

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR  
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften  
**ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE**

---

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde

Nr. 35

# Der Einfluß von Luftmassenbewegungen in der Atmosphäre auf die Polbewegung

von

H. Jochmann

# Die Jahresperiode und CHANDLER-Periode der Polbewegung (1923-1959)

von

H. Jochmann

(Die Programmierung wurde von Ing. E. Felsmann durchgeführt)

---

Als Manuskript gedruckt

Potsdam 1976



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Der Einfluß von Luftmassenbewegungen in der Atmosphäre auf die Polbewegung	
1. Einleitung	9
2. Kreiseltheoretische Grundlagen	10
2.1. Massengeometrischer und dynamischer Einfluß der Massenbewegung	12
2.2. Allgemeine Untersuchungen zu periodischen Erregerfunktionen	14
2.3. Die Deviationsmomente von Massenbelegungen auf der Erdoberfläche	14
3. Das physikalische Modell für die Berechnung der durch atmosphärische Einflüsse veränderten Massengeometrie	16
3.1. Die Deviationsmomente der Luftmassenbewegung	16
3.1.1. Die Schwerpunktshöhe einer Luftsäule	16
3.1.2. Integration des Deviationsmomentes über $r$	17
3.1.3. Grundformeln zur numerischen Auswertung	17
3.2. Der Einfluß der Reaktion der Wassermassen des Ozeans auf Luftdruckänderungen	18
3.2.1. Luftdruckschwankungen und Massenverlagerungen über dem Meer	22
3.2.2. Die Ermittlung des Kompensationsrestes $\Delta p_M$	24
3.3. Eine Analyse des Datenmaterials	27
3.3.1. Die Anfangsphase der Luftdruckvariationen	27
3.3.2. Die Berechnung der Erregerfunktionen	30
4. Die aus Luftdruckvariationen abgeleitete Jahresperiode der Polbewegung	32
4.1. Vergleich der durch Luftmassenverlagerungen hervorgerufenen Jahresperiode mit der astronomisch ermittelten Jahresperiode	32
4.2. Betrachtungen zur Lage und Form von Erregerfunktion und Polbewegungsellipse	34
5. Der Einfluß der Luftmassentransporte auf die Amplitude der CHANDLER-Periode	36
Literatur	38

## Die Jahresperiode und CHANDLER-Periode der Polbewegung (1923 - 1959)

1. Einleitung	43
2. Die angewandte Methode der Interpolationsausgleichung	44
2.1. Das mathematische Modell der Ausgleichung	44
2.2. Die Bestimmung von Näherungswerten	46
2.3. Der Einfluß eines systematischen Fehlers der Länge der CHANDLER-Periode auf die berechneten Amplituden der Polbewegung	46
2.4. Der Einfluß systematischer Amplitudenfehler auf die Bestimmung von $F$	47

	Seite
2.5. Die Fehlerfortpflanzung im mathematischen Modell der Ausgleichung	47
3. Die Amplituden, Phasenwinkel und Werte für die Länge der CHANDLER- Periode für den Zeitraum 1923 - 1959	49
3.1. Fehlertheoretische Diskussion der Ergebnisse	49
Literatur	52

**Der Einfluß von Luftmassenbewegungen in der Atmosphäre**

**auf die Polbewegung**

**von H. Jochmann**

Vorwort

Als man Anfang dieses Jahrhunderts fundierte Kenntnisse über Größe und Verlauf der Polbewegung erhielt und durch KLEIN und SOMMERFELD, NEWCOMB und WANACH wesentliche Beiträge zur Erweiterung der EULERSchen Kreiseltheorie geliefert wurden, versuchte man die Polbewegung durch massengeometrische Variationen des Erdkörpers zu erklären.

SPITALER machte als erster Luftmassentransporte für die Polbewegung verantwortlich. SCHWEYDAR vertrat die Ansicht, daß die Polbewegung vollkommen durch meteorologische Einflüsse erklärbar sei. Weitere Arbeiten zu diesem Problem lieferten JEFFREYS, MUNK und HASSAN. Korrelative Beziehungen zwischen Polbewegung, Rotation und meteorologischen Größen wurden besonders von KRÜGER während des letzten Jahrzehnts untersucht.

Nachdem durch die "World Meteorological Organization" umfangreiches und relativ homogenes Material über Luftdruckvariationen zur Verfügung gestellt wurde, ist es möglich, die Zusammenhänge zwischen Polbewegung und Luftmassenverlagerungen relativ sicher zu erfassen. Diesem Problem ist die folgende Arbeit gewidmet.

Bei der Datenverarbeitung hat mich besonders Fräulein Ing. E. FELSMANN unterstützt, die auch die Programmierung übernahm. Ihr sei an dieser Stelle gedankt. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. habil. H. KAUTZLEBEN und Herrn Vern.-Ing. H. KRÜGER für wertvolle Hinweise.

Potsdam, im März 1975

H. Jochmann

### Zusammenfassung

Auf Grund der Luftdruckwerte von 900 Festlandsstationen wurde der Einfluß von Luftmassentransporten auf die Polschwankung berechnet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß

1. die Festlandsflächen auf Druck nicht reagieren,
2. auf den Ozeanen ein Ausgleich der Luftmassentransporte durch Wassermassentransporte von Gebieten hohen nach Gebieten niedrigen Luftdrucks stattfindet.

Die Berechnungen ergaben eine Jahresperiode der Polbewegung, die von der aus astronomischen Beobachtungen abgeleiteten um Werte  $\leq 1 \cdot 10^{-2}''$  abweicht. 2/3 der Amplitude der freien Nutation können durch den Einfluß der Luftmassentransporte erklärt werden.

### Summary

The influence of the transport of air masses on polar motion was calculated on the basis of the air pressure values from 900 continental stations. It was assumed that

1. the continental surfaces do not react to pressure,
2. on the oceans the transport of air masses is compensated by transport of water masses from regions of high air pressure to low-pressure regions,

The calculations showed an annual period of polar motion which differs from that derived from astronomical observations by values  $\leq 1 \cdot 10^{-2}''$ . Two-thirds of the amplitude of the free nutation can be explained by the influence of the transport of air masses.

### Résumé

A partir des valeurs de pression atmosphérique enregistrées par 900 stations continentales, on a évalué l'influence des déplacements des masses d'air sur les mouvements du pôle. Ce faisant, on a admis que

1. les surfaces continentales ne réagissent pas aux pressions,
2. sur les océans, les mouvements des masses d'air sont équilibrés par des mouvements des masses d'eau dirigés des régions à haute pression atmosphérique vers celles à basse pression.

Les calculs ont donné une période annuelle des mouvements du pôle qui diffère de valeurs  $\leq 1 \cdot 10^{-2}''$  par rapport à celle déterminée à partir des observations astronomiques. Les 2/3 de l'amplitude de la nutation libre peuvent être attribués à l'influence des déplacements de masses d'air.

Резюме

На основании значений атмосферного давления, полученных на 900 материковых станциях, было вычислено влияние движения воздушных масс на колебание полюса. При этом исходили из предпосылки, что

1. поверхность материков не реагирует на давление,
2. над океанами происходит уравнивание движения воздушных масс перемещением водных масс из областей с высоким атмосферным давлением в области с низким давлением.

Вычисления показали годовой период движения полюса, который отклоняется от периода, выведенного из астрономических наблюдений на значение  $\approx 1 \cdot 10^{-2}''$ , 2/3 амплитуды свободной нутации могут объясняться движением воздушных масс.



## 1. Einleitung

Nach dem Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses bewirken Massentransporte an einem rotierenden Körper Änderungen des Rotationsvektors, die Richtungsänderungen der Rotationsachse gegenüber einem körperfesten Koordinatensystem verursachen können. Bei der Erde tritt diese Erscheinung als Polbewegung auf, die seit nunmehr fast einem Jahrhundert durch den Internationalen Breitendienst beobachtet wird.

Nach den Ergebnissen dieser Beobachtungen setzt sich die Polbewegung - neben einem säkularen Anteil - hauptsächlich aus zwei periodischen Anteilen zusammen, mit einer 1,2-jährigen und einer 1,0-jährigen Periode. Wie bereits von NEWCOMB nachgewiesen wurde, entspricht die von CHANDLER entdeckte 1,2-jährige Periode der freien Nutation, die infolge der Elastizität der Erde gegenüber der aus der Kreiseltheorie (für starre Körper) folgenden EULERSchen Periode von 0,8 Jahren verlängert ist.

Die Jahresperiode wird der Polbewegung durch Veränderungen am Erdkörper aufgezwungen, die mit gleicher Periode erfolgen. Die Ursache hierfür liegt in massengeometrischen Variationen am Erdkörper. Infolge der scheinbaren Bewegung der Sonne in der Ekliptik ändert sich (in Abhängigkeit von der geographischen Breite) die Länge der Sonneneinstrahlung während eines Tages im Laufe des Jahres. Die demzufolge variierende thermische Wirkung auf die Atmosphäre ruft periodische Luftmassentransporte hervor, die sich als Luftdruckvariationen bemerkbar machen.

In den folgenden Untersuchungen soll auf der Grundlage der Kreiseltheorie der Einfluß der Luftmassenvariationen auf die Polbewegung berechnet werden. Wir beschränken uns auf die Jahresperiode, weil nur von Perioden, die in der Nähe derjenigen der freien Nutation liegen, ein wesentlicher Einfluß auf die periodische Polbewegung zu erwarten ist.

## 2. Kreiseltheoretische Grundlagen

Im mitgedrehten Koordinatensystem eines rotierenden Kreisels, der nicht von äußeren Kräften beeinflusst wird, gilt die EULERSche Kreiselgleichung

$$(1) \quad \frac{d\mathfrak{H}}{dt} + (\omega \times \mathfrak{H}) = 0,$$

worin  $\mathfrak{H}$  der Drehimpuls und  $\omega$  der Vektor der Rotationsgeschwindigkeit sind.

Mit dem Trägheitstensor

$$(2) \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} A + a & -e & -f \\ -e & A + b & -g \\ -f & -g & C + c \end{pmatrix},$$

dessen Elemente

$$(2a) \quad A + a = \int_M (y^2 + z^2) dm,$$

$$(2b) \quad A + b = \int_M (x^2 + z^2) dm,$$

$$(2c) \quad C + c = \int_M (x^2 + y^2) dm,$$

$$(2d) \quad e = \int_M x y dm,$$

$$(2e) \quad f = \int_M x z dm,$$

$$(2f) \quad g = \int_M y z dm$$

sind, wird

$$(3) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{J} \cdot \omega.$$

In (2) sind die mit kleinen Buchstaben bezeichneten Elemente die Änderungen der Trägheits- bzw. Deviationsmomente infolge von Massenverlagerungen.  $A$  und  $C$  sind die äquatorialen und das polare Trägheitsmoment für eine rotationssymmetrische Erde. Es wird angenommen, daß vor den Massenbewegungsvorgängen die Rotationsachse mit der Hauptträgheitsachse zusammenfällt, so daß

$$e = f = g = 0$$

wird.

Neben einer Veränderung des Trägheitstensors bewirkt der Massentransport mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  einen Drehimpuls

$$(4) \quad \mathfrak{h} = m (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})$$

infolge des Impulses

$$(5) \quad \mathfrak{R} = m \cdot \mathfrak{v},$$

womit sich aus (1)

$$(6) \quad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} + \frac{d\mathfrak{h}}{dt} + (\omega \times (\mathfrak{s} + \mathfrak{h})) = 0$$

ergibt.

Mit dem Vektor

$$(7) \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

erhalten wir folgende Werte für die in (6) eingehenden Vektoren:

$$(8) \quad \mathfrak{s} = \begin{pmatrix} A \omega_x - f \omega_z \\ A \omega_y - g \omega_z \\ (C + c) \omega_z \end{pmatrix},$$

$$(9) \quad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \begin{pmatrix} A \frac{d\omega_x}{dt} - \omega_z \frac{df}{dt} \\ A \frac{d\omega_y}{dt} - \omega_z \frac{dg}{dt} \\ C \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_z \frac{dc}{dt} \end{pmatrix},$$

$$(10) \quad \mathfrak{h} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathfrak{h}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dh_x}{dt} \\ \frac{dh_y}{dt} \\ \frac{dh_z}{dt} \end{pmatrix}.$$

Ferner ergibt sich mit (7), (8) und (10)

$$(11) \quad \omega \times (\mathfrak{s} + \mathfrak{h}) = \begin{pmatrix} (C - A) \omega_y \omega_z + \omega_z^2 g - \omega_z h_y \\ - (C - A) \omega_x \omega_z - \omega_z^2 f + \omega_z h_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vorstehende Formeln gelten in einem Koordinatensystem, dessen z-Achse annähernd mit der Rotationsachse zusammenfällt und dessen x,y-Ebene etwa in der Äquatorebene liegt. Mit (7) - (11) erhalten wir aus (6):

$$(12) \quad \begin{cases} A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - A) \omega_y \omega_z - \omega_z \frac{df}{dt} + \omega_z^2 g + \frac{dh_x}{dt} - \omega_z h_y = 0, \\ A \frac{d\omega_y}{dt} - (C - A) \omega_x \omega_z - \omega_z \frac{dg}{dt} - \omega_z^2 f + \frac{dh_y}{dt} + \omega_z h_x = 0, \\ C \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_z \frac{dc}{dt} + \frac{dh_z}{dt} = 0. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen von (12) beschreiben die Polbewegung, während die letzte die Rotationsschwankung infolge von Massentransporten darstellt. Setzt man in der letzten Gleichung

$$(13) \quad \omega_z = \omega_0 + d\omega_z,$$

wobei  $\omega_0$  der über längere Zeit konstante Anteil der Rotationsgeschwindigkeit und  $d\omega_z$  der überlagerte variable (meist periodische) Anteil sind, so ergibt sich aus der letzten Gleichung von (12)

$$(14) \quad d\omega_z = -\omega_0 \frac{dc}{C} - \frac{1}{C} dh_z,$$

woraus folgt, daß der Einfluß der Rotationsschwankung in den Gleichungen der Polbewegung

nur kleine Größen 2. Ordnung erzeugt, die wir vernachlässigen können.

Damit legen wir der Untersuchung der Polbewegung folgende Gleichungen zugrunde:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_x}{dt} + \beta \omega_y - \frac{\omega_0}{A} \frac{df}{dt} + \frac{\omega_0^2}{A} g + \frac{1}{A} \frac{dh_x}{dt} - \frac{\omega_0}{A} h_y = 0, \\ \frac{d\omega_y}{dt} - \beta \omega_x - \frac{\omega_0}{A} \frac{dg}{dt} - \frac{\omega_0^2}{A} f + \frac{1}{A} \frac{dh_y}{dt} + \frac{\omega_0}{A} h_x = 0, \end{cases}$$

worin

$$(16) \quad \beta = \frac{C - A}{A} \omega_0$$

die Kreisfrequenz der freien Nutation ist.

Um die Differentialgleichungen (15) den tatsächlichen Gegebenheiten besser anzugleichen, führen wir in den folgenden Untersuchungen an Stelle der sich bei der Einführung der Trägheitsmomente der Erde ergebenden EULERSchen Periode die CHANDLER-Periode von 435 Tagen ein, womit

$$(17) \quad \beta = \frac{2\pi}{435}$$

wird. Nach KLEIN und SOMMERFELD [3] ist dies gerechtfertigt, da eine elastische Erde die gleiche Kreiselbewegung ausführt wie eine starre, deren Massengeometrie sich beim Verswinden der Zentrifugalkräfte einstellen würde.

### 2.1. Massengeometrischer und dynamischer Einfluß der Massenbewegung

Als massengeometrischen Einfluß bezeichnen wir die Veränderung des Trägheitstensors infolge der Massenverlagerungen, während wir den Impuls der Massenbewegung als dynamischen Einfluß bezeichnen. Wie aus (15) abzulesen ist, beeinflussen beide Anteile die Polbewegung. Um die beiden Einflüsse hinsichtlich ihrer Größenordnung vergleichen zu können, untersuchen wir die Bewegung einer Punktmasse am Erdkörper. Es wird angenommen, die Masse bewege sich um einen Punkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  mit einer Frequenz  $\alpha$ . Befindet sich die Masse in  $P_0$ , so sei der massengeometrische Normalzustand des rotierenden Körpers nicht gestört. Die Bewegung der Punktmasse wird durch

$$(18) \quad r = \begin{pmatrix} x_0 + a \sin \alpha t \\ y_0 + b \sin \alpha t \\ z_0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Nach (18) ergeben sich die in (15) eingehenden Deviationsmomente zu

$$(19) \quad \begin{cases} f = z_0 m (x - x_0) = z_0 m a \sin \alpha t, \\ g = z_0 m (y - y_0) = z_0 m b \sin \alpha t. \end{cases}$$

Die Ableitungen von (19) nach der Zeit werden

$$(20) \quad \frac{df}{dt} = z_0 m a \alpha \cos \alpha t, \quad \frac{dg}{dt} = z_0 m b \alpha \cos \alpha t.$$

Der Verschiebungsimpuls nach (5) ergibt nach (4) folgenden Drehimpuls:

$$(21) \quad h = \begin{pmatrix} -z_0 m b \alpha \cos \alpha t \\ z_0 m a \alpha \cos \alpha t \\ (x_0 b - y_0 a) m \alpha \cos \alpha t \end{pmatrix}.$$

Ferner wird

$$(22) \quad \frac{dh}{dt} = \begin{pmatrix} z_0 m b \alpha^2 \sin \alpha t \\ -z_0 m a \alpha^2 \sin \alpha t \\ -(x_0 b - y_0 a) m \alpha^2 \sin \alpha t \end{pmatrix}.$$

Setzen wir (19) bis (22) in (15) ein, so ergibt sich

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_x}{dt} + \beta \omega_y = -\frac{\omega_0}{A} z_0 m (-2 a \alpha \cos \alpha t + \omega_0 b \sin \alpha t + \frac{b \alpha^2}{\omega_0} \sin \alpha t), \\ \frac{d\omega_y}{dt} - \beta \omega_x = -\frac{\omega_0}{A} z_0 m (-2 b \alpha \cos \alpha t - \omega_0 a \sin \alpha t - \frac{a \alpha^2}{\omega_0} \sin \alpha t). \end{cases}$$

In (23) repräsentiert das zweite Glied der rechten Seite den massengeometrischen Einfluß, während die beiden übrigen Glieder den dynamischen Einfluß der Massenbewegung darstellen.

Wir wollen die Größenordnungen beider Einflüsse miteinander vergleichen. Da die Amplituden der Massenbewegung in allen Gliedern vorkommen, ist ein Größenvergleich nur über die Kreisfrequenz  $\alpha$  möglich. Setzen wir als Einheit den Sterntag voraus, so wird

$$\omega_0 = 2 \pi \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{2 \pi}{\lambda}.$$

$\lambda$  entspricht der Periodenlänge der Massenbewegung, die in jedem Fall wesentlich größer als ein Tag ist, bei uns  $\lambda = 366$  d. Demnach sind die dynamischen Anteile der Massenbewegung um die Faktoren

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{366} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{366^2}$$

kleiner als die massengeometrischen, woraus folgt, daß sie gegenüber den massengeometrischen Anteilen vernachlässigt werden können.

Man erhält aus (23) für die Beschreibung der Polbewegung folgende Differentialgleichungen:

$$(24) \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y = -\frac{E}{C-A} \omega_0, \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\omega_y}{dt} - \omega_x = \frac{f}{C-A} \omega_0.$$

Die Ausdrücke

$$(25) \quad X = -\frac{f}{C-A}, \quad Y = -\frac{E}{C-A}$$

sind die Komponenten der Erregerfunktion. Sie beschreiben die Wanderung des Trägheitspoles infolge der Massenverlagerungen (siehe z.B. [3]).

Mit (25) können wir (24) in der Form

$$(26) \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y = Y \omega_0, \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\omega_y}{dt} - \omega_x = -X \omega_0$$

schreiben.  $Y$  und  $X$ , wie auch  $f$  und  $g$ , sind im allgemeinen zeitlich variabel.

## 2.2. Allgemeine Untersuchungen zu periodischen Erregerfunktionen

Es wird angenommen, die Komponenten der Erregerfunktion in (26) würden durch folgende Funktionen dargestellt:

$$(27) \quad Y(t) = K_1 \sin \alpha t + K_2 \cos \alpha t, \quad X(t) = L_1 \sin \alpha t + L_2 \cos \alpha t;$$

dann ergeben sich aus dem Lösungssatz

$$(28) \quad \begin{cases} \omega_y = k_1 \sin \alpha t + k_2 \cos \alpha t + k_\beta \sin (\beta t + \gamma_0), \\ \omega_x = l_1 \sin \alpha t + l_2 \cos \alpha t + k_\beta \cos (\beta t + \gamma_0) \end{cases}$$

folgende Beziehungen zwischen den Amplitudenwerten der Erregerfunktion und den Komponenten  $\omega_y$ ,  $\omega_x$  des Rotationsvektors:

$$(29) \quad \begin{cases} k_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha^2/\beta^2 - 1} \left( \frac{\alpha}{\beta} L_2 + K_1 \right), & k_2 = \frac{\omega_0}{\alpha^2/\beta^2 - 1} \left( \frac{\alpha}{\beta} L_1 - K_2 \right), \\ l_1 = \frac{\omega_0}{\alpha^2/\beta^2 - 1} \left( \frac{\alpha}{\beta} K_2 - L_1 \right), & l_2 = -\frac{\omega_0}{\alpha^2/\beta^2 - 1} \left( \frac{\alpha}{\beta} K_1 + L_2 \right). \end{cases}$$

Die Amplituden der Lösungen der homogenen Differentialgleichungen - die der Amplitude der freien Nutation entsprechen - sind nur aus Randbedingungen zu bestimmen.

Nach (29) wird der Einfluß einer periodischen Massenbewegung auf die Polbewegung um so größer, je näher die Periode der Massenbewegung derjenigen der freien Nutation liegt.

Bestimmend für die Größe des Einflusses der periodischen Massenbewegung ist der Faktor  $1/(\alpha^2/\beta^2 - 1)$ . Danach muß die Amplitude einer Erregerfunktion mit halbjähriger Periode etwa zehnfach größer als die Amplitude einer Erregerfunktion mit Jahresperiode sein, um einen gleich großen Einfluß auf die Polbewegung zu erzeugen. Da ohnehin bei dem in dieser Arbeit untersuchten Phänomen nur mit Halbjahresperioden zu rechnen ist, deren Amplituden wesentlich kleiner als die der Jahresperioden sind, brauchen wir diese nicht näher zu betrachten. Im übrigen ist es bis jetzt nicht gelungen, Halbjahresperioden mit signifikanten Amplituden aus dem Beobachtungsmaterial des Internationalen Breitendienstes abzuleiten.

## 2.3. Die Deviationsmomente von Massenbelegungen auf der Erdoberfläche

Wie die Untersuchungen in Abschnitt 2.1. zeigten, werden die Polbewegungen hauptsächlich durch zeitlich variable Deviationsmomente hervorgerufen. Die Luftmassentransporte in der Atmosphäre lassen sich als zeitlich und örtlich variable Flächenbelegungen darstellen. Um die durch sie hervorgerufenen Deviationsmomente zu berechnen, ist es zweckmäßig, die Formeln (2e) und (2f) als Funktionen der geographischen Koordinaten ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) darzustellen. Wir berücksichtigen bei der Ableitung der Formeln die Abplattung der Erde. Ist  $r$  der geozentrische Radius, so wird

$$(30) \quad x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi$$

und

$$(31) \quad r \approx a (1 - e^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi),$$

wenn  $a$  die große Halbachse der Meridianellipse und  $e$  deren numerische Exzentrizität

sind. Den Unterschied zwischen der geozentrischen und der geographischen Breite vernachlässigen wir bei der Ableitung. Er beträgt maximal zwar etwa 10', jedoch ist er für unsere globale Betrachtung ohne Bedeutung. Die zeitliche Variation der Massen wird durch die entsprechende Variation der Dichte dargestellt.

Mit diesen Voraussetzungen erhalten wir folgende Formeln für die Deviationsmomente:

$$(32) \quad \begin{cases} \xi = \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{a+h} D(\varphi, \lambda, r, t) \cos \lambda \, d\varphi \, d\lambda \, dr, \\ \zeta = \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{a+h} D(\varphi, \lambda, r, t) \sin \lambda \, d\varphi \, d\lambda \, dr \end{cases}$$

mit

$$(33) \quad D(\varphi, \lambda, r, t) = r_a^4 (\rho(\varphi, \lambda, r, t) - \rho_m(\varphi, \lambda, r)) ((1 - \varepsilon) \cos^2 \varphi + \varepsilon \cos^4 \varphi) \sin \varphi,$$

$$(34) \quad \varepsilon = 2 e^2 (1 - e^2) = 0,01325957.$$

$r_a = a + h$  ist die große Halbachse einer Ellipse in der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel.

In (33) ist  $\rho_m(\varphi, \lambda, r)$  der zeitliche Mittelwert der Dichte. Sein Anteil in den Integralen (32) verschwindet, wenn die z-Achse des Koordinatensystems, in dem wir die Bewegung des Rotationsvektors beschreiben, mit der mittleren Lage des Trägheitspoles zusammenfällt. Wir können demnach in (33)

$$\Delta\rho(\varphi, \lambda, r, t) = \rho(\varphi, \lambda, r, t) - \rho_m(\varphi, \lambda, r)$$

setzen.

Die nach (32) zu berechnenden Deviationsmomente gelten unter der - nicht zutreffenden - Voraussetzung, daß die Erdoberfläche starr ist. Tatsächlich wird sie auf die unterschiedlichen Massenbelegungen reagieren, wodurch die wirklichen Deviationsmomente kleiner als die nach (32) berechneten werden. Die Deformation der Erdoberfläche wird von ihrer Beschaffenheit abhängen; vor allem ist es von Bedeutung, ob es sich in dem betreffenden Gebiet um Meeres- oder Landfläche handelt. Wir werden auf dieses Problem in den folgenden Kapiteln noch eingehen.

### 3. Das physikalische Modell für die Berechnung der durch atmosphärische Einflüsse veränderten Massengeometrie

Wollen wir die Formeln (32) und (33) für die Deviationsmomente einer zeitlich variablen Flächenbelegung auf die atmosphärischen Luftmassenbewegungen anwenden, so müssen wir in den Formeln einen Ausdruck für die zeitlich und örtlich variable Dichte einführen. Für ein Gas im Schwerfeld der Erde gilt nach der MAXWELL-BOLTZMANN-Statistik bekanntlich folgende Dichteverteilung in Abhängigkeit von der Höhe:

$$(35) \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{RT_m}(r-r_0)}$$

oder auch

$$(36) \quad \Delta\rho = \Delta\rho_0 e^{-\frac{g}{RT_m}(r-r_0)} .$$

In vorstehenden Formeln ist  $g$  die Schwerebeschleunigung,  $R = 286,8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ grad}^{-1}$  die Gaskonstante für Luft und  $T_m$  die mittlere Temperatur einer Luftschicht in  $^{\circ}\text{Kelvin}$ .  $\rho_0$  bzw.  $\Delta\rho_0$  sind die Luftdichten und Luftdichtevariationen in Meereshöhe. Nach Formel (33) ist die Dichte das einzige von der Höhe abhängige Glied in dem zu lösenden Integral. Wir wollen uns daher zunächst mit der Integration über  $r$  befassen.

#### 3.1. Die Deviationsmomente der Luftmassenbewegung

##### 3.1.1. Die Schwerpunkthöhe einer Luftsäule

Für die Berechnung der im folgenden benötigten Schwerpunkthöhe legen wir die in [5] (S. 579) angegebenen Werte für die Normalatmosphäre zugrunde. Nehmen wir näherungsweise an, der in (35) auftretende Faktor

$$c = \frac{g}{RT_m}$$

sei für die gesamte Luftsäule konstant, so ergibt sich nach

$$h_m = \frac{1}{m} \int_{h=0}^{\infty} h \, dm$$

mit  $\rho = \rho_0 e^{-ch}$

und  $m = \rho_0 \int_{h=0}^{\infty} e^{-ch} \, dh = \frac{\rho_0}{c}$

$$(37) \quad h_m = \frac{1}{c} .$$

Mit den mittleren Werten für die Normalatmosphäre

$$T_m = 233^{\circ}\text{K} , \quad \rho_0 = 1,255 \text{ kg m}^{-3} , \quad g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

erhält man nach (37)

$$h_m = 6800 \text{ m} .$$



Berücksichtigt man die Variation von  $g$  und  $T_m$  mit der Höhe, so erhält man durch numerische Integration

$$h_m = 7000 \text{ m} .$$

Wie wir in den weiteren Betrachtungen sehen werden, ist die Differenz zwischen den auf zwei Wegen berechneten  $h_m$  für die Aufstellung der Formeln zur Berechnung der Deviationsmomente bedeutungslos. Wir können stets (37) als Wert für die Schwerpunkthöhe annehmen.

### 3.1.2. Integration des Deviationsmomentes über $r$

Bezeichnet man in (32) die von  $\varphi$  und  $\lambda$  abhängigen Glieder mit  $E(\varphi, \lambda)$ , so können wir die Integrale in der allgemeinen Form

$$(38) \quad E(\varphi, \lambda) \int_{r=a}^{\infty} \Delta \rho r^4 dr = E(\varphi, \lambda) \int_{r=a}^{\infty} \Delta \rho_0 r^4 e^{-c(r-a)} dr$$

schreiben, deren Lösung

$$(39) \quad E(\varphi, \lambda) \int_{r=a}^{\infty} \Delta \rho r^4 dr = E(\varphi, \lambda) \left\{ \frac{a^4}{c} + \frac{4 a^3}{c^2} + \frac{12 a^2}{c^3} + \frac{24 a}{c^4} + \frac{24}{c^5} \right\} \Delta \rho_0$$

ergibt.

Nach der Beziehung

$$\Delta \rho_0 = g \Delta \rho_0 \int_0^{\infty} e^{-ch} dh$$

kann man in (39) die Dichteveriation  $\Delta \rho_0$  durch die Druckvariation

$$(40) \quad \Delta \rho_0 = c \frac{\Delta p_0}{g} = \frac{\Delta p_0}{g h_m}$$

ersetzen. Es wird

$$(41) \quad E(\varphi, \lambda) \int_{r=a}^{\infty} \Delta \rho r^4 dr = E(\varphi, \lambda) a^4 \left\{ 1 + \frac{4 h_m}{a} + \frac{12 h_m^2}{a^2} + \frac{24 h_m^3}{a^3} + \frac{24 h_m^4}{a^4} \right\} \frac{\Delta p_0}{g} .$$

Beachtet man, daß  $h_m/a \approx 1/1000$  ist, so kann man für (39) mit genügender Genauigkeit

$$(42) \quad E(\varphi, \lambda) \int_{r=a}^{\infty} \Delta \rho r^4 dr = E(\varphi, \lambda) (a + h_m)^4 \frac{\Delta p_0}{g}$$

schreiben.

### 3.1.3. Grundformeln zur numerischen Auswertung

Da wir  $\Delta p$  nicht als analytische Funktion von  $\varphi$  und  $\lambda$  darstellen können, ist es nicht möglich, die Integration von (32) in geschlossener Form durchzuführen. Wir werden daher die Erdoberfläche in Kompartimente einteilen, in denen wir  $\Delta p$  als lageinvariant annehmen können.

Begrenzen wir die Kompartimente durch Parallelkreise mit den Breiten  $\varphi_1$  und  $\varphi_{1+1}$

und durch Meridiane mit den Längen  $\lambda_j$  und  $\lambda_{j+1}$ , so erhält man mit den Formeln (32), (33) und (42) nach (25) die Elemente der Erregerfunktionen:

$$(43) \quad \begin{aligned} \Delta X(t)_{i,j} &= D_{i,j} (\sin \lambda_{j+1} - \sin \lambda_j) , \\ \Delta Y(t)_{i,j} &= -D_{i,j} (\cos \lambda_{j+1} - \cos \lambda_j) \end{aligned}$$

mit

$$(44) \quad D_{i,j} = \frac{(a + h_m)^4}{G - A} \frac{\Delta p(t)}{\xi_{\varphi, 7000}} \left\{ \frac{1 - \varepsilon}{3} (\cos^3 \varphi_{i+1} - \cos^3 \varphi_i) + \frac{\varepsilon}{5} (\cos^5 \varphi_{i+1} - \cos^5 \varphi_i) \right\} .$$

Aus (43) und (44) ergibt sich die globale Erregerfunktion zu

$$(45) \quad \begin{cases} X(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta X(t)_{i,j} , \\ Y(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta Y(t)_{i,j} . \end{cases}$$

In vorstehende Formeln werden folgende Konstanten eingeführt:

$$\begin{aligned} a + h_m &= 6,385\,388 \cdot 10^8 \text{ cm} & (h_m = 7000 \cdot 10^2 \text{ cm}) , \\ G - A &= 2,654 \cdot 10^{42} \text{ g cm}^2 . \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir, daß der Luftdruck in Millibar gegeben ist und

$$1 \text{ mbar} = 10^3 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

ist, so ergibt sich mit vorstehenden Werten

$$\frac{(a + h_m)^4}{G - A} \cdot 10^3 = 0,626\,394\,87 \cdot 10^{-4} ,$$

und nach (34) war

$$\varepsilon = 0,013\,259\,57 .$$

Der in (44) eingehende Wert der Schwerebeschleunigung wird nach der Normalschwereformel

$$(46) \quad \xi_{\varphi, 7000} = 978,030 (1 + 0,005\,302 \sin^2 \varphi_m + 0,000\,0007 \sin^2 2 \varphi_m) - 2,156 \text{ [cm s}^{-2}\text{]}$$

berechnet.

### 3.2. Der Einfluß der Reaktion der Wassermassen des Ozeans auf Luftdruckänderungen

Die nach (44) und (45) berechneten Erregerfunktionen gelten für eine starre Erde und stellen daher nur annähernd die tatsächlichen Verhältnisse dar. Infolge der Nachgiebigkeit der Erdoberfläche werden die resultierenden realen Erregerfunktionen kleiner als die nach den genannten Formeln berechneten sein. Besonders von Einfluß wird die Nachgiebigkeit der Wasseroberfläche gegenüber Luftdruckänderungen sein. Mit der Reaktion der Wasseroberfläche der Ozeane haben sich VERONIS und STOMMEL [15, 16] auseinandergesetzt. Auch in [9] befindet sich eine Darstellung dieses Problems. Wir wollen die Zusammenhänge im folgenden kurz darlegen.

Verändert sich über der Wasseroberfläche der Luftdruck um  $\Delta p$ , so herrscht in einem

Punkt (P) unter der ungestörten Wasseroberfläche im Abstand  $z_0$  der Druck

$$(47) \quad \rho_w g z_0 + \Delta p = \rho_w g (z_0 + z),$$

wenn wir uns die Veränderung des Luftdrucks durch eine Wassersäule der Höhe  $z$  dargestellt denken (Abb. 1).

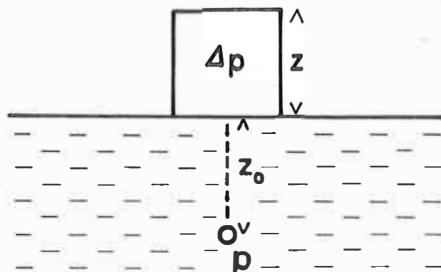


Abb. 1. Zum Einfluß des Luftdrucks auf die Wasseroberfläche

Ändert die Wasseroberfläche unter dem Einfluß des Luftdrucks ihre Höhe um  $z_M$ , so geht (47) in die Formel

$$(48) \quad \rho_w g z_0 + \Delta p = \rho_w g (z_0 + z + z_M)$$

über, oder es ergibt sich

$$(49) \quad \Delta p = \rho_w g (z + z_M) = \rho_w g z'.$$

Wird in vorstehender Formel

$$z' = z, \quad \text{d.h.} \quad z_M = 0,$$

so reagiert die Wasseroberfläche wie eine starre Oberfläche, und für

$$z' = 0, \quad \text{d.h.} \quad z_M = -z,$$

gibt die Wasseroberfläche völlig dem Luftdruck nach. Zwischen diesen Extremfällen existieren noch Möglichkeiten der Reaktion der Wasseroberfläche, die wir durch

$$z_M = -k z, \quad k < 1,$$

darstellen können. Wie die Wasseroberfläche tatsächlich reagiert, wird hauptsächlich von der Zeitfunktion der Luftdruckänderung abhängen. Um die Größenordnung der Reaktion der Wasseroberfläche abschätzen zu können, gehen wir von der Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit

$$(50) \quad \frac{dv}{dt} + (v \nabla) v = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho_w} \text{grad } p$$

aus. In (50) ist  $\mathfrak{F}$  die Kraft pro Masseneinheit,  $v$  die Geschwindigkeit und  $p$  der Druck.

Im Hinblick auf die zeitlich langsam verlaufenden Druckvariationen, die wir untersuchen wollen, vernachlässigen wir in (50) die quadratischen Glieder und erhalten

$$(51) \quad \frac{db}{dt} = \zeta - \frac{1}{\rho_w} \text{grad } p .$$

In (51) setzt sich  $\zeta$  aus der CORIOLIS-Beschleunigung  $\omega = 2 (\omega \times v)$  und der Schwerebeschleunigung  $g$  zusammen.

Für die folgenden Untersuchungen legen wir ein Koordinatensystem fest, dessen  $x, y$ -Ebene im Ursprung die Erdoberfläche berührt. Die  $x$ -Achse zeige nach Norden, die  $y$ -Achse nach Westen und die  $z$ -Achse zum Zenit. In diesem Koordinatensystem hat die Rotationsgeschwindigkeit der Erde folgende Form:

$$(52) \quad \omega = \begin{pmatrix} -\omega \cos \varphi \\ 0 \\ -\omega \sin \varphi \end{pmatrix} .$$

Mit der Geschwindigkeit

$$(53) \quad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

ergibt sich folgende CORIOLIS-Beschleunigung:

$$(54) \quad 2 (\omega \times v) = 2 \begin{pmatrix} \omega \sin \varphi v_y \\ \omega \cos \varphi v_z + \omega \sin \varphi v_x \\ -\omega \cos \varphi v_y \end{pmatrix} .$$

Ferner ist in unserem Koordinatensystem

$$(55) \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} .$$

Wenn wir in (51) noch (49) einführen, erhalten wir mit (53), (54) und (55) folgende Bewegungsgleichungen:

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} - f v_y = -g \frac{\partial z'}{\partial x} , \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} - f v_x = -g \frac{\partial z'}{\partial y} , \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = -2 \omega \cos \varphi v_y . \end{cases}$$

Hierin ist  $f = 2 \omega \sin \varphi$ .

Wegen der Inkompressibilität des Wassers, die wir im Hinblick auf die relativ kleinen und langsam verlaufenden Druckänderungen annehmen können, gilt

$$(57) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 .$$

Mit

$$v_z = \frac{\partial z_M}{\partial t}$$

folgt aus (57), wenn wir annehmen, daß die Horizontalgradienten von  $v$  mit der Höhe nicht variabel sind,

$$(58) \quad \frac{\partial z_M}{\partial t} = -h \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)$$

( $h$  = Höhe der Wassermassen über Grund).

Aus den ersten beiden Gleichungen von (56) ergibt sich unter Berücksichtigung von (58)

$$(59) \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial t} + \frac{f}{h} \frac{\partial z_M}{\partial t} + \beta v_x = 0 \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial x} .$$

In (59) sollen die Geschwindigkeitskomponenten durch die Ableitungen von  $z'$  ausgedrückt werden. Hierzu leiten wir aus den ersten beiden Gleichungen von (56) die Ausdrücke

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}$$

ab und erhalten nach einigen Umformungen

$$(60) \quad \frac{g h}{f^2} \left( \frac{\partial^3 z'}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 z'}{\partial y^2 \partial t} \right) + \beta \frac{g h}{f^2} \frac{\partial z'}{\partial y} - \frac{\partial z'}{\partial t} = - \frac{\partial z}{\partial t} .$$

Die Luftdruckänderungen haben eine von der geographischen Breite abhängige Amplitude, die annähernd durch eine periodische Funktion dargestellt werden kann, so daß für diese Betrachtungen für die Luftdruckvariationen die Funktion

$$(61) \quad z = A_z \cos l_x x \cos (l_y y + \alpha t)$$

angesetzt werden kann. Mit dem Lösungsansatz

$$(62) \quad z' = a_z \cos l_x x \cos (l_y y + \alpha t)$$

erhalten wir aus (60)

$$(63) \quad a_z = \frac{A_z}{1 + \frac{g h}{f^2} (l_x^2 + l_y^2) - \frac{\beta}{\alpha} \frac{g h}{f^2} l_y} .$$

Setzen wir in vorstehende Formel die Werte

$$\begin{aligned} g &= 981 \text{ cm s}^{-1} , \\ h &= 5 \cdot 10^5 \text{ cm (mittlere Tiefe des Ozeans)}, \\ f &= 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \text{ (für } \varphi = 45^\circ), \\ \beta &= \partial f / \partial x = \omega / R \cos \varphi = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1} , \\ \alpha &= 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

ein, so erhalten wir

$$(64) \quad a_z = \frac{A_z}{1 + 20 \cdot 10^{16} (l_x^2 + l_y^2) - 8 \cdot 10^{10} l_y} .$$

Ein Überblick über die geographische Verteilung der Luftdruckamplituden zeigt, daß die Minima und Maxima etwa  $60^\circ$  Abstand in nord-südlicher Richtung haben, woraus sich  $l_x \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$  ergibt. Für  $l_y$  müssen wir den ungünstigsten Fall  $l_y = 0$  annehmen, da die Luftdruckvariation praktisch keine vom Ort abhängige Phasenverschiebung besitzt. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir aus (64)

$$a_z \approx \frac{A_z}{6} \quad \text{oder} \quad z_M = - \frac{5}{6} z ,$$

d.h., 5/6 der Luftmassentransporte auf dem Ozean werden durch entsprechende Wassermassentransporte ausgeglichen.

Auf Grund der vorstehenden Abschätzung wird in den folgenden Berechnungen angenommen,

die Luftmassentransporte über den Meeren seien durch entsprechende Wassermassentransporte kompensiert. Selbst wenn diese Annahme mit gewissen Fehlern behaftet sein sollte, werden die dadurch entstehenden Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Erregerfunktionen vergleichsweise gering sein, da die Amplituden der Luftdruckvariationen über dem Meer wesentlich kleiner als über dem Festland sind. (Die Amplitude der Jahresperiode des Luftdrucks auf dem Meer beträgt maximal  $\approx 5$  mbar und auf dem Festland  $\approx 15$  mbar.)

### 3.2.1. Luftdruckschwankungen und Massenverlagerungen über dem Meer

Wenn wir die Wirkung einer Luftdruckvariation über einem Flächenteil ( $s$ ) auf die Restfläche des Meeres untersuchen wollen, müssen wir berücksichtigen, daß nicht die gesamte Erdoberfläche mit Wasser bedeckt ist. Da die Gesamtmasse der Luft erhalten bleiben muß, bewirkt die Vergrößerung der Luftmasse über  $s$  ein Massendefizit über der gesamten übrigen Oberfläche, das über den Festlandsflächen durch Wassermassentransporte nicht kompensiert wird. Daher wird über der Meeresoberfläche ein Kompensationsrest verbleiben, der bei den Berechnungen der Erregerfunktionen berücksichtigt werden muß.

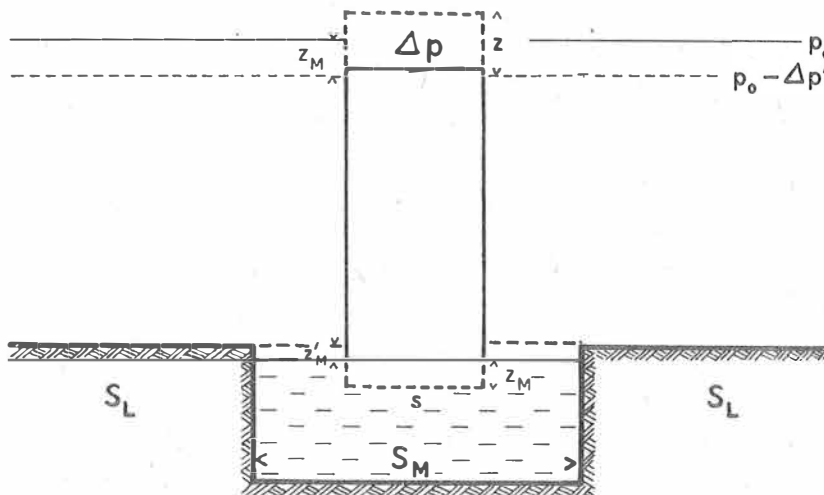


Abb. 2. Schematische Darstellung der Wirkung einer Luftdruckerhöhung über einem Meeresteil

In Abb. 2 sind die Verhältnisse schematisch dargestellt. Erhöht sich über  $s$  der Druck um  $\Delta p$  - hier dargestellt als eine Erhöhung der Luftsäule um  $z$  -, so vermindert sich der Luftdruck über der Restfläche  $S_M + S_L - s$  um  $\Delta p'$ . Die Luftsäule sinkt um  $z_M$  in das Meer ein, wodurch über der restlichen Meeresfläche  $S_M - s$  der Wasserspiegel steigt. Nach (40) besteht zwischen Dichte- und Druckvariation die Beziehung

$$\Delta p = \Delta \rho_0 g h_m ,$$

die sich nicht ändert, wenn wir die Dichteveriation durch eine äquivalente Änderung von

$h_m$  ersetzen:

$$(65) \quad \Delta p = \rho_L g z .$$

Weiterhin ist

$$(66) \quad \Delta p = \rho_w g z_M ,$$

woraus

$$(67) \quad z_M = \frac{\rho_L}{\rho_w} z$$

folgt. Die durch den Druck verdrängte Wassermasse ist

$$\Delta m_w = \rho_w s z_m .$$

Diese verteilt sich auf die restliche Meeresfläche und bewirkt dort eine Erhöhung des Wasserspiegels um

$$(68) \quad z_M^i = \frac{s}{S_M - s} z_M .$$

Nach (66) wird hierdurch über  $S_M - s$  eine Druckerhöhung um

$$(69) \quad \Delta p_M = \frac{s}{S_M - s} \Delta p$$

hervorgerufen. In der Atmosphäre erfolgt durch den Massenzufluß zur Luftsäule über  $s$  eine Veränderung des Luftdrucks um

$$(70) \quad \Delta p' = - \frac{s}{S_M + S_L - s} \Delta p .$$

Die Summe von (69) und (70) ergibt den Kompensationsrest über der Meeresoberfläche

$$(71) \quad dp_{OM} = \Delta p' + \Delta p_M = s \frac{S_L}{(S_M - s)(S_M + S_L - s)} \Delta p .$$

Für  $S_L = 0$  folgt aus (71)  $dp_{OM} = 0$ , d.h., wenn die Erdoberfläche mit Wasser bedeckt wäre, läge vollkommener Druckausgleich vor.

(71) ist der Kompensationsrest, den wir infolge der Druckvariation über dem Flächenelement  $s$  zurückbehalten. Der **gesamte Kompensationsrest über der Meeresoberfläche** ergibt sich als Summe der Kompensationsreste, die aus den Luftdruckvariationen über sämtlichen Flächenelementen  $s$  resultieren. Wenn wir gleich große Flächenelemente  $s$  annehmen, wird der gesamte Kompensationsrest

$$(72) \quad \Delta p_M = s \frac{S_L}{(S_M - s)(S_M + S_L - s)} \sum_M \Delta p .$$

Der durch (72) dargestellte Kompensationsrest stellt die Druckvariation dar, die über den Meeresflächen bei der Berechnung der Deviationsmomente oder der Erregerfunktionen berücksichtigt werden muß, vorausgesetzt, durch die Wechselwirkung zwischen Luftmassen- und Wassermassentransporten hat sich die Massengeometrie gegenüber der reinen Luftmassenwechselwirkung nicht verändert. Wie man aus den vorstehenden Betrachtungen im Vergleich mit den in Abschnitt 3.1. abgeleiteten Formeln für die Deviationsmomente erkennt, wurde vorausgesetzt, daß der Schwerpunkt der Luftmasse erhalten bleibt. Durch die zur Ableitung von (72) vorausgesetzte Wechselwirkung zwischen Luft- und Wassermassen kommt es jedoch zu einer Verlagerung des Schwerpunktes. Zur Berechnung dieses Einflusses gehen wir von der Formel (38) aus. Diese geht in folgende Form über, wenn wir die Verhältnisse der Abb. 2 zugrunde legen:

$$E(\varphi, \lambda) \left\{ \int_{r=a-z_M}^{\infty} \Delta \rho r^4 dr - a^4 \rho_w z_M \right\} = E(\varphi, \lambda) \left\{ \int_{r=a-z_M}^{\infty} \Delta \rho_0 r^4 e^{-c(r-a)} dr - a^4 \rho_w z_M \right\}.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Formeln (65) und (67)

$$E(\varphi, \lambda) \left\{ \int_{r=a-z_M}^{\infty} \Delta \rho r^4 dr - a^4 \rho_w z_M \right\} = E(\varphi, \lambda) \left\{ (a - z_M + h_m)^4 - a^4 \right\} \frac{\Delta \rho_0}{g}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß  $z_M$  gegenüber  $h_m$  und  $a$  vernachlässigbar klein ist, und die höheren Glieder von  $h_m/a$  weglassen, erhalten wir nach (44)

$$(73) \quad D_{1,j} = \frac{4 h_m a^3}{g_{\varphi, 7000}} \frac{\Delta p(t)}{g_{\varphi, 7000}} \left\{ \frac{1}{3} (\cos^3 \varphi_{i+1} - \cos^3 \varphi_i) + \frac{2}{5} (\cos^5 \varphi_{i+1} - \cos^5 \varphi_i) \right\}.$$

Die Veränderung der Massengeometrie liefert demnach einen Beitrag zur Erregerfunktion, der einer Druckänderung von

$$\Delta p \approx \frac{4 h_m}{a} \Delta p(t)$$

über der als starr angenommenen Wasseroberfläche entspricht. Da  $4 h_m/a \approx 5 \cdot 10^{-3}$  ist, kann die über den Meeresoberflächen erfolgende Veränderung der Massengeometrie keinen nachweisbaren Einfluß auf die Polbewegung ausüben.

### 3.2.2. Die Ermittlung des Kompensationsrestes $\Delta p_M$

Nach (72) benötigen wir für die Ermittlung des Kompensationsrestes die Luftdruckvariationen über den Ozeanen. Die Verteilung der meteorologischen Schiffsstationen auf den Ozeanen ist jedoch so dünn, daß wir nicht erwarten können, auf Grund ihrer Luftdruckregistrierungen einen zuverlässigen Wert von  $\Delta p_M$  zu erhalten. Das Gesetz von der Erhaltung der Masse ermöglicht es, den Kompensationsrest aus den Massenvariationen über den Festlandflächen zu berechnen.

Ist  $\Delta m$  die Luftmassenvariation über einem Flächenelement der Erdoberfläche, so muß nach vorgenanntem Gesetz die Beziehung

$$(74) \quad \Sigma \Delta m = 0$$

gelten. Trennen wir die Summation in (74) nach Variationen über den Land- und Meeresflächen, so folgt

$$\Sigma_L \Delta m + \Delta m_M = 0,$$

woraus sich

$$(75) \quad \Delta m_M = - \Sigma_L \Delta m$$

ergibt.

Legen wir das in Kap. 3 definierte physikalische Modell zugrunde, so folgt wegen

$$\Delta \rho(h) = - \frac{1}{g} \frac{d\Delta p}{dh}$$

nach

$$\Delta m = s \int_{h=0}^{\infty} \Delta \rho(h) dh$$



für die Massenvariation über dem Flächenelement  $s$

$$(76) \quad \Delta m_{1,j} = s_{1,j} \frac{\Delta p_{0_{1,j}}}{g} .$$

Für das von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianen begrenzte Flächenelement ergibt sich

$$s = R^2 (\lambda_{j+1} - \lambda_j) (\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i)$$

oder mit

$$\Delta \varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i , \quad \varphi_m = \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} + \varphi_i)$$

$$(77) \quad s = 2 R^2 (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \cos \varphi_m \sin \frac{\Delta \varphi}{2} .$$

Nehmen wir für alle Elemente den näherungsweise gleichen Krümmungsradius - den Radius der dem Ellipsoid flächengleichen Kugel - an, so ergibt sich nach (76)

$$(78) \quad \Delta m_{1,j} = s_0 \frac{\Delta p_{0_{1,j}}}{\xi_{1,j}} \cos \varphi_{m_{1,j}}$$

mit

$$(79) \quad s_0 = 2 R^2 (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \sin \frac{\Delta \varphi}{2} .$$

Damit erhalten wir nach (75) die Massenvariation über dem Meer

$$(80) \quad \Delta m_M = -s_0 \sum_L \frac{\Delta p_{0_{1,j}}}{\xi_{1,j}} \cos \varphi_{m_{1,j}} ,$$

woraus sich nach

$$\Delta p_M = \frac{\Delta m_M}{S_M} g$$

folgender Kompensationsrest ergibt:

$$(81) \quad \Delta p_M = -\frac{s_0}{S_M} \xi_{45} \sum_L \frac{\Delta p_{0_{1,j}}}{\xi_{1,j}} \cos \varphi_{m_{1,j}} .$$

Bei der Ableitung vorstehender Formel wurde vernachlässigt, daß der Krümmungsradius und die Schwerebeschleunigung von der geographischen Breite abhängen. Der hierdurch entstehende Fehler kann maximal einige 0,1 % von  $\Delta p_M$  betragen und ist für unsere Berechnung nicht von Bedeutung. (81) führt man in die Formeln (43) und (44) ein und kann durch Summation über die gesamte Meeresoberfläche den Beitrag des Kompensationsrestes zur Erregerfunktion berechnen. Diese Operation läßt sich vereinfachen, wenn man berücksichtigt, daß bei konstanter Flächenbelegung die Deviationsmomente verschwinden müssen.

Der Anteil einer konstanten Flächenbelegung über dem Ozean an den Deviationsmomenten muß dem Anteil der Landflächen mit negativem Vorzeichen entsprechen. Man reduziert daher die auf den Festlandsflächen erhaltenen Druckwerte um den Kompensationsrest und berechnet die Erregerfunktion durch Summation der für die Oberflächen der Kontinente erhaltenen Werte.

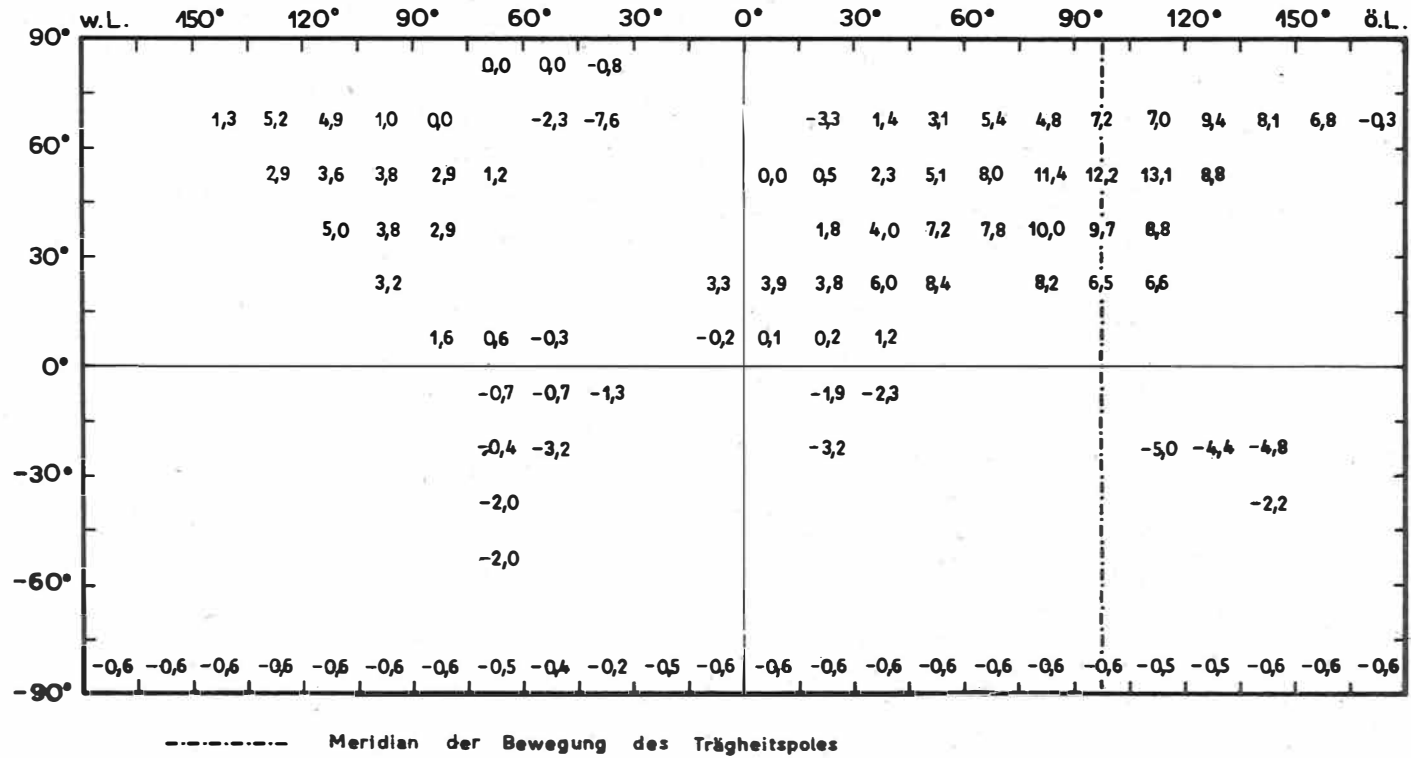


Abb. 3. Amplituden der Luftdruckvariationen mit Jahresperiode

### 3.3. Eine Analyse des Datenmaterials

Zur Berechnung der Erregerfunktionen als Folge der Luftmassentransporte dienten die in [19] angegebenen Monatsmittel des Luftdrucks. Diese Daten wurden aus den Monatsmitteln von 30 Jahren (1931 - 1960) abgeleitet. Die angegebenen Druckwerte beziehen sich für sämtliche Stationen auf das Meeresniveau. In die Rechnung wurden Daten von 900 meteorologischen Kontinentalstationen eingeführt, was etwa einer Netzdichte von einer Station pro  $5^{\circ} \times 5^{\circ}$ -Kompartiment entspricht.

In Abb. 3 sind die Amplituden der Luftdruckvariation mit Jahresperiode in komprimierter Form dargestellt. Wir sehen, daß die Extremwerte der Luftdruckschwankungen auf der Nordhalbkugel über Ostasien - speziell Sibirien - und auf der Südhalbkugel - wenn auch mit wesentlich geringerer Amplitude - über Australien gemessen wurden.

Über Druckschwankungen in der Antarktis lagen nur die Angaben der argentinischen Stationen vor, die eigentlich noch als Meeresstationen zu bezeichnen sind. Für die Berechnung der Deviationsmomente sind Druckschwankungen über der Antarktis wegen der Polnähe des Gebietes nicht von Bedeutung.

#### 3.3.1. Die Anfangsphase der Luftdruckvariationen

Nach den Ergebnissen meteorologischer Beobachtungen liegen die Extremwerte der jahreszeitlichen Luftdruckschwankungen in den Monaten Januar und Juli, und zwar unabhängig von der geographischen Lage. Dies erkennt man auch aus den in Abb. 4 dargestellten Luftdruckschwankungen in drei Stationen verschiedener geographischer Lage, die [19] entnommen sind. Nach dieser Darstellung ist nur die Amplitude von der geographischen Lage abhängig, während die Anfangsphase erhalten bleibt. In Äquatornähe sind die Amplituden gering, nach Norden und Süden steigen sie - allerdings mit entgegengesetztem Vorzeichen - an. Diese Erscheinung ist nach der Ursache der jahreszeitlichen Luftmassentransporte auch zu erwarten. Demnach lassen sich Luftdruckschwankungen durch die Gleichung

$$(82) \quad \Delta p(\varphi, \lambda, t) = \Delta p_0(\varphi, \lambda) \cos \alpha t$$

darstellen. Nach [2] kann man auf Grund der Phasenwinkel der beiden Komponenten der Polbewegung feststellen, ob der Ansatz (82) gerechtfertigt bzw. ob anzunehmen ist, daß von den Luftmassentransporten ein wesentlicher Einfluß auf die Polbewegung zu erwarten ist.

Aus (28) ergeben sich die Phasenwinkel der Polbewegung zu

$$(83) \quad \tan \gamma_y = \frac{k_2}{k_1} \quad \text{und} \quad \tan \gamma_x = \frac{l_2}{l_1} .$$

Beachtet man, daß wegen (82) in den Erregerfunktionen (27)

$$K_1 = 0 \quad \text{und} \quad L_1 = 0$$

gelten muß, so kann man aus (83) unter Berücksichtigung von (29) die Beziehung

$$(84) \quad \tan \gamma_y = - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cot \gamma_x$$

herleiten.

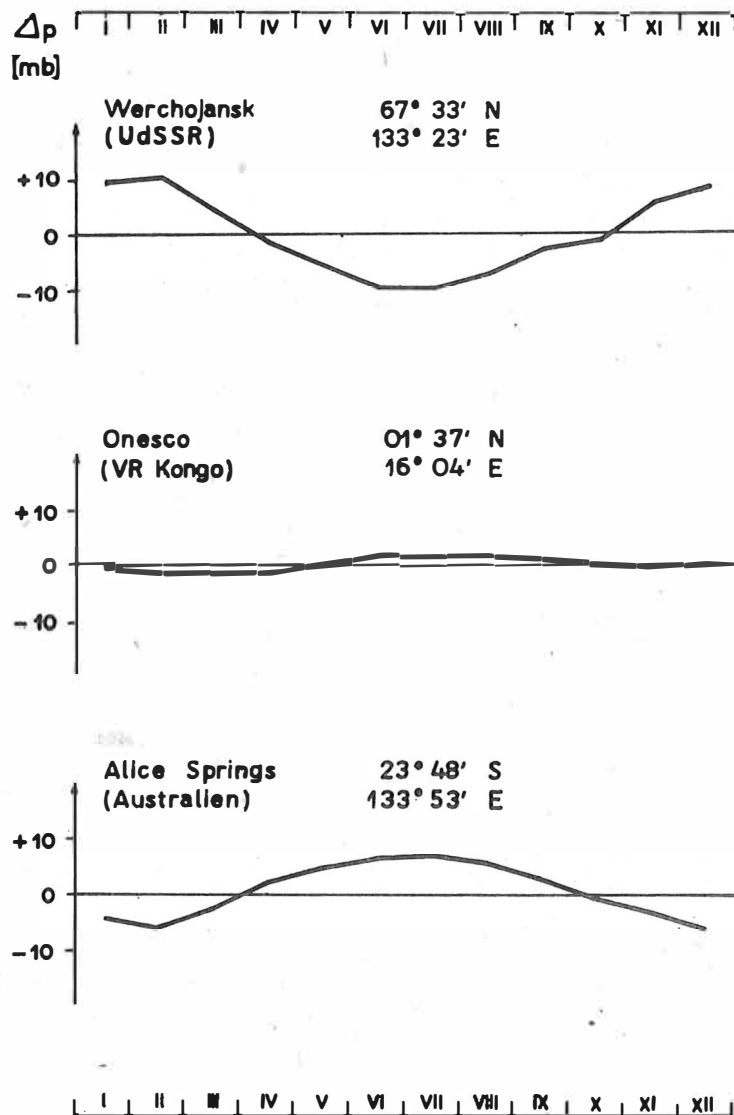


Abb. 4. Luftdruckschwankungen gegenüber dem Jahresmittel

Nach [17] erhält man aus einem 18jährigen Beobachtungszeitraum folgende Jahresperiode:

$$\frac{\omega_x}{\omega_0} = 9,6 \cdot 10^{-2''} \sin(\alpha t + 212^\circ),$$

$$\frac{\omega_y}{\omega_0} = 7,7 \cdot 10^{-2''} \sin(\alpha t + 120^\circ),$$

d.h.

$$\gamma_x = 212^\circ, \quad \gamma_y = 120^\circ.$$

Die Berechnung von  $\gamma_y$  nach (84) ergab

$$\gamma_{y_{\text{ber}}} = 132^\circ.$$

Auf Grund der fehlertheoretischen Analyse der aus Polkoordinaten abgeleiteten Jahresperiode läßt sich nachweisen [2], daß die Differenz zwischen dem Phasenwinkel von  $y$  nach (84) und dem aus der Polbewegung erhaltenen noch nicht signifikant ist. Demnach ist die Annahme nach Gleichung (82) gerechtfertigt.

Wir wollen jetzt noch untersuchen, wie sich eine fehlerhafte Annahme bezüglich der Anfangsphase auf die Geometrie der Polbewegung auswirkt. Liegt ein Phasenwinkel  $\gamma$  vor, so erhalten wir an Stelle von (82)

$$(85) \quad \Delta p(\varphi, \lambda, t) = \Delta p_0(\varphi, \lambda) \sin(\alpha t + \gamma).$$

Hierfür erhalten wir in den Erregerfunktionen (27) folgende Koeffizienten:

$$K_1 = K \cos \gamma, \quad L_1 = L \cos \gamma,$$

$$K_2 = K \sin \gamma, \quad L_2 = L \sin \gamma.$$

Mit diesen Werten ergeben sich mit (29) folgende Amplituden der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit in  $x$  und  $y$ :

$$(86) \quad \begin{cases} k^2 = k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega_0^2}{(\alpha^2/\beta^2 - 1)^2} \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} L^2 + K^2 \right), \\ l^2 = l_1^2 + l_2^2 = \frac{\omega_0^2}{(\alpha^2/\beta^2 - 1)^2} \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} K^2 + L^2 \right), \end{cases}$$

d.h., die Amplituden der Polbewegung werden von einem Fehler der Phase nicht beeinflusst.

Für die Phasenwinkel von  $\omega_x$  und  $\omega_y$  erhalten wir

$$(87) \quad \begin{cases} \tan \gamma_y = \frac{k_2}{k_1} = - \frac{\frac{\beta}{\alpha} L \cos \gamma - K \sin \gamma}{\frac{\beta}{\alpha} L \sin \gamma + K \cos \gamma}, \\ \tan \gamma_x = \frac{l_2}{l_1} = - \frac{\frac{\beta}{\alpha} K \cos \gamma + L \sin \gamma}{\frac{\beta}{\alpha} K \sin \gamma - L \cos \gamma}. \end{cases}$$

Für  $\gamma = 90^\circ$  ergibt (87)

$$(88) \quad \tan \gamma'_y = \frac{\beta}{\alpha} \frac{K}{L}, \quad \tan \gamma'_x = - \frac{\beta}{\alpha} \frac{L}{K}.$$

Berechnet man nach den Additionstheoremen die Differenzen zwischen den nach (87) und (88) erhaltenen Phasenwinkeln, so ergibt sich

$$(89) \quad \gamma_y - \gamma'_y = \gamma_x - \gamma'_x = \gamma - 90^\circ.$$

Eine fehlerhafte Annahme bezüglich des Phasenwinkels der Luftdruckschwankungen wirkt nach (88) wie ein Zeitfehler; es findet durch ihn eine Verschiebung in Richtung der Polkurve statt. Demnach bleiben Geometrie und Lage der Polkurve im vorausgesetzten Koordinatensystem erhalten.

### 3.3.2. Die Berechnung der Erregerfunktionen

Zur Berechnung der Erregerfunktionen wurde die Oberfläche der Kontinente in  $5^\circ \times 5^\circ$ -Kompimente eingeteilt, innerhalb deren die Luftdruckvariation als örtlich invariant angenommen wurde. Da auf der gesamten Erdoberfläche die Luftdruckvariation mit gleicher Anfangsphase erfolgt, brauchen wir bei der Berechnung der Erregerfunktionen die zeitliche Luftdruckvariationen zunächst nicht zu berücksichtigen

Auf Grund der Formeln (43), (44) und (45) ergibt sich unter Voraussetzung von (82), daß die Erregerfunktionen in gleicher Phase und mit gleicher Periode wie der Luftdruck zeitlich variieren müssen. Wir führen daher in die Berechnung der Erregerfunktionen zunächst die Jamarampplituden  $\Delta p_0$  ein. Diese werden als Mittel aller Stationen im betreffenden Kompiment berechnet. Da die in [18] angegebenen Werte auf Meeresniveau reduziert sind, wurde für jedes Kompiment eine mittlere Geländehöhe aus einem Atlas entnommen und mit ihr die für die physische Erdoberfläche geltenden Luftdruckamplituden berechnet. Wir wollen im folgenden den Rechengang zusammenstellen. Folgende Werte gehen in die Rechnung ein:

Luftdruckamplitude	$\Delta p_{0_{i,j}}$
mittlere Geländehöhe	$h_{i,j}$
geographische Koordinaten	$\varphi_i, \lambda_j$

a) Reduktion auf Geländehöhe:

$$\Delta p_{i,j}^0 = \Delta p_{0_{i,j}} e^{-\gamma h_{i,j}}$$

b) Berechnung des Kompensationsrestes (81):

$$\Delta P_M = - \frac{g_m}{g_M} \varepsilon_{45^\circ} \sum_L \frac{\Delta p_{i,j}^0}{\varepsilon_{i,j}} \cos \varphi_{m_{i,j}}$$

mit

$$\varphi_{m_{i,j}} = \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}$$

und

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{\varphi_m, 7000} = 978,030 (1 + 0,005 202 \sin^2 \varphi_m + 0,000 000 7 \sin^2 2 \varphi_m) - 2,156 [\text{cm s}^{-2}].$$

c) Reduktion der Luftdruckamplituden:

$$\Delta p_{r_{i,j}} = \Delta p_{i,j}^0 - \Delta P_M$$

d) Berechnung der Amplituden der Erregerfunktionen (nach (43) bis (45)):

$$D_{i,j} = \frac{(a + h_m)^4}{C - A} \frac{\Delta p_{x_{i,j}}}{\varepsilon_{\varphi_m, 7000}} \left\{ \frac{1 - \varepsilon}{3} (\cos^3 \varphi_{i+1} - \cos^3 \varphi_i) + \frac{\varepsilon}{5} (\cos^5 \varphi_{i+1} - \cos^5 \varphi_i) \right\}$$

$$K_2^j = -D_{i,j} (\cos \lambda_{j+1} - \cos \lambda_j),$$

$$L_2^j = D_{i,j} (\sin \lambda_{j+1} - \sin \lambda_j),$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n K_2^j, \quad L_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_2^j,$$

$$Y(t) = K_2 \cos \alpha t, \quad X(t) = L_2 \cos \alpha t.$$

In vorstehenden Rechengang gingen folgende Konstanten ein:

$$c = 0,125\,242 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{S_n}{S_M} \varepsilon_{45^\circ} = 0,838\,091,$$

$$\frac{(a + h_m)^4}{C - A} = 0,626\,394\,87 \cdot 10^{-4} \quad (\text{für } \Delta p_{x_{i,j}} \text{ in mbar}),$$

$$\varepsilon = 0,013\,259\,57.$$

Der Berechnung der Erregerfunktionen lag als Koordinatensystem ein Rechtssystem zugrunde, dessen z-Achse etwa mit der Rotationsachse zusammenfiel. Die x-Achse zeigte in der Meridianebene nach Süden, die y-Achse nach Osten. Ursprung des Koordinatensystems war das Massenzentrum der Erde.

Die vorstehend dargestellte Rechnung wurde auf dem Rechenautomaten R 300 ausgeführt. Es wurden folgende Werte erhalten:

$$\Delta p_M = -0,905 \text{ mbar},$$

$$K_2 = -0,168\,975 \cdot 10^{-6},$$

$$L_2 = 0,306\,702 \cdot 10^{-7}$$

oder in Sekunden

$$K_2 = -3,485 \cdot 10^{-2} \text{''},$$

$$L_2 = 0,614 \cdot 10^{-2} \text{''}.$$

#### 4. Die aus Luftdruckvariationen abgeleitete Jahresperiode der Polbewegung

Nach den Berechnungen des vorangegangenen Kapitels ergaben sich folgende Erregerfunktionen:

$$(90) \quad Y(t) = -3,485'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t, \quad X(t) = 0,614'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t.$$

Führen wir dies in die Differentialgleichungen der Polbewegung (26) ein, so erhalten wir nach (28) und (29) mit  $\alpha/\beta = 1,2$

$$(91) \quad \begin{cases} \omega_y = \{-1,67'' \cdot 10^{-2} \sin \alpha t + 7,92'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t\} \omega_0, \\ \omega_x = \{-9,50'' \cdot 10^{-2} \sin \alpha t - 1,39'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t\} \omega_0. \end{cases}$$

Hieraus erhält man die Polbewegung im Koordinatensystem des ILS (x-Achse nach Süden im Meridian von Greenwich, y-Achse nach Westen) nach den Formeln

$$(92) \quad y = -\frac{\omega_y}{\omega_0}, \quad x = \frac{\omega_x}{\omega_0}$$

zu

$$\begin{aligned} y &= 1,67'' \cdot 10^{-2} \sin \alpha t - 7,92'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t, \\ x &= -9,50'' \cdot 10^{-2} \sin \alpha t - 1,39'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t \end{aligned}$$

oder in anderer Schreibweise

$$(93) \quad \begin{cases} y = 8,10'' \cdot 10^{-2} \sin (\alpha t + 282,0^\circ), \\ x = 9,60'' \cdot 10^{-2} \sin (\alpha t + 188,3^\circ). \end{cases}$$

Übertragen wir die Erregerfunktionen (90) ebenfalls in das Koordinatensystem des ILS, so ergibt sich

$$(94) \quad Y = 3,485'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t, \quad X = 0,614'' \cdot 10^{-2} \cos \alpha t.$$

##### 4.1. Vergleich der durch Luftmassenverlagerungen hervorgerufenen Jahresperiode der Polbewegung mit der astronomisch ermittelten Jahresperiode

Auf Grund der in [17] gegebenen Werte der Polkoordinaten wurden die periodischen Anteile der Polbewegung nach der Methode der kleinsten Quadrate herausgefiltert. Dabei wurde für etwa den gleichen Zeitraum (1931 - 1960) folgende Jahresperiode der Polbewegung erhalten:

$$(95) \quad \begin{cases} y_A = 8,82'' \cdot 10^{-2} \sin (\alpha t + 294,0^\circ), \\ x_A = 9,64'' \cdot 10^{-2} \sin (\alpha t + 207,5^\circ). \end{cases}$$

Auf den ersten Blick zeigen (93) und (95) eine recht gute Übereinstimmung. Wir wollen diese Erkenntnis durch eine fehlertheoretische Untersuchung überprüfen. Für die astronomisch ermittelten Werte ergeben sich die fehlertheoretischen Parameter aus dem Bestimmungsverfahren der periodischen Anteile. Für die meteorologischen Werte sind die Fehler nicht bekannt. Wir sind daher bei der Ermittlung des Fehlereinflusses der Erregerfunktionen auf eine Schätzung der Standardabweichung der Amplituden der Luftdruckschwankun-



gen angewiesen. Da die Amplituden aus Monatsmitteln für einen Zeitraum von dreißig Jahren abgeleitet sind, werden selbst bei relativ großen Einzelfehlern die Standardabweichungen der Mittel klein sein. Daher können wir für die Standardabweichung der Luftdruckamplituden

$$s_{\Delta p} \cong \pm 0,2 \text{ mbar}$$

annehmen. Mit diesem Wert erhalten wir nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz die Standardabweichungen der Erregerfunktionen, wenn wir in (44) an Stelle der Luftdruckschwankungen  $s_{\Delta p}$  einführen und in (45) statt der linearen Summen die Quadratsummen bilden. Mit diesen Werten ergeben sich dann nach der Fehlerfortpflanzung auf Grund der analytischen Beziehungen zwischen den Amplituden der Erregerfunktionen und denen der Polbewegung die Standardabweichungen für Amplitude und Phase der Polbewegung. Die Amplituden und Phasen sowie deren Standardabweichungen sind für beide Bestimmungsverfahren der Polbewegung in Tab. 1 zusammengestellt.

Tab. 1. Amplituden und Phasen der Komponenten der Polbewegung

	X		Y	
	Amplitude l [ $10^{-2}''$ ]	Phase $\gamma_x$	Amplitude k [ $10^{-2}''$ ]	Phase $\gamma_y$
meteorologisch	$9,60 \pm 0,30$	$188,3^\circ \pm 2,0^\circ$	$8,10 \pm 0,20$	$282,0^\circ \pm 2,7^\circ$
astronomisch	$9,64 \pm 0,25$	$207,5^\circ \pm 1,5^\circ$	$8,82 \pm 0,28$	$294,0^\circ \pm 1,8^\circ$

Nach dieser Tabelle erhalten wir folgende Differenzen und ihre mittleren Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta l &= 0,04'' \cdot 10^{-2} \pm 0,39, & \Delta l/s_{\Delta l} &= 0,1, \\ \Delta k &= 0,72'' \cdot 10^{-2} \pm 0,35, & \Delta k/s_{\Delta k} &= 2,06, \\ \Delta \gamma_x &= 19,2^\circ \pm 2,5^\circ, & \Delta \gamma_x/s_{\Delta \gamma_x} &= 7,66, \\ \Delta \gamma_y &= 12,0^\circ \pm 3,2^\circ, & \Delta \gamma_y/s_{\Delta \gamma_y} &= 3,75. \end{aligned}$$

Setzen wir ein Konfidenzintervall für eine Wahrscheinlichkeit von 99 % fest, so wird für die Amplituden sehr gute Übereinstimmung erzielt, während die Phasendifferenzen signifikant sind. Weiterhin erkennt man, daß die Phasendifferenzen in beiden Komponenten der Polbewegung innerhalb des vorausgesetzten Vertrauensintervalls gleich groß sind. Dies läßt nach (89) einen Fehler bei der Anfangsphase der Erregerfunktion vermuten. Nach (89) ergibt sich damit für die Phase der Luftdruckschwankungen

$$\gamma = 105,6^\circ.$$

Vorausgesetzt hatten wir a priori  $\gamma = 90^\circ$ . Diese Differenz läßt sich durch einen Fehler in der Annahme der Lage des Maximums der meteorologischen Erregerfunktion erklären. Wir hatten a priori angenommen, daß die Maxima (oder entsprechend auf der Südhalbkugel die Minima) der periodischen Luftdruckschwankungen am Jahresanfang liegen. Tatsächlich zeigt die ermittelte Phasenverschiebung, daß die Maxima in der Nähe des Wintersolstitiums zu liegen scheinen. Da die astronomisch bestimmte Kurve hinsichtlich der Phasenlage sicherer ist, korrigieren wir die Erregerfunktion und erhalten nachstehende Werte für Erregerfunktion und Polbewegung:

$$(96) \quad \begin{cases} Y(t) = 3,485'' \cdot 10^{-2} \sin(\alpha t + 105,6^\circ), \\ X(t) = 0,614'' \cdot 10^{-2} \sin(\alpha t + 105,6^\circ); \end{cases}$$

$$(97) \quad \begin{cases} y = 8,10'' \cdot 10^{-2} \sin(\alpha t + 297,6^\circ), \\ x = 9,60'' \cdot 10^{-2} \sin(\alpha t + 203,9^\circ); \end{cases}$$

$$(98) \quad \begin{cases} y_A = 8,82'' \cdot 10^{-2} \sin(\alpha t + 294,0^\circ), \\ x_A = 9,64'' \cdot 10^{-2} \sin(\alpha t + 207,5^\circ). \end{cases}$$

Nach dieser Operation verbleiben nur noch Differenzen zwischen den nach meteorologischen und astronomischen Methoden bestimmten Jahresperioden der Polbewegung, die nicht mehr signifikant sind.

#### 4.2. Betrachtungen zur Lage und Form von Erregerfunktion und Polbewegungsellipse

Die durch (97) und (98) im Koordinatensystem der Polbewegung dargestellten Funktionen sind Ellipsen, deren Hauptachsen sich in der mittleren Lage des Trägheitspoles schneiden. Durch die Gleichungen (96) ist die Bewegung des Trägheitspoles infolge der zeitlich variablen Massengeometrie unseres Kreiselmotells gegeben.

Die Lage der Achsen der Polbewegungsellipsen erhält man nach der Formel

$$(99) \quad \tan 2 \alpha t_{a,b} = - \frac{k^2 \sin \gamma_y + l^2 \sin \gamma_x}{k^2 \cos \gamma_y + l^2 \cos \gamma_x}$$

und ihre Länge aus den Formeln (97) bzw. (98) nach

$$(100) \quad a^2 = x_a^2 + y_a^2, \quad b^2 = x_b^2 + y_b^2,$$

wenn man die aus (98) erhaltenen beiden Werte für  $\alpha t_0$  einsetzt. Für die beiden Polbewegungsellipsen ergaben sich folgende Werte:

Tab. 2. Parameter der Polbewegungsellipsen

	$\alpha t_a$	a	b
meteorologisch	74,6°	9,64'' · 10 <sup>-2</sup>	8,05'' · 10 <sup>-2</sup>
astronomisch	48,6°	9,70'' · 10 <sup>-2</sup>	8,72'' · 10 <sup>-2</sup>

Die relativ großen Differenzen in  $\alpha t_a$  werden durch die ungünstige Fehlerfortpflanzung infolge der geringen Exzentrizitäten der Ellipsen verursacht. Sie sind nicht signifikant.

Die Bewegung des Trägheitspoles hat eine Amplitude von  $\pm 1$  m. Sie erfolgt in Richtung der kleinen Halbachse der Polbewegungsellipse, die in Richtung des Meridians 100° ö.L. (bzw. 80° w.L.) liegt. Nach der Kreiselmotelltheorie kann man sich diese Bewegung durch eine Massenbewegung auf dem genannten Meridian in nord-südlicher Richtung ersetzt denken. Der Meridian der Trägheitspolbewegung muß daher in der Nähe von Gebieten liegen, in denen der Luftmassentransport in nord-südlicher Richtung besonders große Werte annimmt. Wie ein Blick auf Abb. 3 zeigt, liegt der Meridian in der Nähe der Maxima der Luftdruckamplituden über Sibirien. Damit wird die Aussage verschiedener Autoren bestätigt, daß das

sibirische Winterhoch den größten Beitrag zur Erregung der Polbewegung liefert.

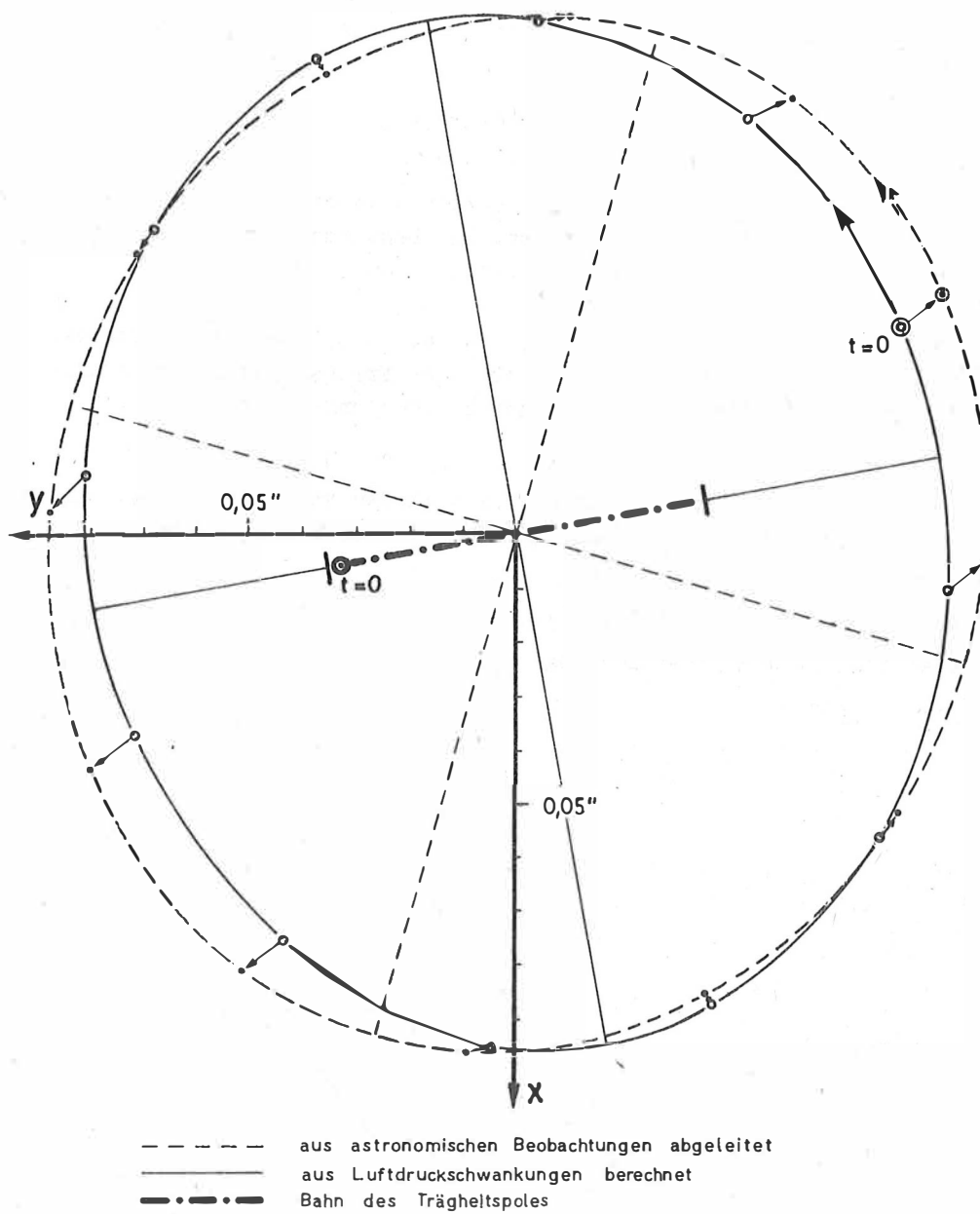


Abb. 5. Jahresperiode der Polbewegung

### 5. Der Einfluß der Luftmassentransporte auf die Amplitude der CHANDLER-Periode

In den bisherigen Untersuchungen hatten wir nur den Einfluß der Luftmassentransporte auf die Jahresperiode der Polbewegung betrachtet. Nach den EULERSchen Differentialgleichungen muß durch die Erregerfunktion der Luftmassentransporte neben der Jahresperiode auch die freie Nutation angeregt werden. So lautete z.B. unser Lösungsansatz für die Differentialgleichungen (siehe (28))

$$\omega_y = k_1 \sin \alpha t + k_2 \cos \alpha t + k_\beta \sin (\beta t + \gamma_0) ,$$

$$\omega_x = l_1 \sin \alpha t + l_2 \cos \alpha t + k_\beta \cos (\beta t + \gamma_0) ,$$

für den wir nach (29) aus den Amplituden der Erregerfunktion die Amplituden und Phasen der Jahresperiode der Polbewegung erhalten hatten. Zur Bestimmung der Amplitude  $k_\beta$  der freien Nutation braucht man für den Lösungsansatz einen Anfangswert.

Die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit,  $\omega_y$  und  $\omega_x$ , sind Null, wenn die Deviationsmomente verschwinden, d.h. wenn die Komponenten der Erregerfunktion ebenfalls Null werden. Nach (90) verschwinden die Komponenten der Erregerfunktion für

$$\alpha t_0 = -105,6^\circ - n \cdot 180^\circ .$$

Nur für diese Zeitpunkte kann das gleichzeitige Verschwinden von  $\omega_y$  und  $\omega_x$  eingetreten sein. Damit ergibt sich aus unserem Lösungsansatz die Amplitude der freien Nutation aus

$$(101) \quad k_\beta^2 = (k_1^2 + l_1^2) \sin^2 \alpha t_0 + (k_2^2 + l_2^2) \cos^2 \alpha t_0 + (k_1 k_2 + l_1 l_2) \sin 2 \alpha t_0 .$$

Mit den Amplitudenwerten der Jahresperiode ergab sich

$$k_\beta = 8,80'' \cdot 10^{-2} .$$

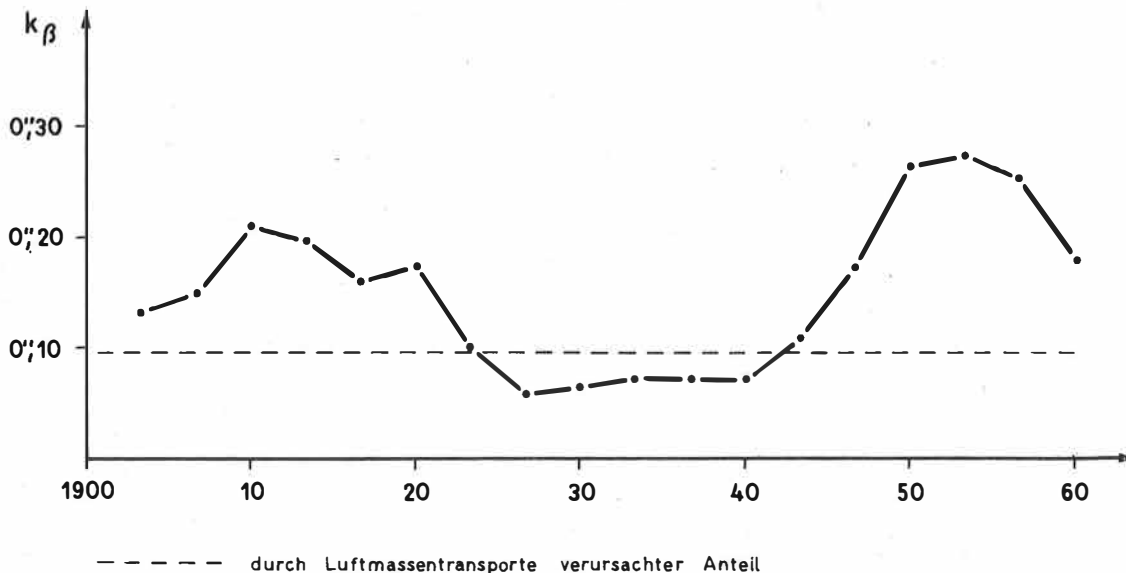


Abb. 6. Die Amplitude der CHANDLER-Periode (nach SUGAWA)

In Abb. 6 ist die CHANDLER-Periode dargestellt, wie sie sich im Beobachtungszeitraum von 1900 bis 1960 ergeben hat. Wir sehen, daß sie stark veränderlich ist. Ihr Mittelwert beträgt im betrachteten Beobachtungszeitraum  $15,10'' \cdot 10^{-2}$ , so daß rund 2/3 des aus astronomischen Beobachtungen abgeleiteten Wertes durch den Einfluß der Luftmassentransporte mit Jahresperiode erklärt werden können. Dieser Wert stimmt auch etwa mit der minimalen Amplitude der CHANDLER-Periode überein (siehe Abb. 6 ).

Obwohl SCHWEYDAR [12] annahm, daß die Polbewegung vollständig durch Luftmassentransporte erklärt werden könnte, müssen wir auf Grund des heute vorliegenden Beobachtungsmaterials annehmen, daß noch andere massengeometrische Variationen einen Beitrag zur Polbewegung liefern, die zum Teil eine nicht so strenge Periodizität wie die Luftmassentransporte haben.

Weiterhin gibt das von uns vorausgesetzte Kreiselmodell nicht vollkommen exakt die tatsächlichen Verhältnisse des Erdkörpers wieder, wodurch hauptsächlich die Aussagen zur CHANDLER-Periode beeinflusst werden.

In [9] werden verschiedene andere Kreiselmodelle diskutiert, die eine Dämpfung der Kreiselbewegung oder eine zeitlich variable Länge der CHANDLER-Periode voraussetzen. Beide Lösungsansätze haben jedoch noch zu keiner befriedigenden Erklärung des Phänomens der CHANDLER-Periode geführt.

Literatur

- [1] JEFFREYS, H.: Causes contributory to the annual variation of latitude. Monthly Not. roy. astron. Soc., London 76 (1916), S. 499 ff.
- [2] JOCHMANN, H.: Phasenbeziehungen als Indikatoren für die Erregung der Polbewegung. Vermessungstechnik, Berlin 23 (1975) 3, S. 99-101
- [3] KLEIN, F.; SOMMERFELD, A.: Über die Theorie des Kreisels. Leipzig: B.G. Teubner 1889
- [4] KRÜGER, H.: Perioden des troposphärischen Windvektors und Schwankungen der Erdrotation und der Polhöhe. Gerlands Beitr. Geophysik, Leipzig 77 (1968) 6, S. 440-452
- [5] LANDOLT-BÖRNSTEIN: Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik, 6. Aufl., Bd. III. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1952
- [6] MAGNUS, K.: Kiesel. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1971
- [7] MINTZ, Y.; MUNK, W.: The effect of winds and bodily tides on the annual variation in the length of day. Monthly Not. roy. astron. Soc., Geophys. Suppl., London 6 (1954), S. 566-578
- [8] MUNK, W.; HASSAN, E.: Atmospheric excitation of the Earth's wobble. Geophys. J. roy. astron. Soc., London 4 (1961), S. 339-358
- [9] MUNK, W.; MACDONALD, G.J.F.: The Rotation of the Earth. Cambridge: Univ. Press 1960
- [10] ROCHESTER, M.G.: Polar wobble and drift: A brief history. Earth Displacement Fields and the Rotation of the Earth. Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp. 1970
- [11] SCHWEYDAR, W.: Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper und im Raume. Astron. Nachr., Kiel 203 (1917), S. 102-115
- [12] SCHWEYDAR, W.: Zur Erklärung der Bewegung der Rotationspole der Erde. Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 20 (1919), S. 357 ff.
- [13] SIDERENKOV, N.S.; OVIKOV, A.R.: Ocenka vlijanija sezonnogo pereraspredelenija vozdušnych mass na dviženie poljusov zemli. Astron. Ž., Moskva 50 (1973) 2, S. 441-444
- [14] SPITALER, R.: Die periodischen Luftmassenverschiebungen und ihr Einfluß auf die Lageänderungen der Erdachse (Breitenschwankungen). Petermanns geogr. Mitt., Ergänzungsband 29, Leipzig (1901), S. 137 ff.
- [15] STOMMEL, H.: A survey of ocean current theory. Deep-Sea Res. 4 (1957), S. 149
- [16] VERNIS, G.; STOMMEL, H.: The action of variable wind stresses on a stratified ocean. J. Marine Res., USA 15 (1957), S. 43-75
- [17] VICENTE, G.; YUMI, S.: Revised values (1941 - 1962) of the coordinates of the Pole referred to the CIO. Publ. internat. Latitude Observ. Mizusawa 7 (1970) 2, S. 109 - 112
- [18] WANACH, B.: Die CHANDLERSche und die NEWCOMBSche Periode der Polbewegung. Veröff. Zentralbureau internat. Erdmessung, N.F., Berlin (1919) 34
- [19] ... Climatological normals (CLINO) for climat and climat ship stations for the period 1931 - 1960, ed. by the World Meteorological Organization. Genf 117 TP 52 (1971)







Die Jahresperiode und CHANDLER-Periode  
der Polbewegung (1923 - 1959)

von H. Jochmann

(Die Programmierung wurde von  
Ing. E. Felsmann durchgeführt)

Zusammenfassung

Für den Zeitraum 1923 - 1959 wurden die kurzperiodischen Anteile der Polbewegung und deren fehlertheoretische Charakteristika ermittelt.

Summary

For the period 1923 - 1959 the short-period properties of the polar motion, their standard deviations and error propagation in the adjustment model were determined.

Résumé

Pour l'espace de temps 1923 - 1959 les composants à courtes périodes du mouvement du pôle, leurs erreurs moyennes et la propagation des erreurs en modèle du calcul de compensation sont évalués.

Резюме

За период времени 1923 - 1959 г. вычислялись коротко-периодические составляющие движения полюса, их средние квадратические ошибки и накопление ошибок в модели уравнивания.

## 1. Einleitung

Zum Vergleich der aus Luftmassenbewegungen berechneten Anteile der Polbewegungen mit den aus astronomischen Beobachtungen erhaltenen Werten war es erforderlich, aus den Daten des ILS die entsprechenden periodischen Anteile der Polbewegung zu ermitteln. Man hätte dabei zwar auf einige bekannte Arbeiten zurückgreifen können, jedoch waren die in diesen enthaltenen fehlertheoretischen Angaben für unsere Untersuchungen nicht ausreichend. Bei der vorliegenden Arbeit wurde daher besonderer Wert auf die Bestimmung der fehlertheoretischen Charakteristika gelegt.

## 2. Die angewandte Methode der Interpolationsausgleichung

In [2] und [3] sind die Monatsmittel des instantanen Rotationspoles der Erde relativ zum GIO-Pol gegeben. Es bestand die Aufgabe, aus diesen numerischen Werten die periodischen Anteile der Polbewegung zu ermitteln. Wir beschränkten uns dabei auf die Bestimmung der Jahresperiode und der 1,2-jährigen CHANDLER-Periode. Längere Perioden waren für das vorgesehene Ziel dieser Arbeit nicht von Bedeutung; ein Versuch, kürzere Perioden zu ermitteln, war nicht erfolgreich, da die erhaltenen Werte der Unbekannten weit unter dem Signifikanzniveau lagen. Es wurde als Modell der Ausgleichung eine modifizierte harmonische Analyse angewandt, um im Verlauf der Rechnung auch die Länge der CHANDLER-Periode zu erhalten.

### 2.1. Das mathematische Modell der Ausgleichung

Wählen wir als Zeiteinheit das Jahr, so kann man für die Polbewegung folgenden Ansatz machen:

$$(1) \quad x_1 = A + B \cos 2 \pi t_1 + C \sin 2 \pi t_1 + D \cos 2 \pi F t_1 + E \sin 2 \pi F t_1 .$$

Bezeichnen wir die Näherungswerte durch den Index 0 und die Verbesserungen durch die entsprechenden kleinen Buchstaben, so ergibt sich nach YUMI [4] für jeden Koordinatenwert der Polbewegung die Verbesserungsgleichung

$$(2) \quad v_1 = -l_1 + a + b \cos 2 \pi t_1 + c \sin 2 \pi t_1 + d \cos 2 \pi F_0 t_1 + e \sin 2 \pi F_0 t_1 + 2 (E_0 \pi t_1 \cos 2 \pi F_0 t_1 - D_0 \pi t_1 \sin 2 \pi F_0 t_1) f ,$$

in der

$$(3) \quad -l_1 = A_0 + B_0 \cos 2 \pi t_1 + C_0 \sin 2 \pi t_1 + D_0 \cos 2 \pi F_0 t_1 + E_0 \sin 2 \pi F_0 t_1 - (x_1)$$

ist. Entsprechende Gleichungen kann man auch für die Ordinaten  $y_1$  der Polbewegung aufstellen.

Fassen wir die Gleichungen (2) zu einem System zusammen, so erhalten wir in Matrixschreibweise folgendes System der Verbesserungsgleichungen:

$$(4) \quad v = -l + R \xi$$

mit

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix};$$

$$(5) \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2 \pi t_1 & \sin 2 \pi t_1 & \cos 2 \pi F_0 t_1 & \sin 2 \pi F_0 t_1 & G_{F_1} \\ 1 & \cos 2 \pi t_2 & \sin 2 \pi t_2 & \cos 2 \pi F_0 t_2 & \sin 2 \pi F_0 t_2 & G_{F_2} \\ \dots & & & & & \\ 1 & \cos 2 \pi t_n & \sin 2 \pi t_n & \cos 2 \pi F_0 t_n & \sin 2 \pi F_0 t_n & G_{F_n} \end{bmatrix} .$$

In  $R$  ist

$$(6) \quad G_{F_1} = 2 (E_0 \pi t_1 \cos 2 \pi F_0 t_1 - D_0 \pi t_1 \sin 2 \pi F_0 t_1) .$$

Bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich aus (4)

$$(7) \quad R^T R \xi - R^T \ell = 0.$$

Liegen gleiche zeitliche Abstände der Polkoordinatenwerte vor und erstrecken wir unsere Analyse über  $1/(1-F) = 6$  Jahre, so entstehen in der Koeffizientenmatrix des Normalgleichungssystems (7) wie bei der regulären harmonischen Analyse eine Anzahl Nullstellen. Man erhält

$$(8) \quad R^T R = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_1^n G_{F_1} \\ & \frac{n}{2} & 0 & 0 & 0 & \sum_1^n G_{F_1} \cos 2\pi t_1 \\ & & \frac{n}{2} & 0 & 0 & \sum_1^n G_{F_1} \sin 2\pi t_1 \\ & & & \frac{n}{2} & 0 & \sum_1^n G_{F_1} \cos 2\pi F t_1 \\ & & & & \frac{n}{2} & \sum_1^n G_{F_1} \sin 2\pi F t_1 \\ & & & & & \sum_1^n G_{F_1}^2 \end{pmatrix}.$$

Der wesentlichste Unterschied unseres mathematischen Modells gegenüber der harmonischen Analyse besteht in der Berücksichtigung einer variablen Kreisfrequenz  $F$ , wodurch die Verbesserungsgleichungen nicht mehr a priori linear sind und Näherungswerte für die zu bestimmenden Unbekannten eingeführt werden müssen. Diese sollen den zu erwartenden Werten so gut angenähert sein, daß man die Glieder höherer Ordnung der Reihenentwicklung vernachlässigen kann.

Höhere Glieder der Reihenentwicklung treten nur für  $F$  auf. Um deren Einfluß abschätzen zu können, führen wir in das vorstehend beschriebene Modell folgende zu approximierende Funktion ein:

$$(9) \quad x(t) = A_0 + B_0 \cos 2\pi t_1 + C_0 \sin 2\pi t_1 + D_0 \cos 2\pi F_0 t_1 + E_0 \sin 2\pi F_0 t_1 + \frac{\partial x}{\partial F} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial F^2} f^2,$$

worin

$$\frac{\partial x}{\partial F} = 2\pi t_1 (E_0 \cos 2\pi F t_1 - D_0 \sin 2\pi F t_1),$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial F^2} = -4\pi^2 t_1^2 (E_0 \sin 2\pi F t_1 + D_0 \cos 2\pi F t_1)$$

sind.

Wir nehmen vereinfachend an, die Meßwerte seien kontinuierlich verteilt, so daß wir an Stelle der Summenformeln in die Ausgleichung Integrale einführen können. Es ergaben sich folgende Einflüsse der quadratischen Glieder auf die Unbekannten, wenn wir

$$E_0 = -21'' \cdot 10^{-2} \quad \text{und} \quad D_0 = -15'' \cdot 10^{-2}$$

annehmen, was etwa den größten im betrachteten Zeitraum auftretenden Amplituden einer Koordinate der CHANDLER-Periode entspricht:

$$\begin{aligned} dA &= 453 f^2 & dD &= 3266 f^2 \\ dB &= 2425 f^2 & dE &= -5196 f^2 \\ dC &= -1102 f^2 & dF &= -2,8 f^2 \end{aligned}$$

Da die Standardabweichungen der Unbekannten A bis E etwa  $\pm 0,5'' \cdot 10^{-2}$

und des Wertes F

$$\pm 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\text{Jahr}}$$

sind, muß der Näherungswert  $F_0$  auf  $1 \cdot 10^{-2}$  (1/Jahr) bekannt sein, wenn die zu bestimmenden Unbekannten nicht signifikant verfälscht werden sollen.

## 2.2. Die Bestimmung von Näherungswerten

Für die Kreisfrequenz der CHANDLER-Periode wurde der bekannte Wert

$$F_0 = \frac{1}{1,2}$$

angenommen, und unter der Voraussetzung von Verbesserungsgleichungen der Form

$$(10) \quad v_1 = -l_1 + A_0 + B_0 \cos 2 \pi t_1 + C_0 \sin 2 \pi t_1 + D_0 \cos 2 \pi F_0 t_1 + E_0 \sin 2 \pi F_0 t_1$$

mit

$$-l_1 = -(x_1)$$

wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate die Näherungswerte  $A_0$  bis  $E_0$  bestimmt. Mit diesen wurde auf Grund der Verbesserungsgleichung

$$(11) \quad v_1 = -l_1 + 2 (E_0 \pi t_1 \cos 2 \pi F_0 t_1 - D_0 \pi \sin 2 \pi F_0 t_1) f_0$$

mit dem Absolutglied nach (3) eine Korrektur in erster Näherung für F bestimmt. Diese Werte wurden in die endgültige Ausgleichung nach Abschnitt 2.1. eingeführt, falls auf Grund der nach (11) erhaltenen Verbesserung noch eine wesentliche Änderung der Amplituden zu erwarten war.

## 2.3. Der Einfluß eines systematischen Fehlers der Länge der CHANDLER-Periode auf die berechneten Amplituden der Polbewegung

Führt man in (10)

$$x_1 = A + B \cos 2 \pi t_1 + C \sin 2 \pi t_1 + D \cos 2 \pi F t_1 + E \sin 2 \pi F t_1 + 2 (\pi E_0 t_1 \cos 2 \pi F t_1 - \pi D_0 t_1 \sin 2 \pi F t_1) f$$

ein und berechnet die zu bestimmenden Unbekannten nach dem Formelapparat der harmonischen Analyse, so erhält man folgende Werte:

$$\begin{aligned} A_0 &= A - D_0 \frac{f}{F}, \\ B_0 &= B + 2 D_0 \frac{f}{1 - F^2}, \\ C_0 &= C + 2 E_0 \frac{F}{1 - F^2} f, \\ D_0 &= D + \left( \frac{D_0}{2F} + 6 E_0 \pi \right) f, \end{aligned}$$

$$E_0 = E - \left( \frac{E_0}{2F} - 6 D_0 \pi \right) f .$$

Den größten Einfluß hat ein Fehler der Kreisfrequenz auf die Amplituden  $D_0$  und  $E_0$ . Setzen wir die bereits in Abschnitt 2.1. benutzten Werte für  $D_0$  und  $E_0$  ein, so ergibt sich

$$dD_0 = -295 f [1'' \cdot 10^{-2}] ,$$

$$dE_0 = 368 f [1'' \cdot 10^{-2}] ,$$

woraus folgt, daß für  $f \leq 1 \cdot 10^{-3}$  keine signifikante Verbesserung der Näherungswerte durch eine nochmalige Ausgleichung zu erwarten ist.

#### 2.4. Der Einfluß systematischer Amplitudenfehler auf die Bestimmung von F

Auf die Berechnung von  $F$  nach (11) wirken sich die Fehler der nach (10) bestimmten Amplituden aus. Wir erhalten deren Einfluß, wenn wir in (11)

$$-l_1 = \Delta A + \Delta B \cos 2 \pi t_1 + \Delta C \sin 2 \pi t_1 + \Delta D \cos 2 \pi F t_1 + \Delta E \sin 2 \pi F t_1$$

einsetzen. Wenden wir die Methode der kleinsten Quadrate unter Annahme einer kontinuierlichen Wertefolge an, so ergibt sich im ungünstigen Fall (Summierung aller Einflüsse)

$$\Delta F = 3 \cdot 10^{-3} \Delta K$$

mit

$$\Delta K = \Delta A = \Delta B = \dots = \Delta E .$$

Hieraus folgt, daß bei  $\Delta K \leq 1'' \cdot 10^{-2}$  nicht mehr mit einem wesentlichen Einfluß auf die Kreisfrequenz  $F$  zu rechnen ist. Da die durch den zulässigen Fehler von  $F$  verursachten Amplitudenfehler kleiner als  $\Delta K$  sind, kann eine nochmalige Ausgleichung in diesem Falle keine Verbesserung der Amplitudenwerte mehr bringen.

#### 2.5. Die Fehlerfortpflanzung im mathematischen Modell der Ausgleichung

Durch die Inversion von (8) ergibt sich die Gewichtsmatrix

$$(12) \quad Q = (R^T R)^{-1} ,$$

deren Diagonalelemente die Gewichtskoeffizienten der im Gange der Ausgleichung zu bestimmenden Unbekannten sind. Mit dem Gewichtseinheitsfehler der Ausgleichung

$$(13) \quad m_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-6}}$$

erhält man die Standardabweichungen der Unbekannten

$$(14) \quad s_K = \sqrt{Q_{KK}} m_0 , \quad K = A, B, C, \dots, F .$$

Geht man von (1) zu folgender Darstellung der periodischen Polbewegung über:

$$(15) \quad x_1 = A + B' \sin (2 \pi t_1 + \gamma_B) + D' \sin (2 \pi F t_1 + \gamma_D) ,$$

so ergeben sich auf Grund von

$$B'^2 = B^2 + C^2 , \quad \tan \gamma_B = \frac{B}{C} ,$$

$$D'^2 = D^2 + E^2 , \quad \tan \gamma_D = \frac{D}{E} ,$$

nach der Regel von TIENSTRA folgende Gewichtskoeffizienten für die Amplituden und Phasenwinkel:

$$(16) \quad \begin{cases} Q_{B'B'} = \frac{B^2}{B'^2} Q_{BB} + \frac{C^2}{B'^2} Q_{CC} + \frac{2BC}{B'^2} Q_{BC} , \\ Q_{D'D'} = \frac{D^2}{D'^2} Q_{DD} + \frac{E^2}{D'^2} Q_{EE} + \frac{2DE}{D'^2} Q_{DE} , \\ Q_{Y_B Y_B} = \frac{C^2}{B'^4} Q_{BB} + \frac{B^2}{B'^4} Q_{CC} - \frac{2BC}{B'^4} Q_{BC} , \\ Q_{Y_D Y_D} = \frac{E^2}{D'^4} Q_{DD} + \frac{D^2}{D'^4} Q_{EE} - \frac{2DE}{D'^4} Q_{DE} . \end{cases}$$

Mit (16) erhalten wir nach (14) die Standardabweichungen der Amplituden und Phasenwinkel.



### 3. Die Amplituden, Phasenwinkel und Werte für die Länge der CHANDLER-Periode für den Zeitraum 1923 - 1959

Der Zeitraum der Untersuchung wurde in Abschnitte von 6 Jahren eingeteilt und für jeden getrennt die vorstehend beschriebene Rechnung durchgeführt. Für jeden Monat standen die in [2] und [3] gegebenen Monatsmittel der Koordinaten des instantanen Poles zur Verfügung, so daß in jeden Ausgleichungsvorgang 72 Beobachtungswerte eingeführt wurden. Die numerischen Rechnungen wurden auf dem Robotron R 300 ausgeführt. Tab. 1 enthält die Ergebnisse.

Die Amplituden der Jahresperiode und der CHANDLER-Periode sind variabel, letztere in erheblichem Maße. Die Realität der Veränderung der Amplituden der Jahresperiode muß durch einen Signifikanztest nachgewiesen werden. Die Phasenwinkel der Jahresperiode und der CHANDLER-Periode sind veränderlich. Obwohl die auftretenden Differenzen über dem Signifikanzniveau liegen dürften, muß angenommen werden, daß die Änderungen keine physikalische Realität haben. Vielmehr dürfte sich in ihnen eine Unzulänglichkeit des mathematischen Modells äußern, die in der Annahme der Konstanz der Amplitude über Zeiträume von 6 Jahren liegt. Diese Vermutung wird durch die größeren Phasendifferenzen bei der CHANDLER-Periode bestätigt, die mit den größeren Amplitudenänderungen dieser Periode korrespondieren.

Nach der EULERSchen Kreiseltheorie müssen die Amplituden der beiden Koordinaten der CHANDLER-Periode gleich groß sein. Signifikante Differenzen ergaben sich nur für den Zeitraum 1935 - 1941. Die nach der gleichen Theorie zu fordernde Phasenverschiebung von  $90^\circ$  zwischen den Komponenten der CHANDLER-Periode wird gut eingehalten. Auch bei der Jahresperiode besteht eine relativ geringe Variation der Phasenverschiebung, was auf eine gleichlaufende Amplitudenänderung in beiden Koordinaten schließen läßt. Die Länge der CHANDLER-Periode bleibt zwar über gewisse Zeiträume konstant, jedoch zeigten sich erhebliche Sprünge, die bis zu 30 Tagen betragen. Diese bedeutenden Differenzen können nicht allein durch die Unzulänglichkeit des Modells erklärt werden,

Die mittleren Gewichtseinheitsfehler sind erheblich größer als die in [2] angegebenen mittleren Fehler der Polkoordinaten ( $1'' \cdot 10^{-2}$ ), woraus folgt - wie zu erwarten war -, daß die Polbewegung durch die vorausgesetzten beiden Perioden nicht vollständig erklärt werden kann.

#### 3.1. Fehlertheoretische Diskussion der Ergebnisse

Wie wir bereits im vorangehenden Abschnitt feststellten, ist auf den ersten Blick nicht zu entscheiden, ob die Variationen der Amplituden der Jahresperiode signifikant sind. Wir wollen mit Hilfe der STUDENT-Verteilung prüfen, ob sich die Schätzwerte signifikant unterscheiden.

Voraussetzung dieses Testes ist, daß die Schätzwerte Stichproben einer Grundgesamtheit mit gleicher Streuung entstammen. Wir wenden zur Überprüfung dieser Voraussetzung auf die mittleren Gewichtseinheitsfehler den COCHRAN-Test [1] an. Hierzu bilden wir die Testgröße

Tab. 1. Die periodischen Anteile der Polbewegung

	Jahresperiode				CHANDLER-Periode				Länge der CHANDLER-Periode		Gewichtseinheitsfehler	
	x		y		x		y		x	y	x	y
	[10 <sup>-2</sup> "]		[10 <sup>-2</sup> "]		[10 <sup>-2</sup> "]		[10 <sup>-2</sup> "]				[10 <sup>-2</sup> "]	[10 <sup>-2</sup> "]
	Ampl.	Phas.	Ampl.	Phas.	Ampl.	Phas.	Ampl.	Phas.				
1923-29	11,25 ±0,54	208 <sup>o</sup> 7 ±2,8	10,47 ±0,64	289 <sup>o</sup> 2 ±3,5	8,93 ±0,54	229 <sup>o</sup> 2 ±3,5	6,80 ±0,64	319 <sup>o</sup> 7 ±5,4	1,0800 ±0,0018	1,0800 ±0,0027	± 3,36	± 3,93
1929-35	10,25 ±0,44	204 <sup>o</sup> 7 ±2,4	10,87 ±0,50	286 <sup>o</sup> 0 ±2,6	8,44 ±0,44	218 <sup>o</sup> 2 ±3,0	7,99 ±0,50	309 <sup>o</sup> 5 ±3,6	1,1500 ±0,0009	1,1500 ±0,0011	± 2,68	± 3,10
1935-41	8,92 ±0,37	201 <sup>o</sup> 2 ±2,4	7,60 ±0,33	286 <sup>o</sup> 2 ±2,5	7,06 ±0,37	196 <sup>o</sup> 2 ±3,0	4,88 ±0,33	285 <sup>o</sup> 2 ±3,9	1,1500 ±0,0006	1,1501 ±0,0008	± 2,31	± 2,04
1941-47	9,76 ±0,62	212 <sup>o</sup> 3 ±3,7	7,83 ±0,57	302 <sup>o</sup> 5 ±4,2	14,70 ±0,62	194 <sup>o</sup> 3 ±2,4	12,54 ±0,57	284 <sup>o</sup> 4 ±2,6	1,1998 ±0,0022	1,1999 ±0,0023	± 3,84	± 3,55
1947-53	10,43 ±0,40	226 <sup>o</sup> 3 ±2,2	9,77 ±0,52	319 <sup>o</sup> 8 ±3,0	26,11 ±0,40	202 <sup>o</sup> 6 ±0,9	25,96 ±0,52	293 <sup>o</sup> 5 ±1,1	1,1998 ±0,0003	1,1997 ±0,0004	± 2,48	± 3,19
1953-59	7,97 ±0,58	210 <sup>o</sup> 4 ±4,2	5,90 ±0,72	292 <sup>o</sup> 7 ±7,0	23,65 ±0,58	228 <sup>o</sup> 8 ±1,4	24,68 ±0,72	317 <sup>o</sup> 3 ±1,7	1,1999 ±0,0003	1,1999 ±0,0004	± 3,60	± 4,47

$$(17) \quad G = \frac{m_{\max}^2}{\sum_{i=1}^k m_i^2} .$$

Auf Grund der Werte in den letzten beiden Spalten der Tab. 1 ergab sich

$$G_x = 0,251 \quad \text{und} \quad G_y = 0,276 .$$

Für  $k = 6$  Werte und  $f = 66$  Freiheitsgrade erhält man für die Signifikanzniveaus

$$\alpha = 0,05: \quad G_{0,05} = 0,250 ,$$

$$\alpha = 0,01: \quad G_{0,01} = 0,267 .$$

Da  $G_x < G_{0,01}$  ist, kann die Hypothese gleicher Streuung für  $x$  angenommen werden, für die  $y$  muß sie verworfen werden. Hier muß gegebenenfalls die Gleichheit der Streuung der betrachteten Amplituden mit Hilfe des F-Testes nachgewiesen werden. Wir berechnen mit einer geringen Modifikation des z.B. in [1] angegebenen Testverfahrens für den Vergleich zweier Mittelwerte die zulässige Differenz nach

$$(18) \quad \Delta B' = t_{\alpha} \sqrt{s_{B_1}^2 + s_{B_2}^2} ,$$

woraus mit  $s_{B_1} \approx s_{B_2} \approx 0,5'' \cdot 10^{-2}$

$$(19) \quad \Delta B' = t_{\alpha} \cdot 0,71'' \cdot 10^{-2}$$

wird. Die Anwendung dieser einfachen Formel ist wegen der hohen Zahl von Freiheitsgraden möglich. Wir erhalten für die Signifikanzniveaus

$$\alpha = 0,05: \quad \Delta B' = 1,40'' \cdot 10^{-2} ,$$

$$\alpha = 0,01: \quad \Delta B' = 1,85'' \cdot 10^{-2} ,$$

d.h., mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % oder 1 % sind zwei Amplitudenwerte signifikant verschieden, wenn ihre Differenzen vorstehende Werte überschreiten. In ähnlicher Weise ergibt sich für die Phasenwinkel

$$\alpha = 0,05: \quad \Delta \gamma_B = 6,0^{\circ} ,$$

$$\alpha = 0,01: \quad \Delta \gamma_B = 8,5^{\circ} .$$

Für die Koordinatenwerte  $y$  müßten wir für jede Amplituden- oder Phasenwinkeldifferenz speziell eine Untersuchung durchführen, da der COCHRAN-Test für die Gewichtseinheitsfehler nicht erfüllt ist. Wir werden jedoch keinen wesentlichen Fehler machen, wenn wir die vorstehenden Testbedingungen auch für die Ordinaten der Polbewegung akzeptieren, da der Testwert  $G_y$  die zulässige Größe nur in geringem Umfang überschreitet.

Literatur

- [1] SMIRNOW, N.W.; DUNIN-BARKOWSKI, I.W.: Mathematische Statistik in der Technik.  
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963
- [2] VICENTE, R.O.; YUMI, S.: Coordinates of the Pole (1899 - 1968) referred to the conventional international origin.  
Publ. internat. Latitude Observ. Mizusawa 7 (1969) 1, S. 41-50
- [3] VICENTE, R.O.; YUMI, S.: Revised values (1941 - 1962) of the coordinates of the Pole referred to the CIO.  
Publ. internat. Latitude Observ. Mizusawa 7 (1970) 2, S. 109-112
- [4] YUMI, S.: Polar motion in recent years. In: Earthquake displacement fields and the rotation of the Earth.  
Dordrecht-Holland: D. Reidel Publ. Comp. 1970