(35) \quad \bar{S}_1 = 2 \bar{T} \bar{C}.$$

Die Größe  $\frac{\alpha}{T}$  ist hierbei durch

$$(36) \quad \frac{\alpha}{T} = \frac{\omega^2}{4} \int_0^{\infty} e^{-u_1} u_1^* dx_3 = \frac{\omega^2}{4} \int_0^{\infty} e^{-U_1} U_1^* dx_3$$

gegeben, während die Gruppengeschwindigkeit bei Kenntnis der Phasengeschwindigkeit näherungsweise unter Benutzung des RAYLEIGHschen Prinzips bestimmt werden kann.

Es soll hier gezeigt werden, daß auch noch ein einfacherer Weg zur Berechnung des Energietransports möglich ist. Bekanntlich lautet der Energieerhaltungssatz für die Kontinuumsmechanik in differentieller Schreibweise [42]

$$(37) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + S_{k,k} = 0,$$

wobei  $E$  die Gesamtenergie und  $S_k$  die Komponenten des Energiestromdichtevektors darstellen. Dieser ist mit dem POYNTING-Vektor für elektromagnetische Wellen äquivalent und gibt den Energiebetrag an, der in der Zeiteinheit durch das Oberflächenelement 1 fließt. Unter Vernachlässigung quadratischer Glieder erhält man nach verschiedenen Umformungen aus der Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums:

$$(38) \quad S_k = -\sigma_{ik} \dot{u}_i.$$

Sind zwei Größen  $u(t)$ ,  $\mathfrak{B}(t)$  in komplexer Form

$$(39) \quad u(t) = u_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathfrak{B}(t) = \mathfrak{B}_0 e^{-i\omega t}$$

gegeben, so hat man bei der Bildung ihres Produktes nur den Realteil zu benutzen. Interessiert aber, wie in unserem Fall, lediglich das Zeitmittel dieses Produktes, so kann man es als

$$(40) \quad \overline{\text{Re } u \text{ Re } \mathfrak{B}} = \frac{1}{4} (u_0 \mathfrak{B}_0^* + u_0^* \mathfrak{B}_0) = \frac{1}{2} \text{Re } (u \mathfrak{B}^*)$$

berechnen [47]. Demzufolge erhalten wir für die Energie der Mode  $\alpha$ , die im zeitlichen Mittel pro Sekunde durch einen Streifen der  $x_2, x_3$ -Ebene mit Einheitsbreite und unendlicher Länge in  $x_1$ -Richtung strömt, den Ausdruck

$$(41) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha}{S} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{Re} (i \omega \dot{u}_j \alpha_{j1}^*) dx_3 = \frac{i \omega}{4} \int_0^{\infty} (\dot{u}_j \alpha_{j1}^* - \dot{u}_j^* \alpha_{j1}) dx_3 = \\ &= \frac{i \omega}{4} \int_0^{\infty} (\dot{U}_j \alpha_{j1}^* - \dot{U}_j^* \alpha_{j1}) dx_3. \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Orthogonalitätsrelation (26), so sieht man, daß diese für  $\alpha = \beta$  bis auf einen Faktor gerade den Energiestrom ergibt. Damit besteht eine günstige Möglichkeit der Normierung. Die Oberflächenwellen seien so normiert, daß jede Mode Einheitsenergie transportiert, d. h.

$$(42) \quad \frac{\alpha}{S} = 1, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Dies wird sich später als zweckmäßig erweisen. Durch Zusammenfassen von (26), (41) und (42) kann man der Orthogonalitätsrelation die Form

$$(43) \quad \frac{i \omega}{4} \int_0^{\infty} (\dot{U}_j \alpha_{j1}^* - \dot{U}_j^* \alpha_{j1}) dx_3 = \delta_{\alpha\beta}$$

geben, wenn man den Fall sich überschneidender RAYLEIGH- oder LOVE-Moden ausschließt. Wenn Entartung vorliegt, ist die Gleichung (43) trivialerweise erfüllt.

Um zur Normierung der schräg laufenden Oberflächenwellen zu gelangen, formen wir die linke Seite der Gleichung (33) für  $\alpha = \beta$  mit Hilfe von (30), (31) und (32) folgendermaßen um:

$$(44) \int_0^{\infty} (\tilde{U}_i^{\alpha} \tilde{S}_{1i}^{\alpha} - \tilde{U}_i^{*\alpha} \tilde{S}_{1i}^{\alpha}) dx_3 = \int_0^{\infty} c_{ki}^{\alpha} c_{m1}^{\alpha} c_{ni}^{\alpha} (\tilde{U}_k^{\alpha} \tilde{S}_{mn}^{*\alpha} - \tilde{U}_k^{*\alpha} \tilde{S}_{mn}^{\alpha}) dx_3 = \\ = \int_0^{\infty} c_{m1}^{\alpha} (\tilde{U}_n^{\alpha} \tilde{S}_{mn}^{*\alpha} - \tilde{U}_n^{*\alpha} \tilde{S}_{mn}^{\alpha}) dx_3 = \int_0^{\infty} (\delta_{m1}^{\alpha} \tilde{n}_1 - \delta_{m2}^{\alpha} \tilde{n}_2) (\tilde{U}_n^{\alpha} \tilde{S}_{mn}^{*\alpha} - \tilde{U}_n^{*\alpha} \tilde{S}_{mn}^{\alpha}) dx_3 .$$

Bei Beachtung von (23) und (27) ergibt sich hieraus

$$(45) \int_0^{\infty} (\tilde{U}_i^{\alpha} \tilde{S}_{1i}^{\alpha} - \tilde{U}_i^{*\alpha} \tilde{S}_{1i}^{\alpha}) dx_3 = \tilde{n}_1^{\alpha} \int_0^{\infty} (\tilde{U}_i^{\alpha} \tilde{S}_{1i}^{\alpha} - \tilde{U}_i^{*\alpha} \tilde{S}_{1i}^{\alpha}) dx_3 ,$$

und mittels (43) nimmt die Orthogonalitätsrelation für schräg laufende Oberflächenwellen die Gestalt

$$(46) \frac{i\omega}{4n_1} \int_0^{\infty} (\tilde{U}_j^{\alpha} \tilde{S}_{1j}^{\beta} - \tilde{U}_j^{*\alpha} \tilde{S}_{1j}^{\beta}) dx_3 = \delta_{\alpha\beta} , \quad \tilde{k}_2^{\alpha} = \text{const} \quad \text{mit} \quad \alpha = 1, \dots, N ,$$

an, wenn wir die kritischen Fälle ohne Einschränkung der Allgemeinheit ausschließen. Wenn Entartung vorliegt, sind die Eigenfunktionen für schräg laufende Oberflächenwellen im allgemeinen nicht orthogonal. Es läßt sich jedoch im Prinzip das SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden und Orthogonalität herstellen. In diesem Zusammenhang soll darauf hingewiesen werden, daß die Gleichungen (43) und (46) in bestimmten Fällen gegenüber Koordinatentransformationen nicht invariant sind, da auf den rechten Seiten keine invarianten Ausdrücke stehen. So ist es zu erklären, daß im Entartungsfall zwar (43) richtig ist, nicht jedoch für  $\tilde{n}_2^{\alpha} \neq 0$ .

### 3.2. Das kontinuierliche Spektrum, repräsentiert durch die Raumwellen

In diesem Abschnitt wollen wir auch Eigenfunktionen zulassen, die nicht dem Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen angehören, d. h., wir werden auf die Bedingung (16) verzichten. Ein solches Vorgehen ist gerechtfertigt und zum Beispiel in der Quantentheorie durchaus üblich [63]. Die auf diese Weise vom Operator (11) und den Randbedingungen (15) erzeugten Eigenfunktionen gehören zum kontinuierlichen Eigenwertspektrum des Operators und entsprechen den Raumwellen. Diese klingen mit der Tiefe nicht ab und verletzen deshalb die Bedingung (16). Man kann sich die Situation leicht anhand eines Analogiemodells, etwa des Wasserstoffatoms, verdeutlichen: Die Oberflächenwellen entsprechen den gebundenen (diskreten) Zuständen und die Raumwellen den ungebundenen (kontinuierlichen) Zuständen des Wasserstoffatoms.

In diesem Abschnitt wollen wir von vornherein voraussetzen, daß die Materialparameter stückweise konstante Funktionen von  $x_3$  sind, weil die Aufgabe sonst zu unübersichtlich wird.

Da unser Formalismus von ebenen Wellen ausgeht, müssen wir im Falle der Raumwellen Quellen in unendlicher Tiefe annehmen, und zwar zusätzlich zu den Quellen der Oberflächenwellen, die sich an der Oberfläche in unendlicher Ferne befinden.

Zur Veranschaulichung der kontinuierlichen Eigenfunktionen betrachten wir einen ungeschichteten Halbraum. Unter einem beliebigen Winkel  $\varphi_e$  mögen ebene Raumwellen,



und zwar P-, SV- (in der Einfallsebene polarisierte) oder SH- (senkrecht zur Einfallsebene polarisierte) Wellen, einfallen, wobei die Einfallsebene die  $x_1, x_3$ -Ebene sei. Bei der Reflexion an der freien Oberfläche entstehen P- und SV-Wellen beim Einfall von P- und SV-Wellen sowie SH-Wellen beim Einfall von SH-Wellen (siehe Abb. 8).

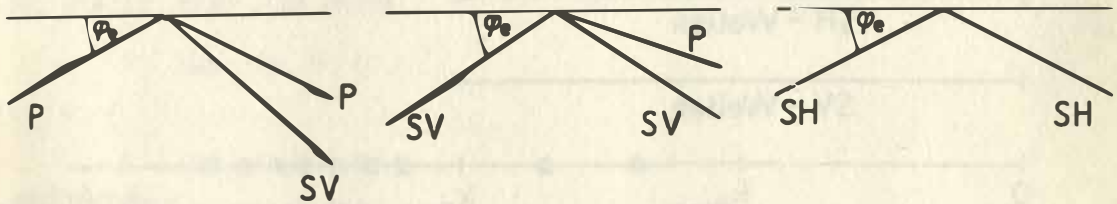


Abb. 8 Einfall von Raumwellen an einer freien Oberfläche

Die Randbedingungen (15) an der freien Oberfläche, die natürlich gleichermaßen für Oberflächenwellen wie für Raumwellen erfüllt sein müssen, erfordern die Gleichheit aller  $k_1$ -Werte der einfallenden und der reflektierten Wellen. Bezeichnen wir die gemeinsamen  $k_1$ -Werte mit  $K$ , so nehmen die Wellenfunktionen das Aussehen

$$(47) \quad u_j = U_j(x_3, K) e^{i(Kx_1 - \omega t)}, \quad \sigma_{jm} = S_{jm}(x_3, K) e^{i(Kx_1 - \omega t)}$$

an. Die Größe  $K$  spielt hierbei die Rolle des kontinuierlichen Eigenwertes, und seine Variation ist gleichbedeutend mit der Variation des Einfallswinkels  $\varphi_e$ , denn es gilt

$$(48) \quad K = k_1 = k \cdot \cos \varphi_e.$$

Hieraus erkennt man auch deutlich, daß  $K$  ein kontinuierlicher Eigenwert ist, denn der Winkel  $\varphi_e$  kann beliebige Werte zwischen 0 und  $\pi/2$  annehmen (wenn  $K$  positiv vorausgesetzt wird).

Für den geschichteten Halbraum gelten im Prinzip die gleichen Überlegungen, nur ist der Vorgang wesentlich komplexer, denn an jeder Schichtgrenze kommt es zu entsprechenden Reflexionen. Wenn man annimmt, daß an der Grenze zur letzten (ins Unendliche reichenden) Schicht wiederum ebene P-, SV- oder SH-Wellen einfallen, so lassen sich die Eigenfunktionen  $U_i(x_3, K)$  genau wie bei den Oberflächenwellen mit Hilfe des HASKELL'schen Matrizenverfahrens ermitteln. In einer neueren Arbeit beschreiben JENSEN und ELLIS [38], wie man das Problem auf der Basis einer linearen Systemtheorie behandeln kann.

Gemäß (48) kann  $K$  von 0 bis zu den Wellenzahlen  $k_{P(n)}$  und  $k_{S(n)}$  der letzten Schicht variieren, je nachdem ob P- oder S-Wellen einfallen. Die Grenzwerte  $k_{P(n)}$  und  $k_{S(n)}$  erfordern eine gesonderte Behandlung, denn dort entstehen besondere, von GOODIER und BISHOP [24] untersuchte Wellentypen. Es handelt sich dabei um Wellen mit linearer Amplituden-Tiefen-Abhängigkeit. Trägt man alle bisher gefundenen Eigenwerte auf einer Achse ab, so ergibt sich ungefähr folgende Verteilung:

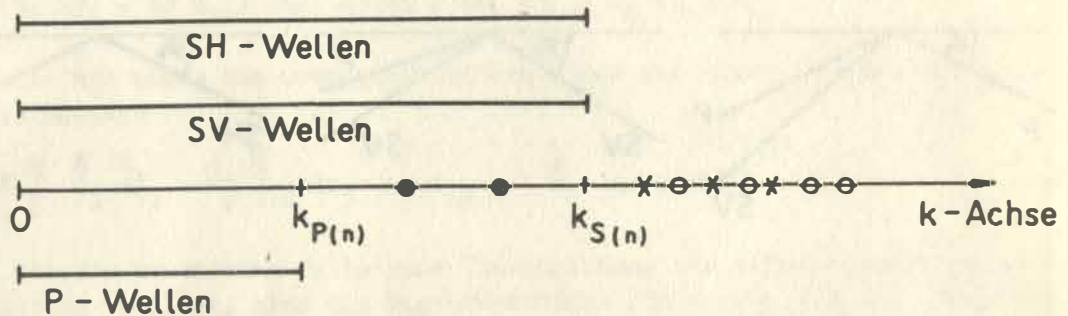


Abb. 9 Verteilung der Eigenwerte,  $\omega = \text{const}$

0 : RAYLEIGH-Moden, x : LOVE-Moden,  $\otimes$  : Leaking-Moden

Die Größen  $k_{P(n)}$  und  $k_{S(n)}$  sind durch

$$(49) \quad k_{P(n)} = \frac{\omega}{v_{P(n)}}, \quad k_{S(n)} = \frac{\omega}{v_{S(n)}}$$

gegeben, wobei  $v_{P(n)}$  und  $v_{S(n)}$  die P- bzw. S-Wellen-Geschwindigkeiten der letzten Schicht bedeuten. Der Abb. 9 kann man folgende Tatsachen entnehmen:

1. Im Bereich  $0 \leq K \leq k_{P(n)}$  liegt eine dreifache Entartung der kontinuierlichen Eigenwerte vor.
2. Im Bereich  $k_{P(n)} \leq K \leq k_{S(n)}$  sind die kontinuierlichen Eigenwerte zweifach entartet. Weiterhin ist in diesem Bereich eine Entartung zwischen kontinuierlichen und diskreten Eigenwerten möglich, hervorgerufen durch diejenigen Moden, für die  $v_{S(n)} < c < v_{P(n)}$  gilt. Diese sind im ursprünglichen HASKELL-schen Formalismus nicht enthalten und wurden z. B. von SCHWAB und KNOPOFF [76] erwähnt. Es handelt sich dabei aller Wahrscheinlichkeit nach um die sogenannten Leaking-Moden.
3. Im Bereich  $k \geq k_{S(n)}$  liegen die diskreten Eigenwerte der RAYLEIGH- und LOVE-Moden, wo ebenfalls, wie schon früher diskutiert wurde, Entartungen auftreten können.

Mit diesen Erkenntnissen und unter Benutzung des die Entartung kennzeichnenden Indexes  $\Omega$ , definiert durch

$$(50) \begin{cases} \Omega = 1 : \text{P-Wellen,} \\ \Omega = 2 : \text{SV-Wellen,} \\ \Omega = 3 : \text{SH-Wellen,} \end{cases}$$

kann man den kontinuierlichen Eigenfunktionen die Form

$$(51) \begin{aligned} \overset{(\Omega)}{U}_i(x_3, K) = & [\delta_{\Omega 1} H(k_{P(n)} - K) + \delta_{\Omega 2}] [\delta_{1i} \overset{(\Omega)}{U}_1(x_3, K) + \delta_{3i} \overset{(\Omega)}{U}_3(x_3, K)] + \\ & + \delta_{\Omega 3} \delta_{2i} \overset{(\Omega)}{U}_2(x_3, K) \end{aligned}$$

geben. Dabei stellt  $H(x)$  die durch

$$(52) H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definierte HEAVISIDE-Funktion dar.

Man kann in gleicher Weise wie (26) eine Orthogonalitätsrelation für die kontinuierlichen Eigenfunktionen herleiten, die das Aussehen

$$(53) \int_0^{\infty} [\overset{(\Omega)}{U}_i(x_3, K) \overset{(\Omega)}{S}_{1i}^*(x_3, K') - \overset{(\Omega)}{U}_i^*(x_3, K') \overset{(\Omega)}{S}_{1i}(x_3, K)] dx_3 = 0$$

für  $K \neq K'$ ,  $K, K' \in [0, k_{S(n)}]$ ,

hat. Die kontinuierlichen und diskreten Eigenfunktionen sind untereinander ebenfalls orthogonal [59]:

$$(54) \int_0^{\infty} [\overset{(\Omega)}{U}_i(x_3, K) \overset{\beta}{S}_{1i}^*(x_3) - \overset{\beta}{U}_i^*(x_3) \overset{(\Omega)}{S}_{1i}(x_3, K)] dx_3 = 0.$$

Eventuelle Entartungen zwischen diskreten und kontinuierlichen Eigenwerten sind außer acht gelassen worden. Man kann nun diese Orthogonalitätsrelationen wieder dahingehend verallgemeinern, daß man Raumwellen zuläßt, deren Ausbreitungsebene nicht die  $x_1, x_3$ -Ebene ist. Die Ausbreitungsebene wird durch den Wellenzahlvektor und seine Projektion in die  $x_1, x_2$ -Ebene aufgespannt. Die Verrückungen und Spannungen dieser Raumwellen bezeichnen wir analog zu (28) mit

$$(55) \begin{cases} \overset{(\Omega)}{\tilde{u}}_j = \overset{(\Omega)}{\tilde{U}}_j(x_3, K) e^{i(Kx_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ \overset{(\Omega)}{\tilde{\sigma}}_{jm} = \overset{(\Omega)}{\tilde{S}}_{jm}(x_3, K) e^{i(Kx_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \end{cases}$$

und die Gleichungen (30) nehmen die Gestalt

$$(56) \overset{(\Omega)}{\tilde{U}}_i(x_3, K) = c_{mi}(K) \overset{(\Omega)}{U}_m(x_3, K), \quad \overset{(\Omega)}{\tilde{S}}_{im}(x_3, K) = c_{li}(K) c_{jm}(K) \overset{(\Omega)}{S}_{lj}(x_3, K)$$

an, wobei

$$(57) c_{jm}(K) = \delta_{j3} \delta_{m3} + (\delta_{jm} - \delta_{j3} \delta_{m3}) n_1(K) + \varepsilon_{jm3} n_2(K)$$

gilt. Die Komponenten des Einheitsvektors  $[n_1(K), n_2(K), 0]$ ,

$$(58) \quad n_1(K) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + k_2^2}}, \quad n_2(K) = \frac{k_2}{\sqrt{K^2 + k_2^2}},$$

sind die Richtungscosinus der Projektion des Wellenzahlvektors in die  $x_1, x_2$ -Ebene (Abb. 10).

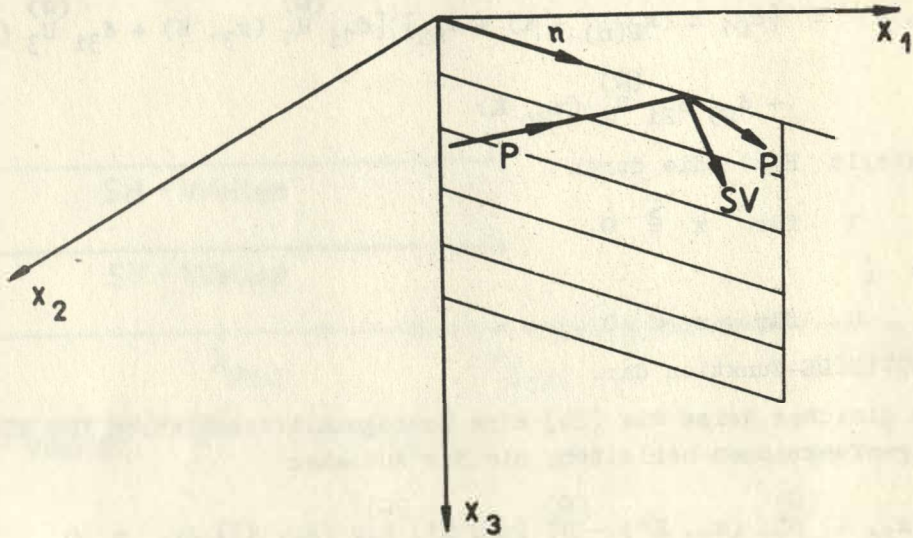


Abb. 10 Die Ausbreitungsebene der Raumwellen

Es läßt sich nun mit den in [59] gezeigten Methoden eine verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation für die kontinuierlichen Eigenfunktionen in der Form

$$(59) \quad \int_0^{\infty} [\tilde{U}_1^{(\Omega)}(x_3, K) \tilde{S}_{11}^{(\Omega)}(x_3, K') - \tilde{U}_1^{(\Omega)}(x_3, K') \tilde{S}_{11}^{(\Omega)}(x_3, K)] dx_3 = 0$$

für  $K \neq K'$ ,  $k_2 = \text{const}$ ,

und eine zu (54) analoge Gleichung herleiten.

Die Normierung der Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums ist nicht in üblicher Weise möglich, weil das Normierungsintegral divergiert. In diesem Zusammenhang wurde die Normierung der Raumwellen erstmalig von ALSOP [3] durchgeführt, indem er die WEYLsche Methode der Eigendifferentiale benutzte. Diese neuen Größen besitzen die Eigenschaften der Eigenfunktionen eines diskreten Spektrums. Die Einführung der Eigendifferentiale erschwert aber nach DAWYDOW [18] die praktische Anwendung der Theorie sehr, deshalb normiert man die Eigenfunktionen eines kontinuierlichen Spektrums normalerweise auf die DIRACsche Deltafunktion, die durch

$$(60) \quad \delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

definiert ist. Dies ist gemäß MESSIAH [63] immer möglich. Demzufolge können wir jetzt (59) folgendermaßen umschreiben:

$$(61) \int_0^{\infty} \left[ \overset{(\Omega)}{\tilde{U}}_i(x_3, K) \overset{(\Omega)}{\tilde{S}}_{1i}^*(x_3, K') - \overset{(\Omega)}{\tilde{U}}_i^*(x_3, K') \overset{(\Omega)}{\tilde{S}}_{1i}(x_3, K) \right] dx_3 = \delta(K - K'),$$

$$\overset{(\Omega)}{k}_2 = \text{const.}$$

An die Stelle des KRONECKER-Symbols bei den diskreten Eigenfunktionen tritt also bei den kontinuierlichen Eigenfunktionen einfach die Deltafunktion.

Wir wollen auch hier wieder die Normierung mit dem Energietransport verknüpfen. Analog zu Gleichung (41) würde für den Energietransport der Raumwellen, deren Einfallsebene die  $x_1, x_3$ -Ebene ist, die Gleichung

$$(62) \overset{(\Omega)}{S}_1(K) = \frac{i\omega}{4} \int_0^{\infty} \left[ \overset{(\Omega)}{U}_i(x_3, K) \overset{(\Omega)}{S}_{1i}^*(x_3, K) - \overset{(\Omega)}{U}_i^*(x_3, K) \overset{(\Omega)}{S}_{1i}(x_3, K) \right] dx_3$$

gelten. Dieser Ausdruck divergiert jedoch, darum mußten wir ja gerade die Deltafunktion einführen. Trotzdem verwenden wir für die Normierung wieder den entsprechenden Zusatzfaktor und erhalten als endgültige Orthogonalitätsrelation

$$(63) \frac{i\omega}{4n_1^{(\Omega)}(K)} \int_0^{\infty} \left[ \overset{(\Omega)}{U}_i(x_3, K) \overset{(\Omega')}{\tilde{S}}_{1i}^*(x_3, K') - \overset{(\Omega')}{\tilde{U}}_i^*(x_3, K') \overset{(\Omega)}{\tilde{S}}_{1i}(x_3, K) \right] dx_3 =$$

$$= \delta_{\Omega\Omega'} \delta(K - K'), \quad \overset{(\Omega)}{k}_2 = \text{const}, \quad \Omega = 1, 2, 3,$$

mit der Nebenbedingung [siehe (60)]:

$$(64) \frac{i\omega}{4} \int_0^{\infty} \int_{K_{\min}}^{K_{\max}} \frac{1}{n_1^{(\Omega)}(K)} \left[ \overset{(\Omega)}{\tilde{U}}_i(x_3, K) \overset{(\Omega')}{\tilde{S}}_{1i}^*(x_3, K') - \overset{(\Omega')}{\tilde{U}}_i^*(x_3, K') \overset{(\Omega)}{\tilde{S}}_{1i}(x_3, K) \right] dx_3 dK = 1$$

mit  $K' \in (K_{\min}, K_{\max})$ .

In (63) sind die entarteten Eigenfunktionen zusätzlich orthogonalisiert worden, was in der Regel analog dem SCHMIDT'schen Orthogonalisierungsverfahren möglich ist.

#### 4. Der elastische Halbraum mit Vertikaldiskontinuität

##### 4.1. Das SNELLIUSsche Brechungsgesetz

Es ist nun das theoretische Rüstzeug erarbeitet worden, um die näherungsweise Lösung des Randwertproblems für den Durchgang von elastischen Oberflächenwellen durch eine vertikale Diskontinuität in Angriff nehmen zu können. Dabei gehen wir im folgenden von der in Abb. 4 dargestellten Situation aus. Die Diskontinuitätsfläche soll durch die Ebene  $x_1 = 0$  repräsentiert werden. Auf dieser Ebene sind die Randbedingungen, die den stetigen Übergang sämtlicher Verrückungs- und gewisser Spannungskomponenten erfordern, zu befriedigen. Es empfiehlt sich jetzt, noch etwas über das Verhalten der Materialparameter an der Grenzfläche zu sagen. In der Natur werden sich die Parameter des elastischen Kontinuums kaum abrupt ändern, vielmehr wird es ein mehr oder minder stetiger Übergang sein. Für die Anwendung unserer Theorie muß vorausgesetzt werden, daß die Änderung von  $\mu$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  in Richtung der  $x_1$ -Achse innerhalb einer Distanz erfolgt, die klein gegenüber der Wellenlänge der betrachteten Oberflächenwellen ist. Ein Modell, das von vornherein  $\mu$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  als stetige Funktionen von  $x_1$  annimmt, wäre den Gegebenheiten in der Natur besser angepaßt, und man hätte keine Randbedingungen bei  $x_1 = 0$  zu erfüllen. Allerdings lassen sich die entstehenden Differentialgleichungen mit elementaren Mitteln nicht lösen. Es ist jedoch prinzipiell möglich, die Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen anzunähern und numerische Lösungen mittels eines Computers zu finden. Die Interpretation der Ergebnisse dürfte aber Schwierigkeiten bereiten, da die aus der Seismologie bekannten Wellentypen keine Eigenfunktionen eines solchen elastischen Halbraumes sind.

Die Schichtenfolgen links bzw. rechts von der Diskontinuität werden mit 1 bzw. 2 gekennzeichnet, und die Oberflächenwellen mögen von links her einfallen. Man gewinnt nun das SNELLIUSsche Brechungsgesetz für die Oberflächenwellen am einfachsten durch folgende Überlegung: Im geschichteten elastischen Halbraum ohne Vertikaldiskontinuität sind Oberflächenwellen mit konstantem  $k_2$  und konstanter Kreisfrequenz  $\omega$  Lösungen der Bewegungsgleichung. Da die Randbedingungen auf der Grenzfläche  $x_1 = 0$  befriedigt werden müssen, sind sie keine Funktionen von  $x_2$  und  $t$ , und die Abhängigkeit der Lösungen von  $t$  und  $x_2$  bleibt daher im ganzen Halbraum und für alle Zeiten unverändert. Mit anderen Worten heißt das allgemein, daß sich die Kreisfrequenz und die  $x_2$ -Komponente des Wellenzahlvektors bei der Wechselwirkung mit der Diskontinuität nicht ändern:

$$(65) \quad \omega_{\text{einf.}} = \omega_{\text{refl.}} = \omega_{\text{trans.}}$$

$$(66) \quad k_2 \text{ einf.} = k_2 \text{ refl.} = k_2 \text{ trans.}$$

In (66) sind das Reflexionsgesetz und das SNELLIUSsche Brechungsgesetz enthalten. Wir kennzeichnen in Zukunft alle Größen, die sich auf die Schichtenfolgen links bzw. rechts von der Diskontinuität beziehen, mit den Indizes 1 bzw. 2. Weiterhin tragen alle modenabhängigen Größen der reflektierten und transmittierten Wellen einen Modenindex, der folgende Variabilitätsbereiche hat:

$$(67) \left\{ \begin{array}{l} \text{Schichtenfolge (1) : } \quad 1, \dots, M^{(1)} \quad \text{RAYLEIGH-Moden,} \\ \alpha = \{ \begin{array}{l} M^{(1)} + 1, \dots, N^{(1)} \text{ LOVE-Moden;} \\ \end{array} \\ \text{Schichtenfolge (2) : } \quad 1, \dots, M^{(2)} \quad \text{RAYLEIGH-Moden,} \\ \alpha = \{ \begin{array}{l} M^{(2)} + 1, \dots, N^{(2)} \text{ LOVE-Moden.} \end{array} \end{array} \right.$$

Die sich auf die einfallende Welle beziehenden Größen sind dadurch ausgezeichnet, daß sie keinen Modenindex tragen, wobei die einfallende Welle eine beliebige RAYLEIGH- oder LOVE-Mode sein kann. Mit diesen Verabredungen ist es möglich, die zweite Gleichung (29) in folgender Weise aufzuspalten:

$$(68) \left\{ \begin{array}{l} k_2^{(1)} = n_2^{(1)} \cdot k^{(1)}, \\ k_2^{(\alpha)} = n_2^{(\alpha)} \cdot k^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)}, \\ k_2^{(\beta)} = n_2^{(\beta)} \cdot k^{(\beta)}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)}. \end{array} \right.$$

Die Anwendung dieser Gleichungen auf (66) ergibt das Reflexionsgesetz

$$(69) \frac{n_2^{(1)}}{n_2^{(\alpha)}} = \frac{k^{(\alpha)}}{k^{(1)}}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

und das SNEELLIUSsche Brechungsgesetz

$$(70) \frac{n_2^{(1)}}{n_2^{(\beta)}} = \frac{k^{(\beta)}}{k^{(1)}}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)}.$$

Die Gültigkeit des SNEELLIUSschen Brechungsgesetzes für Oberflächenwellen ist bereits von mehreren Autoren angenommen worden [4], [15]. Wenn man die soeben gewonnenen Beziehungen physikalisch interpretiert und die bereits diskutierte Aufspaltung in verschiedene Eigenfunktionen annimmt, so erkennt man, daß eine einfallende monochromatische Oberflächenwelle bei der Wechselwirkung mit der Vertikaldiskontinuität in alle bei der Kreisfrequenz  $\omega$  möglichen reflektierten und transmittierten Moden „auffächert“ (Abb. 11).

Mit Hilfe des in Abb. 11 eingeführten Einfallswinkels  $\varphi_0$ , der Reflexionswinkel  $\varphi^{(1)}$  und der Transmissionswinkel  $\varphi^{(2)}$  kann man den Gleichungen (69) und (70) auch die Gestalt

$$(71) \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi^{(\alpha)}} = \frac{k^{(\alpha)}}{k^{(1)}}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(72) \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi^{(\beta)}} = \frac{k^{(\beta)}}{k^{(1)}}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

geben.

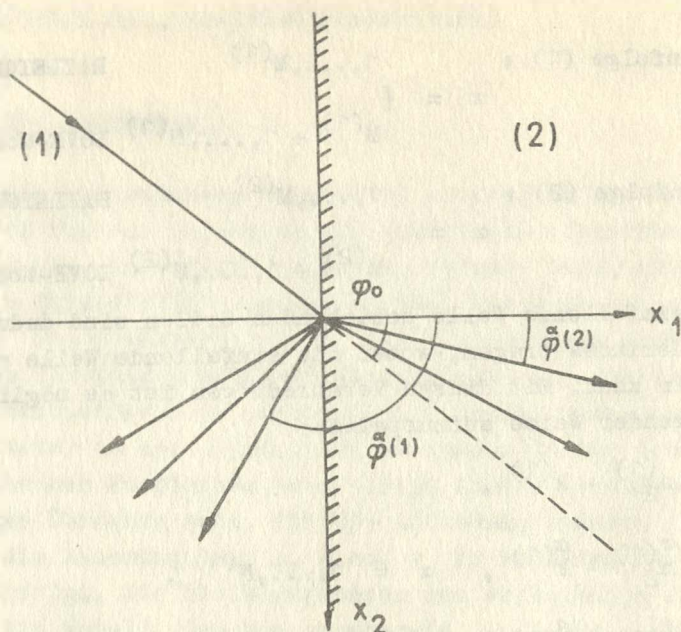


Abb. 11 Die Brechung der Oberflächenwellen gemäß dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz

Eine vertikale Diskontinuität wirkt bei schrägem Einfall seismischer Oberflächenwellen in doppelter Hinsicht. Und zwar tritt einerseits die soeben erwähnte Aufspaltung eines monochromatischen Oberflächenwellenzuges in die verschiedenen Moden auf. Andererseits sind reale Oberflächenwellen nicht monochromatisch, und es kommt an der Vertikaldiskontinuität laut Dispersionsrelation (20) zu einer frequenzabhängigen Ablenkung der einfallenden Mode, d. h., die Vertikaldiskontinuität wirkt in diesem Falle wie ein Prisma.

Die zu (69) und (70) analogen Gleichungen für die Raumwellen

$$(73) \quad \frac{n_2^{(1)}}{n_2^{(1)}(K^{(1)})} = \sqrt{\frac{K^{(1)2} + n_2^{(1)2} k^{(1)2}}{k^{(1)}}}$$

und

$$(74) \quad \frac{n_2^{(1)}}{n_2^{(2)}(K^{(2)})} = \sqrt{\frac{K^{(2)2} + n_2^{(1)2} k^{(1)2}}{k^{(1)}}}$$

gewinnt man unter Verwendung von (58) und (66). Es ist zu erkennen, daß es bei kontinuierlicher Veränderung von  $K^{(1)}$  bzw.  $K^{(2)}$  zu einer kontinuierlichen Drehung der Ausbreitungsebene der Raumwellen kommt. Dieser Vorgang entspricht der „Auffächerung“ in die einzelnen Moden bei den diskreten Eigenfunktionen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen noch die Transformationsmatrizen (31) für



die einzelnen Wellenanteile angegeben werden. In diesem Zusammenhang ist es notwendig, etwas über die Darstellung der reflektierten Wellen auszusagen. Es sei

$$(75) \quad \vec{v}_j^\alpha = \vec{U}_j^\alpha e^{ikx_1}$$

eine Oberflächenwelle, die demzufolge die Bewegungsgleichungen (7)

$$(76) \quad t_{1mj,m}^\alpha \vec{v}_j^\alpha + \rho \omega^2 \vec{v}_1^\alpha = 0$$

und die Randbedingungen (14)

$$(77) \quad t_{13j}^\alpha \vec{v}_j^\alpha = 0 \quad \text{für} \quad x_3 = 0$$

erfüllt. Da

$$(78) \quad t_{1mj}^* = t_{1mj}, \quad t_{1mj,m}^* = t_{1mj,m}$$

gilt und (76) und (77) linear und homogen in  $\vec{v}_j^\alpha$  sind, ist auch das konjugiert Komplexe von (75)

$$(79) \quad \vec{v}_j^{\alpha*} = \vec{U}_j^{\alpha*} e^{-ikx_1}$$

eine Lösung der Bewegungsgleichungen und befriedigt die Randbedingungen. Während  $\vec{v}_j^\alpha$  eine Oberflächenwelle darstellt, die sich in Richtung der positiven  $x_1$ -Achse, d. h. von links nach rechts, ausbreitet, repräsentiert  $\vec{v}_j^{\alpha*}$  eine Oberflächenwelle, die sich in entgegengesetzter Richtung ausbreitet. Es ist zu beachten, daß die nachträglich anzufügende Zeitabhängigkeit im Falle (79) wie im Falle (75)  $e^{-i\omega t}$  lautet. Für senkrecht auf die Diskontinuität fallende Oberflächenwellen stellt die konjugiert komplexe Lösung (79) direkt die reflektierten Oberflächenwellen dar. Bei schrägem Einfall hingegen ist eine Modifizierung von (79) erforderlich.

Die Transformationsmatrizen für die schräg einfallenden und transmittierten Oberflächenwellen lauten gemäß (31)

$$(80) \quad c_{ik}^{(1)} = \delta_{i3} \delta_{k3} + (\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}) n_1^{(1)} + \varepsilon_{ik3} n_2^{(1)}$$

und

$$(81) \quad c_{ik}^{\beta(2)} = \delta_{i3} \delta_{k3} + (\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}) n_1^{\beta(2)} + \varepsilon_{ik3} n_2^{\beta(2)}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

wobei die Größen  $n_2^{\beta(2)}$  durch (70) bestimmt sind und

$$(82) \quad n_1^{\beta(2)} = \sqrt{1 - [n_2^{\beta(2)}]^2}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

gilt. Die reflektierten Moden, die durch schräg einfallende Oberflächenwellen entstehen, gewinnt man durch Transformation der sich in Richtung der negativen  $x_1$ -Achse ausbreitenden Oberflächenwellen mittels der Transformationsmatrizen

$$(83) \quad c_{ik}^{\alpha(1)} = \delta_{i3} \delta_{k3} - (\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}) n_1^{\alpha(1)} - \varepsilon_{ik3} n_2^{\alpha(1)}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)}.$$

Hierbei sind die Größen  $n_2^{\alpha(1)}$  dem Reflexionsgesetz (69) zu entnehmen, und es gilt

$$(84) \quad n_1^{(\alpha)} = -\sqrt{1 - [n_2^{(\alpha)}]^2}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)}.$$

Für die transmittierten Raumwellen ergibt sich in Übereinstimmung mit (57) die zu (81) analoge Transformationsmatrix

$$(85) \quad c_{mn}^{(2)}(K^{(2)}) = \delta_{m3} \delta_{n3} + (\delta_{mn} - \delta_{m3} \delta_{n3}) n_1^{(2)}(K^{(2)}) + \epsilon_{mn3} n_2^{(2)}(K^{(2)})$$

mit

$$(86) \quad n_1^{(2)}(K^{(2)}) = \sqrt{1 - [n_2^{(2)}(K^{(2)})]^2},$$

wobei  $n_2^{(2)}(K^{(2)})$  mit Hilfe von (74) berechnet wird. Die reflektierten Raumwellen gewinnt man nicht wie im Falle der Oberflächenwellen durch komplexe Konjugation, weil sie sich nicht parallel zur  $x_1$ -Achse ausbreiten. Vielmehr hat man die  $x_1$ -Komponente des Wellenzahlvektors  $K$ , die als positiv vorausgesetzt war, durch  $-K$  zu ersetzen und erhält aus (47) für die reflektierten Raumwellen

$$(87) \quad \begin{cases} (u_j)_{\text{refl.}} = U_j(x_3, -K) e^{i(-Kx_1 - \omega t)}, \\ (\sigma_{jm})_{\text{refl.}} = S_{jm}(x_3, -K) e^{i(-Kx_1 - \omega t)}, \quad K > 0. \end{cases}$$

Der Winkel  $\varphi_e$  (siehe Abb. 8) ist hierbei größer als  $90^\circ$ , denn es gilt anstatt (48)

$$(88) \quad -K = k \cos \varphi_e, \quad \pi \geq \varphi_e > \frac{\pi}{2}.$$

Bei schrägem Einfall von Oberflächenwellen sind die reflektierten Raumwellen (87) mit Hilfe der zu (83) analogen Transformationsmatrix

$$(89) \quad c_{mn}^{(1)}(K^{(1)}) = \delta_{m3} \delta_{n3} - (\delta_{mn} - \delta_{m3} \delta_{n3}) n_1^{(1)}(K^{(1)}) - \epsilon_{mn3} n_2^{(1)}(K^{(1)})$$

zu modifizieren, wobei  $n_2^{(1)}(K^{(1)})$  aus (73) folgt und analog zu (84)

$$(90) \quad n_1^{(1)}(K^{(1)}) = -\sqrt{1 - [n_2^{(1)}(K^{(1)})]^2}$$

gilt.

Die Formeln dieses Abschnitts zeigen deutlich, wie die Brechung der Oberflächen- und Raumwellen auf der Basis des SNELLIUSschen Brechungsgesetzes zwanglos durch eine einheitliche Theorie beschrieben werden kann.

#### 4.2. Die Formulierung der Randbedingungen

Die Diskontinuitätsfläche  $x_1 = 0$ , die mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnet werden soll, trennt die beiden unterschiedlich geschichteten Medien 1 und 2, und die Berührung der beiden Medien längs  $\mathfrak{M}$  führt dazu, daß elastische Wellen aus dem Gebiet 1 in das Gebiet 2 übergehen können. Zwischen den Verschiebungen und Spannungen der an der Grenzfläche  $\mathfrak{M}$  gelegenen Teilchen existiert demzufolge ein gewisser Zusammenhang [27]. Die erste Gruppe der Randbedingungen läßt sich aus der Erkenntnis herleiten, daß ein Gleiten der Gesteine längs der Grenzfläche bei den von uns betrachteten elastischen

wellen relativ geringer Amplitude wenig wahrscheinlich ist. Folglich müssen die Ver-  
rückungen an der Grenzfläche stetig sein, d. h.,

$$(91) \quad (\hat{u}_i)^{(1)} = (\hat{u}_i)^{(2)} \quad \text{für } x_1 = 0.$$

Hierbei werden mit  $(\hat{u}_i)^{(1)}$  und  $(\hat{u}_i)^{(2)}$  die Komponenten der resultierenden Gesamt-  
verrückungen in den Gebieten 1 und 2 bezeichnet. Die zweite Gruppe der Randbedingun-  
gen folgt aus dem dritten NEWTONschen Axiom. Wir setzen voraus, daß die Kräfte, die  
von den Teilchen des Gebietes 1 auf die benachbarten Teilchen des Gebietes 2 wirken,  
entgegengesetzt gleich den Kräften sind, die von den Teilchen des Gebietes 2 auf die  
Teilchen des Gebietes 1 wirken. Demzufolge müssen die Normal- und Tangentialspannun-  
gen an der Grenzfläche ebenfalls stetig sein, und es gilt

$$(92) \quad (\hat{\sigma}_{ik} \cdot p_k)^{(1)} = (\hat{\sigma}_{ik} \cdot p_k)^{(2)} \quad \text{für } x_1 = 0.$$

Hierin bedeuten  $\hat{\sigma}_{ik}$  die Komponenten der resultierenden Spannungen, und zwar in den  
Gebieten 1 oder 2, und  $p_k$  die Komponenten des Normaleneinheitsvektors von  $\mathbb{M}$ , die  
durch

$$(93) \quad p_k = \delta_{k1}$$

gegeben sind. Also nimmt (92) die Gestalt

$$(94) \quad (\hat{\sigma}_{i1})^{(1)} = (\hat{\sigma}_{i1})^{(2)} \quad \text{für } x_1 = 0$$

an. Die Randbedingungen (91) und (94) gelten für  $x_1 = 0$  und sind darum von  $x_1$   
unabhängig. Weiterhin läßt sich die  $t$ - und  $x_2$ -Abhängigkeit wegen (65) und (66)  
herauskürzen, so daß nur noch eine  $x_3$ -Abhängigkeit übrigbleibt. Diese wird im fol-  
genden nicht explizit gekennzeichnet.

Man hat nun gemäß ALSOP, wie bereits erwähnt, die in (91) und (94) stehenden Grö-  
ßen nach den bisher bekannten Eigenfunktionen zu entwickeln. Während die Größen für  
das Gebiet 1 eine Überlagerung der einfallenden mit den reflektierten Wellen dar-  
stellen, existieren im Gebiet 2 nur transmittierte Wellen. Es ergeben sich die Be-  
ziehungen

$$(95) \quad (\hat{u}_i)^{(1)} = \tilde{U}_i^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_{\alpha} \tilde{U}_i^{(\alpha)*} + \\ + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(1)}(\Omega)} \frac{(\Omega)}{a} (K^{(1)}) \tilde{U}_i^{(\Omega)}(1) (-K^{(1)}) dK^{(1)} + [\tilde{U}_i^{(1)}]_R,$$

$$(96) \quad (\hat{\sigma}_{i1})^{(1)} = \tilde{S}_{i1}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_{\alpha} \tilde{S}_{i1}^{(\alpha)*} + \\ + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(1)}(\Omega)} \frac{(\Omega)}{a} (K^{(1)}) \tilde{S}_{i1}^{(\Omega)}(1) (-K^{(1)}) dK^{(1)} + [\tilde{S}_{i1}^{(1)}]_R,$$

$$(97) \quad (\hat{u}_i)^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} b_{\alpha} \tilde{U}_i^{(\alpha)} + \\ + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(2)}(\Omega)} \frac{(\Omega)}{b} (K^{(2)}) \tilde{U}_i^{(\Omega)}(2) (K^{(2)}) dK^{(2)} + [\tilde{U}_i^{(2)}]_R$$

und

$$(98) \quad (\hat{\sigma}_{11})^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} b_{\alpha} \mathcal{S}_{11}^{(2)} + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(2)}} (\Omega) b^{(\Omega)} (K^{(2)}) \tilde{\mathcal{S}}_{11}^{(2)} (K^{(2)}) dK^{(2)} + [\tilde{\mathcal{S}}_{11}^{(2)}]_R .$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (95) stellt die Komponenten des Verschiebungsanteils dar, der von den einfallenden Oberflächenwellen herrührt und wobei in Übereinstimmung mit (30)

$$(99) \quad \tilde{U}_i^{(1)} = c_{mi}^{(1)} U_m^{(1)}$$

gilt. Durch die folgende Summe in (95) werden die reflektierten Moden

$$(100) \quad \mathcal{U}_i^{(1)*} = \alpha_{mi}^{(1)} \mathcal{U}_m^{(1)*} , \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)} ,$$

repräsentiert. Dabei können die reell angenommenen Entwicklungskoeffizienten  $a_{\alpha}$ ,

$$(101) \quad a_{\alpha} = a_{\alpha}^* , \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)} ,$$

als verallgemeinerte Reflexionskoeffizienten aufgefaßt werden. Der nächste Ausdruck stellt die reflektierten Raumwellen

$$(102) \quad \tilde{U}_i^{(\Omega)} (-K^{(1)}) = c_{mi}^{(1)} (K^{(1)}) U_m^{(\Omega)} (-K^{(1)}) , \quad \Omega = 1, 2, 3 ,$$

dar. Es wird dabei über die entarteten Eigenfunktionen summiert und gleichzeitig über den kontinuierlichen Eigenwert  $K^{(1)}$  von 0 bis  $K_{\max}^{(1)}$  integriert, wobei

$$(103) \quad 0 < K_{\max}^{(1)} \leq k_{S(n)}^{(1)}$$

gilt. Die (im allgemeinen komplexen) Entwicklungskoeffizienten  $a^{(\Omega)} (K^{(1)})$  sind die verallgemeinerten Reflexionskoeffizienten für die kontinuierlichen Eigenfunktionen.

Schließlich sind in dem Restglied  $[\tilde{U}_i^{(1)}]_R$  alle übrig gebliebenen, durch das verwendete Eigenfunktionssystem nicht berücksichtigten reflektierten Anteile zusammengefaßt. Es ist nämlich nicht gesagt, daß das Eigenfunktionssystem, bestehend aus den Oberflächen- und Raumwellen, vollständig ist.

Die analogen Anteile für die Spannungen sind in Gleichung (96) enthalten, und es gelten die Beziehungen

$$(104) \quad \tilde{\mathcal{S}}_{1i}^{(1)} = c_{m1}^{(1)} c_{ni}^{(1)} \mathcal{S}_{mn}^{(1)} ,$$

$$(105) \quad \tilde{\mathcal{S}}_{1i}^{(1)*} = \alpha_{m1}^{(1)} \alpha_{ni}^{(1)} \mathcal{S}_{mn}^{(1)*} , \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)} ,$$

$$(106) \quad \tilde{\mathcal{S}}_{1i}^{(\Omega)} (-K^{(1)}) = c_{m1}^{(1)} (K^{(1)}) c_{ni}^{(1)} (K^{(1)}) \mathcal{S}_{mn}^{(\Omega)} (-K^{(1)}) , \quad \Omega = 1, 2, 3 .$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (97) stellt die Verschiebungskomponenten der transmittierten Moden

$$\mathcal{U}_i^{(2)} = \alpha_{mi}^{(2)} U_m^{(2)} , \quad \alpha = 1, \dots, N^{(2)} ,$$

dar. Die als reell angenommenen Entwicklungskoeffizienten  $b_\alpha$ ,

$$(107) \quad b_\alpha = b_\alpha^*, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(2)},$$

sind verallgemeinerte Transmissionskoeffizienten der Oberflächenwellen. Durch den nächsten Ausdruck in (97) werden die transmittierten Raumwellen

$$(108) \quad \tilde{U}_i^{(\Omega)}(K^{(2)}) = c_{mi}^{(2)}(K^{(2)}) U_m^{(\Omega)}(K^{(2)}), \quad \Omega = 1, 2, 3,$$

beschrieben. Dabei wird wieder über die entarteten Eigenfunktionen summiert und über den kontinuierlichen Eigenwert  $K^{(2)}$  in den Grenzen von 0 bis  $K_{\max}^{(2)}$ ,

$$(109) \quad 0 < K_{\max}^{(2)} \leq k_{S(n)}^{(2)},$$

integriert. Die (im allgemeinen komplexen) Entwicklungskoeffizienten  $b^{(\Omega)}(K^{(2)})$  sind die verallgemeinerten Transmissionskoeffizienten der kontinuierlichen Eigenfunktionen. Schließlich wird aus den gleichen Gründen wie bei Gleichung (95) ein Restglied  $[\tilde{U}_i^{(2)}]_R$  eingeführt.

Die Gleichung (98) enthält die transmittierten analogen Anteile für die Spannungen, und es gelten die Beziehungen

$$(110) \quad \tilde{S}_{1i}^{(\alpha)} = c_{m1}^{(\alpha)} c_{ni}^{(\alpha)} S_{mn}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(2)},$$

$$(111) \quad \tilde{S}_{1i}^{(\Omega)}(K^{(2)}) = c_{m1}^{(\Omega)}(K^{(2)}) c_{ni}^{(\Omega)}(K^{(2)}) S_{mn}^{(\Omega)}(K^{(2)}), \quad \Omega = 1, 2, 3.$$

Abschließend sollen die Randbedingungen (91) und (94) noch einmal explizit angegeben werden. Mit den Bezeichnungen

$$(112) \quad [\tilde{U}_i]_R = [\tilde{U}_i^{(2)}]_R - [\tilde{U}_i^{(1)}]_R$$

und

$$(113) \quad [\tilde{S}_{1i}]_R = [\tilde{S}_{1i}^{(2)}]_R - [\tilde{S}_{1i}^{(1)}]_R$$

lauten sie an der Stelle  $x_1 = 0$ :

$$(114) \quad \begin{aligned} \tilde{U}_i^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_\alpha \tilde{U}_i^{(\alpha)*} + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(1)}} \frac{K^{(1)}}{a} (\Omega) (K^{(1)}) \tilde{U}_i^{(\Omega)}(-K^{(1)}) dK^{(1)} = \\ = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} b_\alpha \tilde{U}_i^{(\alpha)} + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(2)}} \frac{K^{(2)}}{b} (\Omega) (K^{(2)}) \tilde{U}_i^{(\Omega)}(K^{(2)}) dK^{(2)} + [\tilde{U}_i]_R, \end{aligned}$$

$$(115) \quad \begin{aligned} \tilde{S}_{1i}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_\alpha \tilde{S}_{1i}^{(\alpha)*} + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(1)}} \frac{K^{(1)}}{a} (\Omega) (K^{(1)}) \tilde{S}_{1i}^{(\Omega)}(-K^{(1)}) dK^{(1)} = \\ = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} b_\alpha \tilde{S}_{1i}^{(\alpha)} + \sum_{\Omega=1}^3 \int_0^{K_{\max}^{(2)}} \frac{K^{(2)}}{b} (\Omega) (K^{(2)}) \tilde{S}_{1i}^{(\Omega)}(K^{(2)}) dK^{(2)} + [\tilde{S}_{1i}]_R. \end{aligned}$$

#### 4.3. Die Bestimmung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Oberflächenwellen

Es ist nicht ohne weiteres möglich, die verallgemeinerten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der Oberflächen- und Raumwellen aus den Randbedingungen (114) und (115) exakt zu bestimmen, weil die Restglieder nicht bekannt und mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind. Darum muß ein Näherungsverfahren angewendet werden. Dieses läuft darauf hinaus, die gesuchten Koeffizienten so zu bestimmen, daß die Restglieder (112) bzw. (113), oder genauer gesagt, daraus abgeleitete Größen, so klein wie möglich werden. Anschließend ist zu diskutieren, inwieweit die auf diese Weise erhaltenen Koeffizienten die gesuchten verallgemeinerten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten darstellen bzw. annähern.

Die Aufgabe, die aus den Restgliedern abgeleiteten Größen beide gleichzeitig zu einem Minimum zu machen, ist nicht lösbar. Andererseits müssen aber die beiden Randbedingungen (114) und (115) zur Bestimmung der Koeffizienten herangezogen werden. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, die verallgemeinerten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten als voneinander funktional abhängig zu betrachten und entweder nach den **verallgemeinerten** Reflexions- oder Transmissionskoeffizienten mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation aufzulösen. Indem man die Orthogonalitätsrelation anwendet, werden die beiden Randbedingungen (114) und (115) miteinander verkettet und gehen somit zusammen in die weitere Rechnung ein. Auf diese Weise ist es mit Hilfe der entsprechenden Orthogonalitätsrelationen möglich, sowohl nach den Koeffizienten der Oberflächen- als auch der Raumwellen aufzulösen.

Nachdem die Theorie bis zu diesem Punkt unter Einbeziehung der Raumwellen entwickelt wurde, werden wir im folgenden bei den speziellen Rechnungen nur die Oberflächenwellen berücksichtigen. Wie gezeigt wurde, ist die Einbeziehung der Raumwellen prinzipiell möglich, jedoch würde sie über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. Die Untersuchung des Einflusses der Raumwellen auf der Basis der hier entwickelten Theorie muß deshalb einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Aus diesem Grunde ergänzen wir jetzt einfach die bisherigen Restglieder durch die Raumwellenterme und bezeichnen die Komponenten der modifizierten Restglieder mit  $\tilde{U}_i$  und  $\tilde{S}_{1i}$ . Die Randbedingungen nehmen nunmehr die Gestalt

$$(116) \quad \tilde{U}_i^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_{\alpha} \tilde{U}_i^{(1)*} = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} b_{\alpha} \tilde{U}_i^{(2)} + \tilde{U}_i,$$

$$(117) \quad \tilde{S}_{1i}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_{\alpha} \tilde{S}_{1i}^{(1)*} = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} b_{\alpha} \tilde{S}_{1i}^{(2)} + \tilde{S}_{1i} \quad \text{für } x_1 = 0$$

an.

Der erste Schritt zur Bestimmung der verallgemeinerten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten besteht darin, diese beiden Gleichungen durch Anwendung der Orthogonalitätsrelation (46) für das Gebiet 2 nach  $b_{\alpha}$  aufzulösen (eine Auflösung nach  $a_{\alpha}$  wäre ebenso möglich). Zu diesem Zweck überschieben wir die Gleichung

(116) mit  $\beta_{S_{1i}}^{(2)*}$  und die Gleichung (117) mit  $-\beta_{U_i}^{(2)*}$ , addieren die beiden Gleichungen und integrieren anschließend über  $x_3$  von Null bis Unendlich. Nach Vertauschen der Reihenfolge von Integration und Summation erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (118) \quad & \int_0^\infty \tilde{U}_i^{(1)} \frac{\beta}{S_{1i}^{(2)}} * dx_3 - \int_0^\infty \frac{\beta}{U_i^{(2)}} * \tilde{S}_{1i}^{(1)} dx_3 + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_\alpha \int_0^\infty [\tilde{U}_i^{(\alpha)} * \frac{\beta}{S_{1i}^{(2)}} * - \frac{\alpha}{S_{1i}^{(1)}} * \frac{\beta}{U_i^{(2)}} *] dx_3 + \int_0^\infty \tilde{U}_i \frac{\beta}{S_{1i}^{(2)}} * dx_3 - \\
 & - \int_0^\infty \tilde{S}_{1i} \frac{\beta}{U_i^{(2)}} * dx_3 = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} b_\alpha \int_0^\infty [\frac{\alpha}{U_i^{(2)}} * \frac{\beta}{S_{1i}^{(2)}} * - \frac{\beta}{U_i^{(2)}} * \frac{\alpha}{S_{1i}^{(2)}}] dx_3, \\
 & \beta = 1, \dots, N^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$(119) \quad P_{12}^\beta = \int_0^\infty \tilde{U}_i^{(1)} \frac{\beta}{S_{1i}^{(2)}} * dx_3, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

$$(120) \quad P_{21}^\beta = \int_0^\infty \frac{\beta}{U_i^{(2)}} * \tilde{S}_{1i}^{(1)} dx_3, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

$$(121) \quad Q_{12}^{\alpha\beta} = \int_0^\infty \frac{\alpha}{U_i^{(1)}} * \frac{\beta}{S_{1i}^{(2)}} * dx_3, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

$$(122) \quad Q_{21}^{\beta\alpha} = \int_0^\infty \frac{\beta}{U_i^{(2)}} * \frac{\alpha}{S_{1i}^{(1)}} * dx_3, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

folgt aus (118) unter Benutzung von (46) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 (123) \quad & P_{12}^\beta - P_{21}^\beta + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_\alpha (Q_{12}^{\alpha\beta} - Q_{21}^{\beta\alpha}) + \int_0^\infty \tilde{U}_i \frac{\beta}{S_{1i}^{(2)}} * dx_3 - \int_0^\infty \tilde{S}_{1i} \frac{\beta}{U_i^{(2)}} * dx_3 = \\
 & = \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} \frac{4}{1} \frac{\alpha}{n_1} b_\alpha \delta_{\alpha\beta} = \frac{4}{1} \frac{\beta}{n_1} b_\beta, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)}.
 \end{aligned}$$

In dieser Gleichung vernachlässigen wir die beiden Integrale unter der Annahme, daß die Restglieder genügend klein sind, d. h.

$$(124) \quad |\tilde{U}_i| \ll |\tilde{U}_i^{(1)}|, \quad |\tilde{S}_{1i}| \ll |\tilde{S}_{1i}^{(1)}|,$$

und erhalten

$$(125) \quad b_\beta = \frac{1}{4} \frac{\omega}{n_1} \frac{\beta}{n_1} [P_{12}^\beta - P_{21}^\beta + \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} a_\alpha (Q_{12}^{\alpha\beta} - Q_{21}^{\beta\alpha})], \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)}.$$

Die Größen  $P_{12}^\beta$  und  $P_{21}^\beta$  geben an, in welchem Maße die einfallende Mode als Mode  $\beta$  in der Schichtenfolge 2 fortgeführt wird. Die zusätzlichen Terme in (125) rühren von der Wechselwirkung mit den reflektierten Wellen her.

An dieser Stelle soll die Voraussetzung (107) geprüft werden; die Konsistenz von (101) werden wir später zeigen. In der Arbeit von HASKELL [33] ist nachgewiesen worden, daß das Verhältnis  $\tilde{U}_1(0) / \tilde{U}_3(0)$  für RAYLEIGH-Wellen immer imaginär ist. Es läßt sich aber zeigen, daß auch  $\tilde{U}_1(x_3) / \tilde{U}_3(x_3)$  für beliebige  $x_3$  imaginär ist [man vergleiche mit den Formeln (285) und (286)]. Wir legen willkürlich fest, daß

$$(126) \quad \overset{\alpha}{U}_1(x_3) = -\overset{\alpha}{U}_1^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{U}_3(x_3) = \overset{\alpha}{U}_3^*(x_3) \quad \text{für } \alpha \leq M$$

gelten möge. Mithin gilt wegen (5) und (6) für die benötigten Komponenten der Spannungen

$$(127) \quad \overset{\alpha}{S}_{11}(x_3) = \overset{\alpha}{S}_{11}^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{S}_{22}(x_3) = \overset{\alpha}{S}_{22}^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{S}_{13}(x_3) = -\overset{\alpha}{S}_{13}^*(x_3)$$

für  $\alpha \leq M$ .

Unter Benutzung von (30) und (31) erhält man in gleicher Weise für die entsprechenden mit einer Schlange versehenen Größen

$$(128) \quad \overset{\alpha}{\tilde{U}}_1(x_3) = -\overset{\alpha}{\tilde{U}}_1^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{\tilde{U}}_2(x_3) = -\overset{\alpha}{\tilde{U}}_2^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{\tilde{U}}_3(x_3) = \overset{\alpha}{\tilde{U}}_3^*(x_3),$$

$\alpha \leq M$ ,

und

$$(129) \quad \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{11}(x_3) = \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{11}^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{12}(x_3) = \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{12}^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{13}(x_3) = -\overset{\alpha}{\tilde{S}}_{13}^*(x_3),$$

$\alpha \leq M$ .

Da in (128)  $\overset{\alpha}{\tilde{U}}_2$  für RAYLEIGH-Wellen rein imaginär angenommen wurde, nehmen wir aus Gründen der Konsistenz für LOVE-Wellen

$$(130) \quad \overset{\alpha}{U}_2(x_3) = -\overset{\alpha}{U}_2^*(x_3), \quad \alpha > M,$$

und

$$(131) \quad \overset{\alpha}{S}_{12}(x_3) = \overset{\alpha}{S}_{12}^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{S}_{23}(x_3) = -\overset{\alpha}{S}_{23}^*(x_3), \quad \alpha > M,$$

an. Für die mit einer Schlangenlinie versehenen Größen ergibt sich analog

$$(132) \quad \overset{\alpha}{\tilde{U}}_1(x_3) = -\overset{\alpha}{\tilde{U}}_1^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{\tilde{U}}_2(x_3) = -\overset{\alpha}{\tilde{U}}_2^*(x_3), \quad \alpha > M,$$

und

$$(133) \quad \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{11}(x_3) = \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{11}^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{12}(x_3) = \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{12}^*(x_3), \quad \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{13}(x_3) = -\overset{\alpha}{\tilde{S}}_{13}^*(x_3),$$

$\alpha > M$ .

Mit Hilfe der Beziehungen (128), (129), (132) und (133) erkennt man, daß die in (119) bis (122) definierten Größen alle imaginär sind. Damit werden die verallgemeinerten Transmissionskoeffizienten gemäß (125) reell, wenn man (101) voraussetzt. Allerdings könnte durch die Vernachlässigung der Zusatzterme [siehe (124)] ein ursprünglich vorhandener Imaginärteil von  $b_\beta$  unterdrückt worden sein.

Im nächsten Schritt definieren wir die mittlere quadratische Spannungsdiskontinuität  $F$  durch die Gleichung

$$(134) \quad F = \int_0^\infty \tilde{S}_{11} \tilde{S}_{11}^* dx_3,$$



wobei  $\tilde{S}_{1i}$  der Randbedingung (117) entnommen wird:

$$(135) \quad \tilde{S}_{1i} = \tilde{S}_{1i}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N(1)} a_{\alpha} \tilde{S}_{1i}^{(\alpha)*} - \sum_{\alpha=1}^{N(2)} b_{\alpha} \tilde{S}_{1i}^{(\alpha)} .$$

Wir denken uns nun die Größen  $b_{\alpha}$  in dieser Gleichung durch die Größen  $a_{\alpha}$  laut Beziehung (125) ausgedrückt, setzen danach (135) in (134) ein und erhalten

$$(136) \quad F = F(a_1, a_2, \dots, a_{N(1)}) .$$

Die verallgemeinerten Reflexionskoeffizienten  $a_{\alpha}$  sollen jetzt so bestimmt werden, daß die mittlere quadratische Spannungsdiskontinuität zu einem Minimum wird. Mit anderen Worten, die Randbedingung (117) soll auf der Basis der Oberflächenwellen im Mittel so gut wie möglich erfüllt sein. Diese Annahme enthält zwei unterschiedliche Voraussetzungen, nämlich:

- a) Bei der Wechselwirkung einer einfallenden Oberflächenwelle mit der Diskontinuität verbleibt der größte Teil der Energie im Feld der transmittierten und reflektierten Oberflächenwellen, bzw.
- b) die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Oberflächenwellen sind mehr oder weniger unabhängig von den anderen entstehenden Wellenarten, d. h., die unterschiedlichen Wellenarten erfüllen die Randbedingungen jede für sich.

Das Bestehen dieser Voraussetzungen a) oder b) ist eine Grundbedingung für die Anwendbarkeit des Verfahrens. Es wird später ein Ausdruck angegeben werden, dessen Größe als Maß für die Erfüllung von a) dienen kann. Die Voraussetzung b) kann letztlich nur durch Vergleich mit der Praxis geprüft werden.

Um die Minimumbedingung an einem anders gearteten Fall prüfen zu können, wurde sie auf die Reflexion einer P-Welle an einer freien Oberfläche angewendet. Dabei wurde versucht, den Reflexionskoeffizienten für die P-Welle unabhängig von der zusätzlich entstehenden SV-Welle zu berechnen, indem ad hoc die Bedingung

$$(137) \quad [S_{3j} S_{3j}]_{x_3=0} = \text{Minimum}$$

als Ersatz für die Forderung nach Spannungsfreiheit der Oberfläche aufgestellt wurde. Die auf diese Weise berechneten Reflexionskoeffizienten wurden dann mit den exakten verglichen. Es ist zu bemerken, daß es sich bei diesem Beispiel um einen besonders extremen Fall handelt, da die Parameter des elastischen Kontinuums an der Grenzfläche von 0 auf ihren Wert im Medium springen. Die Ergebnisse sind unter der Voraussetzung  $\mu = \lambda$  abgeleitet und in der folgenden Tabelle für verschiedene Einfallswinkel  $\varphi_e$  (siehe Abb. 8) zusammengestellt:

Tabelle 1 Reflexionskoeffizienten für P-Wellen

$\varphi_e$	$\cos \varphi_e$	Reflexionskoeffizient für P-Wellen		Prozentualer Fehler
		exakt	genähert	
89,3°	0,01	- 0,998461	- 0,999911	0,15 %
84,3°	0,1	- 0,984619	- 0,991121	0,66 %
72,5°	0,3	- 0,862758	- 0,92087	6,74 %
60°	0,5	- 0,626315	- 0,785714	25,45 %

Man sieht, daß bei fast senkrechtem Einfall die Abweichungen gering sind. Sie steigen in dem Maße, wie der in SV-Wellen umgewandelte Energieanteil steigt. Bei einem Einfallswinkel von  $60^\circ$  übersteigt der in SV-Wellen umgewandelte Energieanteil bereits denjenigen der einfallenden P-Wellen, der wieder in P-Wellen umgewandelt wird (siehe Fig. 2 - 3 in [21]), und darum ist der Fehler des genähert berechneten Reflexionskoeffizienten ziemlich groß.

Die  $N^{(1)}$  Gleichungen

$$(138) \quad \frac{\partial F}{\partial a_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

stellen eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimums der mittleren quadratischen Spannungsdiskontinuität  $F$  dar. Wie man leicht sieht, ist die Bedingung in diesem Fall auch hinreichend. Einerseits ist nämlich  $F$  als Integral einer im Integrationsintervall ständig positiven Funktion eine Positivfunktion. Andererseits stellt  $F$  eine quadratische Form

$$(139) \quad F = \sum_{\alpha, \beta=1}^{N^{(1)}} F_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta - \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} D_\alpha a_\alpha + C > 0$$

dar, wie man sich durch Einsetzen von (125) und (135) in (134) überzeugen kann. Also lautet (138) explizit

$$(140) \quad \sum_{\beta=1}^{N^{(1)}} F_{\alpha\beta} a_\beta - D_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das genau ein Lösungstupel  $a_\beta$  ( $\beta = 1, \dots, N^{(1)}$ ) besitzt, wenn

$$(141) \quad \det |F_{\alpha\beta}| \neq 0$$

ist. Es existiert also in diesem Fall genau ein Punkt mit einer horizontalen Tangentialebene, und im Zusammenhang mit der Eigenschaft von  $F$  als Positivfunktion kann man daraus schließen, daß es sich um ein absolutes Minimum handelt.

Unter Verwendung von (134) läßt sich (138) in die Form

$$(142) \quad \frac{\partial F}{\partial a_\alpha} = \int_0^\infty \left( \frac{\partial \tilde{S}_{1i}}{\partial a_\alpha} \tilde{S}_{1i}^* + \tilde{S}_{1i} \frac{\partial \tilde{S}_{1i}^*}{\partial a_\alpha} \right) dx_3 = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

bringen. Aus (135) folgt

$$(143) \quad \frac{\partial \tilde{S}_{1i}}{\partial a_\alpha} = \frac{\tilde{S}_{1i}^{(1)*}}{S_{1i}^{(1)*}} - \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} \frac{\tilde{S}_{1i}^{(2)}}{S_{1i}^{(2)}}$$

und

$$(144) \quad \frac{\partial \tilde{S}_{1i}^*}{\partial a_\alpha} = \frac{\tilde{S}_{1i}^{(1)}}{S_{1i}^{(1)}} - \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} \frac{\tilde{S}_{1i}^{(2)*}}{S_{1i}^{(2)*}}.$$

Nunmehr kann man (135), (143) und (144) in den ersten Teil der Gleichung (142) einsetzen, wobei sich

$$\begin{aligned}
 (145) \quad \frac{\partial F}{\partial a_\alpha} &= \int_0^\infty \left\{ \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} - \sum_{\beta=1}^{N(2)} \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} \tilde{S}_{1i}^{(2)} \right) \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} + \sum_{\gamma=1}^{N(1)} a_\gamma \tilde{S}_{1i}^{(1)} - \sum_{\beta=1}^{N(2)} b_\beta \tilde{S}_{1i}^{(2)*} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)} - \sum_{\beta=1}^{N(2)} \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} \tilde{S}_{1i}^{(2)*} \right) \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)} + \sum_{\gamma=1}^{N(1)} a_\gamma \tilde{S}_{1i}^{(1)*} - \sum_{\beta=1}^{N(2)} b_\beta \tilde{S}_{1i}^{(2)} \right) \right\} dx_3 = \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(1)*} + \tilde{S}_{1i}^{(1)} \tilde{S}_{1i}^{(1)} + \sum_{\gamma=1}^{N(1)} a_\gamma \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(1)} + \tilde{S}_{1i}^{(1)} \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\beta=1}^{N(2)} b_\beta \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(2)*} + \tilde{S}_{1i}^{(1)} \tilde{S}_{1i}^{(2)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\beta=1}^{N(2)} \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(2)} + \tilde{S}_{1i}^{(1)} \tilde{S}_{1i}^{(2)*} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\beta=1}^{N(2)} \sum_{\gamma=1}^{N(1)} a_\gamma \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)} \tilde{S}_{1i}^{(2)} + \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(2)*} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\beta, \mu=1}^{N(2)} b_\mu \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} \left( \tilde{S}_{1i}^{(2)} \tilde{S}_{1i}^{(2)*} + \tilde{S}_{1i}^{(2)*} \tilde{S}_{1i}^{(2)} \right) \right\} dx_3, \quad \alpha = 1, \dots, N(1),
 \end{aligned}$$

ergibt. Nach Einführung der Größen

$$(146) \quad R_{11}^\alpha = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(1)} \right) dx_3,$$

$$(147) \quad R_{11}^{\alpha\gamma} = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(1)} \right) dx_3 = R_{11}^{\gamma\alpha},$$

$$(148) \quad R_{12}^{\alpha\beta} = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(2)} \right) dx_3,$$

$$(149) \quad R_{12}^\beta = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \tilde{S}_{1i}^{(1)*} \tilde{S}_{1i}^{(2)} \right) dx_3,$$

$$(150) \quad R_{22}^{\beta\mu} = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \tilde{S}_{1i}^{(2)*} \tilde{S}_{1i}^{(2)} \right) dx_3 = R_{22}^{\mu\beta}, \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, N(1);$$

$$\beta, \mu = 1, \dots, N(2),$$

geht (145) in

$$\begin{aligned}
 (151) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial a_\alpha} &= R_{11}^\alpha + \sum_{\gamma=1}^{N(1)} a_\gamma R_{11}^{\alpha\gamma} - \sum_{\beta=1}^{N(2)} b_\beta R_{12}^{\alpha\beta} - \sum_{\beta=1}^{N(2)} \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} R_{12}^\beta - \\
 &\quad - \sum_{\gamma=1}^{N(1)} \sum_{\beta=1}^{N(2)} a_\gamma \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} R_{12}^{\gamma\beta} + \sum_{\beta, \mu=1}^{N(2)} b_\mu \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} R_{22}^{\beta\mu}, \quad \alpha = 1, \dots, N(1),
 \end{aligned}$$

über. Die Ableitung  $\frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha}$  wollen wir mit  $Q_{\alpha\beta}$  bezeichnen, und es folgt dann aus (125)

$$(152) \quad Q_{\alpha\beta} = \frac{\partial b_\beta}{\partial a_\alpha} = \frac{i\omega}{4\beta_{H1}^{(2)}} \left( Q_{12}^{\alpha\beta} - Q_{21}^{\beta\alpha} \right), \quad \alpha = 1, \dots, N(1); \quad \beta = 1, \dots, N(2).$$

Bei Benutzung der Größen  $\overset{\beta}{P}$ , definiert durch

$$(153) \quad \overset{\beta}{P} = \frac{i \omega}{4 n_1^{(2)}} (\overset{\beta}{P}_{12} - \overset{\beta}{P}_{21}), \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

kann man der Gleichung (125) die Gestalt

$$(154) \quad b_\beta = \overset{\beta}{P} + \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} a_\gamma \overset{\gamma}{Q}^\beta, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)},$$

geben. Es ist nun möglich, die Größen  $b_\beta$  und  $\frac{\partial b}{\partial a_\alpha}$  zu eliminieren, indem man (152) und (154) in (151) einsetzt, wobei das Gleichungssystem (138) in der Form

$$(155) \quad \overset{\alpha}{R}_{11} + \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} a_\gamma \overset{\alpha}{R}_{11}^\gamma - \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} (\overset{\beta}{P} + \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} a_\gamma \overset{\gamma}{Q}^\beta) \overset{\alpha}{R}_{12}^\beta - \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\beta}{R}_{12}^\beta - \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} a_\gamma \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\gamma}{R}_{12}^\beta + \sum_{\beta,\mu=1}^{N^{(2)}} (\overset{\mu}{P} + \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} a_\gamma \overset{\gamma}{Q}^\mu) \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\beta}{R}_{22}^\mu = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

erscheint. Nach Umformung erhält man

$$(156) \quad \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} a_\gamma \left[ \overset{\alpha}{R}_{11}^\gamma - \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} (\overset{\gamma}{Q}^\beta \overset{\alpha}{R}_{12}^\beta + \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\gamma}{R}_{12}^\beta) + \sum_{\beta,\mu=1}^{N^{(2)}} \overset{\gamma}{Q}^\mu \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\beta}{R}_{22}^\mu \right] = - \overset{\alpha}{R}_{11} + \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} (\overset{\beta}{P} \overset{\alpha}{R}_{12}^\beta + \overset{\beta}{R}_{12} \overset{\alpha}{Q}^\beta) - \sum_{\beta,\mu=1}^{N^{(2)}} \overset{\mu}{P} \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\beta}{R}_{22}^\mu, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

und mit den Abkürzungen

$$(157) \quad F_{\alpha\gamma} = \overset{\alpha}{R}_{11}^\gamma - \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} (\overset{\gamma}{Q}^\beta \overset{\alpha}{R}_{12}^\beta + \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\gamma}{R}_{12}^\beta) + \sum_{\beta,\mu=1}^{N^{(2)}} \overset{\gamma}{Q}^\mu \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\beta}{R}_{22}^\mu, \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(158) \quad D_\alpha = - \overset{\alpha}{R}_{11} + \sum_{\beta=1}^{N^{(2)}} (\overset{\beta}{P} \overset{\alpha}{R}_{12}^\beta + \overset{\beta}{R}_{12} \overset{\alpha}{Q}^\beta) - \sum_{\beta,\mu=1}^{N^{(2)}} \overset{\mu}{P} \overset{\alpha}{Q}^\beta \overset{\beta}{R}_{22}^\mu, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

ergibt sich schließlich in Übereinstimmung mit (140)

$$(159) \quad \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} F_{\alpha\gamma} a_\gamma = D_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)}.$$

Da wir (141) voraussetzen, existiert eine eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems, die sich mit Hilfe der inversen Matrix  $F_{\alpha\gamma}^{-1}$ , definiert durch

$$(160) \quad \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} F_{\nu\alpha} F_{\alpha\gamma}^{-1} = \delta_{\nu\gamma},$$

in der Form

$$(161) \quad a_{\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{N^{(1)}} F_{\alpha\gamma}^{-1} D_{\gamma}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

schreiben läßt. Hiermit sind die verallgemeinerten Reflexionskoeffizienten gegeben, sie beziehen sich für  $\alpha \leq M^{(1)}$  auf die RAYLEIGH-Moden und für  $\alpha > M^{(1)}$  auf die LOVE-Moden. Die verallgemeinerten Transmissionskoeffizienten ergeben sich unter Verwendung von (161) gemäß (154) folgendermaßen:

$$(162) \quad b_{\beta} = P + \sum_{\gamma, \nu=1}^{N^{(1)}} F_{\gamma\nu}^{-1} D_{\nu} Q^{\gamma\beta}, \quad \beta = 1, \dots, N^{(2)}.$$

Je nachdem, ob  $\alpha \leq M^{(2)}$  oder  $\alpha > M^{(2)}$  ist, handelt es sich um verallgemeinerte Transmissionskoeffizienten für die RAYLEIGH- bzw. LOVE-Moden.

Man kann leicht unter Benutzung von (146) bis (150) sowie (152) und (153) nachprüfen, daß die Größen  $F_{\alpha\gamma}$  und  $D_{\alpha}$  reell sind, und demzufolge ist die Konsistenz von (101) gesichert. Die Eigenschaft der verallgemeinerten Reflexionskoeffizienten  $a_{\alpha}$ , reell zu sein, bedeutet physikalisch, daß der mögliche Phasenunterschied zwischen einfallender Welle und reflektierten Wellen im Rahmen dieser Theorie nur die Werte 0 oder  $\pi$  annehmen kann. Welcher Wert angenommen wird, hängt vom Kontrast der Materialparameter der Gebiete 1 und 2 ab. Weiterhin ist Totalreflexion denkbar. Sie tritt auf, wenn für eine bestimmte Mode  $\alpha$  die Ungleichung

$$(163) \quad n_2^{\alpha(1)} > 1 \quad \text{bzw.} \quad n_2^{(1)} > \frac{\alpha(1)}{k(1)}$$

besteht. In diesem Fall kann die betreffende Mode nicht in das Gebiet 2 gelangen, und der entsprechende Transmissionskoeffizient  $b_{\alpha}$  muß Null gesetzt werden.

Die seismologisch relevanten Größen sind die Verrückungsverhältnisse von einfallenden zu reflektierten bzw. transmittierten Wellen an der Oberfläche. Jene Verhältnisse sind nicht durch die verallgemeinerten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten gegeben, denn diese beziehen sich auf normierte Moden und nicht auf die wahren Bodenverrückungen. Jedoch ist eine Umrechnung in einfacher Weise möglich. Dabei hat man von den Verrückungen und Spannungen  $\hat{U}_i$  und  $\hat{S}_{jj}$  auszugehen, wie sie vom HASKELLSchen Matrizenverfahren geliefert werden. Bezeichnet man das Verhältnis der Verrückungskomponenten von RAYLEIGH-Wellen an der Oberfläche mit  $\hat{O}_T$ , d. h.,

$$(164) \quad \hat{O}_T^{\alpha} = \hat{U}_1^{\alpha}(0) / \hat{U}_3^{\alpha}(0), \quad \alpha \leq M,$$

so ergibt sich nach der Normierung von HASKELL

$$(165) \quad \hat{U}_1^{\alpha}(0) = \hat{O}_T^{\alpha} / k, \quad \hat{U}_3^{\alpha}(0) = 1 / k, \quad \alpha \leq M,$$

und

$$(166) \quad \hat{U}_2^{\alpha} = 1 / k, \quad \alpha > M.$$

Die HASKELLSchen Eigenfunktionen sind nicht auf Einheitsenergie normiert, vielmehr gilt

$$(167) \quad i \int_0^{\infty} (\hat{U}_j^{\alpha} \hat{S}_{1j}^{\alpha} - \hat{U}_j^{\alpha*} \hat{S}_{1j}^{\alpha}) dx_3 = N, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung gemäß (41) bis auf den Faktor  $\omega / 4$  den Energie-transport der Mode  $\alpha$  darstellt, muß  $N$  eine positive reelle Größe sein. Der Faktor  $\omega / 4$  braucht bei der Normierung nicht berücksichtigt zu werden, da er sich bei der Berechnung von  $a_\alpha$  und  $b_\alpha$  heraushebt. Also ist der Zusammenhang zwischen den HASKELLschen und den von uns verwendeten normierten Eigenfunktionen durch die Beziehungen

$$(168) \quad \overset{\alpha}{U}_i = \overset{\alpha}{\tilde{U}}_i / \sqrt{\overset{\alpha}{N}} \quad \text{und} \quad \overset{\alpha}{S}_{1i} = \overset{\alpha}{\tilde{S}}_{1i} / \sqrt{\overset{\alpha}{N}}, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

gegeben. Da man nun die von den normierten Moden erzeugten Bodenverrückungen kennt, ist es möglich, die durch

$$(169) \quad \overset{\alpha}{A}_{VR} = a_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_3^{(1)}(0) / U_3^{(1)}(0), \quad \alpha = 1, \dots, M^{(1)},$$

$$(170) \quad \overset{\alpha}{A}_{HR} = a_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_1^{(1)}(0) / U_1^{(1)}(0), \quad \alpha = 1, \dots, M^{(1)},$$

$$(171) \quad \overset{\alpha}{A}_{LR} = a_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_2^{(1)}(0) / U_1^{(1)}(0), \quad \alpha = M^{(1)} + 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(172) \quad \overset{\alpha}{B}_{VR} = b_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_3^{(2)}(0) / U_3^{(1)}(0), \quad \alpha = 1, \dots, M^{(2)},$$

$$(173) \quad \overset{\alpha}{B}_{HR} = b_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_1^{(2)}(0) / U_1^{(1)}(0), \quad \alpha = 1, \dots, M^{(2)},$$

$$(174) \quad \overset{\alpha}{B}_{LR} = b_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_2^{(2)}(0) / U_1^{(1)}(0), \quad \alpha = M^{(2)} + 1, \dots, N^{(2)},$$

$$(175) \quad \overset{\alpha}{A}_{HL} = a_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_1^{(1)}(0) / U_2^{(1)}(0), \quad \alpha = 1, \dots, M^{(1)},$$

$$(176) \quad \overset{\alpha}{A}_{LL} = a_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_2^{(1)}(0) / U_2^{(1)}(0), \quad \alpha = M^{(1)} + 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(177) \quad \overset{\alpha}{B}_{HL} = b_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_1^{(2)}(0) / U_2^{(1)}(0), \quad \alpha = 1, \dots, M^{(2)},$$

$$(178) \quad \overset{\alpha}{B}_{LL} = b_\alpha \cdot \overset{\alpha}{U}_2^{(2)}(0) / U_2^{(1)}(0), \quad \alpha = M^{(2)} + 1, \dots, N^{(2)},$$

definierten seismologisch interessierenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten zu bestimmen. Während sich die Koeffizienten (169) bis (174) auf einfallende RAYLEIGH-Wellen beziehen, gelten die Koeffizienten (175) bis (178) für einfallende LOVE-Wellen. Unter Verwendung von (165), (166) und (168) und den Abkürzungen

$$(179) \quad \overset{\alpha}{L}_1 = \sqrt{\frac{N^{(1)}}{\overset{\alpha}{N}^{(1)}}}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(180) \quad \overset{\alpha}{L}_2 = \sqrt{\frac{N^{(2)}}{\overset{\alpha}{N}^{(2)}}}, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(2)},$$

nehmen die Umrechnungsformeln die konkrete Gestalt

$$(181) \quad A_{VR}^{\alpha} = a_{\alpha} \frac{\alpha}{L_1} k^{(1)} / k^{(1)}, \quad \alpha = 1, \dots, M^{(1)},$$

$$(182) \quad A_{HR}^{\alpha} = a_{\alpha} \frac{\alpha}{L_1} \frac{\alpha^{(1)}}{O_T^{(1)}} k^{(1)} / O_T^{(1)} k^{(1)}, \quad \alpha = 1, \dots, M^{(1)},$$

$$(183) \quad A_{LR}^{\alpha} = a_{\alpha} \frac{\alpha}{L_1} k^{(1)} / O_T^{(1)} k^{(1)}, \quad \alpha = M^{(1)} + 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(184) \quad B_{VR}^{\alpha} = b_{\alpha} \frac{\alpha}{L_2} k^{(1)} / k^{(2)}, \quad \alpha = 1, \dots, M^{(2)},$$

$$(185) \quad B_{HR}^{\alpha} = b_{\alpha} \frac{\alpha}{L_2} \frac{\alpha^{(2)}}{O_T^{(1)}} k^{(1)} / O_T^{(1)} k^{(2)}, \quad \alpha = 1, \dots, M^{(2)},$$

$$(186) \quad B_{LR}^{\alpha} = b_{\alpha} \frac{\alpha}{L_2} k^{(1)} / O_T^{(1)} k^{(2)}, \quad \alpha = M^{(2)} + 1, \dots, N^{(2)},$$

$$(187) \quad A_{HL}^{\alpha} = a_{\alpha} \frac{\alpha}{L_1} \frac{\alpha^{(1)}}{O_T^{(1)}} k^{(1)} / k^{(1)}, \quad \alpha = 1, \dots, M^{(1)},$$

$$(188) \quad A_{LL}^{\alpha} = a_{\alpha} \frac{\alpha}{L_1} k^{(1)} / k^{(1)}, \quad \alpha = M^{(1)} + 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(189) \quad B_{HL}^{\alpha} = b_{\alpha} \frac{\alpha}{L_2} \frac{\alpha^{(2)}}{O_T^{(1)}} k^{(1)} / k^{(2)}, \quad \alpha = 1, \dots, M^{(2)},$$

$$(190) \quad B_{LL}^{\alpha} = b_{\alpha} \frac{\alpha}{L_2} k^{(1)} / k^{(2)}, \quad \alpha = M^{(2)} + 1, \dots, N^{(2)},$$

an.

Es bleibt jetzt noch die Frage zu klären, wie sich die Energie auf die einzelnen Moden verteilt. Hierzu gehen wir vom Energiestromvektor aus und fragen nach dem Wert des Energiestromes durch die Grenzfläche  $x_1 = 0$ . Für Oberflächenwellen, die sich schräg zur  $x_1$ -Achse ausbreiten, ergeben sich die interessierenden  $x_1$ -Komponenten des Energiestromvektors  $\tilde{S}_1^{\alpha}$  der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen mit Hilfe der in (80), (81) und (83) definierten Richtungskosinus folgendermaßen:

$$(191) \quad \tilde{S}_1^{(1)} = c_{11}^{(1)} S_1^{(1)}, \quad \tilde{S}_1^{\alpha(1)} = \frac{\alpha^{(1)}}{c_{11}^{(1)}} S_1^{(1)}, \quad \tilde{S}_1^{\alpha(2)} = \frac{\alpha^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} S_1^{(2)}.$$

Diese Formeln gelten in gleicher Weise für RAYLEIGH- und LOVE-Wellen. Die Größen  $S_1^{(1)}$  und  $S_1^{\alpha(2)}$  sind hierbei durch (41) gegeben, während  $S_1^{\alpha(1)}$  im Unterschied dazu gemäß

$$(192) \quad S_1^{\alpha(1)} = -\frac{i\omega}{4} \int_0^{\infty} (U_j^{(\text{refl})} \alpha_{1j}^{(\text{refl})*} - U_j^{(\text{refl})*} \alpha_{1j}^{(\text{refl})}) dx_3$$

berechnet wird, da es sich um den Energiestrom der reflektierten Wellen in negativer  $x_1$ -Richtung handelt. Aus Gründen der Energieerhaltung muß im Idealfall, d. h., wenn die einfallenden Oberflächenwellen vollständig in reflektierte und transmittierte Oberflächenwellen umgewandelt werden,

$$(193) \quad \tilde{S}_1^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} \tilde{S}_1^{\alpha(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} \tilde{S}_1^{\alpha(2)}$$

gelten. Da wir die Moden gemäß (42) normiert haben, ergibt sich unter Verwendung von (191) der einfache Ausdruck

$$(194) \quad c_{11}^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} c_{11}^{(\alpha)} a_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} c_{11}^{(\alpha)} b_{\alpha}^2$$

für die Energiebilanz. Die Energieströme  $S_R^{\alpha}$  und  $S_T^{\alpha}$  der reflektierten und transmittierten Moden, bezogen auf den Energiestrom der einfallenden Mode, haben das Aussehen

$$(195) \quad S_R^{\alpha} = \frac{c_{11}^{(\alpha)}}{c_{11}^{(1)}} a_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

$$(196) \quad S_T^{\alpha} = \frac{c_{11}^{(\alpha)}}{c_{11}^{(1)}} b_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(2)},$$

und somit ist die Energieverteilung auf die einzelnen Moden gegeben. Die Gleichung (194) gilt nicht exakt, da in ihr derjenige Energieanteil der einfallenden Oberflächenwellen fehlt, der bei der Wechselwirkung mit der vertikalen Diskontinuität nicht wieder in Oberflächenwellen umgewandelt wird. Deshalb ist es zweckmäßig, nach ALSOP eine Größe  $P_{\text{euf}}$  (Percentage of energy unaccounted for) zu definieren,

$$(197) \quad P_{\text{euf}} = \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{N^{(1)}} S_R^{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{N^{(2)}} S_T^{\alpha}\right) \cdot 100,$$

die den Prozentsatz der Oberflächenwellenenergie angibt, der bei der Wechselwirkung mit der Diskontinuität in andere Wellenarten umgewandelt wird. Mit Hilfe dieser Größe kann man die Konsistenz der Lösung mit der Grundannahme a) des Verfahrens prüfen. Wenn  $P_{\text{euf}}$  groß wird, dann ist diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt, und die erhaltene Lösung wird dementsprechend weniger genau sein. Allerdings könnte es sein, wie von ALSOP auch teilweise gezeigt worden ist, daß selbst bei großem  $P_{\text{euf}}$  die Lösung gemäß Voraussetzung b) noch relativ genau ist. Somit ist ein genügend kleines  $P_{\text{euf}}$  zwar hinreichend, aber nicht notwendig für eine genaue Lösung. Eine genaue Fehlerrechnung ist nicht möglich, da die exakte Lösung des Problems unbekannt ist, und darum kann auch die Abweichung von dieser Lösung nicht gefunden werden. Aus diesem Grunde kann eine Prüfung der erhaltenen Ergebnisse letztlich nur durch sorgfältig ausgeführte Modellexperimente erfolgen.

Mit Hilfe einer elektronischen Tischrechenmaschine wurden einige numerische Rechnungen für das einfachste Modell zweier aufeinanderstoßender ungeschichteter Halbräume durchgeführt. Für kompliziertere Modelle ist die Rechnung in ökonomisch vertretbarer Zeit nur unter Zuhilfenahme von Computern möglich. Die Rechnungen auf der elektronischen Tischrechenmaschine waren selbst für das einfachste Modell aufwendig und zeitraubend. Es wurden zwei Diskontinuitäten mit unterschiedlichem Kontrast betrachtet, und die Ergebnisse sind in der Tabelle 2 dargestellt. Vergleicht man die Ergebnisse von Fall 1 und Fall 2, so fällt auf, daß bei diesem einfachen Modell eine erhebliche Kontraststeigerung eine nur relativ geringe Erhöhung von  $P_{\text{euf}}$  zur Folge hat.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß man anstelle der mittleren quadratischen Spannungsdiskontinuität die mittlere Verrückungsdiskontinuität, definiert durch

$$(198) \quad v = \int_0^{\infty} \tilde{U}_i \tilde{U}_i^* dx_3,$$



Tabelle 2 Ergebnisse der Modellrechnungen

1.

Parameter (1)	Parameter (2)	$\varphi_0$	$\varphi^{(1)}$	$\varphi^{(2)}$	$a_1$	$b_1$	$A_{VR}^1$	$B_{VR}^1$	$P_{euf}$
$v_P^{(1)} = 2,36 \text{ km/s}$	$v_P^{(2)} = 2,03 \text{ km/s}$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	0,116	0,983	0,116	1,358	1,988
$v_S^{(1)} = 1,37 \text{ km/s}$	$v_S^{(2)} = 1,18 \text{ km/s}$	$45^\circ$	$180^\circ$	$36,7^\circ$	0,126	0,920	0,126	1,271	2,315
$\rho^{(1)} = 1,22 \text{ g/cm}^3$	$\rho^{(2)} = 1,08 \text{ g/cm}^3$								

2.

Parameter (1)	Parameter (2)	$\varphi_0$	$\varphi^{(1)}$	$\varphi^{(2)}$	$a_1$	$b_1$	$A_{VR}^1$	$B_{VR}^1$	$P_{euf}$
$v_P^{(1)} = 2,36 \text{ km/s}$	$v_P^{(2)} = 4,0 \text{ km/s}$	$0^\circ$	$180^\circ$	$0^\circ$	- 0,333	0,928	- 0,333	0,470	2,787
$v_S^{(1)} = 1,37 \text{ km/s}$	$v_S^{(2)} = 2,31 \text{ km/s}$								
$\rho^{(1)} = 1,22 \text{ g/cm}^3$	$\rho^{(2)} = 2,0 \text{ g/cm}^3$								

zu einem Minimum machen kann. An dem einfachen Beispiel zweier aufeinanderstoßender ungeschichteter Halbräume wurde überprüft, inwieweit beide Verfahren miteinander verträglich sind. Dabei wurde eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse gefunden. Die Werte für Fall 1, berechnet gemäß der Bedingung  $v \stackrel{!}{=} \text{Min.}$ , lauten bei  $\varphi_0 = 0^\circ$ :

$a_1 = 0,094$  ;  $b_1 = 0,985$  ;  $P_{euf} = 2,107$  .

## 5. Der elastische Halbraum mit unebener Diskontinuität

### 5.1. Formulierung der Randbedingungen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit unebenen Diskontinuitäten beschäftigen, die als Spezialfälle die geneigten ebenen und Vertikaldiskontinuitäten enthalten. Man hat es in der Praxis in den seltensten Fällen mit exakten Vertikaldiskontinuitäten zu tun, so daß die Behandlung unebener Diskontinuitäten den Verhältnissen in der Natur besser angepaßt ist. Möglicherweise reicht das Modell einer geneigten ebenen Diskontinuität unter Umständen schon aus, um die wesentlichen auftretenden Effekte zu erfassen.

Unter unebenen Diskontinuitäten verstehen wir in diesem Kapitel Diskontinuitätsflächen, die im  $x_1, x_2, x_3$ -Raum durch

$$(199) \quad x_1 = \zeta(x_3), \quad x_3 \geq 0,$$

dargestellt werden. Eine Abhängigkeit von  $x_2$  lassen wir demzufolge nicht zu. Die Funktion  $\zeta(x_3)$  ergibt sich als Schnittkurve der Diskontinuitätsfläche mit der  $x_1, x_3$ - oder einer dazu parallelen Ebene (siehe Abb. 13). Sie möge einmal stetig differenzierbar sein und der Forderung

$$(200) \quad |\zeta'(x_3)| < \infty \quad \text{für alle } x_3 \geq 0$$

genügen. Weiterhin wird willkürlich

$$(201) \quad \zeta(0) = 0$$

angenommen. Für

$$(202) \quad \zeta(x_3) \equiv 0 \quad \text{für alle } x_3 \geq 0$$

geht die unebene Diskontinuität in eine Vertikaldiskontinuität über. Wegen der Bedingung (200) ist eine Diskontinuität, wie in Abb. 12a gezeigt, nicht zugelassen. Jedoch läßt sich auch diese durch Einführen von fiktiven Diskontinuitätsflächen gemäß Abb. 12b oder c näherungsweise behandeln.

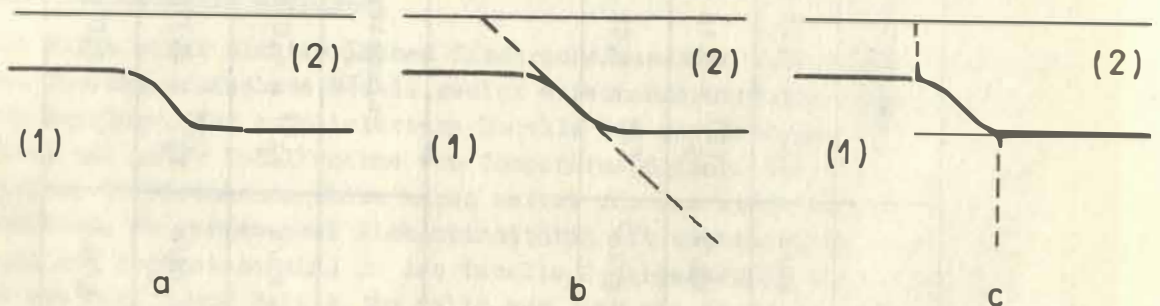


Abb. 12 Die Stufendiskontinuität

Der Einfluß von unebenen Diskontinuitäten (im Sinne der vorliegenden Arbeit) auf die Ausbreitung von Oberflächenwellen ist bisher noch nicht untersucht worden. Es existieren lediglich Arbeiten, die sich mit dem Einfluß von periodischen oder einma-

ligen Störungen der horizontalen Schichtung und unebenen Oberflächen befassen. Stellvertretend seien hier die Arbeiten von THAPAR [82],[83] und WOLF [89] genannt. Der Einfluß der Stufendiskontinuität auf die Ausbreitung von LOVE-Wellen ist von BOORE [12] mittels der Differenzenmethode behandelt worden. Dabei sind Übergangsfälle in Richtung auf die von uns betrachteten Diskontinuitäten denkbar (siehe Abb. 12). Die genannten Arbeiten basieren entweder auf der Störungsrechnung, wobei nur hinreichend kleine Abweichungen von der horizontalen Schichtung zugelassen werden, oder auf der Methode des GREENSchen Tensors. Dagegen soll hier versucht werden, das ALSOPsche Verfahren auch für unebene Diskontinuitäten anzuwenden. An dieser Stelle sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es sich hierbei nur um einen ersten Versuch in dieser Richtung handelt, der einer weiteren Bearbeitung bedarf.

Der wichtigste Schritt besteht in der Formulierung der Randbedingungen in einer für unsere Problemstellung geeigneten Form. Es empfiehlt sich zunächst, den Normaleneinheitsvektor  $n$ , den Tangenteneinheitsvektor  $t$  und den Binormaleneinheitsvektor  $b$  bezüglich der Diskontinuitätsfläche einzuführen (Abb. 13). Der Binormaleneinheitsvektor ist in Abb. 13 nicht zu sehen, er zeigt in Richtung der positiven  $x_2$ -Achse.

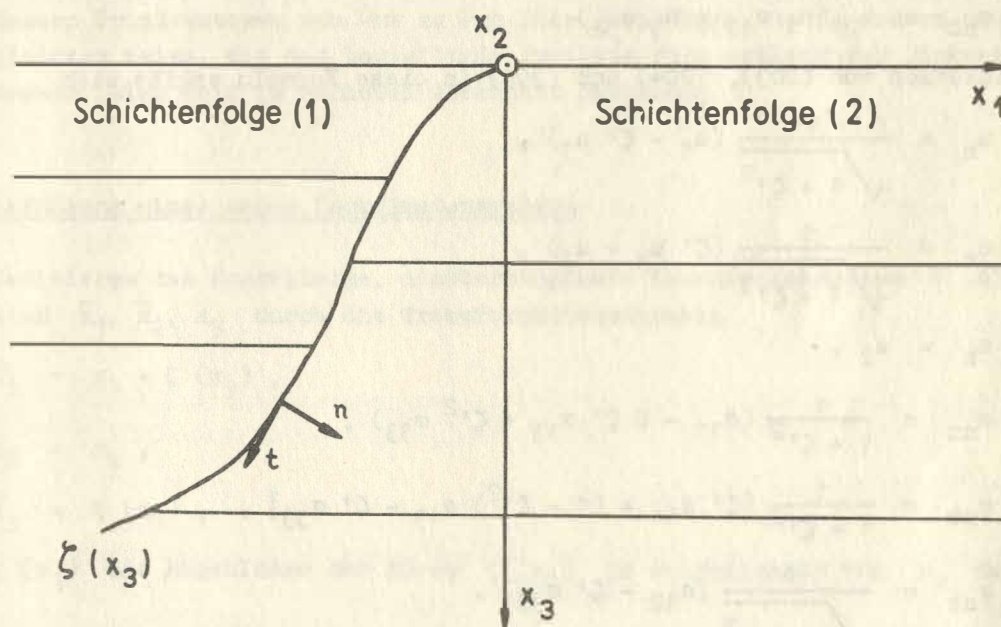


Abb. 13 Der geschichtete Halbraum mit unebener Diskontinuität

Die Vektoren  $t$ ,  $n$  und  $b$  bilden das begleitende Dreibein der Kurve  $\zeta(x_3)$ , und die kartesischen Koordinaten lauten, wie man mit Hilfe der Differentialgeometrie nachweisen kann (siehe z. B. [39]), für den Tangenteneinheitsvektor

$$(203) \quad t_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}} (\delta_{i1} \zeta' + \delta_{i3}),$$

für den Normaleneinheitsvektor

$$(204) \quad n_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}} (\delta_{i1} - \delta_{i3} \zeta')$$

und

$$(205) \quad b_i = \delta_{i2}$$

für den Binormaleneinheitsvektor.

Durch Anwenden der Tensorformationsformeln für Drehungen mit der  $x_2$ -Achse als Drehachse erhält man die Komponenten des Verschiebungsvektors und die uns interessierenden Komponenten des Spannungstensors bezüglich des begleitenden Dreibeins wie folgt:

$$(206) \quad \begin{cases} u_n = n_1 u_1 + n_3 u_3, \\ u_t = t_1 u_1 + t_3 u_3, \\ u_b = b_2 u_2, \\ \sigma_{nn} = n_1^2 \sigma_{11} + 2 n_1 n_3 \sigma_{13} + n_3^2 \sigma_{33}, \\ \sigma_{nt} = n_1 t_1 \sigma_{11} + (n_1 t_3 + n_3 t_1) \sigma_{13} + n_3 t_3 \sigma_{33}, \\ \sigma_{nb} = b_2 (n_1 \sigma_{12} + n_3 \sigma_{32}). \end{cases}$$

Nach Einsetzen von (203), (204) und (205) in diese Formeln ergibt sich

$$(207) \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}} (u_1 - \zeta' u_3),$$

$$(208) \quad u_t = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}} (\zeta' u_1 + u_3),$$

$$(209) \quad u_b = u_2,$$

$$(210) \quad \sigma_{nn} = \frac{1}{1 + \zeta'^2} (\sigma_{11} - 2 \zeta' \sigma_{13} + \zeta'^2 \sigma_{33}),$$

$$(211) \quad \sigma_{nt} = \frac{1}{1 + \zeta'^2} [\zeta' \sigma_{11} + (1 - \zeta'^2) \sigma_{13} - \zeta' \sigma_{33}],$$

$$(212) \quad \sigma_{nb} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}} (\sigma_{12} - \zeta' \sigma_{32}).$$

Die Randbedingungen verlangen einerseits die Stetigkeit der Verrückungskomponenten  $u_i$  auf der Diskontinuitätsfläche, d. h. in Übereinstimmung mit (91)

$$(213) \quad (\hat{u}_i)^{(1)} = (\hat{u}_i)^{(2)} \quad \text{für } x_1 = \zeta(x_3),$$

und andererseits die Stetigkeit der auf das begleitende Dreibein bezogenen Spannungskomponenten (210), (211) und (212), also analog zu (94)

$$(214) \quad \begin{cases} (\hat{\sigma}_{nn})^{(1)} = (\hat{\sigma}_{nn})^{(2)}, \\ (\hat{\sigma}_{nt})^{(1)} = (\hat{\sigma}_{nt})^{(2)}, \\ (\hat{\sigma}_{nb})^{(1)} = (\hat{\sigma}_{nb})^{(2)} \quad \text{für } x_1 = \zeta(x_3). \end{cases}$$

Man sieht, daß die Bedingungen (213) auch durch die Bedingungen

$$(215) \begin{cases} (\hat{u}_n)^{(1)} = (\hat{u}_n)^{(2)}, \\ (\hat{u}_t)^{(1)} = (\hat{u}_t)^{(2)}, \\ (\hat{u}_b)^{(1)} = (\hat{u}_b)^{(2)} \quad \text{für } x_1 = \zeta(x_3) \end{cases}$$

ersetzt werden können. Anders ist es mit den Spannungskomponenten, die Bedingungen (214) sind nicht den ad hoc angenommenen Bedingungen

$$(216) \quad (\hat{\sigma}_{11})^{(1)} = (\hat{\sigma}_{11})^{(2)} \quad \text{für } x_1 = \zeta(x_3)$$

äquivalent, da in (214) zusätzlich die Spannungskomponenten  $\sigma_{23}$  und  $\sigma_{33}$  eingehen. Für die weitere Rechnung sind die Randbedingungen in der Form (214) nicht geeignet, denn die auf das begleitende Dreibein bezogenen Spannungskomponenten erfüllen nicht die bisher verwendete Orthonormalitätsrelation, die für das feste Koordinatensystem  $\bar{e}$  gilt. Deshalb empfiehlt sich die Einführung eines ortsabhängigen Koordinatensystems, dessen Grundvektoren von Ort zu Ort ihre Richtungen stetig ändern, und zwar in der gleichen Weise, wie das begleitende Dreibein sich entlang der Diskontinuitätsfläche ändert. Dies soll im nächsten Abschnitt geschehen.

## 5.2. Einführung eines neuen Koordinatensystems

Wir definieren das krummlinige, nichtorthogonale Koordinatensystem  $\bar{e}$  mit den Koordinaten  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  durch die Transformationsformeln

$$(217) \begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 - \zeta(x_3), \\ \bar{x}_2 = x_2, \\ \bar{x}_3 = \zeta(x_3), \end{cases}$$

wobei  $\zeta(x_3)$  die Bogenlänge der Kurve  $\zeta(x_3)$  in Abhängigkeit von  $x_3$  darstellt, d. h.,

$$(218) \quad \zeta(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{1 + [\zeta'(s)]^2} ds, \quad \zeta \geq 0.$$

Wie man aus (217) erkennt, ist das Koordinatensystem  $\bar{e}$  so beschaffen, daß die Koordinatenfläche für  $\bar{x}_1 = 0$  mit der Diskontinuitätsfläche zusammenfällt. Das ist gerade die Eigenschaft, die wir im folgenden benötigen. Die Funktionaldeterminante  $\Delta$  der Transformation (217), definiert durch

$$(219) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

ist ungleich Null, denn es folgt aus (217) und (218)

$$(220) \quad \Delta = \xi'(x_3) = \sqrt{1 + [\zeta'(x_3)]^2} > 0.$$

Mithin ist die Transformation (217) eindeutig umkehrbar, und die Umkehrfunktionen sind stetig differenzierbar. Die Umkehrtransformation von (217) lautet

$$(221) \quad \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + \chi(\bar{x}_3), \\ x_2 = \bar{x}_2, \\ x_3 = \eta(\bar{x}_3). \end{cases}$$

Dabei bedeutet  $\eta$  die Umkehrfunktion von  $\xi$ , und  $\chi$  ist durch

$$(222) \quad \chi(\bar{x}_3) = \zeta[\eta(\bar{x}_3)]$$

definiert.

Die kovarianten Komponenten des metrischen Fundamentaltensors im  $\bar{G}$ -System,  $\bar{g}_{ij}$ , gehen aus den Komponenten des metrischen Fundamentaltensors im kartesischen Koordinatensystem  $G$ ,  $g_{ij}$ , die mit den Komponenten des KRONECKER-Tensors identisch sind, durch die Tensortransformation

$$(223) \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j} g_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j} \delta_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j}, \quad \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji},$$

hervor. Unter Verwendung von (221) ergibt sich explizit

$$(224) \quad \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ij}(\bar{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \chi' \\ 0 & 1 & 0 \\ \chi' & 0 & \chi'^2 + \eta'^2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von  $\bar{g}_{ij}$  wird mit  $\bar{g}$  bezeichnet,

$$(225) \quad \bar{g} = \bar{g}(\bar{x}_3) = \det(\bar{g}_{ij}) = \eta'^2,$$

und ist immer positiv. Dies folgt aus der Beziehung

$$(226) \quad \bar{g} = \left[ \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \right) \right]^2 > 0,$$

denn  $\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \right)$  ist wegen (220) immer ungleich Null.

Die Komponenten des kontravarianten metrischen Fundamentaltensors  $\bar{g}^{ij}$  sind durch

$$(227) \quad \bar{g}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_l} g^{kl}, \quad \bar{g}^{ij} = \bar{g}^{ji},$$

gegeben, und es gilt die Beziehung

$$(228) \quad \bar{g}^{ij} \bar{g}_{jk} = \delta_k^i.$$

Weiterhin werden die CHRISTOFFELschen Symbole 2. Art durch die Gleichung

$$(229) \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \bar{g}^{kl} \left( \frac{\partial \bar{g}_{li}}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{g}_{lj}}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}_l} \right), \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ji}^k,$$

definiert. Da die  $\bar{g}_{ij}$  gemäß (224) Funktionen von  $\bar{x}_3$  sind, verschwinden nicht alle Komponenten von  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ , und die Transformation (217), (221) ist demzufolge keine affine Transformation.

Der vierfach kontravariante Tensor der Elastizitätsmoduln nimmt in  $\bar{G}$  die Gestalt

$$(230) \quad \bar{C}^{ijkl} = \lambda \bar{g}^{ij} \bar{g}^{kl} + \mu (\bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} + \bar{g}^{il} \bar{g}^{jk})$$

an [30], und es gelten die Symmetrierelationen

$$(231) \quad \bar{C}^{ijkl} = \bar{C}^{jikl} = \bar{C}^{ijlk} = \bar{C}^{klij}.$$

Durch absolute (kovariante) Differentiation des kovarianten Verrückungsvektors  $\bar{u}_k$  kann man die zweifach kovarianten Komponenten des Verschiebungstensors in der Form

$$(232) \quad \bar{u}_{kl} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{l;k} + \bar{u}_{k;l})$$

erhalten [85], wobei  $\bar{u}_{k;l}$  durch

$$(233) \quad \bar{u}_{k;l} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{x}_l} - \bar{\Gamma}_{lk}^m \bar{u}_m$$

definiert ist. Die zweifach kontravarianten Komponenten des Spannungstensors  $\bar{\sigma}^{ij}$  sind mit den zweifach kovarianten Komponenten des Verrückungstensors durch das HOOKEsche Gesetz

$$(234) \quad \bar{\sigma}^{ij} = \bar{C}^{ijkl} \bar{u}_{kl}$$

verbunden, und die Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums hat im  $\bar{G}$ -System für harmonische Zeitabhängigkeit das Aussehen [85]

$$(235) \quad \bar{\sigma}^{ij}{}_{;j} + \rho \omega^2 \bar{u}^i = 0.$$

Diese hier zusammengestellten Formeln der Kontinuumsmechanik in kovarianter Form gelten natürlich nicht nur für das von uns aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählte  $\bar{G}$ -System, sondern wegen ihres forminvarianten Charakters für beliebige Koordinatensysteme, wobei die Umrechnung jeweils auf der Basis bestimmter Tensortransformationsformeln vor sich geht.

Als nächstes müssen wir die Randbedingungen (14) im neuen Koordinatensystem formulieren. Zu diesem Zwecke verschaffen wir uns zunächst die Komponenten des zweifach kontravarianten Spannungstensors bezüglich  $\bar{G}$  durch die Transformation

$$(236) \quad \bar{\sigma}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_n} \sigma_{mn}.$$

Unter Verwendung von (217) ergibt sich hieraus

$$(237) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}^{13} = \xi' (\sigma_{13} - \zeta' \sigma_{33}), \\ \bar{\sigma}^{23} = \xi' \sigma_{23}, \\ \bar{\sigma}^{33} = \xi'^2 \sigma_{33}, \end{cases}$$

und man erkennt, daß die Bedingungen (14) durch

$$(238) \quad \bar{\sigma}^{13} = \bar{\sigma}^{23} = \bar{\sigma}^{33} = 0 \quad \text{für} \quad \bar{x}_3 = 0$$

ersetzt werden können. Von den möglichen Lösungen der Gleichung (235) bei Beachtung der Randbedingungen (238) interessieren nur diejenigen, die wir bereits im kartesischen Koordinatensystem  $\mathcal{G}$  erhalten haben, nämlich die ebenen Oberflächenwellen (9). Diese müssen in das neue Koordinatensystem transformiert werden. Zunächst transformieren wir die Komponenten des Wellenzahlvektors in das  $\bar{\mathcal{G}}$ -System. Die kontravarianten Komponenten ergeben sich mittels der Transformationsformeln

$$(239) \quad \bar{k}^1 = \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_j} k_j$$

zu

$$(240) \quad \bar{k}^1 = k_1,$$

$$(241) \quad \bar{k}^2 = k_2,$$

$$(242) \quad \bar{k}^3 = 0.$$

Wegen (240) können die Eigenwerte ungeändert aus dem kartesischen System übernommen werden, und wegen (241) behalten das Reflexions- und Brechungsgesetz unverändert ihre Gültigkeit. Um den Formalismus nicht zu überlasten, werden wir im folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit von senkrecht einfallenden, d. h. sich in Richtung der  $x_1$ - bzw.  $\bar{x}_1$ -Achse ausbreitenden Oberflächenwellen ausgehen. Modifizierungen für schräg einfallende Wellen lassen sich jederzeit ganz analog wie im  $\mathcal{G}$ -System leicht durchführen.

Wählen wir für den Verrückungsvektor die kovariante Darstellung,

$$(243) \quad \bar{u}_1 = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_1} u_j,$$

und für den Spannungstensor die kontravariante Darstellung gemäß (236), so nehmen die uns interessierenden ebenen Oberflächenwellen im  $\bar{\mathcal{G}}$ -System die Gestalt

$$(244) \quad \frac{\alpha}{\bar{v}_j} = \frac{\alpha}{v_j}(\bar{x}_3) \cdot \exp \{i \bar{k}^1 [\bar{x}_1 + \chi(\bar{x}_3)]\},$$

$$(245) \quad \frac{\alpha}{\bar{\sigma}^{jk}} = \frac{\alpha}{\sigma^{jk}}(\bar{x}_3) \cdot \exp \{i \bar{k}^1 [\bar{x}_1 + \chi(\bar{x}_3)]\}$$

an, wobei

$$(246) \quad \frac{\alpha}{\bar{v}_j}(\bar{x}_3) = \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_j} \alpha U_1[\eta(\bar{x}_3)], \quad \frac{\alpha}{\bar{\sigma}^{jk}}(\bar{x}_3) = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_n} \alpha S_{mn}[\eta(\bar{x}_3)]$$

gilt. Mit den Bezeichnungen

$$(247) \quad \frac{\alpha}{\bar{v}_j}(\bar{x}_3) = \frac{\alpha}{v_j}(\bar{x}_3) \cdot e^{i \bar{k}^1 \chi(\bar{x}_3)}, \quad \frac{\alpha}{\bar{\sigma}^{jk}}(\bar{x}_3) = \frac{\alpha}{\sigma^{jk}}(\bar{x}_3) \cdot e^{i \bar{k}^1 \chi(\bar{x}_3)}$$

gehen die Gleichungen (244) und (245) in



$$(248) \quad \frac{\alpha}{\bar{u}_j} = \frac{\alpha}{\bar{U}_j(\bar{x}_3)} \cdot e^{i \bar{k}^1 \bar{x}_1}, \quad \frac{\alpha}{\bar{\sigma}^{jk}} = \frac{\alpha}{\bar{S}^{jk}(\bar{x}_3)} \cdot e^{i \bar{k}^1 \bar{x}_1}$$

über. Unter Verwendung der Bewegungsgleichung (235) läßt sich genau wie früher eine Orthogonalitätsrelation zwischen den Lösungen (248) in  $\bar{\mathcal{C}}$  herleiten. Dabei hat man den GAUSSschen Satz in der Form [85]

$$(249) \quad \int_V \bar{a}^i{}_{;i} d\bar{V} = \int_{(V)} \bar{a}^i d\bar{f}_i$$

zu verwenden. Das Volumenelement  $d\bar{V}$  im  $\bar{\mathcal{C}}$ -System ist durch

$$(250) \quad d\bar{V} = \sqrt{\bar{g}} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3$$

definiert, und das kovariante Flächenelement  $d\bar{f}_i$  hat die Gestalt

$$(251) \quad d\bar{f}_i = \bar{g}_{ijk} d\bar{x}_j d\bar{x}_k$$

mit

$$(252) \quad \bar{g}_{ijk} = \begin{cases} \sqrt{\bar{g}} & \text{für } (ijk) = \text{zykl.} \\ -\sqrt{\bar{g}} & \text{für } (ijk) = \text{zykl.} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \begin{matrix} (123), \\ (132), \end{matrix}$$

Das Integrationsvolumen ist jetzt nicht ein Quader, wie in [59], sondern ein Gebilde, das durch die Koordinatenflächen des  $\bar{\mathcal{C}}$ -Systems begrenzt wird. Nach längerer Rechnung, die hier nicht wiedergegeben werden soll, erhält man in Analogie zu (26) die Orthogonalitätsrelation

$$(253) \quad \int_0^\infty \left[ \frac{\alpha}{\bar{U}_1} \frac{\beta}{\bar{S}^{1i*}} - \frac{\beta}{\bar{U}_1} \frac{\alpha}{\bar{S}^{1i*}} \right] \sqrt{\bar{g}} d\bar{x}_3 = 0 \quad \text{für } \frac{\alpha}{k_1} \neq \frac{\beta}{k_1}.$$

Für schräg laufende Oberflächenwellen muß noch zusätzlich

$$(254) \quad \bar{k}_2 = \text{const}$$

gefordert werden.

Wir können nun wieder wie früher den Energiestrom zur Normierung heranziehen, denn es läßt sich zeigen, daß die kontravarianten Komponenten des Energiestromdichtevektors in  $\bar{\mathcal{C}}$  analog zu (38) durch

$$(255) \quad \bar{S}^k = -\bar{\sigma}^{ik} \dot{\bar{u}}_i$$

gegeben sind. Bildet man den vom Koordinatensystem unabhängigen Ausdruck  $\bar{S}^k d\bar{f}_k$ , integriert über einen Streifen in der  $\bar{x}_2, \bar{x}_3$ -Ebene mit Einheitsbreite in  $\bar{x}_2$ -Richtung und mittelt zeitlich, so gelangt man schließlich zu dem (41) entsprechenden Ausdruck:

$$(256) \quad \frac{\alpha}{\bar{S}} = \frac{i}{4} \frac{\omega}{\bar{U}_j} \int_0^\infty \left[ \frac{\alpha}{\bar{U}_j} \frac{\alpha}{\bar{S}^{1j*}} - \frac{\alpha}{\bar{U}_j^*} \frac{\alpha}{\bar{S}^{1j}} \right] \sqrt{\bar{g}} d\bar{x}_3.$$

Die Oberflächenwellen seien wiederum so normiert, daß jede Mode Einheitsenergie transportiert, d. h.,

$$(257) \quad \frac{\alpha}{\bar{S}} = 1, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Aus (253) ergibt sich somit die Orthogonalitätsrelation in der Form

$$(258) \quad \frac{i}{4} \omega \int_0^{\infty} \left[ \frac{\alpha}{\bar{U}_j} \frac{\beta}{S^{1j*}} - \frac{\beta}{\bar{U}_j^*} \frac{\alpha}{S^{1j}} \right] \sqrt{\bar{g}} \, d\bar{x}_3 = \delta_{\alpha\beta}.$$

### 5.3. Die Randbedingungen im $\bar{G}$ -System

Es gilt, die im Abschnitt 5.1. aufgestellten Randbedingungen für das  $\bar{G}$ -System in passender Weise zu formulieren. Bei den Randbedingungen für die Verrückungen kann man von (213) oder (215) ausgehen. Dabei zeigt sich in jedem Falle, daß diese Randbedingungen den neuen

$$(259) \quad (\hat{u}_1)^{(1)} = (\hat{u}_1)^{(2)} \quad \text{für} \quad \bar{x}_1 = 0$$

äquivalent sind, da gemäß (243)

$$(260) \quad \bar{u}_1 = u_1, \quad \bar{u}_2 = u_2, \quad \bar{u}_3 = \chi' u_1 + \eta' u_3$$

gilt.

Zur Erfüllung der Randbedingungen für die Spannungskomponenten (214) sind einige weiterreichende Betrachtungen erforderlich. Bekanntlich [85] sind die kontravarianten Komponenten eines Tensors die Vektorprojektionen auf das kontravariante Grundsystem, das durch Vektoren gebildet wird, die auf den Koordinatenflächen senkrecht stehen. Andererseits sind die kovarianten Komponenten eines Tensors die Vektorprojektionen auf das kovariante Grundsystem, das durch die Tangentialvektoren an die Koordinatenflächen dargestellt wird. Folglich müssen die Proportionen

$$(261) \quad \sigma_{nn} \sim \bar{\sigma}^{11}, \quad \sigma_{nt} \sim \bar{\sigma}^1_{.3}, \quad \sigma_{nb} \sim \bar{\sigma}^1_{.2}$$

bestehen. Für die gemischtvarianten Komponenten des Spannungstensors gelten die Transformationsformeln

$$(262) \quad \bar{\sigma}^i_{.j} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_j} \sigma_{mn}.$$

Man kann nun in der Tat mit Hilfe von (210), (211), (212), (236) und (262) zeigen, daß in Übereinstimmung mit (261)

$$(263) \quad \sigma_{nn} = \frac{1}{1 + \zeta'^2} \bar{\sigma}^{11}, \quad \sigma_{nt} = \frac{1}{\eta' (1 + \zeta'^2)} \bar{\sigma}^1_{.3}, \quad \sigma_{nb} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta'^2}} \bar{\sigma}^1_{.2}$$

gilt. Da die Funktionen  $\eta'$  und  $\zeta'$  zu beiden Seiten der Diskontinuität den gleichen Wert besitzen, genügt es, die Größen  $\bar{\sigma}^{11}$ ,  $\bar{\sigma}^1_{.2}$  und  $\bar{\sigma}^1_{.3}$  an der Grenzfläche stetig zu machen. Die Gleichungen (236) und (262) verhelfen zu der Beziehung

$$(264) \quad \bar{\sigma}^1_{.2} = \bar{\sigma}^{12}.$$

Weiterhin läßt sich die gemischtvariante Komponente des Spannungstensors  $\bar{\sigma}^1_{.3}$  vermittels der Relation [85]

$$(265) \quad \bar{\sigma}^1_{.3} = \bar{g}_{j3} \bar{\sigma}^{1j}$$

durch die zweifach kontravarianten Komponenten  $\bar{\sigma}^{11}$ ,  $\bar{\sigma}^{12}$  und  $\bar{\sigma}^{13}$  ausdrücken. Aus

dieser Gleichung kann man entnehmen, daß es ausreichend ist, anstelle von  $\bar{\sigma}_3^{-1}$  die Komponente  $\bar{\sigma}^{-13}$  an der Grenzfläche stetig zu machen. Dies ist möglich, weil  $\bar{\sigma}^{-11}$  und  $\bar{\sigma}^{-12}$  sowieso stetig sein sollen und der metrische Fundamentaltensor  $\bar{g}_{ij}$  gemäß (224) nur aus Größen besteht, die zu beiden Seiten der Grenzfläche den gleichen Wert haben. Wir können also letztlich die Randbedingungen (214) durch

$$(266) \quad (\hat{\bar{\sigma}}^{-11})^{(1)} = (\hat{\bar{\sigma}}^{-11})^{(2)} \quad \text{für} \quad \bar{x}_1 = 0$$

ersetzen.

Jetzt müssen die Randbedingungen (259) und (266) noch explizit angegeben werden. Dies geschieht durch Hinschreiben der in das  $\bar{\sigma}$ -System transformierten Anteile der einfallenden und reflektierten Wellen für das Gebiet 1 sowie der transmittierten Wellen für das Gebiet 2. Wir bezeichnen die verallgemeinerten Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten im Falle einer unebenen oder geneigten ebenen Diskontinuität mit  $\bar{a}_\alpha$  bzw.  $\bar{b}_\alpha$  und erhalten analog zu (116) und (117) die Randbedingungen in der Form

$$(267) \quad \bar{U}_i^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N(1)} \bar{a}_\alpha \bar{U}_i^{(1)*} = \sum_{\alpha=1}^{N(2)} \bar{b}_\alpha \bar{U}_i^{(2)} + \bar{U}_i,$$

$$(268) \quad \bar{S}^{-11(1)} + \sum_{\alpha=1}^{N(1)} \bar{a}_\alpha \bar{S}^{-11(1)*} = \sum_{\alpha=1}^{N(2)} \bar{b}_\alpha \bar{S}^{-11(2)} + \bar{S}^{-11} \quad \text{für} \quad \bar{x}_1 = 0.$$

Es ist zu beachten, daß die verallgemeinerten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten hierbei nicht mehr als reelle Größen aufgefaßt werden können. Infolge des in (247) auftretenden Phasenfaktors  $e^{i \kappa' \chi(\bar{x}_3)}$  bestehen nämlich keine zu (126), (127), (130) und (131) analogen Gleichungen, und dies bewirkt das Auftreten von Imaginärteilen bei  $\bar{a}_\alpha$  und  $\bar{b}_\alpha$ . Wir führen die Bezeichnungen

$$(269) \quad \text{Re } \bar{a}_\alpha = a_\alpha^{(R)}, \quad \text{Im } \bar{a}_\alpha = a_\alpha^{(I)}, \quad \text{Re } \bar{b}_\alpha = b_\alpha^{(R)}, \quad \text{Im } \bar{b}_\alpha = b_\alpha^{(I)}$$

ein, wodurch sich die Gleichungen

$$(270) \quad \bar{a}_\alpha = a_\alpha^{(R)} + i a_\alpha^{(I)}, \quad \alpha = 1, \dots, N(1),$$

und

$$(271) \quad \bar{b}_\alpha = b_\alpha^{(R)} + i b_\alpha^{(I)}, \quad \alpha = 1, \dots, N(2),$$

ergeben. Das Auftreten von Imaginärteilen der verallgemeinerten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten bedeutet physikalisch, daß es bei der Reflexion und Transmission von Oberflächenwellen durch eine unebene Diskontinuität zu Phasenverschiebungen kommen kann, die von 0 oder  $\pi$  verschieden sind.

Im Falle einer vertikalen Diskontinuität gilt wegen (202) und (222)

$$(272) \quad \chi \equiv 0,$$

und die Imaginärteile verschwinden, was schon früher festgestellt worden ist.

#### 5.4. Die Auflösung nach den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Oberflächenwellen

Der erste Schritt besteht darin, die Gleichungen (267) und (268) durch Anwenden der Orthogonalitätsrelation (253) für das Gebiet 2 nach  $\bar{b}_\alpha$  aufzulösen. Dieses geschieht in analoger Weise wie im Fall der Vertikaldiskontinuität (mit den genannten Modifizierungen) und soll hier nicht explizit angegeben werden.

Als nächstes muß eine der mittleren quadratischen Spannungsdiskontinuität  $F$  analoge Größe für die unebene Diskontinuität gefunden werden, die dann durch geeignete Wahl der  $\bar{a}_\alpha$  zu einem Minimum gemacht werden kann. Wir stellen die Hypothese auf, daß diese Größe im  $\bar{G}$ -System durch

$$(273) \quad \bar{F} = \int_0^\infty \bar{S}^{1j*} \bar{S}_i^{k} \bar{n}_j \bar{n}_k d\bar{x}_3$$

gegeben ist. Hierin bedeuten  $\bar{n}_j$  allgemein die Komponenten des Normaleneinheitsvektors einer Koordinatenfläche in  $\bar{G}$ , definiert durch

$$(274) \quad \bar{n}_i = \frac{d\bar{f}_i}{d\bar{f}}$$

mit

$$(275) \quad d\bar{f} = \sqrt{g^{ij} d\bar{f}_i d\bar{f}_j}.$$

Auf der Diskontinuitätsfläche ist aber  $\bar{n}_i$  nur für  $i = 1$  von Null verschieden, und (273) geht in

$$(276) \quad \bar{F} = \int_0^\infty \bar{S}^{1i*} \bar{S}_i^{1} \frac{d\bar{x}_3}{g^{11}}$$

über. Die gemischtvarianten Größen  $\bar{S}_i^{1}$  gewinnt man aus den kontravarianten Größen nach der üblichen Umrechnungsformel

$$(277) \quad \bar{S}_i^{1} = \bar{g}_{ij} \bar{S}^{j1},$$

und die kontravarianten Größen ergeben sich durch Umstellung von Gleichung (268).

Der Ausdruck (273) bzw. (276) als Analogon zu (134) wird durch verschiedene Fakten nahegelegt. Da aber eine strenge Begründung noch aussteht, wird hier auf Einzelheiten verzichtet.

Wir denken uns nun die Größen  $\bar{b}_\alpha$  bzw.  $\bar{b}_\alpha^*$  in (276) gemäß einer zu (125) analogen Gleichung durch die Größen  $\bar{a}_\alpha$  bzw.  $\bar{a}_\alpha^*$  ersetzt, und  $\bar{F}$  wird eine Funktion von  $\bar{a}_\alpha$  und  $\bar{a}_\alpha^*$  allein:

$$(278) \quad \bar{F} = \bar{F}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{N(1)}; \bar{a}_1^*, \bar{a}_2^*, \dots, \bar{a}_{N(1)}^*)$$

Um das Minimum von  $\bar{F}$  zu finden, müssen die Real- und Imaginärteile der  $\bar{a}_\alpha$  gleichermaßen berücksichtigt werden. Die  $2N^{(1)}$  Gleichungen

$$(279) \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial a_\alpha^{(R)}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial a_\alpha^{(I)}} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N^{(1)},$$

stellen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Minimums

von  $\bar{F}$  dar. Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt die gesuchten Real- und Imaginärteile von  $\bar{a}_\alpha$ . Durch Einsetzen dieser Größen in die zu (125) analoge (hier nicht explizit angegebene) Gleichung erhält man schließlich die Real- und Imaginärteile von  $\bar{b}_\alpha$ .

*[Faint, mostly illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*

$$\begin{aligned}
(125) \quad & \dots \\
(126) \quad & \dots \\
(127) \quad & \dots \\
(128) \quad & \dots \\
(129) \quad & \dots
\end{aligned}$$

*[Faint, mostly illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*

$$\begin{aligned}
(130) \quad & \dots \\
(131) \quad & \dots \\
(132) \quad & \dots
\end{aligned}$$

## 6. Die numerische Durchführung der Rechnung

### 6.1. Die Ankopplung an die Ergebnisse des HASKELLSchen Matrizenverfahrens

Für die numerische Rechnung ist die Kenntnis der Eigenfunktionen und Eigenwerte des geschichteten elastischen Halbraums erforderlich. Wie schon erwähnt, steht mit dem HASKELLSchen Matrizenverfahren eine übersichtliche Methode zur Verfügung, die es gestattet, die benötigten Werte für eine beliebige Anzahl von Schichten unter Einsatz der elektronischen Datenverarbeitung zu bestimmen. Auf Einzelheiten des in der Literatur häufig beschriebenen Verfahrens braucht hier nicht eingegangen zu werden. Es existieren leistungsfähige Computerprogramme, die laufend verbessert werden (siehe z. B. [76]) und mit deren Hilfe es möglich ist, die Phasengeschwindigkeit und die sogenannten Potentiale der Oberflächenwellenmoden als Funktionen der Periode  $T$  zu bestimmen. Wir wollen hier lediglich die benötigten Umrechnungsformeln zwischen den Potentialen und den Verrückungen und Spannungen, wie sie sich aus der HASKELLSchen Arbeit herleiten lassen, ohne Beweis angeben. Die Amplituden-Tiefen-Abhängigkeiten der Verrückungen und Spannungen werden für alle Schichten getrennt berechnet und können dann aneinandergesetzt werden. In jeder Schicht mit Ausnahme der letzten können fünf verschiedene Fälle auftreten:

$$(280) \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad c < v_{S(m)} < v_{P(m)} , \\ 2. \quad c = v_{S(m)} , \\ 3. \quad v_{S(m)} < c < v_{P(m)} , \\ 4. \quad c = v_{P(m)} , \\ 5. \quad c > v_{P(m)} > v_{S(m)} . \end{array} \right.$$

Der eingeklammerte Index dient zur Numerierung der Schichten und läuft von 1 bis  $n$ , wobei  $n$  die letzte Schicht, also den Halbraum, kennzeichnet. Im Halbraum können nur die Fälle 1 - 3 auftreten. Die Amplituden-Tiefen-Abhängigkeiten werden im Fall 1 durch Hyperbelfunktionen, im Fall 3 durch trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen und im Fall 5 nur durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt. Die kritischen Fälle 2 und 4 wurden in [60] untersucht und führen zu linearen Amplituden-Tiefen-Abhängigkeiten. Um das Rechenprogramm nicht zu überlasten, werden wir der Einfachheit halber zunächst nur die Fälle 1 und 3 zulassen.

Es empfiehlt sich, die Abkürzungen

$$(281) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{r(m)} = \sqrt{|1 - [c / v_{P(m)}]^2|} , \\ \alpha_{s(m)} = \sqrt{|1 - [c / v_{S(m)}]^2|} , \\ \gamma_{(m)} = 2 [v_{S(m)} / c]^2 \end{array} \right.$$

einzuführen und weiterhin

$$(282) \left\{ \begin{array}{l} a_{1(m)}^{\alpha} = -v_{P(m)}^2 / c^{\alpha} \omega, \quad b_{1(m)}^{\alpha} = \gamma_{(m)}^{\alpha} s_{(m)}^{\alpha} c^{\alpha} / \omega, \quad b_{2(m)}^{\alpha} = 1, \\ a_{3(m)}^{\alpha} = v_{P(m)}^2 r_{(m)}^{\alpha} / c^{\alpha} \omega, \quad b_{3(m)}^{\alpha} = -\gamma_{(m)}^{\alpha} c^{\alpha} / \omega, \\ a_{11(m)}^{\alpha} = e_{(m)} v_{P(m)}^2 [1 + \gamma_{(m)}^{\alpha} - 2 v_{S(m)}^2 / v_{P(m)}^2], \\ b_{11(m)}^{\alpha} = -e_{(m)} \gamma_{(m)}^{\alpha 2} s_{(m)}^{\alpha} c^{\alpha 2}, \quad b_{12(m)}^{\alpha} = -\mu_{(m)}^{\alpha} k^{\alpha}, \\ a_{13(m)}^{\alpha} = e_{(m)} \gamma_{(m)}^{\alpha} r_{(m)}^{\alpha} v_{P(m)}^2, \quad b_{13(m)}^{\alpha} = e_{(m)} \gamma_{(m)}^{\alpha} c^{\alpha 2} [1 - \gamma_{(m)}^{\alpha}], \\ a_{22(m)}^{\alpha} = e_{(m)} v_{P(m)}^2 [1 - 2 v_{S(m)}^2 / v_{P(m)}^2], \quad b_{23(m)}^{\alpha} = -\mu_{(m)}^{\alpha} k^{\alpha} s_{(m)}^{\alpha}. \end{array} \right.$$

Die soeben definierten Größen gehen linear in die Verrückungen und Spannungen ein.

Die Normierung gemäß (168) vollziehen wir, indem wir diese Größen durch  $\sqrt{\frac{\alpha}{N}}$  dividieren:

$$(283) \left\{ \begin{array}{l} A_{1(m)}^{\alpha} = a_{1(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \quad B_{1(m)}^{\alpha} = b_{1(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \quad B_{2(m)}^{\alpha} = 1 / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \\ A_{3(m)}^{\alpha} = a_{3(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \quad B_{3(m)}^{\alpha} = b_{3(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \\ A_{11(m)}^{\alpha} = a_{11(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \quad B_{11(m)}^{\alpha} = b_{11(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \\ B_{12(m)}^{\alpha} = b_{12(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \\ A_{22(m)}^{\alpha} = a_{22(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}, \quad B_{23(m)}^{\alpha} = b_{23(m)}^{\alpha} / \sqrt{\frac{\alpha}{N}}. \end{array} \right.$$

Die sogenannten Potentiale, die sich aus der Erfüllung der Randbedingungen an den einzelnen Schichtgrenzen ergeben, werden mit  $\Delta'_{(m)}^{\alpha}$ ,  $\Delta''_{(m)}^{\alpha}$ ,  $\Omega'_{(m)}^{\alpha}$  und  $\Omega''_{(m)}^{\alpha}$  bezeichnet und reell vorausgesetzt. Weiterhin führen wir die Abkürzungen

$$(284) \quad p_{(m)}^{\alpha} = \frac{\alpha}{k} r_{(m)}^{\alpha}, \quad q_{(m)}^{\alpha} = \frac{\alpha}{k} s_{(m)}^{\alpha}$$

ein. Mit diesen Bezeichnungen und unter Berücksichtigung der Zusatzbedingungen (126), (127), (130) und (131) lauten die benötigten Verrückungs- und Spannungskomponenten

(285) 1.  $\frac{\alpha}{c} < v_{S(m)} < v_{P(m)}$  :

$$\begin{aligned} U_{1(m)}^{\alpha} &= i A_{1(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m)x_3} + \Delta''_{(m)} e^{p(m)x_3}] + \\ &+ i B_{1(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-q(m)x_3} - \Omega''_{(m)} e^{q(m)x_3}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{3(m)}^{\alpha} &= A_{3(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m)x_3} - \Delta''_{(m)} e^{p(m)x_3}] + \\ &+ B_{3(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-q(m)x_3} + \Omega''_{(m)} e^{q(m)x_3}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{11(m)}^{\alpha} &= A_{11(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m)x_3} + \Delta''_{(m)} e^{p(m)x_3}] + \\ &+ B_{11(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-q(m)x_3} - \Omega''_{(m)} e^{q(m)x_3}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{13(m)}^{\alpha} &= i A_{13(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m)x_3} - \Delta''_{(m)} e^{p(m)x_3}] + \\ &+ i B_{13(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-q(m)x_3} + \Omega''_{(m)} e^{q(m)x_3}] , \end{aligned}$$

$$S_{22(m)}^{\alpha} = A_{22(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m)x_3} + \Delta''_{(m)} e^{p(m)x_3}] , \quad \alpha \leq M ;$$

$$U_{2(m)}^{\alpha} = i B_{2(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-q(m)x_3} + \Omega''_{(m)} e^{q(m)x_3}] ,$$

$$S_{12(m)}^{\alpha} = B_{12(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-q(m)x_3} + \Omega''_{(m)} e^{q(m)x_3}] ,$$

$$S_{23(m)}^{\alpha} = i B_{23(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-q(m)x_3} - \Omega''_{(m)} e^{q(m)x_3}] , \quad \alpha > M ;$$



$$(236) \quad 3. \quad v_{S(m)} < \frac{\alpha}{c} < v_{P(m)} :$$

$$\begin{aligned} U_{1(m)}^{\alpha} &= i A_{1(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m) x_3} + \Delta''_{(m)} e^{p(m) x_3}] - \\ &\quad - 2 i B_{1(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} \cos q_{(m)} x_3 - \Omega''_{(m)} \sin q_{(m)} x_3] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{3(m)}^{\alpha} &= A_{3(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m) x_3} - \Delta''_{(m)} e^{p(m) x_3}] + \\ &\quad + 2 B_{3(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} \sin q_{(m)} x_3 + \Omega''_{(m)} \cos q_{(m)} x_3] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{11(m)}^{\alpha} &= A_{11(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m) x_3} + \Delta''_{(m)} e^{p(m) x_3}] - \\ &\quad - 2 B_{11(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} \cos q_{(m)} x_3 - \Omega''_{(m)} \sin q_{(m)} x_3] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{13(m)}^{\alpha} &= i A_{13(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m) x_3} - \Delta''_{(m)} e^{p(m) x_3}] + \\ &\quad + 2 i B_{13(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} \sin q_{(m)} x_3 + \Omega''_{(m)} \cos q_{(m)} x_3] , \end{aligned}$$

$$S_{22(m)}^{\alpha} = A_{22(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-p(m) x_3} + \Delta''_{(m)} e^{p(m) x_3}] , \quad \alpha \leq M ;$$

$$U_{2(m)}^{\alpha} = 2 i B_{2(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} \sin q_{(m)} x_3 + \Omega''_{(m)} \cos q_{(m)} x_3] ,$$

$$S_{12(m)}^{\alpha} = 2 B_{12(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} \sin q_{(m)} x_3 + \Omega''_{(m)} \cos q_{(m)} x_3] , \quad \alpha > M .$$

Weiterhin sind nun die modifizierten Verrückungs- und Spannungskomponenten für schräg einfallende Oberflächenwellen zu berechnen. Die Formeln (30) und (31) verhel-  
fen zu den Beziehungen

$$(287) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_1^{\alpha} = c_{11}^{\alpha} U_1 , & \mathcal{S}_{11}^{\alpha} = c_{11}^{\alpha} S_{11} + c_{21}^{\alpha} S_{22} , \\ \mathcal{U}_2^{\alpha} = c_{12}^{\alpha} U_1 , & \mathcal{S}_{12}^{\alpha} = c_{11}^{\alpha} c_{12}^{\alpha} S_{11} + c_{21}^{\alpha} c_{22}^{\alpha} S_{22} , \\ \mathcal{U}_3^{\alpha} = U_3 , & \mathcal{S}_{13}^{\alpha} = c_{11}^{\alpha} S_{13} , \quad \alpha \leq M , \end{cases}$$

und

$$(288) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_1^{\alpha} = c_{21}^{\alpha} U_2 , & \mathcal{S}_{11}^{\alpha} = 2 c_{11}^{\alpha} c_{21}^{\alpha} S_{12} , \\ \mathcal{U}_2^{\alpha} = c_{22}^{\alpha} U_2 , & \mathcal{S}_{12}^{\alpha} = (c_{11}^{\alpha} c_{22}^{\alpha} + c_{12}^{\alpha} c_{21}^{\alpha}) S_{12} , \\ \mathcal{U}_3^{\alpha} = 0 , & \mathcal{S}_{13}^{\alpha} = c_{21}^{\alpha} S_{23} , \quad \alpha > M . \end{cases}$$

Es empfiehlt sich, die Abkürzungen

$$(289) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_{A_1(m)} = c_{11}^{\alpha} A_{1(m)}, \quad \tilde{\alpha}_{B_1(m)} = c_{11}^{\alpha} B_{1(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{A_2(m)} = c_{12}^{\alpha} A_{1(m)}, \quad \tilde{\alpha}_{B_2(m)} = c_{12}^{\alpha} B_{1(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{A_3(m)} = A_{3(m)}, \quad \tilde{\alpha}_{B_3(m)} = B_{3(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{A_{11}(m)} = c_{11}^{\alpha_2} A_{11(m)} + c_{21}^{\alpha_2} A_{22(m)}, \quad \tilde{\alpha}_{B_{11}(m)} = c_{11}^{\alpha} B_{11(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{A_{12}(m)} = c_{11}^{\alpha} c_{12}^{\alpha} A_{11(m)} + c_{21}^{\alpha} c_{22}^{\alpha} A_{22(m)}, \quad \tilde{\alpha}_{B_{12}(m)} = c_{11}^{\alpha} c_{12}^{\alpha} B_{11(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{A_{13}(m)} = c_{11}^{\alpha} A_{13(m)}, \quad \tilde{\alpha}_{B_{13}(m)} = c_{11}^{\alpha} B_{13(m)}, \quad \alpha \leq M, \end{array} \right.$$

und

$$(290) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_{B_1(m)} = c_{21}^{\alpha} B_{2(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{B_2(m)} = c_{22}^{\alpha} B_{2(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{B_{11}(m)} = 2 c_{11}^{\alpha} c_{21}^{\alpha} B_{12(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{B_{12}(m)} = (c_{11}^{\alpha} c_{22}^{\alpha} + c_{12}^{\alpha} c_{21}^{\alpha}) B_{12(m)}, \\ \tilde{\alpha}_{B_{13}(m)} = c_{21}^{\alpha} B_{23(m)}, \quad \alpha > M, \end{array} \right.$$

einzuführen. Durch Kombination der Formeln (285) bis (290) gewinnt man schließlich die modifizierten Verrückungs- und Spannungskomponenten für die verschiedenen Fälle:

$$(291) \quad 1. \quad \frac{\alpha}{c} < V_{S(m)} < V_{P(m)}$$

$$a) \quad \alpha \leq M$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{1(m)}^{\alpha} &= i \tilde{A}_{1(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{P(m)} x_3} + \Delta''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{P(m)} x_3}] + \\ &+ i \tilde{B}_{1(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{Q(m)} x_3} - \Omega''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{Q(m)} x_3}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{2(m)}^{\alpha} &= i \tilde{A}_{2(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{P(m)} x_3} + \Delta''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{P(m)} x_3}] + \\ &+ i \tilde{B}_{2(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{Q(m)} x_3} - \Omega''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{Q(m)} x_3}] , \end{aligned}$$

$$\tilde{U}_{3(m)}^{\alpha} = U_{3(m)}^{\alpha} ,$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{11(m)}^{\alpha} &= \tilde{A}_{11(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{P(m)} x_3} + \Delta''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{P(m)} x_3}] + \\ &+ \tilde{B}_{11(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{Q(m)} x_3} - \Omega''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{Q(m)} x_3}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{12(m)}^{\alpha} &= \tilde{A}_{12(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{P(m)} x_3} + \Delta''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{P(m)} x_3}] + \\ &+ \tilde{B}_{12(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{Q(m)} x_3} - \Omega''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{Q(m)} x_3}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{13(m)}^{\alpha} &= i \tilde{A}_{13(m)}^{\alpha} [\Delta'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{P(m)} x_3} - \Delta''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{P(m)} x_3}] + \\ &+ i \tilde{B}_{13(m)}^{\alpha} [\Omega'_{(m)} e^{-\frac{\alpha}{Q(m)} x_3} + \Omega''_{(m)} e^{\frac{\alpha}{Q(m)} x_3}] ; \end{aligned}$$

(292) b)  $\alpha > M$ 

$$U_{1(m)}^{\alpha} = i \tilde{B}_{1(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} e^{-q_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Omega}''_{(m)} e^{q_{(m)}^{\alpha} x_3}] ,$$

$$U_{2(m)}^{\alpha} = i \tilde{B}_{2(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} e^{-q_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Omega}''_{(m)} e^{q_{(m)}^{\alpha} x_3}] ,$$

$$U_{3(m)}^{\alpha} = 0 ,$$

$$S_{11(m)}^{\alpha} = \tilde{B}_{11(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} e^{-q_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Omega}''_{(m)} e^{q_{(m)}^{\alpha} x_3}] ,$$

$$S_{12(m)}^{\alpha} = \tilde{B}_{12(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} e^{-q_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Omega}''_{(m)} e^{q_{(m)}^{\alpha} x_3}] ,$$

$$S_{13(m)}^{\alpha} = i \tilde{B}_{13(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} e^{-q_{(m)}^{\alpha} x_3} - \tilde{\Omega}''_{(m)} e^{q_{(m)}^{\alpha} x_3}] ;$$

(293) 3.  $v_{S(m)} < c^{\alpha} < v_{P(m)}$ a)  $\alpha \leq M$ 

$$U_{1(m)}^{\alpha} = i \tilde{A}_{1(m)}^{\alpha} [\tilde{\Delta}'_{(m)} e^{-p_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Delta}''_{(m)} e^{p_{(m)}^{\alpha} x_3}] -$$

$$- 2 i \tilde{B}_{1(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3 - \tilde{\Omega}''_{(m)} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$U_{2(m)}^{\alpha} = i \tilde{A}_{2(m)}^{\alpha} [\tilde{\Delta}'_{(m)} e^{-p_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Delta}''_{(m)} e^{p_{(m)}^{\alpha} x_3}] -$$

$$- 2 i \tilde{B}_{2(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3 - \tilde{\Omega}''_{(m)} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$U_{3(m)}^{\alpha} = \tilde{A}_3^{\alpha} [\tilde{\Delta}'_{(m)} e^{-p_{(m)}^{\alpha} x_3} - \tilde{\Delta}''_{(m)} e^{p_{(m)}^{\alpha} x_3}] +$$

$$+ 2 \tilde{B}_3^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3 + \tilde{\Omega}''_{(m)} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$S_{11(m)}^{\alpha} = \tilde{A}_{11(m)}^{\alpha} [\tilde{\Delta}'_{(m)} e^{-p_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Delta}''_{(m)} e^{p_{(m)}^{\alpha} x_3}] -$$

$$- 2 \tilde{B}_{11(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3 - \tilde{\Omega}''_{(m)} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$S_{12(m)}^{\alpha} = \tilde{A}_{12(m)}^{\alpha} [\tilde{\Delta}'_{(m)} e^{-p_{(m)}^{\alpha} x_3} + \tilde{\Delta}''_{(m)} e^{p_{(m)}^{\alpha} x_3}] -$$

$$- 2 \tilde{B}_{12(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3 - \tilde{\Omega}''_{(m)} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$S_{13(m)}^{\alpha} = i \tilde{A}_{13(m)}^{\alpha} [\tilde{\Delta}'_{(m)} e^{-p_{(m)}^{\alpha} x_3} - \tilde{\Delta}''_{(m)} e^{p_{(m)}^{\alpha} x_3}] +$$

$$+ 2 i \tilde{B}_{13(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3 + \tilde{\Omega}''_{(m)} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3] ;$$

(294) b)  $\alpha > M$ 

$$\tilde{U}_{1(m)}^{\alpha} = 2 i \tilde{B}_{1(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)}^{\alpha} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3 + \tilde{\Omega}''_{(m)}^{\alpha} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$\tilde{U}_{2(m)}^{\alpha} = 2 i \tilde{B}_{2(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)}^{\alpha} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3 + \tilde{\Omega}''_{(m)}^{\alpha} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$\tilde{U}_{3(m)}^{\alpha} = 0 ,$$

$$\tilde{S}_{11(m)}^{\alpha} = 2 \tilde{B}_{11(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)}^{\alpha} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3 + \tilde{\Omega}''_{(m)}^{\alpha} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$\tilde{S}_{12(m)}^{\alpha} = 2 \tilde{B}_{12(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)}^{\alpha} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3 - \tilde{\Omega}''_{(m)}^{\alpha} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3] ,$$

$$\tilde{S}_{13(m)}^{\alpha} = -2 i \tilde{B}_{13(m)}^{\alpha} [\tilde{\Omega}'_{(m)}^{\alpha} \cos q_{(m)}^{\alpha} x_3 - \tilde{\Omega}''_{(m)}^{\alpha} \sin q_{(m)}^{\alpha} x_3] .$$

Es ist zu beachten, daß wegen der Randbedingungen im Unendlichen für  $m = n$

$$(295) \quad \Delta''_{(n)}^{\alpha} = \tilde{\Omega}''_{(m)}^{\alpha} = 0 \quad \text{für } 1. \text{ a) und b) ,}$$

$$(296) \quad \Delta'_{(n)}^{\alpha} = \tilde{\Omega}'_{(n)}^{\alpha} = \tilde{\Omega}''_{(n)}^{\alpha} = 0 \quad \text{für } 3. \text{ a) und b) }$$

gilt. Demzufolge können im Fall 3. b) keine Oberflächenwellen existieren.

## 6.2. Bemerkungen zum FORTRAN-IV-Programm

Es wurde ein Flußbild für die Berechnung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten und der Energieverteilung für den Durchgang von Oberflächenwellen durch eine vertikale Diskontinuität anhand der hier entwickelten Theorie entworfen. An der Programmierung dieses Flußbildes in FORTRAN IV wird gearbeitet.

Die gesuchten Größen werden bei konstantem Einfallswinkel für verschiedene Perioden mit vorgegebener Schrittweite bestimmt.

Um diesen ersten Programmentwurf nicht zu überlasten, wurden folgende Vereinfachungen vorgenommen:

1. Es werden nur einfallende RAYLEIGH-Wellen betrachtet.
2. Wie schon erwähnt, werden für den Wert der Phasengeschwindigkeit nur die Fälle 1 und 3 (280) zugelassen.
3. Es werden nur unkritische und nichtentartete Eigenwerte zugelassen.
4. Einfallswinkel, die zur Totalreflexion führen, werden ausgeschlossen.
5. Die Integrale (119) bis (122) und (146) bis (149) werden wahlweise numerisch bzw. teilweise numerisch berechnet, obwohl eine exakte Integration möglich wäre.

Durch Schreiben zusätzlicher Unterprogramme können alle Vereinfachungen späterhin wieder rückgängig gemacht werden. Nach der bisher vorliegenden Konzeption enthält das Programm 55 hierarchisch geordnete Unterprogramme. Das Hauptprogramm erfüllt im wesentlichen folgende Funktionen:

1. Einlesen der Eingabeparameter,
2. Aufrufen von 17 Hauptunterprogrammen,
3. Abarbeiten der Zyklen über die verschiedenen Moden bzw. über die Stützstellen bei der numerischen Integration und über die einzelnen Perioden,
4. **Drucken** der Ergebnisse.

Anschließend seien die wichtigsten Funktionen der 17 Hauptunterprogramme genannt. Im UP 1 werden die Eigenwerte  $k$  aus den Phasengeschwindigkeiten  $c^{(\alpha(m))}$  gemäß (21) bestimmt, und zwar für die Schichtenfolgen zu beiden Seiten der Diskontinuität, im folgenden mit Modell 1 bzw. 2 bezeichnet ( $m$  nimmt demzufolge die Werte 1, 2 an). Weiterhin werden die Richtungskosinus  $n_1^{(\alpha(m))}$ ,  $n_2^{(\alpha(m))}$  gemäß (69) und (70) für  $m = 1, 2$  bestimmt. Das Programm wurde der Einfachheit halber zunächst so ausgelegt, daß die Anzahl der reflektierten und transmittierten Moden gleich ist. Aus diesem Grunde läuft der Modenindex  $\alpha$  für Modell 1 und für Modell 2 von 1 bis  $\bar{N}$ .

Im UP 2 werden die Hilfsgrößen (282) bestimmt und aus diesen die Beiträge der einzelnen Schichten zu den Normierungskonstanten für Modell 1 und 2 berechnet, und zwar durch exakte Auswertung der Integrale von 0 bis  $\infty$ .

Im folgenden UP 3 werden zunächst die Normierungskonstanten  $\bar{N}^{(\alpha(m))}$  bestimmt, danach wird die Normierung gemäß (283) ausgeführt und schließlich der Übergang von den Größen ohne Schlange zu den Größen mit Schlange nach den Formeln (287) bis (290) vollzogen.

Das UP 4 gliedert sich wiederum in eine Reihe von Teilunterprogrammen. Es werden diejenigen Größen berechnet, die man benötigt, um die Integrale (119) bis (122), (146) bis (150) sowie (152) und (153) zu bestimmen. Diese Integrale können im Prin-

zip alle exakt ausgewertet werden, doch ist dies infolge der notwendigen Fallunterscheidungen gemäß (280) und (22) sehr umständlich. Darum werden die Integrale über die einzelnen Schichten in jedem Fall numerisch ausgewertet. Die vom Halbraum her-rührenden Anteile können wahlweise exakt oder durch numerische Integration bis zu einer willkürlich vorgebbaren Grenze, von der man annimmt, daß die Bewegung bis dahin genügend stark abgeklungen ist, berechnet werden. Die Bestimmung der Hilfsgrößen erfolgt nach den Formeln (291) bis (294).

In den Unterprogrammen 5.1 und 5.2 erfolgt die Berechnung der Integrale (119) bis (122), (146) bis (150) sowie (152) und (153), und zwar teils numerisch mit Hilfe der SIMPSONSchen Regel und teils exakt.

Die Unterprogramme 6.1 und 6.2 dienen zur Ermittlung der Größen (158) bzw. (157).

Im UP 7 wird die inverse Matrix zu  $F_{\alpha\gamma}$  gebildet, und mit deren Hilfe werden die verallgemeinerten Reflexionskoeffizienten gemäß (161) im UP 8 bestimmt. Für die Berechnung der verallgemeinerten Transmissionskoeffizienten nach Formel (162) ist das UP 9 vorgesehen. Die seismologisch interessierenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für einfallende RAYLEIGH-Wellen  $A_{VR}^{\alpha}$ ,  $A_{HR}^{\alpha}$ ,  $B_{VR}^{\alpha}$  und  $B_{HR}^{\alpha}$  gemäß den Gleichungen (181), (182), (184) und (185) werden im UP 10.1 und  $A_{LR}^{\alpha}$ ,  $B_{LR}^{\alpha}$  gemäß (183) und (186) im UP 10.2 bestimmt.

Die Berechnung der Energieströme  $S_R^{\alpha}$  und  $S_T^{\alpha}$  erfolgt nach (195) und (196) im UP 11, und das UP 12 schließlich dient zur Ermittlung der Größe  $P_{euf}$  nach (197).

## 7. Ausblick auf Möglichkeiten der praktischen Anwendung

Auf Grund des Umfangs und der Kompliziertheit des aufzustellenden Rechenprogramms konnte es im Rahmen dieser Arbeit nicht das Ziel sein, numerische Ergebnisse zu erhalten. Ungeachtet dessen wurden alle dazu notwendigen Vorarbeiten geleistet einschließlich diverser Modifikationen des DORMANSchen Programms zur Berechnung der Dispersion von Oberflächenwellen, die für die Anwendung auf das hier behandelte Problem erforderlich waren.

Der hier entwickelte Formalismus soll ganz allgemein zur Interpretation von Erdbebenaufzeichnungen in bezug auf Diskontinuitäten verwendet werden. Als Anschauungsbeispiel, bei dem die praktisch auftretenden Effekte zu erkennen sind, möge die Abb. 14 dienen.

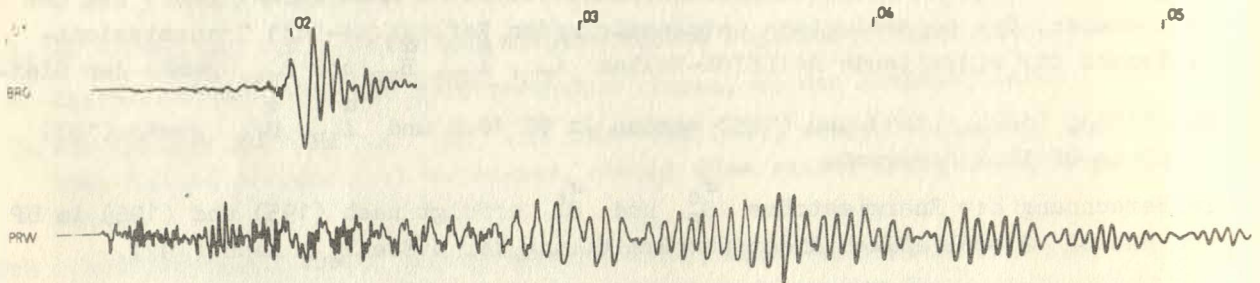


Abb. 14 Reflexion seismischer Oberflächenwellen am Harznordrand [91]

Es sind dort die Aufzeichnungen eines seismischen Ereignisses aus dem Bezirk Halle zu sehen, und zwar für die Stationen Berggießhübel im Süden und Pritzwalk im Norden der DDR. Etwa zwischen den Minuten 4 und 5 ist ein reflektierter Wellenzug zu erkennen, der wahrscheinlich von einer Reflexion am Harznordrand herrührt. Es kommt dabei nur zur Reflexion der relativ kurzperiodischen Anteile. Die Analyse solcher Phänomene gestattet es, aus der Periodenabhängigkeit der Beeinflussung von Oberflächenwellen an einer vertikalen oder geneigten Störung prinzipiell auf die Tiefenabhängigkeit des Kontrastes der Materialparameter zwischen beiden Seiten der Störung zu schließen. Auf diese Weise kann man geologisch wichtige Informationen über den Tiefgang von Störungen erhalten.

Von seiten sowjetischer Kollegen wurde großes Interesse für diese theoretischen Überlegungen bekundet, und es wird eine Zusammenarbeit auf diesem Gebiet stattfinden. In diesem Zusammenhang teilte STAROVOJT [93] mit, daß die Aufzeichnungen von bestimmten Aläuten-Erdbeben der sowjetischen seismischen Station Obninsk deutlich auf das Vorhandensein von reflektierenden Elementen für seismische Oberflächenwellen hinweisen, und eine Zusammenarbeit wurde vereinbart. Weiterhin soll eine Zusammenarbeit mit SICHARULIDSE und Mitarbeitern zwecks theoretischer Interpretation des vorhandenen Datenmaterials erfolgen.

Zweck dieser Untersuchungen ist letztlich die Klärung der Beziehungen zwischen tektonischen Großeinheiten der oberen Erdkruste und der Struktur sowie den physikalischen Eigenschaften der Materie in der Tiefe. In der globalen Plattentektonik spielen die sogenannten Subduktionszonen, wo es zu einem Absinken der Lithosphäre mit ozeanischer Kruste kommt, eine besondere Rolle [92]. Charakteristisch sind geneigte



seismische Zonen, die tief in den oberen Mantel hinunterreichen. Die Betrachtung geneigter Diskontinuitäten wird eventuell bei der Prüfung dieser Theorie eine wertvolle Hilfe sein können.

Bei der Problematik der Diskontinuitäten ist man außer an dem Reflexions- und Durchlaßvermögen für seismische Wellen auch an einer genauen Lokalisierung der Störungen interessiert. Hierfür ist eine Untersuchung der Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen, die ja zu beiden Seiten der Diskontinuität unterschiedliche Werte annimmt, notwendig. Es existieren bereits entsprechende Überlegungen, und diese beiden Methoden für die Untersuchung von vertikalen und geneigten Diskontinuitäten werden sich gegenseitig ergänzen.

## 8. Zusammenfassung der Ergebnisse

Es wird die Ausbreitung seismischer Oberflächenwellen in geschichteten elastischen Medien mit lateralen Störungen untersucht. Dabei werden zunächst vertikale Diskontinuitäten betrachtet. Bei der Wechselwirkung der Oberflächenwellen mit solchen Diskontinuitäten kommt es zur Reflexion und Transmission und zur Entstehung neuer Wellenarten, einschließlich Raumwellen. Reflexionen seismischer Oberflächenwellen an geologischen Störungen sind praktisch häufig beobachtet worden, und daraus ergab sich die Notwendigkeit, diesen Vorgang quantitativ zu erfassen. Eine mathematisch exakte Lösung des Problems ist bisher noch nicht gefunden worden. Von den möglichen Lösungsverfahren werden aus Gründen der Einfachheit und Rentabilität diejenigen ausgeschlossen, die die seismischen Quellen in die Rechnung einbeziehen. Aus diesem Grunde wird das auf der Basis von ebenen Wellen arbeitende ALSOPsche Verfahren weiterentwickelt. Dabei wird zunächst als notwendige Voraussetzung die Orthogonalitätsrelation für die Eigenfunktionen des elastischen Halbraums unter Verwendung des SNELLIUSSchen Brechungsgesetzes für schräg einfallende Wellen verallgemeinert und gleichzeitig die Orthogonalität von RAYLEIGH- und LOVE-Moden gezeigt. Eine zusätzliche Erweiterung erfährt die Orthogonalitätsrelation durch Einbeziehung der kontinuierlichen Eigenfunktionen, repräsentiert durch die Raumwellen. Zur Normierung der Raumwellen wird erstmalig die DIRACsche Deltafunktion herangezogen.

Die Randbedingungen an einer Vertikaldiskontinuität werden unter Berücksichtigung der Raumwellen formuliert. Mit Hilfe des ALSOPschen Variationsverfahrens und der verallgemeinerten Orthogonalitätsrelation gelangtes, die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die RAYLEIGH- und LOVE-Wellen zu eliminieren, wobei die Umwandlung dieser Wellentypen ineinander zugelassen wird. Gleichzeitig wird die Energieverteilung der einzelnen an der Grenzfläche entstehenden Wellenarten berechnet.

Durch Einführung eines krummlinigen Koordinatensystems gelingt es erstmalig, eine Basis für die Anwendung des ALSOPschen Verfahrens auch auf unebene und schräge Diskontinuitäten zu schaffen.

Danksagungen

Es ist mir ein angenehmes Bedürfnis, Herrn Prof. H. STILLER für die großzügige Unterstützung und Herrn Dr. H. NEUNHÖFER für die große Mühe bei der Betreuung dieser Arbeit und für viele grundlegende Diskussionen herzlich zu danken.

Weiterhin gilt mein herzlicher Dank Herrn Dr. W. ULLMANN für diverse sachdienliche Diskussionen und Literaturhinweise und den Herren Doktoren J. ELLENBERG und E. GRUMBT für Beratung in geologischen Fragen, sowie allen Kollegen des Zentralinstituts für Physik der Erde der AdW, die Anteil am Gelingen dieser Arbeit haben.

Den Herren Professoren H. TRIEBEL und G.P. WEBER und Dr. G. KLUGE von der Friedrich-Schiller-Universität Jena sowie Herrn Dr. U. RÖPKE vom Zentralinstitut für Festkörperphysik und Werkstofforschung der AdW danke ich für wertvolle Hinweise aus ihren Spezialdisziplinen.

Herrn Prof. L.E. ALSOP vom Lamont-Doherty Geological Observatory, Palisades, N. Y., habe ich für einen wichtigen Hinweis bezüglich seines Verfahrens zu danken.

Schließlich sei Herrn Dipl.-Ing. D. KRACKE von der TH Ilmenau für viele Hinweise und die Hilfe bei der Programmierung gedankt.

Literatur

- [1] ABE, M.; SUZUKI, Z. A model-seismological study on the propagation of Rayleigh waves in a medium with a dipping boundary between superficial layer and basement. Sci. Rep. Tōhoku Univ. Ser. 5, Geophysics 20 (1970) <sup>1</sup>, S. 1-25
- [2] ALSOP, L.E. Transmission and reflection of Love waves at a vertical discontinuity. J. geophys. Res. 71 (1966) 16, S. 3969-3984
- [3] ALSOP, L.E. An orthonormality relation for elastic body waves. Bull. seism. Soc. Amer. 58 (1968) 6, S. 1949-1954
- [4] ALSOP, L.E. Persönliche Mitteilung, 1969
- [5] ALTERMAN, Z.; ROTENBERG, A. Seismic waves in a quarter plane. Bull. seism. Soc. Amer. 59 (1969), S. 347-367
- [6] ANDERSON, D.L. Recent evidence concerning the structure and composition of the Earth's mantle. In: Physics and Chemistry of the Earth, Vol. 6. Oxford, New York: Pergamon Press 1966
- [7] ARFKEN, G. Matematičeskie metody v fizike (Mathematische Methoden in der Physik). Moskva: Atomizdat 1970
- [8] ASANO, S. Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated boundary surface. Bull. Earthqu. Res. Inst. Tokyo 38 (1960), S. 177-197; 39 (1961), S. 367-466
- [9] ASHGIREI, G.D. Strukturgeologie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wiss. 1963
- [10] BÅTH, M. Mathematical aspects of seismology. Amsterdam, London, New York: Elsevier Publ. Comp. 1968
- [11] BEN-MENAHEM, A.; SINGH, S.J. Multipolar elastic fields in a layered half-space. Bull. seism. Soc. Amer. 58 (1968) 5, S. 1519-1572
- [12] BOORE, D.M. Love waves in nonuniform wave guides: Finite difference calculations. J. geophys. Res. 75 (1970), S. 1512-1527
- [13] BREMAECKER, J.A. DE Transmission and reflection of Rayleigh waves at corners. Geophysics 23 (1958) 2, S. 253-266
- [14] BULLEN, K.E. Theory of seismology. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1959
- [15] CAPON, J. Analysis of Rayleigh wave multipath propagation at Lasa. Bull. seism. Soc. Amer. 60 (1970), S. 1701-1731
- [16] CASE, K.M.; HAZELTINE, R.D. Elastic radiation in a half-space. J. math. Phys. 11 (1970) 8, S. 2546-2552
- [17] CLOOS, E. Experimental analysis of Gulf Coast fracture patterns. Bull. amer. Assoc. Petrol. Geol. 52 (1968) 3, S. 420-444

- [18] DAWYDOW, A.S. Quantenmechanik.  
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wiss. 1967
- [19] DORMAN, J.; PRENTISS, D. Particle amplitude profiles for Rayleigh waves on a heterogeneous Earth.  
J. geophys. Res. 65 (1960) 11, S. 3805-3816
- [20] DUSCHEK, A.; HOCHRAINER, A. Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, Teil 1 - 3.  
Wien: Springer-Verlag 1948
- [21] EWING, W.M.; JARDETZKY, W.S.; PRESS, F. Elastic waves in layered media.  
New York, Toronto, London: McGraw-Hill 1957
- [22] FUCHS, K. Das Reflexions- und Transmissionsvermögen eines geschichteten Mediums mit beliebiger Tiefen-Verteilung der elastischen Moduln und der Dichte für schrägen Einfall ebener Wellen.  
Geophysik 34 (1968), S. 389-413
- [23] GILBERT, F.; BACKUS, G.F. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems.  
Geophysics 31 (1966) 2, S. 326-332
- [24] GOODIER, J.N.; BISHOP, R.E.D. On critical reflections of elastic waves at free surfaces.  
J. appl. Phys. 23 (1952), S. 124-126
- [25] GREENFIELD, R.J. Short-period P-wave generation by Rayleigh-wave scattering at Novaya Zemlya.  
J. geophys. Res. 76 (1971) 32, S. 7988-8002
- [26] GREGORY, R.D. An expansion theorem applicable to problems of wave propagation in an elastic half-space containing a cavity.  
Proc. Cambr. philos. Soc. 63 (1967), S. 1341-1367
- [27] GURWITSCH, I.I. Seismische Erkundung.  
Leipzig: Akad. Verl.-Ges. Geest & Portig 1970
- [28] GUTDEUTSCH, R. Rayleigh-Wellen am Keil mit freien Grenzflächen.  
Hamburger Geophysikalische Einzelschriften, Hamburg 1968
- [29] Handbuch der Physik, Bd. 3/1 Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie.  
Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1960
- [30] Handbuch der Physik, Bd. 6 Elastizität und Plastizität.  
Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1958
- [31] HARJES, H.-P. Seismische Wellen in inhomogenen Medien.  
Diss. Braunschweig 1971
- [32] HARTKE, D. Untersuchungen des ozeanischen Erdkrustenaufbaus mit Hilfe der Dispersion von Erdbeben-Oberflächenwellen.  
Veröff. Inst. Geodyn. Jena (1968) 12
- [33] HASKELL, N.A. The dispersion of surface waves on multilayered media.  
Bull. seism. Soc. Amer. 43 (1953), S. 17-34

- [34] HERRERA, I. Contribution to the linearized theory of surface wave transmission.  
J. geophys. Res. 69 (1964) 22, S. 4791-4800
- [35] HERRERA, I. On a method to obtain a Green's function for a multilayered half space.  
Bull. seism. Soc. Amer. 54 (1964) 4, S. 1087-1096
- [36] HÖFER, H. Die Verwerfungen.  
Braunschweig: Vieweg & Sohn 1917
- [37] HUDSON, J.A.; KNOPOFF, L. Transmission and reflection of surface waves at a corner.  
J. geophys. Res. 69 (1964), S. 275-289
- [38] JENSEN, O.G.; ELLIS, R.M. Wave propagation in a horizontally-layered crust in terms of linear system theory.  
Canad. J. Earth Sci. 7 (1970) 5, S. 1185-1193
- [39] KÄSTNER, S. Vektoren, Tensoren, Spinoren.  
Berlin: Akademie-Verlag 1960
- [40] KANE, J.; SPENCE, J. Rayleigh wave transmission on elastic wedges.  
Geophysics 28 (1963), S. 715-723
- [41] KEILIS-BOROK, V.I. On the surface waves in a layer overlying a solid half space.  
Izvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. geogr. geofiz. (1951) 2, S. 17-39
- [42] KLUGE, G. Kontinuumsmechanik.  
(Vorlesungsmitschrift), 1964
- [43] KNOPOFF, L. Diffraction of elastic waves.  
J. acoust. Soc. Amer. 28 (1956), S. 217-229
- [44] KNOPOFF, L.; GANGI, A.F. Transmission and reflection of Rayleigh waves by wedges.  
Geophysics 25 (1960) 6, S. 1203-1214
- [45] KNOPOFF, L.; MAL, A.K. Phase velocity of surface waves in the transition zone of continental margins. 1: Love waves.  
J. geophys. Res. 72 (1967) 6, S. 1769-1776
- [46] KUPRADZE, V.D. Dynamical problems in elasticity. In: Progress in Solid Mechanics, Vol. 3.  
Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1963
- [47] LANDAU, L.D.; LIFSCHITZ, E.M. Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 2: Feldtheorie.  
Berlin: Akademie-Verlag 1963
- [48] LANDAU, L.D.; LIFSCHITZ, E.M. Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 6: Hydrodynamik.  
Berlin: Akademie-Verlag 1966
- [49] LANDAU, L.D.; LIFSCHITZ, E.M. Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 7: Elastizitätstheorie.  
Berlin: Akademie-Verlag 1966
- [50] LAFWOOD, E.R. The transmission of a Rayleigh pulse round a corner.  
Geophys. J. 4 (1961), S. 174-196

- [51] LENK, A. Zur Orthogonalität von Eigenfunktionen der akustischen und elastomechanischen Differentialgleichungen.  
Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik 79 (1970) 2, S. 37-41
- [52] LEWIS, D.; DALLY, J.W. Photoelastic analysis of Rayleigh wave propagation in wedges.  
J. geophys. Res. 75 (1970) 17, 3387-3398
- [53] LYSMER, J.; DRAKE, L.A. A finite element method for seismology. In: Methods in computational physics, Vol. 11.  
New York, London: Academic Press 1971
- [54] LYSMER, J.; DRAKE, L.A. The propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures.  
Bull. seism. Soc. Amer. 61 (1971) 5, S. 1233-1251
- [55] LYSMER, J.; WAAS, G. Shear waves in plane infinite structures.  
J. Engin. Mech. Div. 98 (1972), S. 85-105
- [56] MAL, A.K.; KNOPOFF, L. Transmission of Rayleigh waves past a step change in elevation.  
Bull. seism. Soc. Amer. 55 (1965) 2, S. 319-334
- [57] MAL, A.K.; KNOPOFF, L. Transmission of Rayleigh waves at a corner.  
Bull. seism. Soc. Amer. 56 (1966) 2, S. 455-466
- [58] MAL, A.K.; KNOPOFF, L. A differential equation for surface waves in layers with varying thickness.  
J. math. Analysis and Appl. 21 (1968) 2, S. 431 bis 444
- [59] MALISCHEWSKY, P. Die Orthonormierung von ebenen Oberflächen- und Raumwellen.  
Gerlands Beitr. Geophysik 79 (1970) 6, S. 468 bis 474
- [60] MALISCHEWSKY, P. Consideration of certain singularities in Haskell's matrix method.  
Gerlands Beitr. Geophysik 80 (1971) 6, S. 457 bis 462
- [61] MCGARR, A.; ALSOP, L.E. Transmission and reflection of Rayleigh waves at vertical boundaries.  
J. geophys. Res. 72 (1967) 8, S. 2169-2180
- [62] MCGARR, A. Amplitude variations of Rayleigh waves propagation across a continental margin.  
Bull. seism. Soc. Amer. 59 (1969) 3, S. 1281-1305
- [63] MESSIAH, A. Quantum mechanics, Vol. 1.  
Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1961
- [64] METZ, K. Lehrbuch der tektonischen Geologie.  
Stuttgart: Ferdinand Enke Verlag 1957
- [65] MOLOTKOV, I.A.; ZHUZE, A.G. Effect of a vertical boundary in an inhomogeneous medium on the propagation of Love waves.  
Fizika Zemli (1969) 5, S. 3-7
- [66] MORSE, PH.M.; FRESHBACH, H. Methods of theoretical physics, Part 1 and 2.  
New York, Toronto, London: McGraw-Hill 1953

- [67] MÜLLER, G. Theoretische Seismogramme für Punktquellen in geschichteten Medien.  
Diss. Clausthal 1967
- [68] MÜLLER, ST. Systemtheoretische Synthese seismischer Ausbreitungsvorgänge mit normaler Dispersion.  
Diss. Stuttgart 1962
- [69] OTTAVIANI, M. Elastic wave propagation in two evenly-welded quarter-spaces.  
Bull. seism. Soc. Amer. 61 (1971), S. 1119-1152
- [70] PEKERIS, C.L. Theory of propagation of explosive sound in shallow water.  
Geol. Soc. Amer. Mem. 27 (1948), S. 1-117
- [71] PRESS, F.; HARKRIDER, D.; SEAFELDT, C.A. A fast convenient program for computation of surface-wave dispersion curves in multilayered media.  
Bull. seism. Soc. Amer. 51 (1961), S. 495-502
- [72] RAYLEIGH, J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.  
Proc. London math. Soc. 17 (1885), S. 4-11
- [73] RAYLEIGH, J.W. Theory of sound, Vol. 1. Appendix of:  
Proc. London math. Soc. 2, S. 21
- [74] SAWARENSKIJ, E.F.; KIRNOS, D.P. Elemente der Seismologie und Seismometrie.  
Berlin: Akademie-Verlag 1960
- [75] SCHOCH, H.; SCHATZ, W. Programmierung in Fortran.  
Leipzig: BSB B. G. Teubner Verl. Ges. 1970
- [76] SCHWAB, F.; KNCPOFF, I. Surface-wave dispersion computations.  
Bull. seism. Soc. Amer. 60 (1970) 2, S. 321-344
- [77] SEZAWA, K.; KANAI, K. Discontinuity in the dispersion curves of Rayleigh waves.  
Bull. Earthqu. Res. Inst. Tokyo 13 (1935), S. 237 bis 244
- [78] SICHARULIDSE, D.L.; PATARAJA, E.I.; BAGRAMJAN, A.CH. Issledovanie otrazennykh i predomlennykh poverchnostnykh voln, nabljudennykh pri južnotjan'san'skich zemletrjasenijach (Studium von reflektierten und gebeugten Oberflächenwellen bei Süd-Tienschan-Erdbeben.  
Soobšč. Akad. Nauk gruz. SSR 54 (1969) 1, S. 65-68
- [79] SOMMERFELD, A. Mechanik der deformierbaren Medien.  
Leipzig: Akad. Verl.-Ges. Geest & Portig 1964
- [80] SYNGE, J.L.; SCHILD, A. Tensor calculus.  
Toronto: Univ. of Toronto Press 1949
- [81] TAKEUCHI, H. Theory of the Earth's interior.  
Waltham, Toronto, London: Blaisdell Publ. Comp. 1966
- [82] THAPAR, M.R. Rayleigh wave propagation and perturbed boundaries.  
Canad. J. Earth. Sci. 7 (1970), S. 1449-1461



- [83] THAPAR, M.R. Propagation of Rayleigh waves in a model of the cross-section of a mountain and its roof. Pure and appl. Geophys. 88 (1971), S. 92-110
- [84] TRUESDELL, C. The physical components of vectors and tensors. Z. angew. Math. u. Mech. 33 (1953), S. 345-356
- [85] ULLMANN, W. Mathematische Elastizitätstheorie (Manuskript)
- [86] VISWANATHAN, K. Wave propagation in welded quarter spaces. Geophys. J. roy. Soc. 11 (1966), S. 293-322
- [87] WAGENBRETH, O. Über den Begriff der synthetischen und antithetischen Störungen und ihre Bedeutung für die saxonische Tektonik Mitteldeutschlands. Geologie 13 (1964) 9, S. 1043-1056
- [88] WILCKENS, O. Grundzüge der tektonischen Geologie Jena: Verlag Gustav Fischer 1912
- [89] WOLF, B. Propagation of Love waves in surface layers of varying thickness. Pure and appl. Geophys. 67 (1967) 2, S. 76-82
- [90] ZIV, M. Generalized characteristics method for elastic wave propagation problems. Israel J. Techn. 8 (1970), S. 37-42
- [91] NEUNHÖFER, H.; u.a. Ableitung von Erdkrustenmodellen durch Analyse seismischer Oberflächenwellen, tiefenseismischer und geothermischer Daten. Vortrag, gehalten auf der 4. Wissenschaftlichen Jahrestagung des Zentralinstituts für Physik der Erde der AdW in Potsdam, 1973 (Veröff. in Vorbereitung)
- [92] SCHROEDER, E. Das Bewegungsbild der ozeanischen Kruste und Aspekte globaler Tektonik. Ber. dt. Ges. geol. Wiss. A 16 (1971), S. 413-434
- [93] STAROVOJT, O.E. Persönliche Mitteilung, 1971