

2. März 1983

13.229

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR  
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften  
**ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE**

---

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde  
Nr. 75

Q  
2548  
—  
75

20

**Untersuchung der Konvektion im Erdinneren und dafür  
wichtiger Materialparameter unter hohem Druck**

von

**Uwe Walzer**



Herausgeber: Der Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde Potsdam

---

Als Manuskript gedruckt Potsdam 1981

F 346/82

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	5
Summary	7
Peazme	10
1. Einführung: Erwägungen über tektonophysikalische Theorien und Hypothesen	13
2. Die Grundgleichungen der thermischen Konvektion	18
3. Instationäre Mantelkonvektion: Das Bénard-Problem mit temperatur- und druckabhängiger Viskosität	22
3.1. Geophysikalische Motivation	22
3.2. Grundgleichungen des Bénard-Problems mit exponentieller Temperaturabhängigkeit der Viskosität	23
3.3. Die Abhängigkeit der Viskosität von Temperatur und Druck	23
3.4. Reduktion der Grundgleichungen auf drei skalare Relationen	24
3.5. Randbedingungen und einige geophysikalische Bemerkungen	25
3.6. Das zweidimensionale Problem für beliebige Prandtl-Zahlen	26
3.7. Herrscht gegenwärtig im unteren Mantel Konvektion?	27
3.8. Die Herleitung einer Approximation der Lösung	27
3.9. Schlußfolgerungen	29
3.10. Diskussion	30
4. Instationäre Konvektion im unteren Mantel mit innerer Heizung und temperatur- und druckabhängiger Viskosität	31
4.1. Viskosität	31
4.2. Geophysikalische Vorbetrachtungen zur Berechnung des Mechanismus der episodischen Konvektion im unteren Mantel	34
4.3. Die Berechnung der episodischen Konvektion im unseren Erdmantel	37
4.4. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit Beobachtungsdaten. Diskussion	41
4.5. Der Einfluß der Konvektion im unteren Mantel auf den Geodynamo	47
5. Über die Möglichkeit der thermischen Konvektion im äußeren Erdkern	51
5.1. Das Dynamo-Problem	51
5.2. Das Kernparadoxon	52
5.3. Aufhebung des Kernparadoxons bei Annahme der Schmelzpunktkurve von Higgins und Kennedy	53
5.4. Aufhebung des Kernparadoxons bei Ablehnung der Schmelzpunktkurve von Higgins und Kennedy	55
5.5. Schlußfolgerungen	61
6. Die Volumenabhängigkeit der Schmelztemperatur unter hohem Druck und ihre Beziehung zu einer neuen dimensionslosen Größe	62
6.1. Problemstellung	62
6.2. Eine neue Herleitung des Lindemannschen Schmelzpunktgesetzes	62



6.3.	Diskussion	67
6.4.	Eine neue dimensionslose Größe und ihre Druckabhängigkeit	69
6.5.	Ergebnisse: $Q_0(P)$ - ein neues Hilfsmittel zur Bestimmung der Schmelzpunkttemperatur im Erdkern	70
6.6.	Die Druckabhängigkeit weiterer dimensionsloser Zahlen, die die Schmelztemperatur enthalten	71
7.	Eine neue Zustandsgleichung für hohe Kompressionen	75
7.1.	Problemstellung	75
7.2.	Physikalische Vorbetrachtungen zur Herleitung der neuen Zustandsgleichung	75
7.3.	Herleitung der neuen Zustandsgleichung	77
7.4.	Andere Zustandsgleichungen	80
7.5.	Vergleich der drei Zustandsgleichungen mit Meßdaten	81
7.6.	Schlußfolgerung	81
8.	Konvektion mit anderen temperaturabhängigen Materialparametern	83
8.1.	Herleitung der Konvektions-Differentialgleichungen mit temperaturabhängigen Materialparametern	83
8.2.	Die Herleitung der linearisierten Differentialgleichungen	86
8.3.	Die Lösung für eine Schicht mit freien Grenzen	90
8.4.	Die Lösung für eine Schicht mit festen Grenzen	92
9.	Kinematik der Mantelkonvektion	94
9.1.	Präliminarien	94
9.2.	Kinematische Theorie der Konvektionsströmungen im Erdmantel	104
9.2.1.	Grundzüge	104
9.2.2.	Die zweidimensionale kinematische Konvektionstheorie	106
9.2.3.	Die dreidimensionale kinematische Konvektionstheorie	112
9.2.4.	Variante A der dreidimensionalen kinematischen Theorie der Mantelkonvektion	120
9.2.5.	Variante B der dreidimensionalen kinematischen Theorie der Mantelkonvektion	130
9.2.6.	Vergleich der theoretischen mit Beobachtungsergebnissen	133
9.3.	Die Verteilung der Kontinente und Ozeane und ihre Beziehung zur kinematischen Konvektionstheorie	135
10.	Bénard-Konvektion mit innerer flächenhafter Wärmequelle	143
10.1.	Einführung	143
10.2.	Die Herleitung der Bewegungsgleichungen	144
10.3.	Die Lösung des Problems	148
11.	Konvektion in einer inkompressiblen mikropolaren Flüssigkeit	152
11.1.	Vorbemerkungen	152
11.2.	Welche Anwendungen der mikropolaren Hydromechanik sind in der Geophysik erfolgversprechend?	154
11.3.	Grundgleichungen	154
11.4.	Linearisierte Grundgleichungen. Reduktion des Problems auf eine gewöhnliche Differentialgleichung	157

11.5.	Die Lösung des Problems für eine Schicht mit festen Grenzen	161
11.5.1.	Grenzbedingungen	161
11.5.2.	Die Lösung	163
12.	Konvektion in einer kompressiblen mikropolaren Flüssigkeit mit Mikrodeformation	165
12.1.	Grundgleichungen	165
12.2.	Linearisierte Grundgleichungen	168
12.3.	Reduktion des Problems auf eine gewöhnliche Differentialgleichung und Diskussion der Lösung	170
13.	Nicht-Newtonsche Mantelkonvektion	176
13.1.	Motivation	176
13.2.	Das Stoffgesetz	178
13.3.	Die dynamischen Grundgleichungen	179
13.4.	Reduktion der Gleichungen	181
14.	Entmischungskonvektion	185
14.1.	Die Differentiation des Erdkerns und ihre Beziehung zur Konvektion	185
14.2.	Die Rayleigh-Taylor-Instabilität mit viskoser Dissipation	187
14.2.1.	Grundgleichungen	187
14.2.2.	Lösungen und Schlußfolgerungen	191
14.3.	Einige verwandte Probleme	193
15.	Schlußfolgerungen	195
	Dank	196
	Anhang	197
	Literatur	243

## Zusammenfassung

Der Gegenstand vorliegender Arbeit ist vor allem die Konvektion im Erdmantel. Aber auch Erwägungen über die Möglichkeit thermischer Konvektion im äußeren Erdkern und die Druckabhängigkeit wichtiger Materialparameter werden behandelt, wobei sich eine enge Beziehung zwischen den erörterten Themen zeigt.

In Abschnitt 1. wird begründet, warum Konvektion der wichtigste Motor der geotektonischen Vorgänge ist. Auch andere geotektonische Theorien werden besprochen. In 2. folgt eine Herleitung des Gleichungssystems der Mantelkonvektion. Der Inhalt von Abschnitt 3. wird nach dem von 4. zusammengefaßt. Ausgehend von geochemischen Ergebnissen nimmt der Autor in 4. an, daß der untere Mantel an radioaktiven Wärmequellen ärmer ist als der obere. Infolgedessen ist der thermokonvektive Antrieb im unteren Mantel zu schwach, um dort die Konvektion dauernd aufrechtzuerhalten. Gleichzeitig sind dort aber Gitter- und Strahlungs-Wärmeleitfähigkeit klein, so daß die erzeugte Wärme nur in geringem Maße abgeleitet wird. Deshalb steigt die Temperatur. Wegen der bekannten Temperaturabhängigkeit der effektiven Viskosität wächst dadurch die Rayleigh-Zahl, bis die kritische Rayleigh-Zahl überschritten wird und auch im unteren Mantel Konvektion beginnt. Durch die Strömungen wird die Wärme abgeführt, wodurch es zu einer Verstärkung der immer vorhandenen Obermantel-Konvektion, des Magmatismus und der Gebirgsbildung sowie zu erdweiten Transgressionen kommt. Infolge der Wärmeabfuhr sinkt die Rayleigh-Zahl wieder unter die kritische, d. h. wegen der geringen inneren Wärmequellendichte erstirbt die Untermantel-Konvektion, bis es nach einer langen Zeit der Wärmeakkumulation zur nächsten Konvektionsepisode kommt. Die Differentialgleichungen des Problems wurden auf ein Gleichungssystem mit einer Hammerstein-Integralgleichung reduziert und numerisch gelöst. Es ergaben sich vier Konvektionsepisoden, die zeitlich mit den vier Maxima von Gastils Kurve der magmatischen Aktivität übereinstimmen: Diese vier Umschwünge liegen bei 2820, 3633, 4128, 4496 Ma nach Entstehung der Erde, wobei das Erdalter zu 4600 Ma angenommen wurde. Durch Vergleich empirischer Kurven ergab sich, daß diese Zeiten auch erdweiten Transgressionen entsprechen und daß letztere im Phanerozoikum genau in den Zeiten liegen, in denen sich das geomagnetische Dipolfeld nur selten umpolte. Letzteres dürfte damit zusammenhängen, daß der untere Mantel einen Teil der Randbedingungen der hydro-magnetischen Konvektion im Außenkern der Erde bestimmt.

Das leitet über zum Abschnitt 5., in welchem erörtert wird, unter welchen Bedingungen der Geodynamo durch thermische Konvektion im äußeren Kern angetrieben werden kann. Es zeigt sich, daß das Kernparadoxon mit der angenommenen Abhängigkeit des Schmelzpunktes  $T_m$  vom Druck bzw. vom Atomvolumen  $v$  steht und fällt. Diese Abhängigkeit wird in 6. auf zwei getrennten Wegen aus unterschiedlichen Voraussetzungen hergeleitet. Die erste Herleitung geht von einem zwischenatomaren Potential und einem Versetzungsmodell aus, die zweite Herleitung beruht auf der Zustandsgleichung von ULLMANN und PAN'KOV, auf der Vashchenko-Zubarev-Relation und dem Lindemann-Gesetz. Aus der Gittertheorie allein kann man auch die Zustandsgleichung herleiten. Daraus werden unabhängig die Exponenten der  $T_m(v)$ -Gleichungen bestimmt. Diese erweisen sich als übereinstimmend. In Umkehrung der Schlußkette kann man bei Annahme der anderen genannten Voraussetzungen Lindemanns Gesetz herleiten, was jedoch mit Notwendigkeit nur für hohe Koordinationszahlen bzw. hohe Drücke gilt. Die Beziehungen der Schmelztemperatur zu makroskopischen physikalischen Meßgrößen, die für den Außenkern als Funktion der Tiefe bekannt sind, wurden untersucht.

Eine neue dimensionslose Größe  $Q_0$ , die den Grüneisenparameter nicht enthält, erweist sich als geeignet, in künftigen Arbeiten als Hilfsmittel für die Bestimmung der Schmelztemperatur im äußeren Kern der Erde zu dienen. Die Druckabhängigkeit noch allgemeinerer dimensionsloser Größen  $Q_n$  wurde analytisch und für die chemischen Elemente auch numerisch bestimmt. Verschiedene interessante dimensionslose Größen wurden im Periodensystem dargestellt und verglichen.

Um die Frage der Druckabhängigkeit der Schmelztemperatur und damit das Problem der Möglichkeit thermischer Konvektion im äußeren Kern künftig noch realistischer untersuchen zu können, wurde in 7. eine neue Zustandsgleichung für Metalle hergeleitet. Ausgangspunkt der Herleitung ist ein realistischer Ausdruck für die freie Enthalpie, wobei nicht nur die Gitteranteile, sondern auch die Fermi-Energie, die Austausch- und Korrelations-Energie der Elektronen in Rechnung gesetzt werden. Dieser Ausdruck wird mit Hilfe von drei freien Parametern erweitert. Es gelingt, die neue Zustandsgleichung so umzuformen, daß nur noch makrophysikalische Materialparameter in ihr vorkommen. Dadurch wird die Gleichung sowohl für die experimentelle Hochdruckphysik als auch für die Geophysik anwendbar, sie hat jedoch den Vorteil, daß die Bindungsstruktur in ihr besser berücksichtigt ist als in anderen Zustandsgleichungen. Die neue Gleichung wurde gemeinsam mit zwei anderen Zustandsgleichungen, die sich bereits gut bewährt haben, an isothermen und Hugoniot-Daten von 40 Stoffen erprobt. Es ergab sich nicht nur für metallische Elemente, sondern auch für Halogenide und einige geophysikalisch wichtige Oxide eine gute Übereinstimmung mit den Meßdaten, die für die meisten Stoffe besser ist als die der anderen zwei Zustandsgleichungen.

In 8. wird das hydrodynamische Stabilitätsproblem einer horizontalen ebenen viskosen Flüssigkeitsschicht mit inneren Wärmequellen sowohl für den Fall freier als auch für den Fall fester Grenzen gelöst. Neu an der vorliegenden Untersuchung ist, daß folgende Größen und ihre Temperaturabhängigkeiten in einer den Bedingungen des Erdmantels angepaßten Weise bei dem behandelten Konvektionsproblem berücksichtigt werden: Strahlungs- und Gitter-Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme und Wärmeausdehnungskoeffizient. Bei nur unwesentlichen Vernachlässigungen konnten die analytischen Lösungen, alle dazugehörigen Konstanten und die Säkulargleichung bestimmt werden.

Während in den bisherigen Abschnitten vor allem der Einfluß der Temperatur- und Druckabhängigkeit der Stoffparameter auf die Konvektion, insbesondere auf den zeitlichen Verlauf der Konvektion, untersucht wurde, wird in 9. die Frage der Geometrie der Strömungen behandelt. Ausgehend von einem System strukturell einfacher Postulate wird die Kinematik der Mantelkonvektion hergeleitet. Diese Theorie ist hinsichtlich der im Mantel geltenden Stoffgesetze und der Energiequellen der Konvektion voraussetzungsfrei. Fußend auf modernen hydrodynamischen Arbeiten wird die Strömung als rollenartig eingeführt. Aus den möglichen Strömungstypen wird eine theoretische Topographie hergeleitet, die mit der beobachteten in quantitativer Übereinstimmung ist. Auch die Verteilung der seismischen Diskontinuitäten weist auf die Richtigkeit des Ansatzes hin.

In 10. wurde folgendes hydrodynamische Stabilitätsproblem gelöst: Eine waagrechte ebene Schicht, die aus einer Newtonschen Flüssigkeit besteht, wird an der unteren und oberen Grenzebene auf konstanten Temperaturen von  $T_0$  bzw.  $T_1$  gehalten. Dabei gilt  $T_0 > T_1$ . Zusätzlich gibt es in der Flüssigkeit eine wärmeproduzierende Ebene parallel



zu den Grenzebenen. Diese Ebene wird bei einsetzender Strömung nach Voraussetzung nicht verschoben, sie behindert aber auch die Strömung nicht mechanisch. Unter diesen Voraussetzungen entwickeln sich unter und über der wärmeerzeugenden Ebene Konvektionsrollen, die einander an dieser Ebene tangieren. Die hier entwickelte Theorie zeigt eine Analogie zur kinematischen Theorie von 9.

In 11. und 12. wurde als Modell für die Bénard-Konvektion in der partiell (zu 1 bis 2 %) geschmolzenen Asthenosphäre das hydrodynamische Stabilitätsproblem einer unendlichen horizontalen Schicht berechnet. Die Schicht besteht in 11. aus einer inkompressiblen, in 12. aus einer kompressiblen mikropolaren Flüssigkeit. Die Feldgleichungen für den Geschwindigkeitsvektor, den Mikrorotationsgeschwindigkeitsvektor, die Mikrodeformation, das Mikroträgheitsmoment, die Dichte, die Temperatur und den Druck bilden ein System von elf partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung von elf skalaren Funktionen. Es gelingt, das System zu entkoppeln und das Problem auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zu reduzieren. Für den Spezialfall der mikropolaren Oberbeck-Boussinesq-Flüssigkeit kann die analytische Lösung angegeben werden.

In 13. wurde das Stabilitätsproblem einer nicht-Newton'schen Flüssigkeit behandelt, wobei das Stoffgesetz dem Festkörperkriechen in Olivin entspricht. In 1. und 14. wird das Problem der Differentiation des Erdkerns erörtert, das am Anfang der Entwicklung der Erde eine Rolle gespielt haben kann. Dabei stellt sich die Frage, in welcher Weise die in Wärme umgewandelte potentielle Energie die Entmischungskonvektion beeinflusst. Deshalb wird in 14. das Problem der Rayleigh-Taylor-Instabilität mit viskoser Dissipation gelöst.

#### Summary

The present paper deals primarily with convection in the Earth's mantle. But it includes also considerations about the possibility of thermal convection in the outer core of the Earth and about the pressure dependence of significant material parameters, with a close relationship between the subjects considered becoming apparent.

In Section 1, we give a substantiation why convection is the most important motor of the geotectonic processes. Other geotectonic theories are considered, too. In Section 2, we infer the system of equations of mantle convection. The content of Section 3 will be discussed after that of 4. Starting from geochemical results, the author assumes in 4 that the lower mantle has a lower amount of radioactive heat produced per unit volume per unit time than the upper mantle. Consequently, the thermoconvective driving energy in the lower mantle is too weak to permanently maintain convection there. At the same time, however, the lattice and radiative heat conductivities are low there, so that the heat generated is dissipated only to a minor extent. Therefore, temperature increases. As a result, due to the well-known temperature dependence of the effective viscosity, the Rayleigh number increases until the critical Rayleigh number is surpassed and convection also starts in the lower mantle. Through the currents, heat is dissipated, causing an increase in the permanently existing upper-mantle convection, in magmatism and orogenesis as well as earth-wide transgressions. As a result of the heat



dissipation, the Rayleigh number again drops beyond the critical value, i. e., due to the low internal heat source density lower-mantle convection dies down until the next convection interval is started after a long period of heat accumulation. The differential equations of the problem have been reduced to a system of equations with a Hammerstein integral equation and solved numerically. Four convection episodes resulted which agree, in respect of time, with the four highest maxima of Gastil's curve of magmatic activity: These four overturns are found 2820, 3633, 4128 and 4496 m. y. after the accretion of the Earth, an age of the Earth of 4600 m. y. being assumed. A comparison of empirical curves showed that these times also correspond to earthwide transgressions and that the latter are found to precisely lie in the periods in the Phanerozoic in which the geomagnetic dipole field only rarely reversed polarity. The latter most probably has to do with the fact that the lower mantle determines part of the boundary conditions of the hydromagnetic convection in the Earth's outer core. In Section 3, it is shown that there cannot be convection intervals without internal heating.

This leads us to Section 5 where the conditions have been considered under which the geodynamo can be driven in the outer core by thermal convection. It is found that the core paradox is completely conditional on the assumed dependence of the melting point  $T_m$  on pressure or on the atomic volume  $v$ . This dependence is inferred in 6 in two different ways from different premises. The first deduction is based on an interatomic pair potential and on a dislocation model, the second deduction is based on the equation of state by Ullmann and Pan'kov, on the Vashchenko-Zubarev relation and on Lindemann's law. The equation of state can also be deduced from the lattice theory alone. From this, the exponents of the  $T_m(v)$  equations are independently determined. They are found to be in agreement. Reversing the sequence of conclusions, Lindemann's law can be inferred on the basis of the other conditions mentioned. However, this necessarily applies only to high coordination numbers or high pressures. The relations of the melting temperature to macroscopic physical quantities known as a function of depth for the outer core have been examined. A new dimensionless quantity  $Q_0$  not containing the Grüneisen parameter is found to be suited for serving in future studies as an auxiliary quantity for the determination of the melting temperature in the Earth's outer core. The pressure dependence of even more general dimensionless quantities  $Q_n$  has been determined analytically and, for chemical elements, numerically too. Various interesting dimensionless quantities have been shown in the periodic table and compared.

To be able to study the question of the pressure dependence of melting temperature and, thus, the problem of the possibility of thermal convection in the outer core in an even more realistic manner in the future, a new equation of state for metals has been inferred in 7. The starting point of the deduction is a realistic expression for Gibbs' free energy, with not only the lattice terms, but also the Fermi energy, the exchange and correlation energies of the electrons being taken into account. This expression is extended by means of three free parameters. The author is successful in so transforming the new equation of state that exclusively macrophysical material parameters occur in it. Consequently, the equation becomes applicable both to experimental high-pressure physics and to geophysics, however, it has the advantage that the bonding structure has been better allowed for in it than in other equations of state. The new equation, together with two other equations of state that have already proven well, has been tried out on isothermal and Hugoniot data of 40 substances. We obtained not only for metallic

elements but also for halides and some geophysically relevant oxides a good agreement with the measured data, which is better for most substances than that of the other two equations of state.

In 8, the hydrodynamic stability problem of a horizontal, plane, viscous fluid layer with internal heat sources is solved both for the case of free and for the case of rigid boundaries. The new aspect in the present study is that the following quantities and their temperature dependencies are taken into account in the convection problem in a manner adapted to the conditions of the Earth's mantle: Lattice and radiative heat conductivity, specific heat and heat expansion coefficient. While only insignificant neglects were made, it was possible to determine the analytical solutions, all pertinent constants and the secular equation.

Whereas the previous sections were primarily devoted to an examination of the influence of the temperature and pressure dependence of the substance parameters on convection, in particular, on the time behaviour of convection, Section 9 is dealing with the question of the geometry of the currents. Starting from a system of structurally simple postulates, the kinematics of mantle convection is inferred. This theory uses no prerequisites with respect to the constitutive equations valid in the mantle and the energy sources of convection. On the basis of modern hydrodynamical studies, the currents are assumed to be rolls. From the possible current types, a theoretical topography is inferred which is in quantitative agreement with the topography observed. The distribution of the seismic discontinuities, too, indicates the correctness of the postulates.

In 10, the following hydrodynamic stability problem is solved: A horizontal, plane layer consisting of a Newtonian fluid is maintained at the lower and upper boundary planes at constant temperatures of  $T_0$  and  $T_1$ , respectively, with  $T_0 > T_1$ . In addition, a heat-producing plane that is parallel to the boundary planes exists in the fluid. According to our assumption, this plane is not displaced at the onset of current, but it also does not mechanically obstruct the current. In these conditions, convection rolls develop under and above the heat-producing plane, which are tangent to one another at this plane. The theory developed here shows an analogy to the kinematic theory of 9.

In 11 and 12, the hydrodynamic stability problem of a horizontal layer has been computed as a model for the Bénard convection in the partially (1 to 2 %) molten asthenosphere. In 11, the layer consists of an incompressible micropolar fluid, in 12, of a compressible micropolar fluid with microstretch. The field equations for the velocity vector, microrotation vector, microstretch, microinertia, density, temperature and pressure are a system of eleven partial differential equations for the determination of eleven scalar functions. The author succeeds in decoupling the system and reducing the problem to a common differential equation. The analytical solution can be given for the special case of a micropolar Oberbeck-Boussinesq fluid.

In 13, the stability problem of a non-Newtonian fluid has been considered, with a constitutive equation corresponding to the solid creep in olivine. In 1 and 14, the differentiation of the Earth's core that may have played a role at the beginning of the evolution of the Earth is considered. Here, the question is raised in which way the potential energy transformed into heat influences convection due to gravitational differentiation. Therefore, in 14, the problem of the Rayleigh-Taylor instability with viscous dissipation is solved.

## Резюме

Данная работа посвящена, главным образом, исследованию процесса конвекции в мантии Земли. Выполнены также оценки возможности термической конвекции во внешнем ядре Земли и оценки зависимости от давления наиболее важных вещественных параметров, причем все эти процессы и факторы оказались тесно связанными.

В главе I. обоснована роль конвекции как важнейшего внутреннего механизма тектонических процессов; при этом обсуждены также другие тектонические теории. В гл. 2. выведена система уравнений, описывающих процесс конвекции в мантии. О содержании гл. 3. будет упомянуто после подробного рассмотрения результатов главы 4.

Гл. 4. содержит рассмотрение физических факторов, приводящих к возникновению так называемой "эпизодической" конвекции, а также геофизических и тектонических проявлений этого механизма. На основе данных геохимии автор считает, что содержание радиоактивных источников тепла в нижней мантии является обедненным по сравнению с их содержанием в верхней мантии. Вследствие этого стимулирование термоконвекции в нижней мантии является слишком слабым для того, чтобы поддерживать её там непрерывно. Но, с другой стороны, коэффициенты решеточной и лучистой теплопроводности там так малы, что отвод выделившегося тепла незначителен. Поэтому при отсутствии конвекции температура в нижней мантии повышается, а величина коэффициента эффективной вязкости падает; при этом число Рэлея возрастает. После того, как число Рэлея превысит определенное критическое значение, в нижней мантии начинается процесс конвекции. Благодаря возросшей здесь интенсивности теплопереноса конвективными течениями происходит интенсификация конвекции в верхней мантии, что, в свою очередь, приводит к активизации процессов магматизма, горообразования и трансгрессии на всем земном шаре. Однако, это продолжается недолго, так как, вследствие интенсивного отвода тепла при незначительной концентрации внутренних источников тепла, значение числа Рэлея падает ниже критического и конвекция в нижней мантии снова затухает до тех пор, пока длительное накопление здесь не приведет к новому конвективному всплеску. Так происходит процесс эпизодической конвекции. Дифференциальные уравнения, описывающие этот процесс были сведены к интегральному уравнению Хаммерштейна и решались численно. В результате получилось четыре конвективных эпизода, причем по времени они хорошо согласуются с четырьмя максимумами кривой Гастиля для магматической активности. Эти конвективные всплески соответствуют следующим значениям времени: 2820, 3633, 4128 и 4496 млн. лет после образования Земли, причем возраст Земли принят равным 4600 млн. лет. При дальнейшем сравнительном анализе эмпирических данных оказалось также, что этим значениям времени соответствуют максимумы интенсивности процесса трансгрессии в фанерозое и периоды редкой переполаризации геомагнитного поля Земли. Последнее обстоятельство может быть связано с тем, что состояние нижней мантии частично определяет граничные условия для гидромагнитной конвекции во внешнем ядре Земли.

В гл. 3. показано, что рассмотренный выше процесс эпизодической конвекции невозможен при отсутствии внутренних источников тепла в нижней мантии.

В гл. 5. обсуждены условия, при которых механизмом геодинамо может быть термическая конвекция во внешнем ядре Земли. Показано каким образом наличие парадокса, связанного с возможностью возникновения термической конвекции во внешнем ядре Земли, определяется характером зависимости температуры плавления  $T_m$  от давления, или, — соответственно,

от атомного объема  $v$ . Выражение для зависимости  $T_m$  от давления выводится в гл. 6. двумя независимыми друг от друга способами, основанными на различных предположениях. Первый способ основан на рассмотрении межатомного потенциала и некоторой дислокационной модели. В основу второго способа положены уравнение состояния, установленное Ульманом и Паньковым, соотношение Ващенко-Зубарева и закон Линдемана. Таким образом были получены два соотношения для  $T_m(v)$ . При определении степенных показателей, входящих в эти соотношения, было использовано также уравнение состояния, полученное из теории решетки. Показано, как при обращении хода логического вывода из определенных предположений может быть выведен закон Линдемана, который, однако, с необходимостью оказывается справедливым лишь для больших значений координационного числа, т. е. при высоких давлениях. В этой же главе приведены результаты исследования соотношений между температурой плавления и макроскопическими, физическими параметрами, зависимость которых от глубины для внешнего ядра известна. Предложена новая безразмерная величина  $Q_0$ , которая не содержит параметра Грюнайзена и в дальнейшем может быть использована для определения температуры плавления во внешнем ядре Земли. Была получена также аналитическое выражение некоторой обобщенной безразмерной величины  $Q_m$  в зависимости от давления; для определенных химических элементов были вычислены значения этой величины. Различные безразмерные величины, представляющие интерес при изучении данной проблемы, были представлены в виде некоторой периодической системы и было проведено сравнение этих величин между собой.

В гл. 7. выведено новое уравнение состояния для металлов, которое должно послужить основой для дальнейших исследований вопроса о зависимости температуры плавления от давления, и, вместе с тем, проблемы о возможности термической конвекции во внешнем ядре Земли. Исходным пунктом этого вывода явилось реальное выражение для термодинамического потенциала Гиббса, в котором были учтены не только вклад решетки, но также энергия ферми, обменная энергия и корреляционная энергия электронов. Это выражение было обобщено путем введения трех новых независимых параметров. Новое уравнение состояния удалось преобразовать так, что в него входят лишь макроскопические вещественные параметры. Благодаря этому уравнение применимо как в экспериментальной физике высоких давлений, так и в геофизике; причем структура химических связей улитывается в нем лучше, чем в других разновидностях. Новое уравнение, наряду с двумя другими уравнениями, которые хорошо зарекомендовали себя на практике, было опробовано на массиве экспериментальных изотермических данных и Гюгньо-данных для 40 веществ. При этом оказалось, что не только для металлических элементов, но также для галогенидов и некоторых важных с точки зрения геофизики окислов, имеет место хорошее согласие вычисленных с помощью уравнения состояния данных с данными измерений; для большинства веществ это согласие лучше при применении нового уравнения состояния, чем двух других его разновидностей.

В гл. 8. рассмотрены результаты решения проблемы о гидродинамической устойчивости горизонтального плоского слоя вязкой жидкости как для случая свободных, так и для случая твердых границ. Новым при нашем подходе является то, что рассмотрение проблемы конвекции в мантии проводится с адекватным учетом следующих физических параметров и их температурных зависимостей: лучистой и решеточной теплопроводности, удельной теплоемкости и коэффициента термического расширения. Аналитическое решение, входящие в него константы и секулярное уравнение были получены при несущественных упрощениях.



Таким образом, вышеперечисленные главы дают представление о выполненных автором исследованиях процесса конвекции и, в особенности, его развития во времени, при учете вещественных параметров мантии в их зависимости от температуры и давления.

Гл. 9. представляет собой исследование геометрии потоков. Кинематика конвекции в мантии выводится здесь из системы элементарных структурных постулатов. Эта теория свободна от каких-либо предположений о законах поведения вещества в мантии или об энергетических источниках конвекции. В соответствии с новейшими работами по гидродинамике нами вводятся в рассмотрение роликообразные течения. Из кинематической модели возможных течений следует топография земной поверхности. Рассчитанная таким образом топографическая поверхность представлена в виде разложения по сферическим функциям; причем оказалось, что коэффициенты этого разложения находятся в хорошем количественном согласии с соответствующими коэффициентами для наблюдаемой топографической поверхности. Распределение сейсмических разделов в мантии также свидетельствует о правильности выбранного нами подхода.

В гл. 10. рассмотрены результаты решения проблемы о гидродинамической устойчивости равновесного в начальный момент плоского слоя ньютоновской жидкости, на нижней и верхней границах которого поддерживаются постоянные значения температуры  $T_0$  и  $T_1$ , соответственно, причем  $T_0 > T_1$ . Кроме того, предполагается, что внутри слоя параллельно его границам расположена некоторая тепловыделяющая поверхность; предполагается также, что возникающие конвективные потоки не приводят к каким-либо перемещениям этой плоской поверхности, а она, в свою очередь, также не оказывает никакого механического препятствия потокам. При таких условиях над и под тепловыделяющей поверхностью развиваются конвективные роликовые течения, которые касаются друг друга. Эта теория приводит к результатам, аналогичным тем, которые были получены на основе кинематической модели.

В гл. 11. и 12. рассмотрена модель Бенаровской конвекции в частично (от 1 до 2 %) расплавленной астеносфере. Проведены расчёты, связанные с проблемой гидродинамической устойчивости бесконечного слоя. В главе 11. этот слой рассматривается как слой несжимаемой жидкости, а в главе 12. — как слой сжимаемой микрополярной жидкости. Уравнения поля вектора скорости, вектора скорости микровращения, микродеформации и микромомента инерции, а также плотности, температуры и давления образуют систему из 11-ти дифференциальных уравнений в частных производных, на основе которой подлежат определению 11 скалярных функций. Систему удастся преобразовать и свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что для частного случая микрополярной жидкости Обербека-Буссинеска может быть получено аналитическое решение.

В гл. 13. рассмотрена проблема гидродинамической устойчивости слоя некоторой ньютоновской жидкости для которой зависимость скоростей деформации от напряжений определяется уравнением крипа для твердого оливина.

В гл. 14. продолжено начатое в гл. 1-ой обсуждение проблемы дифференциации в ядре Земли. Этот процесс мог играть определенную роль на начальной стадии развития Земли. При этом встает вопрос, каким образом потенциальная энергия, превращающаяся в тепло, может влиять на конвективное перемешивание. Поэтому в гл. 14-ой решается проблема неустойчивости Релея-Тейлора при учете вязкой диссипации.



## 1. Einführung: Erwägungen über tektonophysikalische Theorien und Hypothesen

Konvektion gilt heute als der entscheidende Motor geotektonischer Vorgänge. Diese Auffassung ist wohlbegründet, wenngleich eine Reihe anderer Ursachen modifizierend wirken dürfte. Diese anderen Mechanismen sind aber energetisch gesehen von untergeordneter Bedeutung. Nur im Falle der Expansionshypothese kann man diese Feststellung nicht treffen, da es dafür keine verifizierte physikalische Theorie gibt.

Der erste Grund für die Einführung der Konvektionstheorie (AMPFERER, 1906) war die Beobachtung, daß die Sedimente, die in den Orogenen heute geschuppt, gefaltet und als Decken überschoben vorliegen, geglättet eine bedeutend größere Fläche bedecken würden als das dazugehörige kristalline Grundgebirge, so daß hier eine Krustenverkürzung und Absaugung nach unten vorliegen muß.

Aus moderner Sicht sind es vor allem die beobachteten Bewegungen der kontinentalen und ozeanischen Lithosphärenplatten, die am zwanglosesten durch Konvektion zu erklären sind. Die der Plattentheorie zugrunde liegenden Beobachtungen werden hier als bekannt vorausgesetzt. Aus der Menge der zusammenfassenden Darstellungen seien hier nur die Monographie von LePICHON u. a. (1973) sowie die von BIRD (1980) und auf Deutsch von OLSZAK (1978) herausgegebenen Sammelbände genannt. Eine Reihe weiterer geophysikalischer Beobachtungen, die möglicherweise auf frühere oder gegenwärtige Festkörperkonvektion auch in anderen terrestrischen Planeten hindeuten, sind von PHILLIPS und IVINS (1979) zusammengestellt worden. Der zweite Grund für die Einführung der Konvektionstheorie ist also die beobachtete Plattenbewegung, die bekanntlich Geschwindigkeiten von einigen cm/a zeigt. Der **Deckenschub** in den Orogenen dürfte sehr wohl damit zusammenhängen: Für Ostalpen und Westkarpaten bestimmte TOLLMANN (1972) eine Minimalgeschwindigkeit von 0,15 cm/a. Die reale Transportgeschwindigkeit schätzte er auf 1 bis 2 cm/a. Die Zusammenhänge zwischen Orogenese und Konvektion sollen in Abschnitt 4. genauer untersucht werden.

Ein dritter Grund für die Einführung der Konvektion liegt im Wärmehaushalt der Erde. Nach DAVIES (1980b) beträgt die durchschnittliche Wärmestromdichte der Erde  $(80 \pm 8) \text{ mW/m}^2$ , die der Kontinente  $(55 \pm 5) \text{ mW/m}^2$  und die der Ozeane  $(95 \pm 10) \text{ mW/m}^2$ . Die radioaktive Wärmeerzeugung einer 6 km dicken ozeanischen Kruste trägt aber nur etwa  $0,5 \text{ mW/m}^2$  zur ozeanischen Wärmestromdichte bei. Unter Verwendung der Ergebnisse von PITT und TOZER (1970) läßt sich zeigen, daß Gitter- und Strahlungs-Wärmeleitfähigkeit des darunterliegenden Mantels nicht ausreichen, um den beobachteten ozeanischen Wärmestrom zu erklären. Deshalb muß Konvektion herrschen. RICHTER und PARSONS (1975), MCKENZIE und WEISS (1975) und RICHTER und DALY (1978) zeigten darüber hinausgehend, daß eine Konvektionsströmung, die nur aus der bewegten Ozeanplatte und einem Rückstrom besteht, für die älteren Teile des Ozeanbodens auf zu niedrige theoretische Wärmestromdichten führt. Deshalb führten sie in Analogie zu Modellversuchen zusätzlich kleinräumige Rollenströmung ein. Weitere Beweise für die Existenz von Konvektion im Erdmantel werden in den Abschnitten 4. und 9. dieser Arbeit geführt. Dort wird gezeigt, daß zeitliche und räumliche Verteilungen der Konvektionsströme quantitativ mit wesentlichen geophysikalischen Beobachtungen übereinstimmen. Das Hauptziel dieser Arbeit besteht darin, einige Ergebnisse des Verfassers zur Mantelkonvektion im Zusammenhang darzustellen. Zur Ergänzung der Übersicht sei auf die ausgezeichneten Beiträge von SCHUBERT (1979) und TURCOTTE (1979) hingewiesen.

Als Antrieb der Platten kommen im wesentlichen zwei Arten von Konvektion in Frage:

- a) thermische Konvektion, getrieben durch Wärme infolge radioaktiven Zerfalls oder durch die Anfangswärme (primordial heat) der Erde (SHARPE und PELTIER, 1979). (Die meisten Autoren, z. B. McKENZIE und WEISS (1975), der Verfasser und viele andere, nehmen heute thermische Konvektion infolge radioaktiver Aufheizung als Hauptantrieb an.)
- b) Entmischungskonvektion, bei der sich die Stoffe entsprechend ihrer Schwere sondern und dabei erzwungen auch Wärme nach außen tragen. Die Vertreter der Entmischungskonvektion lassen sich in zwei Gruppen teilen: Die gemäßigten versuchen den Anbau der Kontinente durch Schweresonderung an den Abtauchplatten (subduction slabs) zu erklären (RINGWOOD, 1975; FYFE (1978); O'NIONS u. a. 1979; JACOBSEN und WASSERBURG (1979); u. a.). Diese Ansichten lassen sich gut mit den Vorstellungen über thermische Konvektion verbinden (CZECHOWSKI, 1979). Die radikalen Vertreter der Entmischungskonvektion dagegen meinen, daß der Erdkern auch im Proterozoikum und Phanerozoikum noch wesentlich durch Ausscheidung von Eisen usw. aus dem Mantel gewachsen wäre und daß die wichtigsten tektonischen Bewegungen durch den Aufstieg der leichteren entmischten Stoffe von der Kern-Mantel-Grenze nach oben zustande kämen.

Zur Erläuterung dieser Ansicht sei folgendes bemerkt: Ramsays Hypothese, daß der Erdkern eine Hochdruckphase des Untermantel-Materials wäre, wird heute nur noch vereinzelt (z. B. von LYTTLETON, 1978) verfochten. Abgesehen von kosmochemischen Gründen (RINGWOOD, 1975; JACOBS, 1975; KERRIDGE, 1977) ist es der hohe Dichtesprung an der Kern-Mantel-Grenze, der zur allgemeinen Annahme eines hohen Eisenanteils am Erdkern geführt hat. Auch die Eisenkerntheorie birgt noch viele offene Probleme. Es entsteht z. B. die Frage, wieso das Eisen bei dem reichen Sauerstoffgehalt des unteren Mantels nicht oxidiert. MAGNITSKY (1952, 1969a) schlug vor, daß die Elektronen der N-Schale in die M-Schale gedrückt werden, wodurch Eisen die chemischen Eigenschaften eines Oxidationsmittels erhielt. SOROKHTIN (1971) und DUBROVSKII und PAN'KOV (1972) nahmen an, daß der Kern aus  $Fe_2O$  bzw. aus einer Mischung von Fe und FeO besteht. Auch RINGWOOD (1977) neigt inzwischen dazu, Sauerstoff als Zusatzbestandteil des Kerns anzunehmen. Viele andere Autoren (z. B. USSELMAN, 1975; AHRENS, 1979) bevorzugen dagegen Schwefel anstelle des Sauerstoffs. Unabhängig von der Frage der spezifisch leichteren Beimengungen entsteht das Problem, wie die Teilung der Erde in einen eisenreichen Kern und einen eisenarmen Mantel entstand. In den inhomogenen Entstehungsmodellen der Erde gibt es das Problem der Differentiation des Erdkerns nicht. Bei diesen Modellen nimmt man an, daß sich das Eisen zuerst zusammenballt, so daß der Eisenkern zeitlich vor dem Mantel entsteht (TUREKIAN und CLARK, 1969; GROSSMAN und LARIMER, 1974). Dieses Modell ist kritisiert worden, weil in ihm nicht klar wird, warum der äußere Kern flüssig ist. RUFF und ANDERSON (1980) haben es deshalb abgewandelt und schlagen vor, daß  $^{26}Al$  für die (frühe) Aufschmelzung des Außenkerns verantwortlich ist. Auch MAKALKIN (1980) hat die inhomogene Ballungshypothese in abgewandelter Form erneut vorgeschlagen. Viele kosmogonische Untersuchungen (wie z. B. UREY, 1952; SAFRONOV, 1969; RINGWOOD, 1975) gehen jedoch von einer homogenen Urerde aus, so daß eine Schweresonderung in Kern und Mantel nötig wäre. Während die meisten meinen, daß diese Trennung in einer sehr frühen Phase erfolgte, sehen - ähnlich wie früher RUNCORN (1962) - einige Moskauer Geophysiker (ARTYUSHKOV, 1970, 1979; KBONDJAN und MONIN, 1977; MYASNIKOV und FADEYEV, 1980) in einer noch heute stattfindenden Entstehung des Erdkerns die Quelle einer Entmischungskonvektion, die auch die Lithosphärenplatten bewegt. Die Entmischungszone soll nach ARTYUSHKOV an der Kern-Mantel-Grenze liegen. Dieser Vorschlag ist der einzige außer dem der thermischen Konvektion,

der energetisch ausreicht. Er hat aber wesentliche Nachteile: Schon NAGATA (1970) zeigte, daß aus der remanenten Magnetisierung der Gesteine folgt, daß das paläogeomagnetische Feld am paläogeomagnetischen Äquator im Betrag seit mindestens 2,7 Ga in derselben Größenordnung liegt. Bei Annahme eines hydromagnetischen Mechanismus zur Erzeugung des Erdmagnetfelds folgt daraus, daß auch der äußere Kern schon damals flüssig und von vergleichbarem Radius war. Inzwischen hat man noch wesentlich ältere Gesteine (3,9 Ga) entdeckt. Dadurch wurde die für einen wesentlichen Anteil an der Kerndifferentiation mögliche Zeitspanne noch weiter eingeengt und an den Anfang der Existenz der Erde geschoben. SAFRONOV (1978) und KAULA (1979) zeigten außerdem, daß am Anfang die Temperatur im Inneren der Erde, das dem heutigen Kern entspricht, unter 1500 K gelegen haben dürfte. Wahrscheinliche Schmelztemperaturkurven (vgl. Abschnitte 5. und 6.) steigen aber mit dem Druck stark an. Daraus ergibt sich, daß die Viskosität für ein homogenes Modell gerade im Inneren am höchsten war. Für eine Entmischung muß der Stoff aber mindestens teilweise geschmolzen gewesen sein (TOZER, 1974). Es ist also ungereimt, die Entmischung von innen beginnen zu lassen. Einleuchtender erscheint schon die Annahme, daß die Entmischung in der Tiefe des heutigen oberen Mantels begann, weil hier Temperatur und Schmelztemperatur am nächsten zusammen lagen (ELSASSER, 1963; VITJAZEV und MAJEVA, 1980). RINGWOOD (1975) weist darauf hin, daß die Pyrolit-Häufigkeiten von Ni, Co, Cu, Au usw. um ein bis zwei Größenordnungen höher sind als bei Quasi-Gleichgewichtsbedingungen einer Trennung in Metallkern und Silikate zu erwarten wäre. Daraus schließt er, daß die Bildung des Erdkerns schnell (in etwa 20 Ma) erfolgt ist. Andere Argumente für eine schnelle Kernbildung findet man bei SOLOMON (1979), SHAW (1979) und HAYASHI u. a. (1979), um aus der großen Zahl der Vertreter dieser Meinung nur einige zu nennen. Die einige Jahre ältere Literatur zu diesem Thema ist in umfassender Weise von JACOBS (1975) besprochen worden. Der Sinn dieses Absatzes besteht nicht darin, eine bestimmte Ansicht über die Bildung des Erdkerns zu favorisieren. Vielmehr sollte gezeigt werden, daß die völlige oder fast völlige Ersetzung des thermokonvektiven Antriebs der (phanerozoischen) Plattenbewegung durch Entmischungskonvektion wenig aussichtsreich erscheint. Auch KAUTZLEBEN und STILLER (1975) waren zu dem Schluß gekommen, daß sehr wahrscheinlich die thermischen Energiequellen bei der Konvektion überwiegen. Diese Auffassung wird auch von TRUBITSYN u. a. (1979) vertreten.

Es folgen einige Bemerkungen zu den Mantel-Plumes. Plumes sind röhrenartig enge, aufsteigende Flüssigkeitsmassen, wie man sie z. B. in der Atmosphäre als Rauchsäulen beobachten kann. Wesentlich für die Entstehung dieser Strömungsform ist, daß in der Navier-Stokes-Gleichung die Trägheitsterme viel größer als die viskosen Terme sind. RUNCORN (1980) zeigte durch eine numerische Abschätzung, daß es bei der Mantelkonvektion genau umgekehrt ist. Deshalb kann man Mantel-Plumes ausschließen. - Einen Versuch, die gemeinsame Wirkung von Konvektionsströmen und Gezeiten auf die Tektonik abzuschätzen, unternahm BOSTROM (1978). Arbeiten dieser Art sind umstritten. So versuchte JORDAN (1974) zu zeigen, daß die Gezeitenkräfte zu klein sind, um tektonisch wirksam zu werden.

Eine geotektonische Hypothese, die sich nicht leicht widerlegen läßt, ist die von der expandierenden Erde. CAREY (1976) hat in eindrucksvoller Weise die geologischen und geophysikalischen Beobachtungen geordnet dargestellt, die sich in diesem Sinne deuten lassen. Er kommt auf rein empirischem Wege zu dem Schluß, daß sich die Erde mit wachsender Geschwindigkeit ausgedehnt hat, so daß das Wachstum des Erdradius im Phanerozoikum am größten gewesen wäre. Auch SCHMIDT und EMBLETON (1981) vermuten eine starke Expansion.

Aus gemeinsamen Polwanderkurven für Afrika, Australien, Grönland und Nordamerika und geologischen Beobachtungen schließen sie, daß die Erde zwischen 1,6 Ga und 1,0 Ga vom halben Radius bis auf den heutigen gewachsen wäre. Vielleicht ist es möglich, den Widerspruch zwischen den empirischen Schlüssen zu vermeiden. Physikalisch läßt sich jedenfalls über geologische Hypothesen dieser Art wenig sagen, weil die dazu (von anderen) vorgeschlagenen Mechanismen auf neuen, noch unbestätigten physikalischen Gesetzen beruhen. Eine Übersicht zu Kosmologien mit variabler Gravitationskonstante gibt WESSON (1978). Eine neue Hypothese dieser Art wurde von GRABIŃSKA und ZABIEROWSKI (1980) vorgeschlagen. Der Verfasser meint dazu, daß der wichtigste tektonophysikalische Mechanismus Konvektion ist, wobei mindestens im Proterozoikum und Phanerozoikum thermische Konvektion vorherrschte. Die Konvektionsmodelle fußen auf bekannten physikalischen Gesetzen, auch die verwendeten Parameter können zumindest größenordnungsmäßig richtig abgeschätzt werden. Es gibt jedoch einige Beobachtungen wie z. B. den fortschreitenden Rückzug der Epikontinentalmeere im Phanerozoikum u. a. (siehe WALZER, 1973a), die durch Konvektion allein nicht, wohl aber durch Expansion erklärbar sind. Es ist aber zu betonen, daß diese Bemerkung im Gegensatz zu der über die analytisch und numerisch berechneten Konvektionsmechanismen, die z. T. in klarer Weise verifiziert werden konnten (siehe 4. und 9.), eine reine Vermutung ist. Viele Phänomene wie z. B. die alpinotype Orogenese mit Deckenbildung sind bestimmt nicht durch Expansion allein zu erklären. RICKARD und BELBIN (1980) untersuchten geometrisch und paläomagnetisch mögliche frühere Zusammenhänge der Kontinente. Dabei schlossen sie, daß, falls die Erdexpansion existiert, diese ein Hintergrundprozeß sein muß. Diese Auffassung stimmt im wesentlichen mit meiner (WALZER, 1973a) überein. Schon BUCHHEIM (1961) hatte vermutet, daß Konvektion möglicherweise in Verbindung mit Erdexpansion der wesentliche geotektonische Motor ist. Diese Bemerkungen sollen aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß im Gegensatz zur Konvektion auch heute noch die Expansionshypothese überwiegend ablehnend oder kritisch betrachtet wird (ANGENHEISTER, 1975; SAGER, 1976; RUNCORN, 1980). Es sei jedoch daran erinnert, daß es für Wegeners Kontinentalverschiebungshypothese eine ähnliche Zeit gab. Man kann m. E. heute nichts Endgültiges über die Erdexpansion sagen, sollte sich aber hüten, möglicherweise fruchtbare Ansätze durch allzu sichere Kritik zu verschütten.

Eine innerhalb der Konvektionstheorien z. T. noch ungeklärte Frage ist die, ob und in welchem Grade der untere Mantel an den Strömungen teilnimmt. Bis Mitte der Siebziger Jahre herrschte die Ansicht vor, daß die Konvektion auf den oberen Mantel beschränkt wäre. Heute nimmt eine Reihe von Geophysikern (z. B. SHARPE und PELTIER, 1979; ELSASSER u. a., 1979) Konvektionszellen an, die den gesamten Mantel umfassen. RINGWOOD (1975, S. 520) wies darauf hin, daß in diesem Falle recht große laterale Temperaturdifferenzen zwischen Auf- und Abstrom nötig wären, die so große regionale Schwereunterschiede zur Folge hätten, wie man sie nicht beobachtet. Einen vermittelnden Standpunkt nehmen die Theorien ein, die im oberen und unteren Mantel getrennte Konvektionszellen annehmen (z. B. WALZER, 1973a, 1974a; MCKENZIE und WEISS, 1975; RICHTER, 1979; CHRISTENSEN, 1981), die natürlich an den Berührungsflächen thermisch und mechanisch aufeinander einwirken. Es ist zu betonen, daß nicht die ganze vorliegende Arbeit, sondern hauptsächlich Abschnitt 4. von diesem Standpunkt abhängt. Dort wird diese Frage auch genauer behandelt. Ob es (z. T.) getrennte Materialkreisläufe in den einzelnen Schichten des Mantels gibt, hängt stark von der Natur der Übergangsschicht (transitional layer) ab. Nach MAGNITSKY (1969b) gibt es für den Übergang vom oberen zum unteren Mantel folgende Erklärungsmöglichkeiten:



- a) Die chemischen Zusammensetzungen sind verschieden.
- b) Die Silikate lösen sich in Oxide auf.
- c) Phasenübergänge.
- d) Übergang von der ionischen zur kovalenten Bindung.

Die Möglichkeit einer unterschiedlichen chemischen Zusammensetzung hatte man lange aus den Augen verloren, weil es bei ausschließlicher Benutzung von a) zu einem Widerspruch kommt, auf den auch MAGNITSKY (1969b) hingewiesen hatte: Wenn das mittlere Atomgewicht an dieser Grenze steigt, so wächst auch die Dichte, die seismischen Geschwindigkeiten aber fallen. Letztere steigen aber in Wirklichkeit an der 670-km-Diskontinuität. Deshalb wandte man sich bekanntlich mit Erfolg zunächst mehr den anderen Deutungsmöglichkeiten zu. RINGWOOD (1975, S. 545) faßte zusammen, daß zur Erklärung der Dichte- und Geschwindigkeitskurven der untere Mantel nicht reicher an Eisen zu sein brauche als der obere, er könne aber auf keinen Fall weniger Eisen als der obere enthalten, d. h. die Möglichkeit eines kleinen Sprunges im Chemismus besteht. Nach SAMMIS (1976) genügt ein chemisch bedingter Dichtesprung von 0,1 %, um die Konvektionskreisläufe zu trennen. Aus geochemischen Gründen erscheint ein chemischer Dichtesprung plausibel: RINGWOOD (1971, 1975) und DICKINSON und LUTH (1971) schlugen vor, daß der untere Mantel der schwere Rest der Differentiation der kontinentalen Kruste ist. Die Kontinente enthalten nach RINGWOOD (1975) 30 bis 60 % des Urans und des Bariums einer chondritischen Urerde, der obere Mantel habe die ursprüngliche Zusammensetzung. Auch die Arbeiten von O'NIONS u.a. (1979) und JACOBSEN und WASSERBURG (1979) weisen auf einen chemisch geschichteten Mantel hin. In vorliegender Einleitung konnten nicht alle behandelten Themen angerissen werden. Die älteren Arbeiten des Verfassers wurden in ausgezeichneter Weise von CAREY (1976, S. 36 usw.) resümiert, bezüglich der jüngeren sei auf Zusammenfassung und Inhaltsverzeichnis vorliegender Arbeit verwiesen.



## 2. Die Grundgleichungen der thermischen Konvektion

Im vorigen Abschnitt wurde dargestellt, weshalb thermische Konvektion als der entscheidende Vorgang in der thermischen und tektonischen Geschichte des Erdmantels anzusehen ist. Deshalb sollen jetzt die Grundgleichungen der thermischen Konvektion hergeleitet werden. Im Gegensatz zu den späteren Kapiteln sind die Herleitungen hier etwas ausführlich gehalten, weil dieses als Einführung in die Hydrodynamik des Problems dienen soll. Wir gehen von den Bilanzgleichungen der Erhaltungsgrößen aus. Im folgenden bedeutet  $\rho$  die Massendichte,  $\mathbf{v}$  oder  $v_i$  die Geschwindigkeit,  $b_i$  die Beschleunigung,  $\sigma_{ij}$  den Spannungstensor,  $\sigma'_{ij}$  den Spannungsdeviator,  $\tau_{ij}$  den Deformationstensor,  $V$  das Volumen,  $v$  das spezifische Volumen,  $dS_j$  den (nichtnormierten) Normalenvektor eines Flächenelements,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $T$  die Temperatur,  $q^*$  die spezifische Wärmeleistung der Wärmequellen, die vor allem durch radioaktiven Zerfall, aber an gewissen Grenzflächen auch durch chemische Reaktionen und Phasenübergänge entstehen,  $Q$  die entsprechende Wärmeleistungsdichte. Als Abkürzung verwenden wir

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Die Erhaltung der Masse wird durch

$$(2.2) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

beschrieben, die des Impulses durch

$$(2.3) \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulses folgt

$$(2.4) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung aus dem Energiesatz soll etwas näher erläutert werden: Der Beitrag der volumenproportionalen Kräfte zur Gesamtleistung ist  $\int v_i b_i \rho dV$ , der entsprechende Beitrag der Oberflächenkräfte ist

$$(2.5) \quad \int v_i \sigma_{ij} dS_j = \int \frac{\partial (v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} dV = \int v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int \sigma_{ij} \tau_{ij} dV,$$

wobei

$$(2.6) \quad \tau_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

und (2.4) verwandt wurde. Der Beitrag der inneren Wärmequellen zur Gesamtleistung beträgt  $\int \rho q^* dV$ , der Beitrag der durch die Oberfläche in den Körper fließenden Wärme ist

$$(2.7) \quad \int \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} dS_j = \int \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV.$$

Durch Addition der Beiträge ergibt sich für die zeitliche Änderung der spezifischen Energie  $E$

$$(2.8) \quad \frac{dE}{dt} = v_i \frac{dv_i}{dt} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \tau_{ij} + q^* + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right),$$

wobei (2.3) benutzt wurde. Das erste Glied der rechten Seite ist die spezifische kinetische Energie. Für die spezifische innere Energie  $u$  ergibt sich

$$(2.9) \quad \frac{du}{dt} = v\sigma_{ij}\tau_{ij} + q^* + v\nabla \cdot (\lambda\nabla T) .$$

Wir setzen nun voraus, daß infinitesimale Massenelemente, die aber noch eine sehr große Anzahl von Atomen oder Molekülen enthalten, näherungsweise im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Das braucht (und kann) jedoch nicht für den ganzen Mantel zutreffen. Dann gilt die Gibbssche Fundamentalgleichung

$$(2.10) \quad du = Tds - pdv ,$$

wobei  $s$  die spezifische Entropie ist. Es ist klar, daß diese Gleichung für Vorgänge mit sehr großen Gradienten der Temperatur  $T$  oder des Druckes  $p$  nicht mehr erfüllt ist. Falls z. B. die Temperaturänderung pro mittlere freie Weglänge in der Größenordnung der Temperatur liegt, darf (2.10) nicht mehr angewandt werden. Bei den geringen Gradienten im Mantel ist es dagegen gar keine Frage, daß (2.10) gilt. Aus (2.10) folgt

$$(2.11) \quad \frac{du}{dt} = \frac{T}{\rho} \left( \frac{d(\rho s)}{dt} - s \frac{d\rho}{dt} \right) + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} .$$

Daraus und aus (2.9) ergibt sich unter Beachtung der Massenbilanz

$$(2.12) \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = \frac{1}{T} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{q^* \rho}{T} + \frac{\eta \Phi}{T} .$$

Die Größe, die in dem die innere Reibung beschreibenden Glied auftaucht, wurde durch

$$(2.13) \quad \eta \Phi = \sigma_{ij}^i \tau_{ij}$$

definiert. (2.12) ist mit GEBRANDES (1975) Gleichung (9) identisch, die also (2.9) äquivalent ist. Wie üblich gilt

$$(2.14) \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}^i .$$

Das Stoffgesetz sei das einer Newtonschen Flüssigkeit:

$$(2.15) \quad \sigma_{ij}^i = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) = \eta r_{ij} .$$

Es folgt, daß

$$(2.16) \quad \Phi = 2\tau_{ij}\tau_{ij} - \frac{2}{3} (\tau_{kk})^2 = \tau_{ij}r_{ij}$$

gilt und somit  $\Phi$  zweckmäßigerweise als eine rein kinematische, von der Viskosität  $\eta$  unabhängige Größe eingeführt wurde. Um aus (2.9)  $u$  bzw. aus (2.12)  $s$  zu eliminieren, beachten wir folgendes:

$$(2.17) \quad dg^* = -sdT + vdp .$$

$g^*$  ist die spezifische freie Enthalpie (oder spezifische Gibbssche freie Energie).

Daraus folgt

$$(2.18) \quad s = -\left(\frac{\partial g^*}{\partial T}\right)_p \quad \text{und} \quad v = \left(\frac{\partial g^*}{\partial p}\right)_T$$

sowie

$$(2.19) \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p .$$

Aus (2.10) ergibt sich

$$(2.20) \quad du = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp - pdv .$$

Also gilt wegen (2.19)

$$(2.21) \quad du = c_p dT - T\alpha dp - pdv ,$$

wobei  $\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$  der thermische Ausdehnungskoeffizient und  $c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist. Die Wärmeleitungsgleichung lautet also

$$(2.22) \quad \rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q + \eta \Phi + \alpha T \frac{dp}{dt} .$$

Die Impulsbilanz wird in

$$(2.23) \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = -\rho g \lambda^i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\eta r_{ij})$$

umgeformt, wobei  $g$  die Schwerkraftbeschleunigung und  $\lambda^i$  der nach oben gerichtete Einheitsvektor ist. Ersetzt man  $r_{ij}$  nach (2.15)<sub>2</sub> und  $\Phi$  durch (2.16)<sub>1</sub> und (2.6), so bilden (2.22), (2.23) und (2.2) das System der fünf skalaren Grundgleichungen zur Bestimmung der fünf skalaren Unbekannten  $v$ ,  $\rho$  und  $p$ .

Für Kugelkoordinaten findet man eine Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen bei KARLIG (1974). Der Zusammenhang der Grundgleichungen mit dem Hamiltonschen Prinzip und dem Prinzip der virtuellen Arbeit wurde von MAUERSBERGER (1975) untersucht.

Nebenbemerkung: Anstelle von (2.22) benutzen CHANDRASEKHAR (1961), KOPAL (1963), WALZER (1973c) u. a. eine etwas andere Form der Wärmeleitungsgleichung, die gewisse mathematische Vorteile bei der (approximativen) Auflösung des Systems bietet. MIHALJAN (1962) und JOSEPH (1976) bewiesen, daß die daraus berechneten Größen sich von den aus (2.22) bestimmten um eine relative Änderung  $\delta_2$  unterscheiden.

$$(2.24) \quad \delta_2 = \frac{\lambda^2}{\rho^2 c_p^3 h^2 \Delta T} .$$

In dieser dimensionslosen Größe bedeutet  $h$  die Schichtdicke der zu  $-ge_3$  senkrechten Flüssigkeitsschicht und  $\Delta T$  den konstant gehaltenen Temperaturunterschied zwischen Unter- und Oberfläche der Schicht (Bénard-Problem). Für die üblichen Zahlenwerte für den oberen und den unteren Mantel (vgl. Abschnitt 4.) liegt  $\delta_2$  bei  $10^{-30}$  bis  $10^{-31}$ . Angesichts der viel weiter gehenden Näherungen, die man wegen der mathematischen Schwierigkeit einzuführen gezwungen ist, ist dieser Unterschied belanglos.

Das hergeleitete Gleichungssystem ist abgesehen von trivialen Fällen nicht lösbar. Deshalb hat es sich bei der theoretischen Behandlung von Konvektionsproblemen eingebürgert, folgende Annahmen zu machen, die in den meisten Fällen gute Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen bringen: (a) Änderungen der Dichte werden nur bei den Auftriebskräften berücksichtigt. (b) Andere Stoffparameter werden als konstant angenommen. (c) Die Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme wird vernachlässigt. - Die entsprechend vereinfachten Grundgleichungen wurden in voller Form bereits von OBERBECK (1879) aufgestellt und auf meteorologische Fragen angewandt. Später wurden sie meist BOUSSINESQ (1903) zugeschrieben. Näheres über die Geschichte der Gleichungen findet man

bei JOSEPH (1976). Eingehende Untersuchungen und Begründungen der Oberbeck-Boussinesq-Approximation stammen von SPIEGEL und VERONIS (1960), MIHALJAN (1962), VELARDE und PEREZ-CORDON (1976) und von GRAY und GIORGINI (1976). In letztgenannter Arbeit ist bewiesen, daß man Annahme (b) nicht einzuführen braucht: Auch wenn alle Eigenschaften der Flüssigkeit Funktionen von Temperatur und Druck sind, führen die Annahmen (a) und (c) auf eine sinnvolle Approximation. Das Fallenlassen der Einschränkung (b) ist für vorliegende Arbeit wichtig, weil sich die (effektive) Viskosität des Mantels für jedes sinnvolle Kriechgesetz mit der Temperatur stark ändert (vgl. Abschnitt 4.). Wie BUSSE (1978a) verwenden wir als Bedingung für die Anwendbarkeit der Approximation

$$(2.25) \quad \frac{\alpha \rho_0 g}{c_p} \ll 1,$$

die für den oberen bzw. unteren Mantel im ungünstigsten Falle Werte um 0,3 auf der linken Seite liefert, in anderen Fällen Werte, die Größenordnungen darunter liegen. Deshalb und wegen der mathematischen Schwierigkeit ist es üblich, die Konvektion im Erdinneren fast ausnahmslos unter Verwendung der Oberbeck-Boussinesq-Approximation zu behandeln. Auch auf anderen Anwendungsgebieten sind Arbeiten zu Abweichungen von dieser Approximation selten. Als Beispiel sei eine Arbeit von AHLERS (1980) erwähnt, der die Konvektionsströmungen von gasförmigem  $^4\text{He}$  experimentell untersuchte.

### 3. Instationäre Mantelkonvektion: Das Bénard-Problem mit temperatur- und druckabhängiger Viskosität

#### 3.1. Geophysikalische Motivation

In diesem Kapitel wird ein erstes Modell beschrieben, daß den instationären Anteil der Mantelkonvektion, der vor allem im unteren Mantel eine Rolle spielen dürfte, behandelt. Weil das Problem in 4. umfassender gelöst wird, ist hier die Motivation nur angedeutet, dort aber umfassender ausgeführt. Die wichtigsten Unterschiede der beiden Abschnitte bestehen darin, daß erstens in 3. Heizung von unten, in 4. Heizung von innen angenommen wird und zweitens unterschiedliche Lösungsmethoden angewandt werden.

Welchen festkörperphysikalischen Mechanismus man auch immer für das Kriechen des Mantelmaterials als wesentlich ansieht, bekommt man doch bei allen Mechanismen eine exponentielle Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur. Steigt die Temperatur, so sinkt die Viskosität. Weil sinkende Viskosität aber die Abfuhr der Wärme durch Konvektion fördert, liegt es nahe, Rückkopplungseffekte für möglich zu halten. Im Zusammenhang mit der kinematischen Konvektionstheorie (WALZER 1970, 1971, 1972, 1973a), die im Gegensatz zur damals vorherrschenden Ansicht die Konvektion nicht auf den oberen Mantel beschränkt sehen wollte, schlug WALZER (1974a) vor, daß die Konvektionsströme im oberen Mantel nie ganz verlöschen, während im unteren Mantel die Rayleigh-Zahl um die kritische ( $R_c$ ) schwankt, so daß dort episodische Konvektion stattfindet. So entstünde von Zeit zu Zeit durch thermische und mechanische Kopplung eine Verstärkung und nachfolgendes Abflauen der Konvektion auch im oberen Mantel. Das könnte erklären, warum die magmatische und die orogenetische Aktivität auf allen Kontinenten gleichzeitig ihre Höhepunkte finden. Damit sind ganze Epochen, nicht etwa einzelne orogenetische Phasen im Sinne von STILLE (1924) gemeint. Andererseits entstehen die magnetischen Streifenanomalien längs der mittelozeanischen Spaltenzonen einigermaßen gleichförmig, so daß man sich die Schwankungen in den Strömungsgeschwindigkeiten als recht langsam vorstellen muß.

Die Arbeiten anderer Autoren zu dem umrissenen Thema sollen in 3.10. besprochen werden. Die Ansicht, daß auch der untere Mantel ganz oder zum großen Teil zumindest zeitweise konvektiv fließt, wird inzwischen auch von Autoren vertreten, die vorher gegenteiliger Ansicht waren (z. B. von MCKENZIE und WEISS, 1975). Der Hauptgrund dafür scheint die Erkenntnis zu sein, daß Gitter- und Strahlungs-Wärmeleitfähigkeit der vermuteten Stoffe des unteren Mantels zu klein sind, um die Wärmeabfuhr des durch thermische Konvektion getriebenen Geodynamos zu erklären. Weil die erforderlichen Materialgrößen für den unteren Mantel nur größenordnungsmäßig bekannt sind, wird zunächst versucht, das Problem durch analytische Approximation zu lösen. Das gelingt in der Tat, wobei die Vernachlässigungen geophysikalisch begründet sind. Der untere Mantel wird durch eine flüssige Schicht approximiert, deren Viskosität in der Weise von Temperatur und Druck abhängt, wie das aus dem Kriechen von möglichen Mantelgesteinen bekannt ist. (Die Modellierung des unteren Mantels als flüssige Schicht bedeutet natürlich nicht, daß er im physikalischen Sinne flüssig ist, sondern, daß für Langzeitvorgänge das Festkörperkriechen kontinuumsmechanisch so beschrieben werden kann.) Aus Gründen der mathematischen Schwierigkeit wurden in 3. keine inneren Wärmequellen angenommen, sondern das Bénard-Problem mit auf konstanten Temperaturen gehaltenen Grenzebenen gelöst. Dabei ist



die Temperatur der unteren Ebene höher als die der oberen. - Wer sich nur für die hydrodynamischen Aspekte des Kapitels interessiert, braucht nur 3.2., 3.4., 3.6. und 3.8. zu lesen.

### 3.2. Grundgleichungen des Bénard-Problems mit exponentieller Temperatur-Abhängigkeit der Viskosität

Die Oberbeck-Boussinesq-Approximation für diesen Fall lautet

$$(3.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$(3.2) \quad \nabla^2 \mathbf{v} + \vec{\lambda} R_1 \theta \mathbf{e}^\theta - \nabla \Gamma = P_0^{-1} e^\theta (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \partial \mathbf{v} / \partial t),$$

$$(3.3) \quad \nabla^2 \theta + k_4 \vec{\lambda} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \partial \theta / \partial t.$$

Die Gleichungen ergeben sich aus den unter 2. beschriebenen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Eine ähnliche Formulierung benutzt z. B. BUSSE (1978a), die jedoch für konstante Viskosität gilt. Wir benutzen auch eine andere Skalierung: Zwecks dimensionsloser Beschreibung von Länge, Zeit und Temperatur verwenden wir die Schichtdicke  $h$ ,  $h^2/k$  bzw.  $\Delta T/k_4$ , wobei  $k = \lambda/\rho \cdot c_p$  die Temperaturleitfähigkeit,  $\Delta T$  die konstante Temperaturdifferenz zwischen unterer und oberer Grenzfläche der Schicht und  $k_4$  eine in 3.3. definierte dimensionslose Konstante ist.  $\mathbf{v}$  ist hier der dimensionslose Geschwindigkeitsvektor,  $\theta$  eine dimensionslose Temperatur, die die Abweichung von der Temperaturverteilung im statischen Falle kennzeichnet.  $\vec{\lambda}$  ist ein Einheitsvektor entgegen der Richtung der Schwerkraft,  $\nu = \eta/\rho$  bezeichnet die kinematische Viskosität.  $R$  ist die Rayleigh-Zahl,  $P$  die Prandtl-Zahl, wobei

$$(3.4) \quad R = R_0 e^\theta; \quad P = P_0 e^{-\theta}; \quad \nu = \nu_0 e^{-\theta}$$

und

$$(3.5) \quad R_0 = \alpha g \Delta T h^3 / \nu_0 k; \quad P_0 = \nu_0 / k$$

gilt. Die konstante Größe  $\nu_0$  wird im nächsten Kapitel präzisiert.  $\Gamma$  ist ein verallgemeinerter Druck, in dem alle Kraftterme, die sich als Gradienten ausdrücken lassen, zusammengefaßt sind.  $R_1 = R_0/k_4$ ,  $t$  ist die Zeit.

### 3.3. Die Abhängigkeit der Viskosität von Temperatur und Druck

Unabhängig davon, durch welchen Kriechvorgang (z. B. Versetzungskriechen, Nabarro-Herring-Kriechen) der Hauptanteil des Fließens im unteren Mantel verwirklicht ist, steckt der größte Teil der Abhängigkeit der Viskosität von Temperatur und Druck in jedem Falle in einem Diffusionskoeffizienten folgender Gestalt

$$(3.6) \quad D = D_0 \exp(-Q_0/k_0 T) \exp(-pV_0/k_0 T).$$

Dabei ist  $Q_0$  eine Aktivierungsenergie,  $V_0$  ein Aktivierungsvolumen,  $T$  die Temperatur,  $p$  der Druck,  $k_0$  die Boltzmann-Konstante,  $D_0$  eine Diffusionskonstante. In Gleichung (3.6) führt man nach WERTMAN (1970) die Schmelztemperatur  $T_m$  ein, was den Vorteil hat, daß man zu Abschätzungszwecken eine bekannte Schmelztemperaturverteilung für den unteren Mantel, z. B. die von UFFEN (1952), verwenden kann.

$$(3.7) \quad (Q_0 + pV_0)/k_0 = k_2 T_m$$

$k_2$  ist eine dimensionslose Konstante; wir setzen sie gemäß einem von Weertman bevorzugten Wert gleich 18, es kommt uns jedoch nur auf die Größenordnung an. Die benutzten Relationen (3.6) und (3.7) findet man bei vielen Autoren. Gute knappe Zusammenfassungen bringen z. B. WEERTMAN und WEERTMAN (1975) sowie MEISSNER und VETTER (1976). Für die dynamische Viskosität  $\eta$  gilt also folgende Gleichung

$$(3.8) \quad \eta = k_1 \exp(k_2 T_m / T)$$

$k_1$  ist eine Konstante. Wie es in der Hydrodynamik üblich ist, spalten wir die Temperatur in einen statischen und einen dynamischen Teil

$$(3.9) \quad T = \bar{T}(z) + T'(x, y, z, t),$$

wobei  $z$  die vertikale,  $x$  und  $y$  die horizontalen Komponenten des Ortsvektors sind. Für  $T' < \bar{T}$  ergibt sich mit (3.9) durch Abbrechen einer Taylor-Entwicklung

$$(3.10) \quad \frac{T_m}{T} \approx \frac{T_m}{\bar{T}} \left(1 - \frac{T'}{\bar{T}}\right).$$

Damit erhalten wir aus (3.8)

$$(3.11) \quad \eta = k_3 e^{-k_4 T' / \Delta T},$$

wobei

$$(3.12) \quad k_3 = k_1 e^{k_2 T_m / \bar{T}} \quad \text{und} \quad k_4 = k_2 \frac{T_m}{\bar{T}} \cdot \frac{\Delta T}{\bar{T}}.$$

Nun verwenden wir als  $T_m$  die Schmelzpunkt-Kurve von UFFEN (1952), als  $\bar{T}$  die Temperaturverteilung im unteren Mantel nach TOZER (1959) (siehe auch Fig. 3 von WANG, 1972). Das Verhältnis der beiden Größen ist für Tiefen zwischen 1000 und 2900 km in erster Näherung konstant, so daß wir in (3.12)  $T_m / \bar{T} = 1,23$  setzen können. Betrachten wir die genannten Tiefen als die der Ober- und Unterfläche unserer Schicht, so können wir mit  $\Delta T = 1200$  K rechnen. Ersetzen wir weiterhin in (3.12)<sub>2</sub> das eine  $\bar{T}$  durch ein über den unteren Mantel gemitteltes  $\bar{T}_{av} = 3880$  K, so sind  $k_3$  und  $k_4$  näherungsweise als Konstanten anzusehen, wobei  $k_4 = 6,85$  ist. Bezeichnen wir eine über den unteren Mantel gemittelte Dichte mit  $\rho_{av}$  und definieren wir  $\nu_0 = k_3 / \rho_{av}$  und  $\theta = k_4 T' / \Delta T$ , so folgt die Temperaturabhängigkeit (3.4) aus (3.11). Bei all diesen Überlegungen kommt es uns nur auf die Größenordnung, nicht auf Genauigkeit der angegebenen Zahlenwerte an.

### 3.4. Reduktion der Grundgleichungen auf drei skalare Relationen

Im folgenden benutzen wir oft die Operatoren  $\vec{\delta}$  und  $\vec{\epsilon}$ , die durch (3.13) definiert sind.

$$(3.13) \quad \vec{\delta} \dots = \nabla \times (\nabla \times \vec{\lambda}) \dots \quad \text{und} \quad \vec{\epsilon} \dots = \nabla \times \vec{\lambda} \dots$$

Um die Kontinuitätsgleichung (3.1) zu eliminieren, führen wir folgende Darstellung für die Geschwindigkeit ein:

$$(3.14) \quad \vec{v} = \vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi}.$$

Wirkt der Operator  $\vec{\lambda} \cdot [\nabla \times$  auf die Impulsbilanzgleichung (3.2), so erhalten wir

$$(3.15) \quad \nabla^2 \Delta_3 \chi = P_0^{-1} e^\theta \{ \vec{\epsilon} \cdot [(\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi}) \cdot \nabla (\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi})] + \frac{\partial}{\partial t} \Delta_3 \chi + [(\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi}) \cdot \nabla (\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi})] \cdot \vec{\epsilon\theta} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial t} \},$$

wobei

$$(3.16) \quad \Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Lassen wir dagegen den Operator  $\vec{\lambda} \cdot [\nabla \times (\nabla \times$  auf die Impulsbilanz-Gleichung (3.2) wirken, so folgt

$$(3.17) \quad \nabla^4 \Delta_3 \phi - R_1 \Delta_3 \theta e^\theta = P_0^{-1} e^\theta \{ \vec{\delta} \cdot [(\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi}) \cdot \nabla (\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi})] + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Delta_3 \phi \} + P_0^{-1} \{ [(\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi}) \cdot \nabla (\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi})] \cdot \vec{\delta} e^\theta + [\vec{\delta} \frac{\partial \phi}{\partial t}] \cdot [\vec{\delta} e^\theta] \}.$$

Aus der Energiebilanz-Gleichung (3.3) folgt

$$(3.18) \quad \nabla^2 \theta - k_4 \Delta_3 \phi = (\vec{\delta\phi} + \vec{\epsilon\chi}) \cdot \nabla \theta + \partial \theta / \partial t.$$

Die Relationen (3.15), (3.17) und (3.18) bilden ein neues Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\phi$ ,  $\chi$  und  $\theta$  als Funktion von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$ . Später benutzen wir für  $\vec{\delta}$  oft folgende bequeme Form:

$$(3.19) \quad \vec{\delta} \dots = (\partial / \partial z \nabla - \nabla^2 \lambda) \dots$$

### 3.5. Randbedingungen und einige geophysikalische Bemerkungen

Die Randbedingungen lauten

$$(3.20) \quad \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \chi = \theta = 0$$

an festen Grenzflächen und

$$(3.21) \quad \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = \theta = 0$$

an freien Grenzflächen. Unter Schilden liegt die kinematische Viskosität des oberen Mantels um  $10^{21}$  cm<sup>2</sup>/s, unter Ozeanen um  $10^{19}$  cm<sup>2</sup>/s. Die Verteilung der Viskosität im oberen Mantel wurde detailliert vom Verfasser (1978b) beschrieben. Hier sei nur ergänzend bemerkt, daß NUR und MAVKO (1973) für die dynamische Viskosität der Asthenosphäre unter dem Gebiet vor der japanischen Küste  $5 \cdot 10^{19}$  poise und daß McCONNELL (1965) und CATHLES (1975) aus dem postglazialen Aufstieg des Fennoskandischen und des Kanadischen Schildes dynamische Viskositäten der Asthenosphäre unter Schilden von  $10^{21}$  bis  $10^{22}$  poise schlossen. Für die kinematische Viskosität des äußereren Kerns der Erde kommt man je nach Methode auf Werte zwischen  $10^{10}$  cm<sup>2</sup>/s und  $6 \cdot 10^{-3}$  cm<sup>2</sup>/s (siehe GUBBINS, 1976), wobei die wahrscheinlichsten Werte vielleicht bei  $10^3$  bis  $10^4$  cm<sup>2</sup>/s liegen. Da die kinematische Viskosität des unteren Mantels in Größenordnungen um  $10^{26}$  cm<sup>2</sup>/s liegen dürfte, ist es wohl angemessen, für unser Problem mit freien Grenzflächen zu rechnen. Auf den

genannten Zahlenwert von  $10^{26}$  cm<sup>2</sup>/s kam MacDONALD (1963) unter der Annahme, daß der Nicht-Gleichgewichts-Anteil des Äquatorwulstes der Erde auf Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit zurückzuführen ist. SCHUBERT und YOUNG (1976) schlossen, daß die kinematische Viskosität des unteren Mantels deutlich größer als  $10^{24}$  cm<sup>2</sup>/s ist, weil andernfalls die Temperatur der Kern-Mantel-Grenze unter der der Schmelztemperatur des Eisens bei dem entsprechenden Druck wäre. SCHLÜTER u. a. (1965) bewiesen, daß sowohl für feste als auch für freie Grenzflächen alle dreidimensionalen Strömungen gegenüber infinitesimalen Störungen instabil sind, so daß für kleine positive Werte von  $R - R_c$  Rollen verwirklicht sind. (Unter festen Grenzflächen sind solche zu verstehen, an denen die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  verschwindet. Rollen sind Strömungen mit geschlossenen Stromlinien, deren Verhältnis Höhe zu Breite eins beträgt, die aber meist keine Kreise sind, und bei denen  $v$  nicht von der dritten Raumkoordinate abhängt.) Dieser Schluß ist nicht unmittelbar auf unser Problem mit temperaturabhängiger Viskosität übertragbar, weil SCHLÜTER u. a. (1965) konstante Materialeigenschaften (im Sinne der Bedingungen (a), (b) und (c) von 2.) vorausgesetzt hatten. Da wir aber (WALZER, 1973a) unter der Annahme von Rollen zu Übereinstimmung mit wichtigen Beobachtungsdaten gekommen waren, setzen wir auch zweidimensionale Strömungen voraus.

$$(3.22) \quad \chi \equiv 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \dots \equiv 0$$

(3.22)<sub>1</sub> bedeutet, daß die Vertikalkomponente des Wirbelvektors verschwindet. Unsere Annahme (3.22) wird auch durch eine experimentelle Untersuchung von BOOKER (1976) bestätigt, die sich mit thermischer Konvektion mit stark temperaturabhängiger Viskosität und unendlicher Prandtl-Zahl beschäftigt. Er schließt: "There is no evidence that viscosity variation by more than two orders of magnitude has any major effect on the cell structure other than to increase the Rayleigh number at which the transition to three-dimensional motion occurs."

### 3.6. Das zweidimensionale Problem für beliebige Prandtl-Zahlen

Aus Gleichung (3.17) erhalten wir, indem wir (3.22) und die Substitution

$$(3.23) \quad \psi = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

benutzen, diesen Ausdruck

$$(3.24) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^4 \psi + R_1 \frac{\partial \theta_x}{\partial x}) + P_0^{-1} e^{\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\psi_z \psi_{xzz} - \psi_x \psi_{zzz} + \psi_z \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxz}] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi \right] + [\psi_z \psi_{xz} - \psi_x \psi_{zz} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_z] (\theta_x \theta_z + \theta_{xz}) + [\psi_z \psi_{zx} - \psi_x \psi_{xz} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_x] (\theta_x \theta_x + \theta_{xx}) \right\}.$$

Die Indizes  $x$  und  $z$  bedeuten je eine partielle Differentiation nach  $x$  bzw.  $z$ . Unter den gleichen Bedingungen folgt aus der Energiegleichung (3.18) die Relation (3.25), während man (3.24) in (3.26) umformen kann.



$$(3.25) \quad 0 = (\nabla^2 \theta + k_4 \frac{\partial \psi}{\partial x}) + \left[ \frac{\partial(\theta, \psi)}{\partial(x, z)} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right];$$

$$(3.26) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 [\nabla^2 \psi] + R_1 \frac{\partial \theta e^\theta}{\partial x} + P_0^{-1} e^\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial([\nabla^2 \psi], \psi)}{\partial(x, z)} - \frac{\partial([\nabla^2 \psi]}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + (\theta_x \theta_z + \theta_{xz}) \left[ \psi_z^2 \left( \frac{\psi_x}{\psi_z} \right)_z - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_z \right] + \right. \\ \left. + (\theta_x \theta_x + \theta_{xx}) \left[ \psi_z^2 \left( \frac{\psi_x}{\psi_z} \right)_x - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_x \right] \right\}$$

Diese zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von  $\theta$  und  $\psi$  als Funktion von  $x$ ,  $z$  und  $t$ . Man beachte die Symmetrien in der Form dieses Systems.

### 3.7. Herrscht gegenwärtig im unteren Mantel Konvektion?

Als Zahlenwerte für die physikalischen Parameter des unteren Mantels benutzen wir folgende:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} & k_3 &= 1,54 \cdot 10^{26} \text{ poise} \\ g &= 981 \text{ cm/s}^2 & \rho_{av} &= 5,03 \text{ g/cm}^3 \\ \Delta T &= 1200 \text{ K} & k &= 8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s} \\ h &= 1,9 \cdot 10^8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Wären diese Werte exakt, so erhielten wir nach (3.5)<sub>1</sub>  $R_0 = 657,5$  und die in 3.3. nur zur größenordnungsmäßigen Abschätzung verwendete Gleichsetzung von zur Zeit wirklicher Temperatur  $T$  mit  $\bar{T}$  gälte exakt. Das wäre so, weil für den Fall freier Grenzen nach CHANDRASEKHAR (1961), S. 36,  $R_c = 657,5$  gilt. Das heißt, der untere Mantel befände sich im Grenzzustand zwischen dem statischen und dem konvektiven Regime. Nun sind die angegebenen Zahlenwerte aber nur größenordnungsmäßig richtig, insbesondere ist  $k_3$  mit starken Unsicherheiten belastet. Wegen dieser Unsicherheiten läßt sich nur feststellen, daß die Rayleigh-Zahl für den unteren Mantel in der Nähe der kritischen liegt. Ob  $R$  zur Zeit über oder unter  $R_c$  liegt, d. h. ob jetzt Konvektion im unteren Mantel herrscht oder nicht, ist nicht entscheidbar.

Klar dagegen ist, daß sich die Größenordnungen von  $R_1$  und  $P_0^{-1}$  stark voneinander unterscheiden:

$$(3.27) \quad R_1 = R_0/k_4 = 96 \quad \text{und} \quad P_0^{-1} = k \rho_{av}/k_3 = 2,6 \cdot 10^{-28}.$$

### 3.8. Die Herleitung einer Approximation der Lösung

Wegen (3.27) kann für den unteren Mantel der letzte Term in Gleichung (3.26) vernachlässigt werden. Weil nicht in allen geophysikalischen Anwendungen mit exponentieller Temperaturabhängigkeit der Viskosität, für die (3.25) und (3.26) nützlich sein kann, die Prandtl-Zahl gegen unendlich geht, wurde zunächst die volle Form des Gleichungssystems aufgeschrieben. Aus (3.25) wird

$$(3.28) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = v^2 \theta + k_4 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} .$$

Aus (3.26) entsteht durch  $P_0 \rightarrow \infty$  und eine Integration

$$(3.29) \quad 0 = \nabla^4 \psi + R_1 e^{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} (1 + \theta) .$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (3.28) und (3.29) benutzen wir eine Methode aus der Magnetohydrodynamik von LORENTZ (1963) und MALKUS (1972), die auch schon KENNETT (1976) anwandte. Wir machen folgenden Ansatz:

$$(3.30) \quad \psi(x, z, t) = a^{-1} [8(1 + a^2)]^{1/2} C(\tau) \sin(\pi a x) \sin(\pi z) ,$$

$$(3.31) \quad \theta(x, z, t) = \frac{k_4}{\pi} \left\{ \left( \frac{8}{1 + a^2} \right)^{1/2} B(\tau) \cos(\pi a x) \sin(\pi z) + [A(\tau) - 1] \sin(2\pi z) \right\}$$

wobei

$$(3.32) \quad \tau = \pi^2 (1 + a^2) t .$$

Die Größe  $a$  erweist sich als Verhältnis von Höhe zu Breite einer geschlossenen Stromlinie. Dieselbe Größe ist bei CHANDRASEKHAR (1961) mit  $a/\pi$  bezeichnet, was bei Vergleichen von Ergebnissen zu beachten ist. Mit Hilfe des Ansatzes erhalten wir

$$(3.33) \quad \frac{dA}{d\tau} = Q(-A + 1 - BC)$$

und

$$(3.34) \quad \frac{dB}{d\tau} = -B + C ,$$

wobei

$$(3.35) \quad Q = 4/(1 + a^2) .$$

Bei der Herleitung von Gl. (3.34) wurde ein trigonometrisches Glied, das eine andere Form als die im Ansatz stehenden hat, vernachlässigt. Falls im letzten Faktor von Gl.

(3.29)  $\theta$  klein gegen 1 ist<sup>1)</sup>, folgt aus (3.29) und dem Ansatz

$$(3.36) \quad C = r_0 B \exp(c_1 B + c_2 A - c_2)$$

wobei

$$(3.37) \quad r_0 = \frac{a^2 R_0}{\pi^4 (1 + a^2)^3} = \frac{R_0}{R_c} ,$$

$$(3.38) \quad c_1 = \frac{k_4}{\pi} \left( \frac{8}{1 + a^2} \right)^{1/2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) ,$$

$$(3.39) \quad c_2 = \frac{k_4}{\pi} \sin(2\pi z) .$$

Die letzten der drei Verkürzungen bestehen darin,  $c_1$  und  $c_2$  in Gl. (3.36) künftig als Konstanten zu behandeln. Aus den Gleichungen (3.33), (3.34) und (3.36) folgt ohne Vernachlässigungen Gleichung (3.42): Aus (3.34) und (3.36) eliminieren wir  $C$  und erhalten

<sup>1)</sup> Später werden wir uns ohnehin auf kleine Abweichungen vom Ausgangszustand beschränken, was auch geophysikalisch (siehe 3.7.) gerechtfertigt ist.

$$(3.40) \quad c_2 A = c_2 - c_1 B + \ln(r_0^{-1}) + \ln\left(\frac{d \ln B}{d\tau} + 1\right).$$

Daraus entsteht mit  $d/d\tau =$ .

$$(3.41) \quad c_2 \dot{A} = -c_1 \dot{B} + \frac{B}{B + B} \left( \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right).$$

Daraus und aus Gleichung (3.33) bekommen wir eine komplizierte, nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung für  $B$  als Funktion von  $\tau$

$$(3.42) \quad \ddot{B} - \dot{B}^2/B - c_1 \dot{B}^2 - c_1 B \ddot{B} - Q c_1 B \dot{B} - Q c_1 B^2 + \\ + (\dot{B} + B) Q \ln [r_0^{-1} (\dot{B}/B + 1)] + c_2 Q B (\dot{B} + B)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist analytisch kaum zu lösen. Es sind dem Verfasser auch keine notwendigen und hinreichenden Kriterien bekannt, um zu entscheiden, ob (3.42) periodische Lösungen hat. Hier kann man sich für den unteren Mantel durch eine einfache Überlegung helfen: Falls - wie in 3.7. ausgeführt - der untere Mantel nahe dem Grenzzustand (marginal state) ist, kann man sich auf kleine  $B$  und  $\dot{B}$  beschränken. Aus (3.37) folgt dann  $r_0 = 1$  und aus (3.42) unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$(3.43) \quad \boxed{\ddot{B} - \dot{B}^2/B + Q(B + \dot{B}) \ln(1 + \dot{B}/B) = 0}$$

Der Verfasser hat diese nichtlineare Differentialgleichung gelöst. Die allgemeine Lösung lautet:

$$(3.44) \quad \boxed{B = \exp\left\{\int \exp[\exp(-Q(\tau - \tau_0))] d\tau - \tau + \tau_1\right\}}$$

$\tau_0$  und  $\tau_1$  sind die Integrationskonstanten. Diese Lösung ist nichtperiodisch. Entwickelt man den Logarithmus-Ausdruck in (3.42) in eine Reihe, die man nach wenigen Gliedern abbricht, so erhält man für diese andere Näherung von (3.42) zwar keine Lösung, kann aber Nichtperiodizität nachweisen. Damit ist gezeigt, daß periodische Lösungen von (3.42) mit Null-Durchgang unmöglich, periodische Lösungen von (3.42), die immer positiv bzw. negativ bleiben, unwahrscheinlich sind.

### 3.9. Schlußfolgerungen

Vor einigen Jahren schlug der Verfasser (1974a) folgenden Mechanismus für den unteren Mantel vor: Wegen (schwacher) radioaktiver Heizung von innen, die mit ungenügender Wärmeabfuhr durch Strahlungs- und Gitter-Wärmeleitfähigkeit verbunden ist, sinkt langsam die Viskosität bis die kritische Rayleigh-Zahl erreicht ist, ohne daß die Materie schmilzt. Dadurch tritt eine verhältnismäßig kurze Zeitspanne der Wärmeabgabe infolge Konvektion ein. Diese aber bewirkt ein Sinken der Temperatur, wodurch die Rayleigh-Zahl wieder unter den kritischen Wert fällt. Die episodischen Konvektionsströme des unteren Mantels verstärken die (infolge größerer radioaktiver Wärmequellendichte) nie erlöschenden Konvektionsströmungen des oberen Mantels und aktivieren dadurch zeitweise die tektonischen und magmatischen Prozesse in der Lithosphäre. Es ist klar, daß hierzu auch das festkörperphysikalisch zu erwartende Anwachsen der (effektiven) Viskosität mit der Tiefe (vgl. Abschnitt 4.) paßt, unabhängig davon, ob gegenwärtig dort Konvektion herrscht.

Der Verfasser entwickelte damals die entsprechende hydrodynamische Theorie mit exponentieller Temperaturabhängigkeit und Heizung von innen, konnte die Periodizität der Lösung aus Gründen der mathematischen Schwierigkeit aber nur plausibel machen. In 3. wurde für den Fall der Heizung von unten und Kühlung von oben, d. h. der reinen Bénard-Konvektion, mit exponentieller Temperaturabhängigkeit der Viskosität, für nicht allzu große Abweichungen vom Grenzzustand (marginal state) die allgemeine Lösung hergeleitet und bewiesen, daß es in diesem Falle keine periodischen Lösungen gibt. Die Heizung von innen scheint also wesentlich für das Auftreten periodischer Lösungen zu sein. Abschnitt 3. verwendet hauptsächlich Schlußweisen der theoretischen Hydromechanik und ist dadurch im Gegensatz zu den Arbeiten, die sich vornehmlich auf numerische Computer-Modelle stützen, nur von der Größenordnung einiger Materialparameter abhängig. ( $k_2$  in (3.7) hatten wir (WALZER, 1978a) gleich 18 gesetzt. Dieser Wert scheint jedoch eher für das Kriechen von Metallen zu gelten. Nach WEERTMAN (1978) empfiehlt sich für magnesiumreichen Olivin  $k_2 = 31,5$ . Diese Änderung von  $k_2$  brächte jedoch keine anderen Schlußfolgerungen hervor.) In Abschnitt 4. werden die Konvektionszyklen des unteren Mantels für innere Heizung auf eine von WALZER (1974a) unabhängige Weise berechnet und mit Beobachtungsergebnissen verglichen.

### 3.10. Diskussion

In mehr qualitativer Weise erklärten verschiedene Autoren einige geologische Phänomene ebenfalls durch instationäre Konvektion: RICE und FAIRBRIDGE (1975) schlugen vor, daß Episoden erhöhter Verschiebungsgeschwindigkeit der ozeanischen Lithosphäre, Transgressionen u. a. durch periodisch verstärkte Wärmeabgabe des Mantels erzeugt werden. O.L. ANDERSON und PERKINS (1975) erklärten die irreguläre Verteilung des Magmatismus in den amerikanischen Südweststaaten durch instationäre Wirbel der konvektiven Strömungen. Diese Gedanken sind in einem gewissen Grade mit den hier (in 3. und 4.) und von WALZER (1974a) entwickelten verwandt. Auch außer unserem Abschnitt 4. gibt es zu dem behandelten Thema einige numerische Experimente. PARMENTIER u. a. (1975) berechneten von innen beheizte Konvektionsströme mit variabler Viskosität, wobei sie sich nach Voraussetzung auf den stationären Fall beschränkten. ANDREWS (1975), HOUSTON und de BREMAECKER (1975) sowie KONO u. a. (1979) erweitern ihre Rechnungen auf den instationären Fall, wobei die Viskosität nur von der Tiefe, nicht aber von der Temperatur bzw. der Zeit abhängt. Übrigens kommen PARMENTIER u. a. (1975) und ANDREWS (1975) zu dem Ergebnis, daß Mantel-Plumes unwahrscheinlich sind.

Eine für unser Problem interessante nicht-geophysikalische Arbeit stammt von VANDERBORCK und PLATTEN (1974), die numerische Lösungen von Bénard-Problemen mit schwach temperaturabhängigen Materialgrößen fanden, indem sie ein Runge-Kutta-Verfahren verwandten. Die benutzten Temperaturabhängigkeiten sind linear bzw. quadratisch.

Unabhängig von der Frage der Zeitabhängigkeit der Konvektion, ist die Temperaturabhängigkeit der Viskosität für die Entstehung der ozeanischen Lithosphäre von Bedeutung. Man kann diese lithosphärischen Platten im wesentlichen als Abkühlungshaut mit erheblich erhöhter Viskosität auffassen. Diesen Aspekt der Mantelkonvektion untersuchten JACOBY (1976) und de la CRUZ-REYNA (1976) durch Modellversuche.



#### 4. Instationäre Konvektion im unteren Mantel mit innerer Heizung und temperatur- und druckabhängiger Viskosität

##### 4.1. Viskosität

Im Zusammenhang mit der Mantelkonvektion sind im wesentlichen drei Fragen bezüglich der Viskosität von Bedeutung.

- (a) Welchen Verlauf nimmt die (effektive) Viskosität als Funktion der Tiefe?
- (b) Welches Stoffgesetz, d. h. welche Beziehung zwischen Deformationsgeschwindigkeits-tensor und Spannungstensor, gilt für Mantelkonvektion?
- (c) Wie hängt die Viskosität von Temperatur und Druck ab?

Am klarsten läßt sich die letzte Frage beantworten, was für den vorgeschlagenen Mechanismus der instationären Konvektion im unteren Mantel wichtig ist. Doch zunächst zu Frage (a): Während in bezug auf den Wert der Viskosität im oberen Mantel die Ansichten konvergieren, besteht in bezug auf den unteren Mantel keine Einhelligkeit. Wie in 3. gezeigt wurde, müßte die Viskosität im unteren Mantel größer als  $1,54 \cdot 10^{26}$  poise und temperaturunabhängig sein, um dort Konvektion für immer zu verhindern. Da man den starken Einfluß der Temperatur früher nicht oder nur inkonsequent beachtete, fiel für die meisten Bearbeiter die Frage des Viskositätswertes mit der Frage der Möglichkeit der Konvektion zusammen.

Der aus Satellitenbahnen bestimmte mittlere Wert der Elliptizität der Erde beträgt  $1/298,25$ . Nimmt man an, daß die Erde im hydrostatischen Gleichgewicht ist, so ergibt sich aus der Dichteverteilung eine theoretische Elliptizität von  $1/300,0$ . MUNK und MacDONALD (1960) deuteten diese Abweichung durch Relaxation. Die gegenwärtige Figur der Erde entspreche einer höheren Drehgeschwindigkeit, die vor  $10^7$  Jahren geherrscht habe. Aus der Phasenverzögerung der Gleichgewichtsfigur schloß MacDONALD (1963) auf eine Viskosität des unteren Mantels von etwa  $10^{26}$  poise. Nach McCONNELL (1968) folgt aus dem postglazialen Aufstieg Fennoskandias, daß die Viskosität vom oberen zum unteren Mantel um etwa 4 Zehnerpotenzen auf Werte zwischen  $10^{24}$  und  $10^{26}$  poise für den unteren Mantel steigt. Aus Untersuchungen der Deformationen der Erde und festkörperphysikalischen Überlegungen kam McKENZIE (1967) zu dem Ergebnis, daß die Viskosität des unteren Mantels  $\sim 10^5$  mal größer als die des oberen sein müsse. Auch das Ergebnis von ISACKS und MOLNAR (1971), daß für Tiefbeben (Tiefe  $>300$  km) die Kompressionsspannungen parallel zur Abtauchplatte (descending lithospheric slab) liegen, führte zu der Vorstellung, daß diese in diesem Tiefenbereich durch wachsende Viskosität auf ansteigenden Widerstand stößt. RICHTER (1977) kam ebenfalls zu dem Schluß, daß die Spannungsverteilung in der Abtauchplatte mit wachsender Viskosität zu erklären sei. SCHUBERT und YOUNG (1976) berechneten, daß die Viskosität des unteren Mantels nicht unter  $10^{24}$  poise liegen darf, weil anderenfalls der Kern an der Kern-Mantel-Fläche fest sein müßte. Diese Ergebnisse sind nicht unwidersprochen geblieben. Aus dem isostatischen Aufstieg verschieden großer Gebiete (Laurentia, Fennoskandia, Lake Bonneville) nach der Entlastung kamen CATHLES (1975) und PELTIER und ANDREWS (1976) mit verschiedenen mathematischen Verfahren zu einander sehr ähnlichen Ergebnissen. CATHLES' (1975) Modell ist folgendes: Unter einer elastischen Lithosphäre, die je nach Gebiet 70 bis 150 km dick ist, liegt eine nur  $\sim 75$  km mächtige dünnflüssige Schicht mit  $4 \cdot 10^{20}$  poise. Der übrige obere Mantel hat  $(1,0 \pm 0,1) \cdot 10^{22}$  poise. Für den unteren Mantel findet CATHLES  $(0,9 \pm 0,2) \cdot 10^{22}$  poise.

Der gesamte Mantel sei als Newtonsche Flüssigkeit zu behandeln. CATHLES' Ergebnisse für den oberen Mantel unterscheiden sich nicht grundsätzlich von denen klassischer und moderner Autoren: HASKELL (1935) fand aus dem nacheiszeitlichen Aufstieg Fennoskandias für einen darunterliegenden viskosen Halbraum  $3 \cdot 10^{21}$  poise, VETTER und MEISSNER (1977, Fig. 10) kommen für 150 km Tiefe auf Werte zwischen  $10^{17}$  und  $10^{22}$  poise, je nachdem, ob das Gebiet unter Ozean oder konsolidiertem Kontinent liegt. Schon vor CATHLES hatten GOLDREICH und TOOMRE (1969) versucht, MacDONALDs (1963) hohen Viskositätswert für den unteren Mantel zu widerlegen: Sie zeigten, daß nach Subtraktion der Anteile der hydrostatischen Abplattung der verbleibende nicht-hydrostatische Anteil des Geoids deutlich triaxial ist. DICKE (1969) hatte historische Mondfinsternis-Beobachtungen durch Abbremsung der Erddrehung infolge Gezeitenreibung erklärt und einen Mittelwert von  $10^{22}$  poise für den gesamten Mantel hergeleitet. Weil sich auch in anderen jüngeren Berechnungen aus dem postglazialen Aufstieg derartige Werte ergeben haben, werden sie jetzt in vielen geophysikalischen Modellen (O'CONNELL, 1977; SHARPE und PELTIER, 1979) verwendet.

Was kann die Materialphysik zu dem besprochenen Themenkreis beitragen? In Abb. 4.1 sind die experimentellen Ergebnisse sehr vieler Autoren von ASHBY und VERRALL (1977) zusammengefaßt. Da Olivin zumindest im oberen Mantel vorherrschen dürfte, wurde er als Beispiel genommen. Nahe der Oberfläche (bis in etwa 20 km Tiefe) reagiert das Gestein auf Scherspannungen durch Schieferung, auch wenn diese sehr klein sind. Bis in etwa 100 km Tiefe herrscht plastisches Fließen vor, darunter ist die Schergeschwindigkeit einer Potenz  $n$  der Scherspannung proportional (Potenzgesetz oder power law). Das bleibt so mindestens bis in 400 km Tiefe, wo Olivin in eine Phase von Spinell-Struktur übergeht. (Es ist klar, daß die spezielle Abb. 4.1 wegen der Phasenübergänge in 400 und 670 km Tiefe nicht auf den unteren Mantel übertragen werden darf.) Wie Abb. 4.1 zeigt, fließt für sehr kleine Scherspannungen das Material infolge von Diffusion von Löchern im Atomgitter, für größere Scherspannungen dominieren verschiedene Wandermechanismen der Versetzungen und Korngrenzen. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt GOETZE (1978). Für Scherspannungen unter 2 kbar findet er ein Potenzgesetz mit  $n = 3$ , für über 2 kbar ein Dorn-Gesetz.

Da mit wachsendem hydrostatischem Druck die Neigung zum Idealkristall wächst, d. h. die Zahl der Fehlstellen (Versetzungen, Löcher) vermindert wird, weil so eine bessere Raumausnutzung gewährleistet ist, ist zu erwarten, daß die (effektive) Viskosität mit der Tiefe steigen muß, wenn das Material das gleiche bleibt. Das gilt besonders für den Übergang zu dichteren Gittern (Phasenübergang). Deshalb ist m. E. die Annahme einer nahezu konstanten Viskosität über fast den gesamten Mantel (CATHLES, 1975) unglaubwürdig. Gleichgültig ob ein Versetzungskriechmechanismus (dislocation glide, dislocation climb, ...) oder Nabarro-Herring-Kriechen (d. h. Diffusion von Löchern im Gitter und von Atomen auf Nichtgitterplätzen) vorherrscht, wird die Temperatur- und Druckabhängigkeit durch (3.6) und (3.7) beschrieben (WEERTMAN und WEERTMAN, 1975), wobei sich nur die Konstanten unterscheiden. Aus Formel (3.8) geht hervor, daß die Viskosität selbst ohne Phasenübergänge nur dann konstant ist, wenn sich  $T/T_m$  nicht ändert. [Wenn UFFENS (1952) Schmelztemperaturverteilung und WANGS (1972) Temperaturverteilung richtig sind, könnte die Viskosität innerhalb des unteren Mantels näherungsweise konstant sein (vgl. 3.3.).] Sieht man einmal davon ab, daß GRIGGS und POST (1973) und POST (1973) erklären, den postglazialen Aufstieg mit einem Potenzgesetz mit  $n = 3,21$  richtig erklären zu können, während die Mehrheit der Bearbeiter des nacheiszeitlichen Aufstiegs (wie z. B.

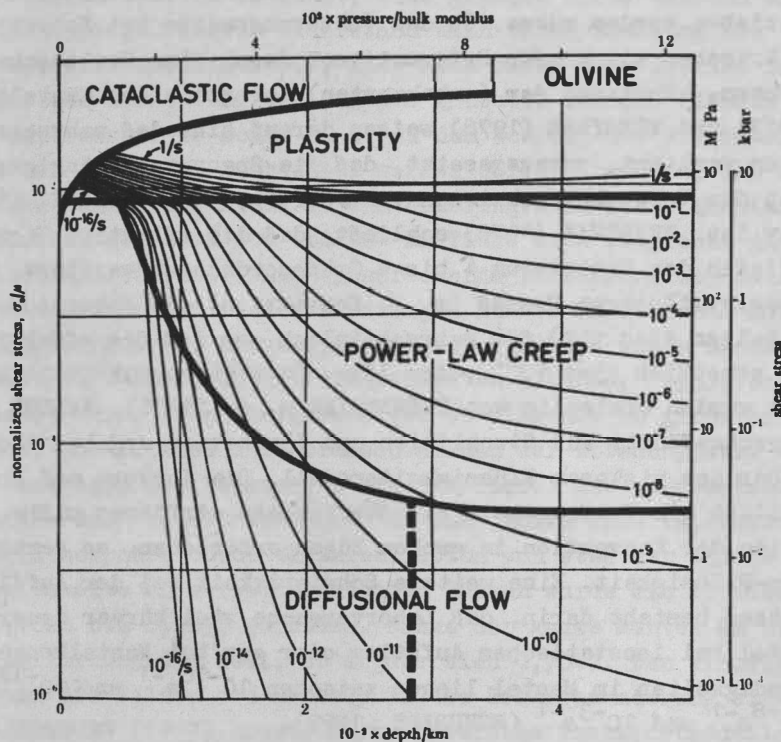


Abb. 4.1 Die für Olivin unter den Bedingungen des oberen Mantels gültigen Stoffgesetze nach ASHEY und VERRALL (1977). Innerhalb eines von Scherspannungen (shear stress) und normiertem hydrostatischem Druck (pressure/bulk modulus) aufgespannten Gebietes gilt das gleiche Stoffgesetz. Die dünnen Linien sind Linien gleicher Deformationsgeschwindigkeit

CATHLES) mit  $n = 1$ , d. h. mit einer Newton-Flüssigkeit, rechnet, so bleibt die Frage nach der richtigen Größenordnung der effektiven Viskosität des unteren Mantels offen. Ist der Mantel in bezug auf den nacheiszeitlichen Aufstieg eine Newton-Flüssigkeit, so käme bei den gängigen Kriechmechanismen am ehesten Nabarro-Herring-Kriechen in Betracht (NABARRO, 1948). In der Nähe der Langsamschicht (low-velocity layer) des oberen Mantels liegt  $T/T_m$  knapp unter 1, an der Kern-Mantel-Fläche aber in der Größenordnung  $\frac{1}{2}$ . Deshalb würde die Viskosität - im Gegensatz zu CATHLES (1975) - mit der Tiefe über viele Zehnerpotenzen anwachsen (GORDON, 1965). Führt man dagegen ein Potenzgesetz ein, so steigt zwar die Viskosität nur um zwei (SAMMIS u. a., 1977) oder wenig mehr Zehnerpotenzen, man hat aber - im Gegensatz zu CATHLES (1975) - keine Newton-Flüssigkeit. WEERTMAN (1978) schlägt nun eine vermutlich aussichtsreiche Lösung vor, um aus diesen Widersprüchen herauszukommen: Die Deformationen infolge postglazialer Epirogenese liegen zwischen  $10^{-5}$  und  $10^{-6}$ . Für Kriechversuche an Gesteinen und Konvektion im Mantel muß man aber viel größere Deformationen und stationäres (oder quasi-stationäres) Krie-

chen voraussetzen. Der postglaziale Aufstieg sei deshalb als Übergangskriechen<sup>1)</sup> (transient creep) bedingt durch andere Mikromechanismen anzusehen, während Konvektion durch ein Potenzgesetz (infolge verschiedener Versetzungskriechmechanismen, siehe auch CARTER, 1976) beschrieben werden müsse. Ob das (näherungsweise bei Konvektion realisierte) stationäre Kriechen mit großen Deformationen durch eine Newtonsche Flüssigkeit beschrieben werden kann, hängt von der (unbekannten) Korngröße des Mantelgesteins ab. GRIGGS und POST (1973) und WEERTMAN (1978) weisen darauf hin, daß wahrscheinlich nicht-Newtonsche Konvektion vorliegt, vorausgesetzt, daß die Spannungsabhängigkeit der Korngröße von Dunit nach den Versuchsergebnissen von POST (1973) und CARTER (1976) für den Mantel repräsentativ ist. WEERTMAN (1978) schließt, daß die effektive Viskosität für die verschiedenen Tiefen des Mantels um 4 bis 6 Größenordnungen variiert, falls für den betrachteten quasistationären Prozeß (z. B. Konvektion) ein Potenzgesetz gilt. Letzteres hält er (und halten auch wir) für wahrscheinlich, so daß die effektive Viskosität des unteren Mantels erheblich über  $10^{22}$  poise läge. Konvektionsuntersuchungen mit einem Potenzgesetz ( $n = 3$ ) wurden erstmalig von PARMENTIER u. a. (1976), WALZER (1977) und PARMENTIER (1978) durchgeführt. Für Stromlinien und Isothermen ergaben sich nur geringe Abweichungen gegenüber dem viskosen Flüssigkeitsmodell. Die Antwort auf Frage (b) ist also, daß man eigentlich ein Potenzgesetz als Stoffgesetz einführen müßte. Will man aber nur das Verhalten der Konvektion in groben Zügen erforschen, so genügt in erster Näherung eine Newton-Flüssigkeit. Eine weitere Schwierigkeit bei der Auffindung des richtigen Stoffgesetzes besteht darin, daß Laborversuche viel kürzer dauern müssen als das Kriechen im Mantel bei isostatischem Aufstieg oder gar bei Mantelkonvektion. Die Deformationsgeschwindigkeiten im Mantel liegen zwischen  $10^{-16} \text{ s}^{-1}$  und  $10^{-12} \text{ s}^{-1}$ , im Labor dagegen zwischen  $10^{-8} \text{ s}^{-1}$  und  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  (SCHUBERT, 1979).

#### 4.2. Geophysikalische Vorbetrachtungen zur Berechnung des Mechanismus der episodischen Konvektion im unteren Mantel

Lehnt man WEERTMANs (1978) Vorschlag, daß für den postglazialen Aufstieg Übergangskriechen maßgeblich sei, ab und beharrt man für diesen Vorgang auf einer Newtonschen Flüssigkeit, so kommt man zu dem (festkörperphysikalisch gesehen unwahrscheinlichen) Ergebnis, daß der gesamte Mantel eine konstante Viskosität um  $10^{22}$  poise hat (CATHLES, 1975; PELTIER und ANDREWS, 1976). Infolgedessen hat in jüngster Zeit eine Reihe von Autoren dauernde Mantelkonvektion mit Zellen befürwortet, die von der Kern-Mantel-Grenze bis zur Oberfläche der ozeanischen Lithosphäre reichen (DAVIES, 1977; O'CONNELL, 1977, SCHUBERT, 1979; ELSASSER u. a., 1979). Mit dieser Ansicht unverträglich bleibt die Beobachtung, daß Herdmechanismen an Abtauchplatten, die nur in geringe bis mittlere Tiefe reichen, auf Zug hindeuten (down-dip extension mechanisms), während solche, die 600 bis 700 km Tiefe erreichen, Kompressionsmechanismen auf der ganzen Länge der Abtauchplatte zeigen (ISACKS und MOLNAR, 1971). Letzteres ist nun von den Verfechtern eines Mantels mit konstanter Viskosität so gedeutet worden, daß sich dort die Abtauchplatte auflöst, die Teile aber noch tiefer sinken. Unverständlich ist dann nur, weshalb die Seismizität nach unten hin so scharf abbricht, denn nach dieser Hypothese sollte sich die Platte nach unten hin verlieren, also nach unten hin sollten die Beben immer seltener und schwächer werden. Statt dessen zeigt die Seismizität zwischen 500 und 700 km Tiefe ein

<sup>1)</sup> Bereits GOETZE (1971) hatte erkannt, daß für kleine Deformationen ( $<10^{-2}$ ), wie sie bei der Eisentlastung auftreten, Übergangskriechen wesentlich ist.



ausgeprägtes Maximum und verschwindet plötzlich unter 700 km Tiefe (s. z. B. BILLINGTON, 1978; HANUŠ und VANĚK, 1979). Die Änderung im Charakter des Herdmechanismus scheint nur dadurch zu erklären zu sein, daß die Abtauchplatte bis in mittlere Tiefen zusätzlich auch durch ihr eigenes Gewicht einsinkt, also gezogen wird, während sie in größeren Tiefen auf Widerstand trifft. Dieser Widerstand kann durch Erhöhung der Viskosität (insbesondere an der 670-km-Diskontinuität), aber auch durch den Auftrieb in einem dichteren Medium bei chemischer Schichtung des Mantels gedeutet werden. RICHTER (1979) hat das Problem erneut untersucht. Er kommt u. a. zu dem Schluß, daß die Tatsache, daß im unteren Mantel noch nie ein Beben beobachtet wurde, darauf hinweist, daß die Abtauchplatte infolge chemischer Schichtung nicht in ihn eindringt. In diese Richtung deutet auch das an den Neuen Hebriden zwischen 600 und 700 km Tiefe etwa waagrecht liegende untere Ende der dortigen Abtauchplatte, bzw. die entsprechende Verteilung der Seismizität zeigt, daß die Platte offenbar nicht tiefer eindringen konnte (ISACKS und MOLNAR, 1971). Versuche, die Verlängerungen der Abtauchplatten unter 700 km Tiefe nachzuweisen, beruhen auf Untersuchungen an S-Geschwindigkeitsgradienten (JORDAN, 1975), bringen jedoch mehrdeutige Ergebnisse; seismische Ereignisse gab es nirgends in größerer Tiefe. Auch DAVIES (1980a) diskutiert das Problem der Herdmechanismen der Abtauchplatte und erwägt neuerdings auch ein Ansteigen der Viskosität mit der Tiefe. Aus geochemischen Überlegungen, bei denen vor allem das Verhältnis  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  eine Rolle spielte, schlossen O'NIONS u.a. (1979), daß die Lithosphäre durch Differentiation von etwa der Hälfte des Mantels entstanden sei. Für Basalte an mittelozeanischen Rücken wurde ein mittleres Verhältnis  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  von 0,7028 bis 0,7030 gefunden. Nähme der ganze Mantel am Stoffaustausch mit der kontinentalen Lithosphäre teil, so ergäbe sich 0,7047. Den richtigen Wert bekommt man, wenn nur etwa die Hälfte des Mantels in die Schweresonderung einbezogen war. Auch JACOBSEN und WASSERBURG (1979) konstruierten einfache Transportmodelle zur Entstehung der Kruste aus dem Mantel. Berechnungen zur Massenbilanz ergaben, daß die Kontinente durch Differentiation von etwa 30 % des Mantels entstanden sein müssen. Auch diese Untersuchungen deuten also darauf hin, daß es im Mantel verschiedene Stockwerke der Konvektion, nämlich eines für den unteren, und zumindest eines für den oberen Mantel geben muß. MCKENZIE und JARVIS (1980) fanden auf thermodynamischem Wege, daß die Größenordnung des Spannungsabfalls in Erdbeben am besten mit einer (z. Z.) auf den oberen Mantel beschränkten Konvektionsschicht zu vereinbaren ist. JEANLOZ und RICHTER (1979) schließen aus seismischen Daten und einer Berechnung der Temperatur als Funktion der Tiefe, daß die Schicht D" über der Kern-Mantel-Grenze sich chemisch vom restlichen unteren Mantel unterscheidet oder unterer und oberer Mantel chemisch unterschiedlich sind, wobei (z. Z.) im unteren Mantel keine Konvektion herrschen würde. Aus der obigen Diskussion folgt, daß wohl (auch) das zweite zutrifft.

Auf der Grundlage der vorangestellten Erörterungen wollen wir jetzt ein Modell für die episodische Konvektion im unteren Mantel berechnen, welches in der Idee mit dem von WALZER (1974a) verwandt ist. Das Modell hängt nicht sehr stark von den speziellen Stoffkonstanten ab, die natürlich z. T. unsicher sind. Wir wollen annehmen, daß der untere Mantel eine etwas größere Nulldruckdichte hat als der obere und daß er an radioaktiven Quellen infolge Differentiation verarmt ist. Wenn sich auch die Differentiation der Kontinente in den Tiefen, die dem heutigen oberen Mantel entsprechen, vollzogen haben muß (SAFRONOV, 1969; RINGWOOD, 1975), weil dort die Temperaturkurve am nächsten an der Schmelzpunktkurve war (und ist), so würde die so entstandene erdweite Instabilität doch dazu führen, daß das (bei gleichen p-T-Bedingungen) spezifisch schwerere Differentiat

nach unten sinkt und dort den unteren Mantel bildet (s. z. B. VITJAZEV, 1980). Es ist für das Weitere gleichgültig, ob diese Vermutung über die Entstehung des unteren Mantels stimmt. Wir nehmen jedenfalls mit STACEY (1969), S. 256, an, daß der untere Mantel z.Z. eine niedrige spezifische Wärmeleistung von  $0,27 \text{ erg/g}\cdot\text{a}$  hat. Die spezifische Wärmeleistung des oberen Mantels muß dann größer sein, damit der an der Erdoberfläche gemessene Wärmestrom herauskommt. Daraus folgt übrigens auch, daß der obere Mantel dauernd konvektiv strömt. Um nun von den speziellen Zahlenannahmen etwas unabhängiger zu werden, wollen wir drei konkurrierende Modelle für den unteren Mantel benutzen: In Modell 1 nehmen wir an, daß die Wärmeleistungsdichte  $Q^*$  zeitlich konstant ist, in den anderen zwei Modellen klingt sie nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz exponentiell ab:

$$(4.1) \quad Q^* = Q_0^* \exp(-t^*/t_0^*),$$

wobei  $t^*$  die Zeit ist. Die Zeitkonstante ändert sich je nach der angenommenen Mischung der radioaktiven Elemente. Für chondritische Zusammensetzung gilt nach MCKENZIE und WEISS (1975)  $t_0^* = 2219 \text{ Ma}$ , für eine Zusammensetzung nach WASSERBURG u. a. (1964)  $t_0^* = 3248 \text{ Ma}$ . Das soll auch für unser Modell 2 bzw. 3 gelten.  $Q_0^*$  bestimmen wir für Modell 2 und 3 so, daß  $4,5 \text{ Ga}$  nach Entstehung der Erde die spezifische Wärmeleistung auf  $0,27 \text{ erg/g}\cdot\text{a}$  gesunken ist. Es gilt also

$$\begin{array}{llll} \text{für Modell 1} & Q_0^* = 4,2864 \cdot 10^{-8} \text{ erg/cm}^3\cdot\text{s} & \text{und} & t_0^* \rightarrow \infty, \\ \text{für Modell 2} & Q_0^* = 3,2569 \cdot 10^{-7} \text{ erg/cm}^3\cdot\text{s} & \text{und} & t_0^* = 2219 \text{ Ma}, \\ \text{für Modell 3} & Q_0^* = 1,7131 \cdot 10^{-7} \text{ erg/cm}^3\cdot\text{s} & \text{und} & t_0^* = 3248 \text{ Ma}. \end{array}$$

Bei der Umrechnung wurde eine mittlere Dichte des unteren Mantels von  $\rho_k = 5,01 \text{ g/cm}^3$  benutzt, die nach DZIEWONSKI u. a. (1975) berechnet wurde. Nach derselben Arbeit nehmen wir die Oberfläche des unteren Mantels in  $670 \text{ km}$ , die Unterfläche in  $2885,3 \text{ km}$  Tiefe an. Der Wärmestrom durch die Unterfläche sei vernachlässigbar klein. Das ist aber keine wesentliche Voraussetzung des Modells. Der Wärmestrom durch die Oberfläche des unteren Mantels soll pauschal durch die Nusselt-Zahl  $N$  der dauernd im oberen Mantel stattfindenden Konvektion ausgedrückt werden. Wesentlich ist die exponentielle Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur, die sowohl im oberen als auch im unteren Mantel gilt. Die Temperatur  $T_2^*$  an der Erdoberfläche sei bei  $300 \text{ K}$  fixiert, die Temperaturen  $T_1^*$  und  $T_0^*$  an Ober- und Unterfläche des unteren Mantels sind Funktionen der Zeit  $t^*$ .

Jetzt folgt eine Zwischenüberlegung, deren Ziel darin besteht, die Wärmestromdichte  $X_0^*$  an der Oberfläche des unteren Mantels als Funktion von  $T_1^*$  und  $T_2^*$  auszudrücken. Für die Konvektion im oberen Mantel nehmen wir

$$(4.2) \quad N = c R^{1/3}$$

an, wobei  $R$  die Rayleigh-Zahl

$$(4.3) \quad R = \frac{g \alpha \Delta T^* h_1^3}{k \nu}$$

ist. Nach TURNER (1973) ist (4.2) gültig, weil es die einzige Form der Gleichung ist, die nicht von der Schichtdicke  $h_1$  abhängt. Die Konstante  $c$  kann noch von den Randbedingungen abhängen. Die Nusselt-Zahl  $N$  ist bekanntlich das Verhältnis von Gesamt-Wärmefluß zu rein diffusivem Wärmefluß. Für  $R \leq R_c$  muß also  $N = 1$  sein, wobei  $R_c$  die kritische Rayleigh-Zahl ist. Bezieht man die ozeanische Lithosphäre in den Kreislauf der Obermantel-Konvektion ein, so können wir dabei mit einer spannungsfreien Ober-

fläche und einer festen unteren Grenzfläche rechnen. Nach CHANDRASEKHAR (1961), S. 42, lautet die kritische Rayleigh-Zahl für den festfreien Fall (rigid-free case)  $R_c = 1100,65$ . Daraus und aus (4.2) erhält man  $c = 0,0968616$ . Dieser theoretische Wert für  $c$  liegt nahe bei dem von KRAICHNAN (1962), der  $N = c R^{1/3}$  mit  $c = 0,089$  für hohe Prandtl-Zahlen erhielt. TURCOTTE und OXBURGH (1969) und TURCOTTE u. a. (1973) benutzen für die Viskosität des Mantels folgende Näherung:

$$(4.4) \quad \eta = 2,76 \cdot 10^3 T^* \exp[(5,222 \cdot 10^4 + 1,087 \cdot 10^{-7} p^*)/T^*]$$

wobei  $T^*$  in K,  $p^*$  in  $\text{dyn/cm}^2$  angegeben ist. Wir vereinfachen die Formel für den oberen Mantel dahingehend, daß wir  $p^*$  durch den mittleren Druck  $p_{av}^* = 1,113 \cdot 10^{11}$   $\text{dyn/cm}^2$  und  $T^*$  in der Exponentialfunktion durch die zeitlich variable mittlere Temperatur  $T_{av}^* = (T_1^* + T_2^*)/2$  ersetzen. Der Faktor  $T^*$  in (4.4) und  $\Delta T^*$  in (4.3) sollen sich etwa kompensieren, so daß wir für den oberen Mantel die Näherung

$$(4.5) \quad R = R_k \exp(-k_4/2T_{av}^*)$$

benutzen, wobei  $k_4 = 2 \cdot 6,432 \cdot 10^4$  K und  $R_k = 5,0351 \cdot 10^{20}$ .

$R_k$  wurde so bestimmt, daß nach TOZER (1967)  $R = 10^6$  jetzt im oberen Mantel gilt. MCKENZIE und WEISS (1975) nehmen  $R = 10^5$  bis  $10^6$  für den oberen Mantel an, aber für unsere Bestimmung der Nusselt-Zahl kommt es nur auf eine Überschlagsrechnung an. Für den oberen Mantel wurde bei dieser Umrechnung eine Temperatur von 1900 K in 335 km Tiefe angenommen. Die rein diffusive Wärmestromdichte an der Grenze vom unteren zum oberen Mantel ist  $-\kappa \Delta T^*/\Delta x_3^*$ , wobei  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit,  $x_3^*$  die nach oben gerichtete Ortskoordinate ist. Die Temperaturleitfähigkeit  $k$  ist  $k = \kappa/\rho c_p$ . Nach MCKENZIE und WEISS (1975) benutzen wir

$$k = 8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{für die Temperaturleitfähigkeit,}$$

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \quad \text{für den thermischen Ausdehnungskoeffizienten,}$$

$$c_p = 1,2 \cdot 10^7 \text{ erg/g}\cdot\text{K} \quad \text{für die spezifische Wärme bei konstantem Druck.}$$

Die gesamte Wärmestromdichte an der Oberfläche des unteren Mantels kann also durch

$$(4.6) \quad \chi_{\sigma}^* = k \rho c_p \frac{T_1^* - T_2^*}{h_1} N$$

ausgedrückt werden, wobei  $h_1$  die Dicke des oberen Mantels ist. Daraus und aus (4.2) und (4.5) folgt

$$(4.7) \quad \chi_{\sigma}^* = k \rho c_p c \frac{T_1^* - T_2^*}{h_1} \{R_k \exp[-k_4/(T_1^* + T_2^*)]\}^{1/3}.$$

#### 4.3. Die Berechnung der episodischen Konvektion im unteren Erdmantel

Wir nehmen an und wissen aus der Beobachtung der Bewegung der Lithosphärenplatten, daß im oberen Mantel dauernd Konvektion herrscht. Der Wärmestrom an der Oberfläche des unteren Mantels wird deshalb pauschal durch (4.7) beschrieben. Die geringe Wärmeproduktionsdichte des unteren Mantels reicht nicht aus, um dort Konvektion dauernd zu betreiben. Weil aber gleichzeitig die Gitter- und Strahlungsleitfähigkeit zu gering sind, um die Wärme von dort abzuführen (PITT und TOZER, 1970), steigt die Temperatur langsam im

unteren Mantel. Wegen der besprochenen Temperaturabhängigkeit der Viskosität sinkt diese und die Rayleigh-Zahl steigt, bis die kritische Rayleigh-Zahl auch im unteren Mantel überschritten wird. Es kommt zu Konvektion im unteren Mantel, die die Konvektion im oberen Mantel und die magmatische und orogenetische Aktivität in der kontinentalen Lithosphäre verstärkt und auch Einfluß auf das Erdmagnetfeld hat. Diese Behauptungen werden unten bewiesen. Dieser Mechanismus wurde mit einem anderen Rechenverfahren von WALZER (1974a) vorgeschlagen und auch von JONES (1977) aufgegriffen. JONES schlug allerdings eine andere Ursache für die episodische Konvektion im unteren Mantel vor: Er nahm eine Dichteinstabilität in der Schicht D" an, die so lange wüchse, bis der Umschwung erfolgt. Die Untermantel-Konvektion nach dem von WALZER vorgeschlagenen Mechanismus muß deshalb bald wieder ersterben, weil durch die Wärmeabfuhr die Temperatur sinkt und damit die Rayleigh-Zahl wieder unter die kritische fällt, d. h. die Energiequelle reicht nicht aus, den Motor dauernd zu treiben.

Streng genommen müßte für den unteren Mantel folgendes Gleichungssystem gelöst werden (vgl. WALZER, 1973c)

$$(4.8) \quad \rho \left( \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \cdot \nabla^* v^* \right) = - \rho g \mathbf{e}^* - \nabla^* p^* + k_1 \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left\{ T^* e^{k_2 T_m(p^*)/T^*} \left( \frac{\partial v_i^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_i^*} \right) \right\},$$

$$(4.9) \quad \nabla^* \cdot v^* = 0,$$

$$(4.10) \quad \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v^* \cdot \nabla^* T^* = k \nabla^{*2} T^* + Q^*(t^*, x_3^*) / \rho_k c_p,$$

$$(4.11) \quad \rho = \rho_k [1 - \alpha(T^* - T_k)].$$

Mit \* sind hier die dimensionsbehafteten Größen bezeichnet, die später durch dimensionslose Größen ersetzt werden, wobei der Stern entfällt. Außer den bereits eingeführten Größen gilt:  $\rho$  = Dichte,  $v^* = v_k^*$  = Geschwindigkeitsvektor,  $r^* = x_k^*$  = Ortsvektor,  $\mathbf{e}^*$  = nach oben gerichteter Einheitsvektor,  $g$  = Betrag der Schwerebeschleunigung;  $k_1, k_2, \rho_k, T_k$  sind Konstanten,  $h_0$  ist die Dicke des unteren Mantels. Die bezüglich der Wärmeflußdichten schon festgelegten Randbedingungen sind durch

$$(4.12) \quad v_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{für} \quad x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = h_0$$

zu ergänzen, weil man beim unteren Mantel wegen seiner im Vergleich zum oberen Mantel und zum äußeren Kern hohen Viskosität von quasi spannungsfreien Grenzflächen ausgehen kann (vgl. CHANDRASEKHAR, 1961, S. 22). Die nach oben gerichtete Komponente  $x_3$  des Ortsvektors wird in ihrer dimensionslosen Form mit  $z$  bezeichnet; der Nullpunkt liege in der Kern-Mantel-Grenze.

Wir führen jetzt dimensionslose Variablen ein.

$$(4.13) \quad t^* = t \frac{h_0^2}{k}; \quad r^* = r h_0; \quad T^* = T \frac{k k_1}{g \alpha h_0^3 \rho_k};$$

$$p^* = p \frac{k k_1}{h_0^2}; \quad v^* = v \frac{k}{h_0}; \quad \frac{g \alpha Q^*(t^*, x_3^*) h_0^5}{k^2 k_1 c_p} = Q(t);$$



Wir wollen jetzt jeweils den statischen Fall bis zum Beginn des Umschwungs, d. h. der Konvektionsepisode, betrachten. Aus (4.10) ergibt sich dann in dimensionslosen Variablen folgende partielle Differentialgleichung

$$(4.14) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q(t, z).$$

$Q(t, z)$  ist eine gegebene Funktion.

Nach Modell 1 gilt  $Q = 6,445\ 96 \cdot 10^{11}$ ,  
 nach Modell 2 gilt  $Q_0 = 4,897\ 8 \cdot 10^{12}$ ,  
 nach Modell 3 gilt  $Q_0 = 2,576\ 2 \cdot 10^{12}$ ,

wobei für die letzten zwei Modelle (4.1) mit (4.13) zu beachten ist. (Es ist klar, daß man nach dem hier angegebenen Schema bedeutend kompliziertere Modelle, d. h. Wärmequellverteilungen, zum Ausgangspunkt nehmen könnte.)  $t = 0$  bezeichnet den Zeitpunkt, an dem die Entwicklung begann. Er wird im Modell der Entstehung der Erde gleichgesetzt.  $t_\sigma$  bezeichnet den Einsatz der  $\sigma$ -ten Konvektionsepisode. Zunächst wird der Verlauf der Temperatur  $T(z, t)$  im Intervall  $0 < z < 1$  für das erste konvektionslose Intervall  $0 < t \leq t_1$  berechnet. Das Ende des Intervalls  $t_1$  (bzw. allgemein  $t_\sigma$ ) wird durch die Überschreitung der kritischen Rayleighzahl im unteren Mantel, d. h. durch die Entwicklung des Temperaturverlaufs während der Rechnung bestimmt, wie unten noch näher ausgeführt wird. Bei der Berechnung müssen die Anfangsbedingungen

$$(4.15) \quad T(z, 0) = 0 \quad \text{in} \quad 0 < z < 1$$

und die Randbedingungen

$$(4.16) \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = \psi \quad \text{in} \quad 0 < t < t_1,$$

$$(4.17) \quad \frac{\partial T(1, t)}{\partial z} = \chi_\sigma [T(1, t)] \quad \text{in} \quad 0 < t < t_1$$

erfüllt sein. In den Rechnungen wurde  $\psi \equiv 0$  gesetzt,  $\psi = \text{const} \neq 0$  kann aber später mühelos benutzt werden, falls man die Einflüsse eines Wärmestromes aus dem Kern untersuchen will. Die Randbedingung (4.17) ist nichtlinear, denn aus (4.7) folgt

$$(4.18) \quad \chi_\sigma = k_7 [T_2 - T_u^{(\sigma)} - T(1, t)] \cdot \{\exp[-k_8 / (T_2 + T_u^{(\sigma)} + T(1, t))]\}^{1/3}.$$

Die Konstanten betragen  $k_7 = 2,547\ 7371 \cdot 10^6$  und  $k_8 = 1,8959 \cdot 10^{13}$ , wobei die letzten Stellen natürlich physikalisch keinen Sinn mehr haben, aber der mathematischen Systemgenauigkeit halber berücksichtigt wurden.  $T_u^{(\sigma)}$  ist eine dimensionslose Temperatur, die für jedes  $\sigma > 1$ , d. h. für jedes konvektionslose Intervall nach der ersten Konvektionsepisode, nach den Ergebnissen der vorhergehenden Vorgänge neu berechnet wird, während  $T_u^{(1)}$  als konstante Anfangstemperatur vorgegeben wird.

Das Gleichungssystem (4.14) bis (4.18) kann durch (4.18) bis (4.21) ersetzt werden, wobei die letzte Gleichung eine nichtlineare Hammerstein-Integralgleichung ist, die die numerische Berechnung erleichtert:

$$(4.19) \quad T(z, t) = \int_0^t \int_0^1 G(z, \zeta, t - \tau) Q(\tau, \zeta) d\zeta d\tau - \\ - \psi \int_0^t K(z, t - \tau) d\tau + \int_0^t K(1 - z, t - \tau) \chi_\sigma(T_1(\tau)) d\tau;$$

$$(4.20) \quad T_0(t) = \int_0^t \int_0^1 K(\zeta, t - \tau) Q(\tau, \zeta) d\zeta d\tau - \\ - \psi \int_0^t K(0, t - \tau) d\tau + \int_0^t K(1, t - \tau) \chi_\sigma(T_1(\tau)) d\tau ;$$

$$(4.21) \quad T_1(t) = \int_0^t \int_0^1 K(1 - \zeta, t - \tau) Q(\tau, \zeta) d\zeta d\tau - \\ - \psi \int_0^t K(1, t - \tau) d\tau + \int_0^t K(0, t - \tau) \chi_\sigma(T_1(\tau)) d\tau .$$

Dabei ist

$$(4.22) \quad T_0(t) \equiv T(0, t) \quad \text{und} \quad T_1(t) \equiv T(1, t) .$$

$G$  bezeichnet die Greensche Funktion

$$(4.23) \quad G = G(z, \zeta, t) = \frac{1}{2} [\vartheta(\frac{z - \zeta}{2}, L) + \vartheta(\frac{z + \zeta}{2}, L)] ,$$

wobei  $\vartheta$  die Jacobische Thetafunktion

$$(4.24) \quad \vartheta(s, L) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} L^{n^2} \cos 2n\pi s$$

in  $0 \leq s \leq 1$  und  $0 \leq L < 1$  bedeutet.

$$(4.25) \quad L = L(t) = \exp(-\pi^2 t) .$$

Der Kern ist durch

$$(4.26) \quad K(z, t) = \vartheta(s, L)$$

festgelegt, wobei  $s = z/2$ . Interessante Ausführungen über nichtlineare Steuerprozesse findet man bei v. WOLFERSDORF (1975). Unser Hauptproblem besteht nun darin, (4.21) zu lösen. Ist erst  $T_1(t)$  gefunden, kann  $T(z, t)$  und  $T_0(t)$  mit (4.19) und (4.20) bestimmt werden.  $T_1$ ,  $T$  und  $T_0$  wurden für äquidistante Schritte  $\Delta t$  berechnet. Nach jedem Schritt bestimmte man die Rayleigh-Zahl  $R$ , in der die Temperaturabhängigkeit der Viskosität des unteren Mantels berücksichtigt wurde:

$$(4.27) \quad R = \beta \exp[\overline{k_{15}(z) / (T(z) + T_u^{(\sigma)})}]$$

wobei  $\beta = |\overline{dT/dz}|$ . Querstriche bedeuten Mittelung über das Intervall  $0 \leq z \leq 1$ , d. h. über den gesamten unteren Mantel.  $k_{15}$  bestimmt man nach Abschnitt 4.2. und der Schmelztemperaturkurve  $T_m^*$  von STACEY (1977). Für einen Radius von 4600 km (also etwa in der Mitte unserer Schicht) gelte jetzt  $T_m^* = 2776$  K,  $\eta = 3 \cdot 10^{26}$  poise und  $k_{15}(0,5) = -3,5441 \cdot 10^{12}$ . Für jeden Schritt wird geprüft, ob

$$(4.28) \quad R \geq R_c$$

erreicht ist, d. h. ob die Konvektion bereits begonnen hat. Dabei wurde  $R_c = 657,5$  benutzt, weil die Grenzen des unteren Mantels sowohl oben als auch unten (fast) spannungsfrei sind. Dann soll ein thermischer Ausgleich durch Konvektion stattfinden. Die Starttemperatur des nächsten konvektionsfreien Intervalls wird durch

$$(4.29) \quad T_u^{(\sigma+1)} = \int_0^1 T(z, t_\sigma) dz + T_u^{(\sigma)}$$

berechnet, d. h. es wird der Mittelwert gebildet. Von Intervall zu Intervall erhöht sich der Index  $\sigma$  um eins.

#### 4.4. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit Beobachtungsdaten. Diskussion

Tab. 4.1 zeigt die wichtigsten numerisch berechneten Parameter der drei Modelle nach WALZER und MAAZ (1981). Wir fragen uns nun, ob diese theoretisch gewonnenen Ergebnisse

Tab. 4.1 Wichtigste Computer-Ergebnisse der drei Modelle nach WALZER und MAAZ (1981)

5	4	3	2	1	$\sigma$	$T_u^{(1)*}/K$	Modell
1940,885	1932,095	1920,338	1902,670	1879,279	$T_1^*(t_\sigma)/K$		
4502,174	4109,274	3585,310	2802,250	1767,065	$t_\sigma^*/Ma$	1841	1
392,900	523,964	783,060	1035,186	1767,065	$(t_\sigma^* - t_{\sigma-1}^*)/Ma$		
	1945,026	1936,561	1922,992	1893,068	$T_1^*(t_\sigma)/K$		
	4449,622	4108,232	3652,610	2894,117	$t_\sigma^*/Ma$	1618	2
	341,390	455,622	758,493	2894,117	$(t_\sigma^* - t_{\sigma-1}^*)/Ma$		
	1942,646	1933,917	1920,408	1893,153	$T_1^*(t_\sigma)/K$		
	4496,241	4128,443	3633,377	2819,967	$t_\sigma^*/Ma$	1725	3
	367,797	495,067	813,410	2819,967	$(t_\sigma^* - t_{\sigma-1}^*)/Ma$		

an Beobachtungswerten verifiziert werden können. GASTIL (1960) fand, daß die zahlreichen radioaktiven Altersbestimmungen, die hauptsächlich an Graniten ausgeführt wurden, keinesfalls gleichmäßig oder nur geringfügig gestreut über der Zeitachse verteilt sind. Es zeigen sich vielmehr ausgeprägte Maxima in unregelmäßigen Abständen (s. Abb. 4.2). Dieses Auf- und Abschwelen des Magmatismus ist bedeutend langsamer als das episodische, welches als synorogener Magmatismus mit den umstrittenen Stilleschen Gebirgsbildungsphasen verbunden ist. Der Disput der Geologen um dieses bedeutend kurzzeitigere Phänomen berührt die Gastil-Kurve nicht. Diese erweist sich - übrigens auch unter Einbeziehung neuerer Altersbestimmungen (s. KÖLBEL, 1971) - als unabhängig vom untersuchten Kontinent. Diese Kurve ist also nicht durch lokale Vorgänge (etwa in der Lithosphäre) erklärbar, vielmehr muß es sich um ein globales Phänomen handeln. Es liegt nahe anzunehmen, daß die Kurve auch das Steigen und Fallen des in den Weltraum ausgestrahlten mittleren Wärmestromes beschreibt. Das aber ist die entscheidende Größe der thermischen und tektonischen Geschichte der Erde. Aus diesen Gründen muß der zugrunde liegende Mechanismus große Teile der Erde erfassen und auch energetisch gesehen ersten Ranges sein. Da

der untere Mantel der Teil der Erde mit der größten Masse ist und außerdem wegen nach unten ansteigender Viskosität nicht immer konvektiv fließen dürfte (vgl. 4.1.), liegt es nahe, dort einen Rückkopplungsmechanismus zu suchen, der das beobachtete langsame Steigen und Fallen der globalen magmatischen Tätigkeit erklärt. Im Gegensatz zu anderen vorgeschlagenen Mechanismen zeigt der in 4.3. beschriebene und theoretisch und numerisch berechnete Mechanismus zum ersten Male quantitative Übereinstimmung mit den wichtigsten Maxima der Gastil-Kurve. In Abb. 4.2 bis 4.4 werden die Konvektionsepisoden (Umschwünge) nach den Modellen 1 bis 3 mit der Gastil-Kurve bzw. mit den Eiszeiten verglichen. Modell 1 hat einen unrealistischen Zug: Die Wärmeproduktionsdichte ist bei ihm konstant. Deshalb verwundert es nicht, daß dem ersten Umschwung kein Maximum in der Granithäufigkeit entspricht. Realistischer ist schon Modell 2, dort scheinen aber die angenommenen Zahlen noch zu weit von der Wahrheit entfernt zu sein (s. Abb. 4.3). Am besten ist Modell 3. Hier (s. Abb. 4.4) entspricht jedem der 4 höchsten Maxima in der Granithäufigkeitskurve genau einer Konvektionsepisode des unteren Mantels und diese liegt auch zeitlich genau an der richtigen Stelle. Dieses Ergebnis ist umso beachtenswerter, als die Abstände zwischen den Umschwüngen nicht gleich sind. Die kleineren Maxima deuten auf einen Zusatzmechanismus mit geringerem Energieumsatz hin. Dieser Erfolg gibt dem Verfasser die Hoffnung, daß mit Modell 3 ein wesentlicher Zug der Entwicklung der Erde aufgedeckt wurde.

Die Abstände der Maxima der Gastil-Kurve liegen bei einigen 100 Ma, die Abstände der Stilleschen Gebirgsbildungsphasen sollen bei 15 bis 25 Ma, ihre Dauer zwischen 0,2 und 0,5 Ma liegen (von GAERTNER, 1969). Man darf die beiden Phänomene also nicht verwechseln. Unabhängig von dem Streit um die Episodizität der Orogenese stimmen die Geologen heute darin überein, daß die alpinotype (oder echte) Orogenese gekennzeichnet ist a) durch Verkürzung der Kruste in länglichen, oft gebogenen Gebieten, wobei Faltung, Schieferung, Schuppung, oft auch Deckenbildung auftritt und b) durch Intrusion saurer Gesteine sowie Regionalmetamorphose (STILLE, 1924, 1940; SCHMIDT-THOMÉ, 1972; SCHWAN, 1974; u. v. a.). Die Akzente werden dabei je nach geologischer Felderfahrung etwas verschieden gesetzt: GILLULY (1973) betont, daß zwar Orogenese (= strukturbildende Tektogenese), die orographische Heraushebung des Gebirges und Magmatismus gewöhnlich miteinander verbunden seien, zählt dann aber eine ganze Reihe von Beispielen auf, wo die drei Erscheinungen einzeln zu beobachten sind. STRECKEISEN (1970) betont die innige und untrennbare Verknüpfung von Orogenese, Metamorphose und Magmatismus. Aus der Summe dieser Erfahrungen darf man wohl schließen, daß auch dort, wo wegen hohen geologischen Alters keine Diskordanzen nachweisbar sind, einem Maximum in der Häufigkeit der Granitalter (Gastil-Kurve) einem Höhepunkt orogenetischer Aktivität entspricht, wobei hier nicht die einzelne relativ kurze, orogenetische Phase gemeint ist. Einen Versuch, präkambrische Orogenesen mit der Gastil-Kurve zu korrelieren, unternahm NAIRN (1975).

Ob es bedeutende instationäre Anteile der Konvektion im Mantel gibt, die viel schneller schwanken als die langsamen, aus dem unteren Mantel stammenden (s. Abb. 4.4) und die sich dieser Grundschwankung überlagern, ist nicht klar. Bekanntlich wurde die Vorstellung von Strömungen unter der Kruste zuerst entwickelt, um den Schuppen- und Deckenbau der Alpen zu erklären (AMPFERER, 1906). Die große Fläche, die die überschobenen Sedimentpakete in ungestörter Lagerung, also vor der Orogenese eingenommen haben, steht in krassem Gegensatz zu der kleinen des kristallinen Grundgebirges. Mit den Ausdrücken der modernen Tiefenseismik gesprochen: Falls man die Mohorovičić-Fläche als Stoffgrenze



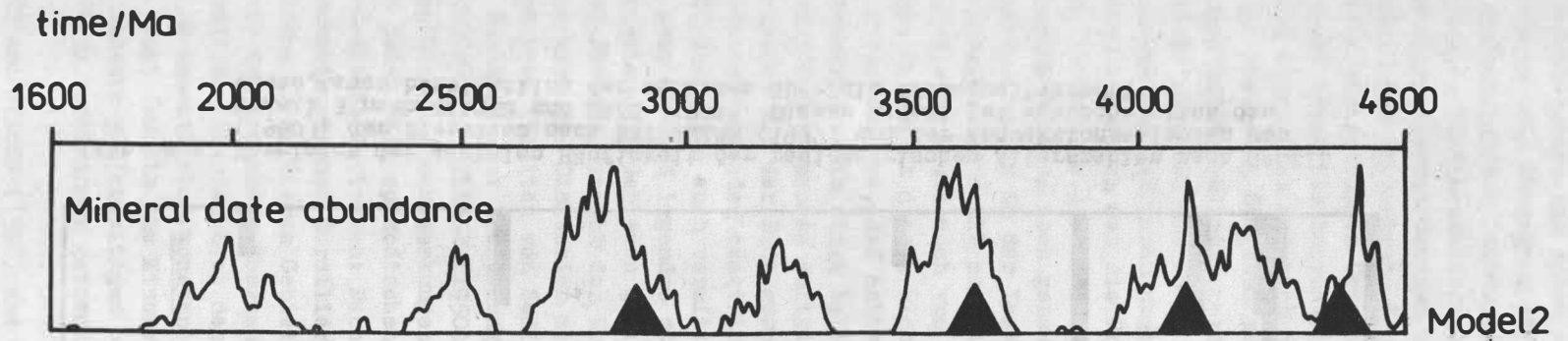


Abb. 4.3 Vergleich der globalen Häufigkeit der radiometrischen Alterszahlen nach GASTIL (1960) mit den Konvektionsepisoden von Modell 2 nach WALZER und MAAZ (1981)

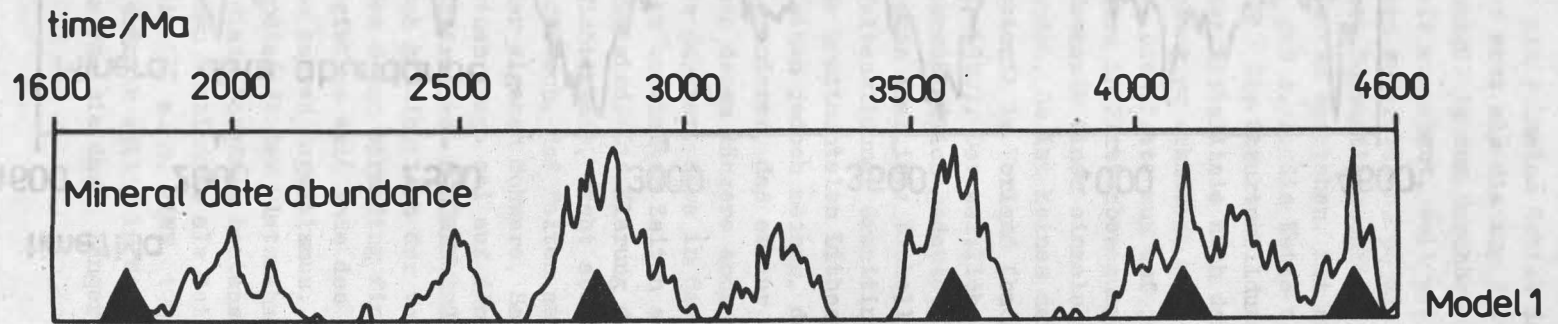


Abb. 4.2 Vergleich der globalen Häufigkeit der radiometrischen Alterszahlen nach GASTIL (1960) mit den Konvektionsepisoden von Modell 1 nach WALZER und MAAZ (1981)

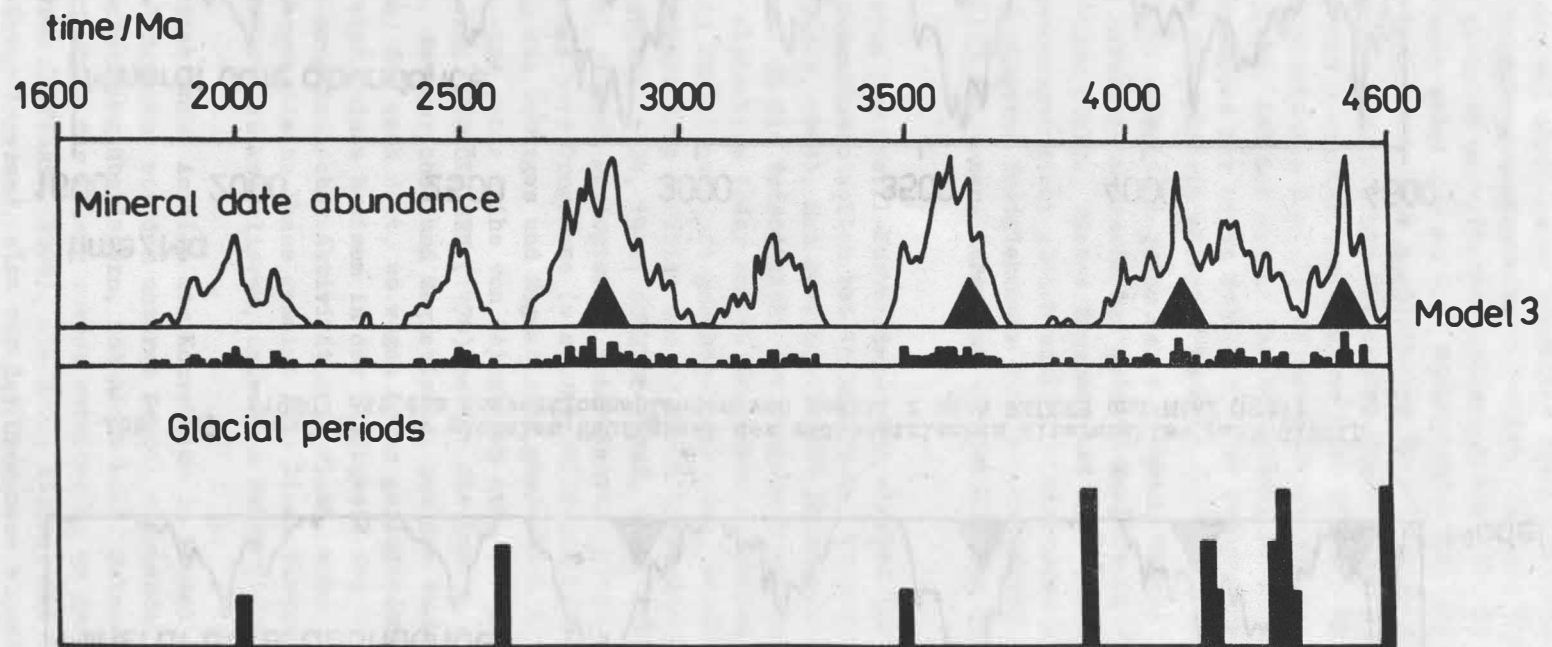


Abb. 4.4 Vergleich der globalen Häufigkeit der radiometrischen Alterszahlen nach GASTIL (1960), der Eiszeiten nach BRINKMANN (1977) und der Konvektionsepisoden von Modell 3 nach WALZER und MAAZ (1981). Dieses Modell ist wahrscheinlich das beste, auch hinsichtlich der Annahmen über die Wärmequellverteilung

deutet, müßte sich unter den Alpen eine viel tiefere Gebirgswurzel zeigen. AMPFERER und HAMMER (1911) hatten das schon auf rein geologischem Wege erkannt, deuteten es durch Unterströmung oder Absaugung von unten und sahen ein schmales Gebiet in den Zentralalpen als Verschluckungszone (subduction zone) an. Aber erst als die zur Plattentektonik weiterentwickelte Kontinentalverschiebungstheorie endgültig zum Durchbruch kam, wurde die Idee der Konvektionsströmungen im Mantel ernsthaft ausgebaut, weil sie sich am geeignetsten erwies, die beobachtete Kinematik der Platten zu erklären. Ob die im Vergleich zu Kontinenten kleinräumigen Orogene direkt etwas mit Konvektionszellen zu tun haben oder nur indirekt durch die konvektionsgetriebenen Platten entstehen, ist auch heute noch nicht ganz klar. (Man muß sich vergegenwärtigen, daß z. B. die Kette der Anden aus verschiedenen kleineren Orogenen zusammengesetzt ist.) Die Strukturbildung innerhalb eines alpinotypen Faltengebirgskörpers schreitet von der Mittellinie nach dem Vorland fort. Es ist nicht möglich, das durch reine Plattenrammung zu erklären, weil in diesem Falle der zeitliche Verlauf genau umgekehrt sein müßte. Die Platte muß auf jeden Fall nach unten abtauchen, wenn man die Ursache der Orogenese in Plattenbewegungen sieht (DEWEY und BIRD, 1970; u. a.). Auch die Erklärung der Mechanik einer einzelnen Orogenese durch Plattensubduktion muß noch genauer untersucht werden. So ist keines der bis jetzt vorgeschlagenen Modelle in der Lage, die Zerrungstektonik im Vorland (back arc region) des Orogens zwanglos zu erklären (NAKAMURA und UYEDA, 1980). Der zeitliche Verlauf der Orogenese wird auch heute noch von den Geologen unterschiedlich gedeutet, so daß noch nicht einmal die Kinematik dieses wichtigen Vorganges ganz klar ist: Einhelligkeit herrscht bezüglich der Ansicht, daß echte Orogenese mit Faltenbildung, Granitintrusionen und Regionalmetamorphose in einem beliebigen Gebiet der kontinentalen Lithosphäre nur selten und in kurzen Zeitspannen auftritt. Während die einen jedoch meinen, daß dieser Vorgang immer irgendwo auf der Erde geschieht, meinen die anderen, daß er nur an bestimmte kurze Zeitspannen gebunden stattfinden kann, zwischen denen längere anorogene Zeiten liegen. Natürlich sind auch vermittelnde Standpunkte denkbar, etwa in dem Sinne, daß der Vorgang zwar dauernd irgendwo stattfindet, aber zu bestimmten Zeiten an voneinander weit entfernt gelegenen Gebieten gleichzeitig verstärkt wird. Die Klärung dieser geologischen Frage ist für die Dynamik der Erde von größter Wichtigkeit, steht aber zur Zeit noch aus. Erschwert wird die Diskussion mitunter offenbar dadurch, daß Falten auch auf nicht-orogenetischem Wege (Gleiten von Sedimenten infolge der eigenen Schwere, Salztekonik) entstehen. Bezüglich der Erörterung der angeschnittenen Frage sei auf den Dialog zwischen STILLE (1950) und GILLULY (1950) sowie auf den Vortrag von SCHÖNENBERG (1969) und die folgenden Diskussionsbemerkungen hingewiesen. Auch hinsichtlich der Verknüpfung der örtlich auf jeden Fall episodischen Orogenese mit dem ocean spreading findet man radikal unterschiedliche Ansichten: Nach GILLULY (1973) gibt es seit Ende des Paläozoikums in der nordamerikanischen Cordillera keine 5 Ma ohne sauren Magmatismus. In dieser Zeitspanne sieht er in diesem Gebiet nur lokale Episodizität der Platznahme von sauren Plutonen bzw. der Orogenese überhaupt. Somit wären diese Vorgänge bestens verträglich mit einer Trift der Platten bzw. des nordamerikanischen Kontinents als Teil einer Platte, die mit im wesentlichen konstanter Geschwindigkeit (s. z. B. VINE, 1968) erfolgt. Nach GILLULY steht deshalb die Kinematik der Plattentektonik völlig im Widerspruch zu STILLES kurzen, erdweit gleichzeitigen orogenetischen Phasen, die durch längere Zeiten orogener Ruhe voneinander getrennt sind.

GRASTY und WILSON (1967) und SCHWAN (1974) dagegen sehen Verbindungen zwischen gewissen Maxima der Geschwindigkeit des ocean spreading im Nordatlantik einerseits und verschiedenen Gebirgsbildungsphasen: 140 bis 135 Ma nevadische Orogenese, 77 Ma subherzy-

nische Orogenese, 60 Ma laramische Orogenese, 40 Ma pyrenäische Orogenese, 18 bis 10 Ma jungtertiäre Orogenesen. SCHWAN vermutet als Ursache dieser Koinzidenzen "episodische, termingebundene Intensitätsanstiege der endogenen Kräfte". Diese für dieselbe Zeitspanne (Meso- und Känozoikum) unterschiedlichen Schlußfolgerungen bedürfen einer Klärung, berühren aber das in der Gastil-Kurve dargestellte äußerst langsame Anschwellen und Abklingen der magmatischen Aktivität und unsere Theorie nicht.

Abschließend soll einiges zur Entwicklung von Ideen gesagt werden, die mit der in 4. durchgeführten verwandt sind. Daß die Zyklizität (besser: Episodizität) der Orogenese mit der Radioaktivität der Erde zusammenhängt, hat wohl zuerst JOLY (1930) vorgeschlagen, wobei er den Gehalt an radioaktiven Elementen stark überschätzte. Eine periodische Aufschmelzung des oberen Mantels nahmen TIKHONOV u. a. (1970) an. Die Idee, die Kurve der magmatischen Aktivität von GASTIL (1960) bzw. von KÖLBEL (1971) durch episodische Festkörperkonvektion (ohne Aufschmelzung) im unteren Mantel zu erklären, taucht m. W. zuerst bei WALZER (1974a) auf. Auch dort wurde schon angenommen, daß die Gitterleitfähigkeit zu gering ist, um die Wärme nach außen zu leiten (s. auch PITT und TOZER, 1970). Der Stau der durch radioaktiven Zerfall im unteren Mantel frei werdenden Energie führt wegen der Temperaturabhängigkeit der Viskosität zu allmählichem Anstieg der Rayleigh-Zahl und zur episodischen Abfuhr der Wärme durch Konvektion. Episodisch ist die Konvektion deshalb, weil die geringe Wärmeproduktionsdichte des unteren Mantels nicht zum dauernden Betrieb ausreicht. Quantitativ konnte die damalige Hypothese erst hier bewiesen werden. Auch TOZER (1974) vermutet eine gewisse Instationarität. Er kommt zu dem Schluß, daß Konvektion in planetaren Körpern blockartige Rotation mit dünnen Gleitflächen am Rande ist und daß die nötige Wärmeabfuhr aus dem Kern dieser Zellen das Strömungssystem nicht stationär bleiben läßt. Dieser Gedanke scheint dem Verfasser realistisch zu sein, denn auch aus anderen Gründen als den von TOZER genannten sind Strömungsrollen im Erdmantel wahrscheinlich (siehe WALZER, 1973a und Abschnitt 9.), und außerdem deutet sich hier eine Möglichkeit an, auch kürzere, erdweit gleichzeitige Ereignisse wie einzelne Orogenesen zu erklären. Qualitative Überlegungen zur Instationarität der endogenen Kräfte findet man bei RICE und FAIRBRIDGE (1975). Einen anderen Mechanismus der instationären Konvektion schlug BUSSE (1978) vor: Eine wärmequellreiche Schicht mit geringer Wärmeleitfähigkeit, deren Dicke lateral variiert, überlagere eine schwerere, weniger viskose Schicht. Die erste Schicht entspreche der Lithosphäre, die zweite der Asthenosphäre. Die Asthenosphäre sei adiabatisch geschichtet. BUSSE zeigte, daß dann Stabilität nur bei homogener Verteilung der Lithosphäre möglich ist. Ist dagegen die obere (heizende) Schicht an einer Stelle dicker, so wird die an dieser Stelle darunterliegende Asthenosphäre heißer. Dadurch entsteht an dieser Stelle der Asthenosphäre ein Aufstrom der die Lithosphäre von dieser Stelle aus seitwärts bewegt und dort sammelt, wo bisher die Lithosphäre wenig mächtig war. Unter der so neu entstandenen Verdickung steigt beim nächsten Zyklus die Strömung in der Asthenosphäre auf. Der Autor möchte zu diesem Vorschlag bemerken, daß er physikalisch durchaus möglich erscheint, daß aber eine erdweite Gleichzeitigkeit der Maxima der Gastil-Kurve damit sicher nicht zu erklären ist, weil der Vorgang wegen der Krustennähe sicher mehr regional, nicht aber global wirken würde. Wärmestrom-Messungen über konsolidiertem Kontinent und die Abwesenheit ausgeprägter Minima der Scherwellengeschwindigkeit unter alten Tafeln (s. z. B. JORDAN, 1975) zeigen auch, daß unter dicker kontinentaler und damit wärmequellreicher Lithosphäre eher geringere Temperaturen zu beobachten sind als unter ozeanischer Lithosphäre in der gleichen Tiefe.



KONO u. a. (1979) untersuchten mit einer Computer-Simulationsmethode die zeitliche Entwicklung der Konvektion in einem zweidimensionalen Modell für den oberen Mantel. Dabei war die Viskosität als Funktion der Tiefe, d. h. indirekt als Funktion des hydrostatischen Druckes, fest vorgegeben. Die Viskosität wurde also nicht als Funktion der Temperatur eingeführt. Es wurden zwei Modelle untersucht: In einem ist die Oberfläche der Asthenosphäre als spannungsfrei behandelt, in dem zweiten ist die laterale Bewegung der Lithosphäre vorgegeben und als Ursache der Strömungen in der Asthenosphäre vorausgesetzt. In allen untersuchten Modellen spalten sich die anfangs flachen Konvektionszellen in rollenartige Zellen auf. Im Zuge von Überlegungen zur Entwicklung planetarer Körper kommt übrigens auch TOZER (1974) zu diesem Schluß: "In other words flow in the central part of large convective circulations is more accurately represented by quasi rigid body rotation than in laboratory scale flow." Diese Ergebnisse passen gut zu denen unseres Abschnitts 9. Die in 4. gefundene episodische Konvektion konnte sich natürlich bei KONO u. a. (1979) nicht ergeben, weil die Viskosität als temperaturunabhängig eingeführt worden war.

#### 4.5. Der Einfluß der Konvektion im unteren Mantel auf den Geodynamo

Abb. 4.4 zeigt die Übereinstimmung der vier Hauptmaxima der Granitalter mit den vier Konvektionsepisoden im unteren Mantel nach Modell 3. Es ist naheliegend zu vermuten, daß sich die episodische Untermantel-Konvektion über eine Verstärkung der Strömungen im oberen Mantel auch auf Bewegungen der Lithosphäre, z. B. auf die Epirogenese, auswirken müßte. Das bestätigt sich tatsächlich. SLOSS (1964) findet für Nordamerika im Phanerozoikum drei sehr große Transgressionen, wobei die erste und die dritte mit den zwei phanerozoischen Konvektionsperioden synchron sind.

Der untere Mantel bildet bekanntlich das Gefäß, in welchem sich eine bedeutend weniger viskose Flüssigkeit ( $\eta < 10^9$  poise) mit metallischer Leitfähigkeit befindet. Man hat heute Grund zu der Annahme, daß das Erdmagnetfeld im wesentlichen durch Strömungen im äußeren Kern entsteht. Weil die Lösungen der hydromagnetischen Grundgleichungen stark durch die Randbedingungen beeinflusst werden, ist zu erwarten, daß sich eine Konvektions-episode im unteren Mantel auch im Erdmagnetfeld widerspiegelt. WALZER (1978c) fand auch tatsächlich durch Vergleich von Kurven anderer Autoren, daß Minima in der Häufigkeit der Umpolung des geomagnetischen Dipols den drei großen nordamerikanischen Transgressionen des Phanerozoikums entsprechen. Eine ebenso enge Korrelation ergab sich mit den Sedimenten der Osteuropäischen Tafel (s. Abb. 4.5). Abb. 4.6 zeigt einen Vergleich der Transgressionen in Osteuropa mit dem Anteil der umgekehrten Polarität des erdmagnetischen Dipols.

Abb. 4.5 zeigt klar: In Perioden erdweiter Transgressionen wechselt die magnetische Polarität nur selten. Diese Perioden sind auch durch starken Magmatismus und durch erhöhte orogenetische Aktivität ausgezeichnet. Wie in 4.3. und 4.4. ausgeführt wurde, stehen die größten dieser Aktivitätsperioden mit Konvektionsepisoden im unteren Mantel im Zusammenhang. Hier soll eine Vermutung (WALZER, 1978c) geäußert werden, weshalb sich gerade dann die geomagnetische Polarität selten ändert. Wenn der untere Mantel in Ruhe ist, dürften die isothermen Flächen in Kern-Mantel-Grenznähe fast kugelsymmetrisch sein. Deshalb dürfte das Magnetfeld einen hohen Grad an Symmetrie (z. B. Rotationssymmetrie)

haben. Die verallgemeinerten Cowling-Theoreme (Antidynamo-Theoreme nach JACOBS, 1975, S. 129/130) zeigen, daß Felder, die sich gewissen Symmetrien nähern, zur Instabilität neigen. In den Untermantel-Konvektionsepisoden und danach aber dürfte das Temperaturfeld im unteren Mantel stärker von der Kugelsymmetrie abweichen, damit müßte auch das Strömungsgeschwindigkeitsfeld im äußeren Kern weniger symmetrisch und damit das Magnetfeld stabiler sein. Die Frage des Inversionsmechanismus des Magnetfeldes ist noch weitgehend ungeklärt. Vielleicht ist aber durch die vorangehenden geophysikalischen Beobachtungen eine Lösungsmöglichkeit angedeutet.

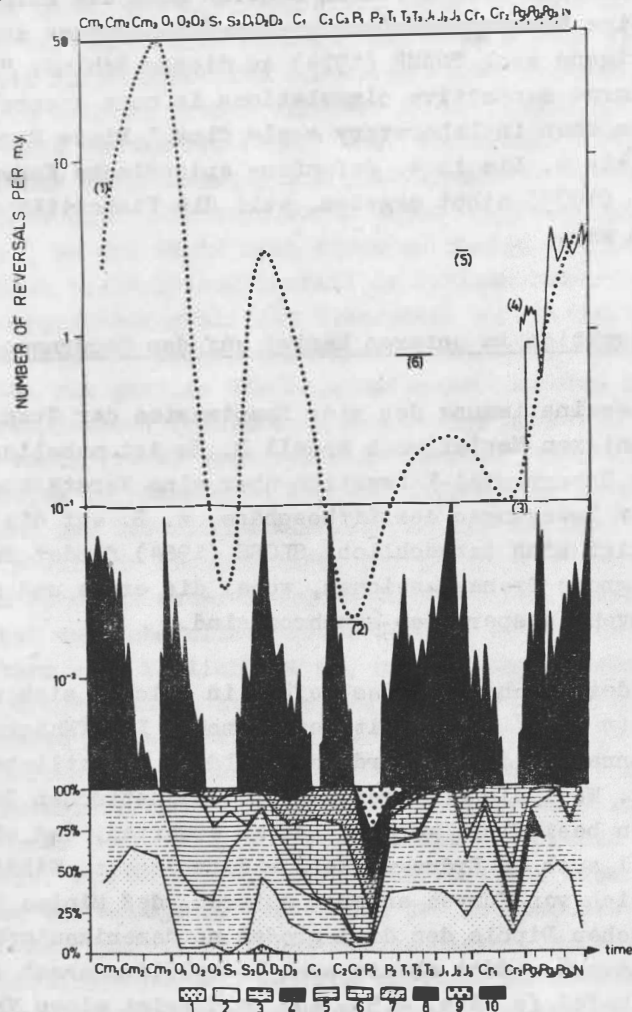
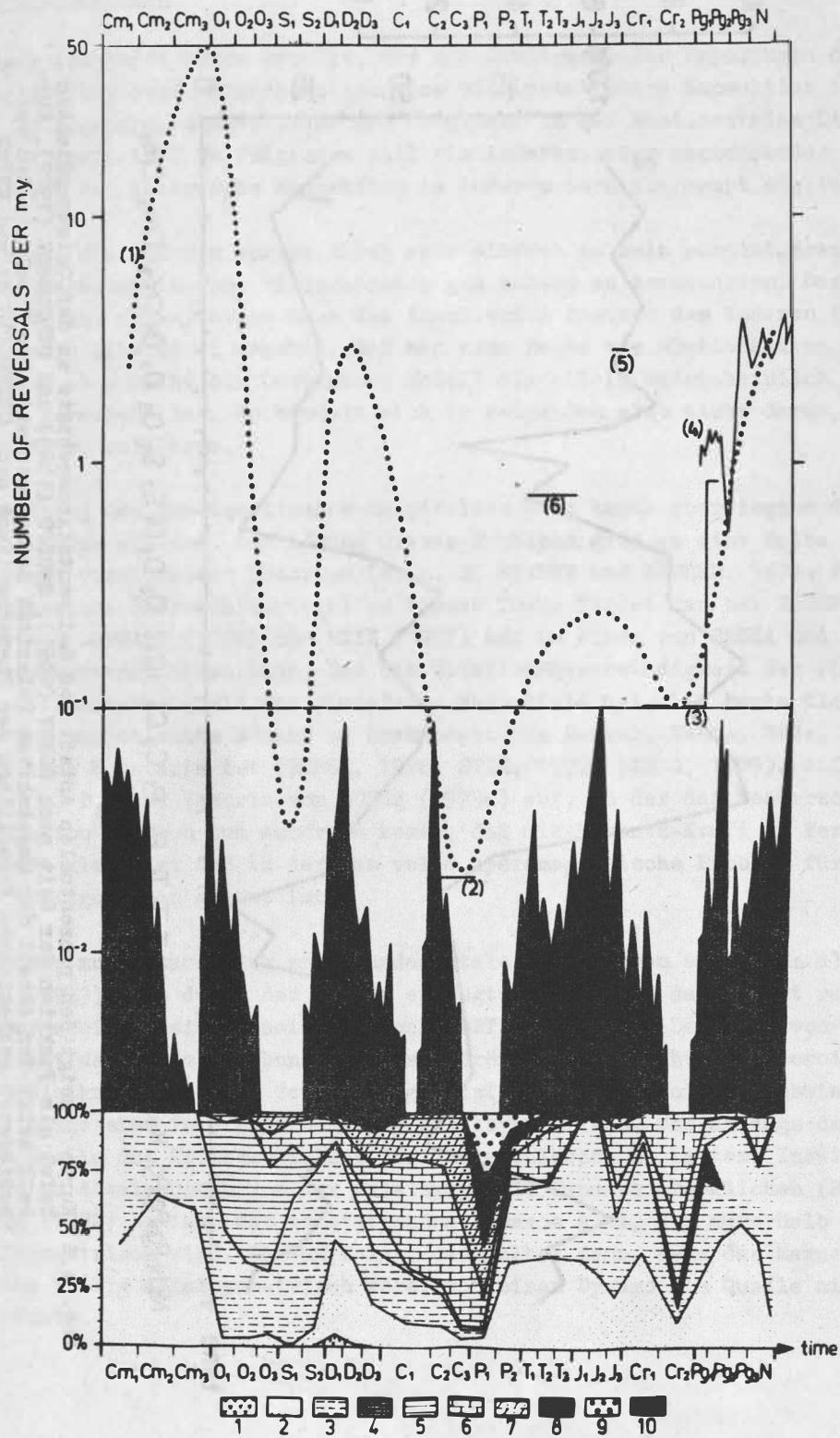


Abb. 4.5 Der Vergleich der Kurven zeigt, daß während großer Transgressionen sich die Polarität des geomagnetischen Dipols selten änderte (nach WALZER, 1978c). Die Abszisse zeigt die geologischen Formationen des Phanerozoikums, stellt also die Zeitachse dar. Cm = Kambrium, O = Ordoviz, S = Silur, D = Devon, C = Karbon, P = Perm, T = Trias, J = Jura, Cr = Kreide, Pg = Paläogen, N = Neogen. Die Darstellung der Kurven 1 bis 4 stammt von JACOBS' (1975) Fig. 4.10. Die Kurven 1 bis 6 zeigen die Häufigkeit der Umpolungen des geomagnetischen Dipols als Funktion der Zeit. Die gepunktete Kurve (1) wurde von JACOBS (1975) aus einer Arbeit von McELHINNY (1971) hergeleitet. (2) = das magnetische Kiaman-Interval, (3) nach HELSLEY und STEINER (1969), (4) nach HEIRTZLER u. a. (1968), (5) entspricht den 2,7 Umpolungen pro Ma im Oberen Jura nach VOGT u. a. (1972), (6) den 0,7 Umpolungen pro Ma in der Trias nach HELSLEY (1972). Die Verteilung von Schwarz und Weiß im Mittelteil der Figur zeigt den Prozentsatz an Gebieten ohne Sedimentation und den Prozentsatz an Gebieten mit Sedimenten als Funktion der Zeit für die Nordamerikanische Tafel nach SLOSS (1964). Weiß entspricht also Transgressionen. Der untere Teil der Abbildung stellt die Verteilung der Sedimente auf der Osteuropäischen Tafel nach RÖNOV u. a. (1969) [zitiert nach BELOUSSOV, 1972] dar. 1 = Konglomerate, 2 = Sandsteine, 3 = Tone, 4 = kieselhaltige Ablagerungen, 5 = Mergel, 6 = Kalkstein und Kreide, 7 = Dolomite, 8 = Gips, 9 = Salz, 10 = Effusivgesteine und Tuffe.



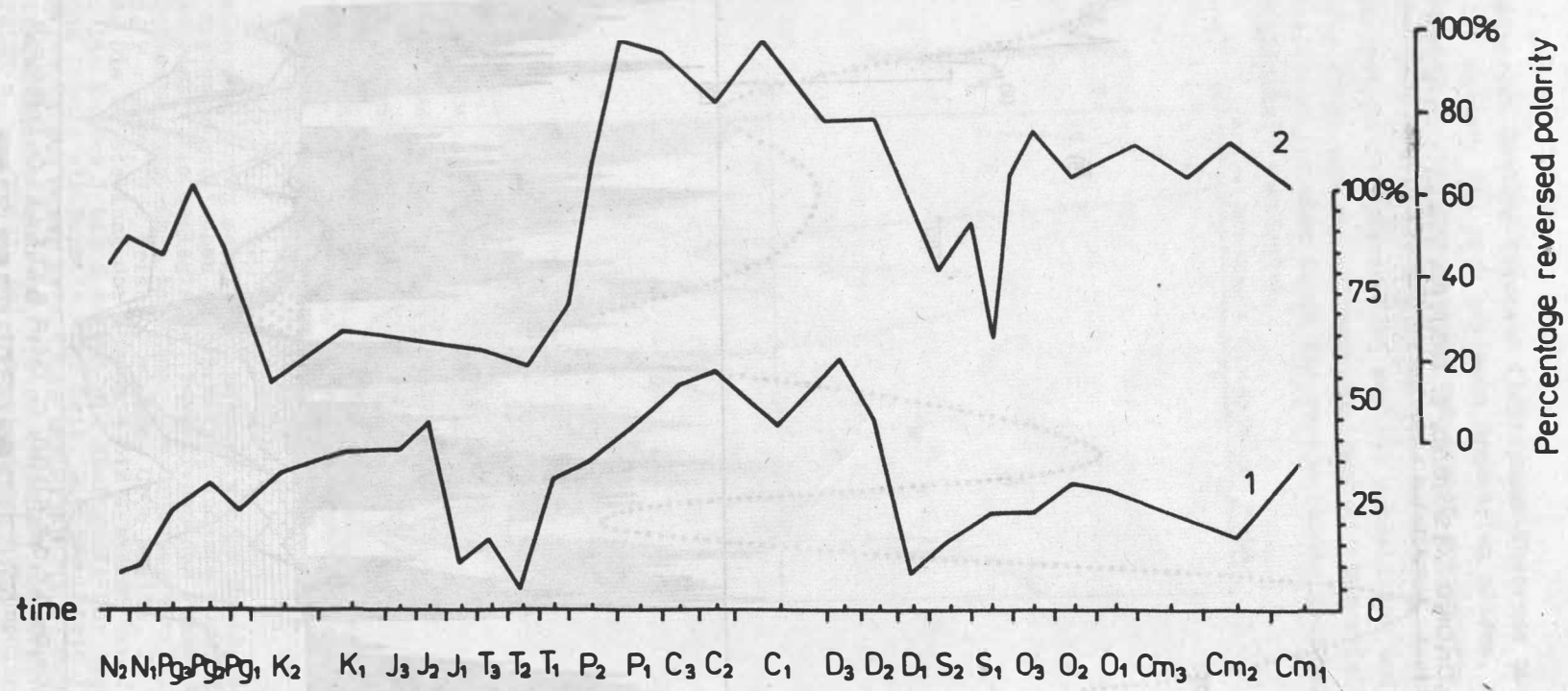


Abb. 4.6 Kurve 1 zeigt den prozentualen Anteil des Sedimentationsgebiets an der Osteuropäischen Tafel als Funktion der Zeit nach RONO (1961), SHOLPO (1969) und BELOUSSOV (1972). Kurve 2 zeigt den Anteil der umgekehrten Polarität des geomagnetischen Dipols in den verschiedenen geologischen Formationen des Phanerozoikums nach CREER (1975) und WHITE (1977). Vergleich nach WALZER (1978c)



## 5. Über die Möglichkeit der thermischen Konvektion im äußeren Erdkern

### 5.1. Das Dynamo-Problem

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Häufigkeit der Umpolungen des geomagnetischen Dipolfeldes sehr wahrscheinlich über die instationäre Konvektion im unteren Mantel mit Epirogenese, Magmabildung und Orogenese in der kontinentalen Lithosphäre thermisch gekoppelt ist. Im folgenden soll ein anderes, aber angrenzendes Problem behandelt werden: Ist thermische Konvektion im äußeren Kern überhaupt möglich?

Diese Frage, die auf den ersten Blick sehr einfach zu sein scheint, erweist sich bei näherer Untersuchung als sehr vielschichtig und schwer zu beantworten. Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, etwas über den thermischen Zustand des äußeren Erdkerns auszusagen. Es wird sich dabei ergeben, daß man eine Reihe von Möglichkeiten ausschließen kann. Man kann aber nicht ein bestimmtes Modell als allein wahrscheinlich oder gar allein möglich herausstellen. Es handelt sich im folgenden also nicht darum, ein favorisiertes Modell zu erläutern.

Die Entstehung des geomagnetischen Hauptfeldes wird heute überwiegend durch einen Dynamo-Mechanismus erklärt. Zur Lösung dieses Problems gibt es eine Reihe geistreicher und z. T. recht verwickelter Theorien (s. z. B. KRAUSE und RÄDLER, 1971; SCHWUTZER, 1974/5). Umfassende Übersichtsartikel zu diesem Thema findet man bei ROBERTS (1971), GUBBINS (1974), MCFFATT (1976) und STIX (1977) und in einem von SRNKA und MERRILL (1979) herausgegebenen Sammelband. Daß die Rotationsgeschwindigkeit der Planeten einen wesentlichen Zusammenhang mit dem planetaren Magnetfeld hat, ist heute klar, weil das Verhältnis von magnetischem Moment zu Drehmoment für Merkur, Venus, Erde, Jupiter und Saturn fast eine Konstante ist (BUSSE, 1976; STIX, 1977; SIRAG, 1979). Auf dieser Beobachtung baut z. B. eine Theorie von BUSSE (1975a) auf, in der der beherrschende Einfluß der Rotation dadurch zum Ausdruck kommt, daß die Lorentz-Kraft im Vergleich zur Coriolis-Kraft klein ist und in der das volle hydromagnetische Problem für eine zylindrische Konfiguration gelöst ist.

Jeder Dynamo muß bekanntlich zwei fundamentale Forderungen erfüllen: a) Den Satz von COWLING (1933): Das durch den Dynamo erzeugte Magnetfeld darf nicht rein axialsymmetrisch oder zweidimensional sein (s. auch LORTZ, 1968). b) Den Satz von ELSASSER (1946): Die mit dem Dynamo verbundene Massenströmung darf nicht rein toroidal sein, d. h. die Radialkomponente des Geschwindigkeitsfeldes darf nicht verschwinden. Planetare Magnetfelder sind in erster Näherung axialsymmetrisch, was anfangs dazu führte, Dynamos als Quelle des Erdmagnetfeldes für ausgeschlossen zu halten. Inzwischen weiß man, daß kleine Abweichungen von der Axialsymmetrie Dynamos ermöglichen (BRAGINSKII, 1964). LORTZ (1972) bewies, daß es stationäre Dynamos gibt, die außerhalb des Leiters exakt axialsymmetrisch sind. Daraus folgt, daß selbst dann, wenn das Magnetfeld an der Erdoberfläche völlig axialsymmetrisch wäre, man einen Dynamo als Quelle nicht ausschließen könnte.

## 5.2. Das Kernparadoxon

Der Satz von ELSASSER führt uns direkt auf ein wichtiges Problem: Um eine stationäre radiale Geschwindigkeits-Komponente der Strömungen zu erhalten, nimmt man meist an, daß im äußeren Erdkern thermische Konvektion herrscht. Nun behaupteten HIGGINS und KENNEDY (1971) aber, daß der flüssige äußere Kern stabil geschichtet und damit thermische Konvektion unmöglich sei. Ausgangspunkt war dabei eine Extrapolation der Schmelzpunktkurve von KRAUT und KENNEDY (1966), die einen geringeren Anstieg mit der Tiefe zeigte als die der adiabatischen Temperatur. Nimmt man an, daß äußerer und innerer Kern dieselbe chemische Zusammensetzung haben und die Temperatur an der Grenze zwischen flüssigem äußerem und festem innerem Kern dem Schmelzpunkt des Materials unter dem dort herrschenden Druck entspricht, so ergibt sich daraus, daß die adiabatische Temperatur im äußeren Kern überall unter der Schmelztemperatur liegt. Da aber der äußere Kern geschmolzen ist, kann die Temperatur nicht gleich der adiabatischen Temperatur sein, wie das praktisch im Falle der Existenz thermischer Konvektion sein müßte. Also ist thermische Konvektion verboten, was im Widerspruch zu den Forderungen der Dynamotheorie steht.

Der soeben geschilderte Widerspruch wird meist als Kernparadoxon bezeichnet. ULLMANN und WALZER (1980 a,b) haben das Problem erneut untersucht. In der ersten Arbeit wurde die Zustandsgleichung von ULLMANN und PAN'KOV (1976) in die Formel (5.1) von VASHCHENKO und ZUBAREV (1963) eingesetzt, die für Atome in dichtester Kugelpackung gilt

$$(5.1) \quad \gamma = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial \kappa}{\partial P} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} \frac{P}{\kappa}}{1 - \frac{4}{3} \frac{P}{\kappa}}$$

Es ergab sich folgende Abhängigkeit des Grüneisen-Parameters  $\gamma$  vom Volumen  $V$

$$(5.2) \quad \gamma = \frac{\kappa_1 - 1}{3} + \frac{1}{6} \frac{(\kappa_1 - 2)(\kappa_1 - 3)}{(2\kappa_1 - 5)x \cdot \frac{(2/3) - (\kappa_1/3)}{-\kappa_1 + 3}}$$

wobei  $x \equiv V/V_0$ . Die Inkompressibilität wird mit  $\kappa$  bezeichnet, der Druck mit  $P$ , das Volumen bei Nulldruck mit  $V_0$ . Weiter gilt

$$(\kappa)_{P=0} \equiv \kappa_0 \quad \text{und} \quad (\partial \kappa / \partial P)_{P=0} \equiv \kappa_1$$

Die adiabatische Temperatur ergibt sich aus der bekannten thermodynamischen Relation

$$(5.3) \quad \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln x} \right)_S = -\gamma$$

falls man einen Punkt des Kurvenverlaufs kennt. Index  $S$  bedeutet Konstanthaltung der Entropie. In der zweiten Arbeit wurde auch der elektronische Anteil des Grüneisenparameters berücksichtigt. Hier sollten nur die Grundzüge der zwei Arbeiten (ULLMANN und WALZER, 1980a,b) skizziert werden, weil das unerlässlich ist, um die Untersuchungen des Verfassers, die in 6. und 7. beschrieben werden, zu motivieren.

### 5.3. Aufhebung des Kernparadoxons bei Annahme der Schmelzpunktkurve von HIGGINS und KENNEDY

Wenn man nicht wie HIGGINS und KENNEDY (1971) ein dichteunabhängiges Grüneisen-Verhältnis benutzt, sondern die Volumenabhängigkeit (5.2) dieser Größe berücksichtigt, die den Drücken im äußeren Kern und der dadurch angenäherten dichtesten Kugelpackung angemessen ist, so führt das auf eine leichte Abnahme von  $\gamma$  mit dem Druck. Nun finden CHAN, SPETZLER und MEYER (1976) für die flüssigen Metalle Quecksilber und Wismut auf experimentellem Wege aber eine leichte Zunahme von  $\gamma$  mit dem Druck (vgl. auch BOEHLER und KENNEDY 1977, Fig. 6). Es ist nicht zu erwarten, daß diese Ergebnisse für den äußeren Kern der Erde von Bedeutung sind. Erstens sind die experimentell benutzten Drücke zu klein, um eine so dichte Packung wie im Kern zu erreichen und zweitens zeigen Wismut und Quecksilber anomale Eigenschaften: Wismut zieht sich beim Schmelzen zusammen wie Wasser, Quecksilber zeigt infolge von d-Elektroneneffekten seltsame elektrische und optische Eigenschaften. Bei den meisten normalen Metallen (z. B. Fe, Cu, Al, Pb, In) nimmt  $\gamma$  mit dem Druck ab (RAMAKRISHNAN, 1978) wie auch beim Erdkern.

Eine Lösung des Kernparadoxons boten KENNEDY und HIGGINS (1973) selbst an. Sie untersuchten das Problem neu und fanden, daß sie in ihrer Arbeit von 1971 eine Schicht von etwa 200 bis 300 km Dicke am Boden des äußeren Kernes übersehen hatten, in der die adiabatischen Temperaturen für die verschiedensten festen  $\gamma$  knapp oberhalb der Schmelztemperatur lagen. ULLMANN und WALZER (1980 a,b) berechneten die adiabatische Temperatur neu und fanden, daß der Gradient der adiabatischen Temperatur  $T_a$  im äußeren Kern überall größer ist als der Gradient der Schmelztemperatur nach KENNEDY und HIGGINS (1973). Bei Berücksichtigung des elektronischen Anteils an  $\gamma$  ergibt sich fast das gleiche Bild. Die neue Kurve von  $T_a$  ist nur etwas mehr gekrümmt. Daraus folgt, daß, wenn man die KENNEDY-HIGGINS-Schmelzpunktkurve annimmt, entweder nirgends im äußeren Kern thermische Konvektion herrschen kann (s. Abb. 5.1) oder daß die Deutung der Grenze des inneren Kernes (IOB) als Schmelzpunkt eines innen und außen einheitlichen Materials falsch ist. Die Konvektion in einer 300 km dicken Schicht am Boden des äußeren Kernes kann auf jeden Fall ausgeschlossen werden.

Wenn man, wie CHEN u. a. (1976), S. 275, die lineare Schmelzpunkt-Druck-Relation von KRAUT und KENNEDY (1966) trotz ihrem Mangel an theoretischer Fundierung für die realistischste hält, so ergeben sich folgende drei Möglichkeiten, das Paradoxon zu umgehen:

Möglichkeit 1: Thermische Konvektion und Präzession scheiden als Ursache des geomagnetischen Feldes aus. Auch ein durch Schwereentmischung getriebener Dynamo führt für realistische Modelle (BRAGINSKII, 1964; GUBBINS, 1977; LOPER, 1978a; LOPER und ROBERTS, 1978; SCHLOESSIN und JACOBS, 1980) auf adiabatische und wirkliche Temperaturen, die (mit geringem Anstieg) über der Schmelzpunktkurve liegen. Es wurden auch langperiodische hydro-magnetische Wellen vorgeschlagen; die berechneten Effekte erwiesen sich jedoch als zu klein. Da die auf thermischer Konvektion beruhenden Dynamotheorien am weitesten ausgearbeitet sind, stießen die erwähnten und andere Versuche dieser Art, das Paradoxon zu umgehen, auf wenig Anklang.

Möglichkeit 2: Nach JACOBS (1976) erwog KENNEDY, daß der Grüneisen-Parameter für flüssiges Eisen im äußeren Kern bei 0,1 liegt. Damit wäre die adiabatische Temperatur höher als die Schmelztemperatur (s. Abb. 5.1). Sowohl JACOBS' (1975) Theorie der Entstehung

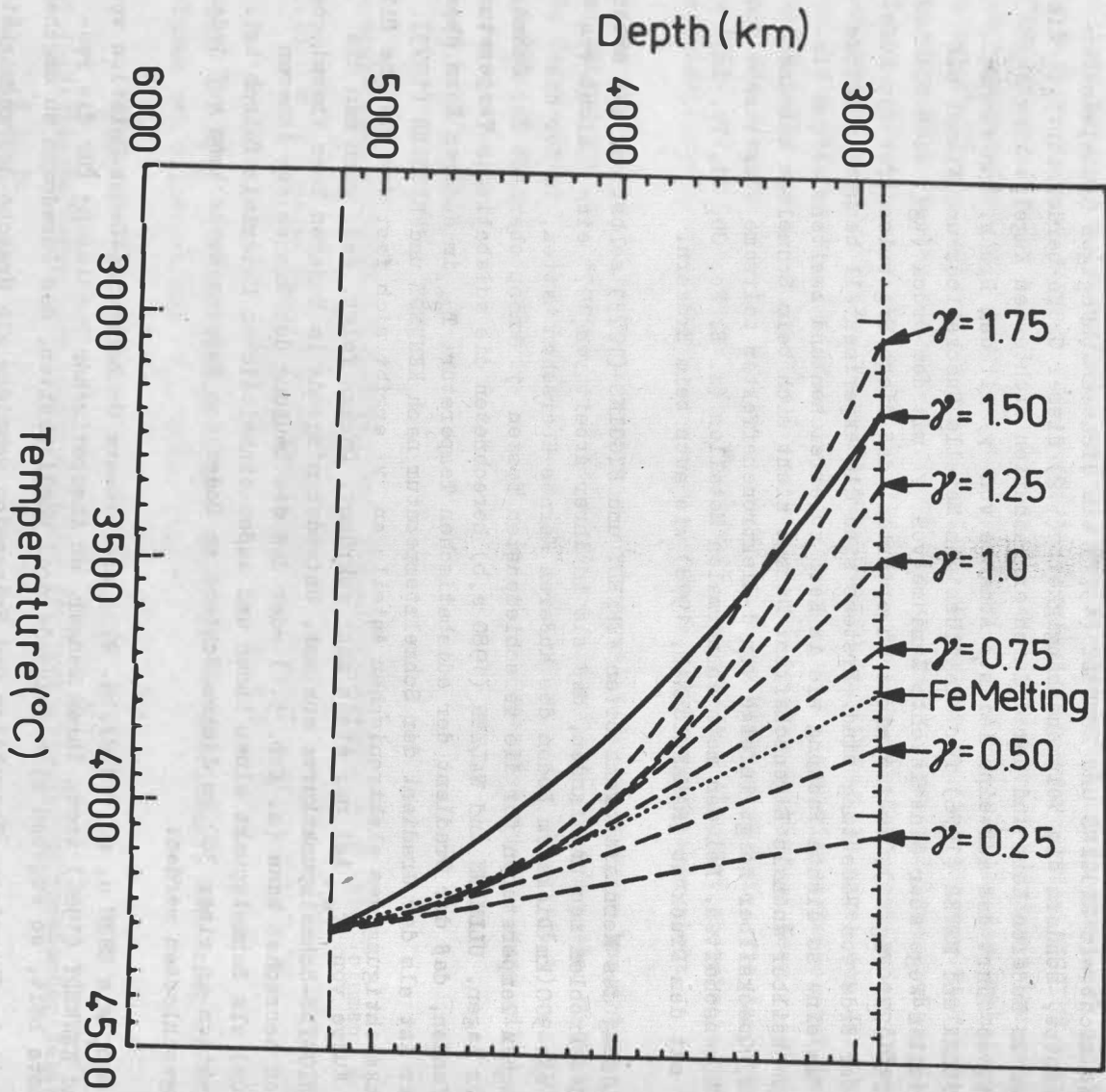


Abb. 5.1

Erneuerter Kernparadoxon für die Schmelzpunktkurve für Eisen von KENNEDY und HIGGINS (1973) [= punktierte Kurve] in Verbindung mit der Kurve der adiabatischen Temperatur [= durchgezogene Kurve]. Gestrichelt sind die Kurven der adiabatischen Temperatur für konstante Werte von  $\gamma$  nach KENNEDY und HIGGINS (1973) gezeichnet. (Nach ULLMANN und WALTZER, 1980a)



des flüssigen äußeren Kernes als auch die Theorie des thermisch-konvektiven Dynamos wären dann gerettet. Nun widerspricht ein so extrem niedriger Wert aber allen bekannten Abschätzungen des Grüneisenparameters für den äußeren Kern. Deshalb kann man diese zweite Möglichkeit wohl ausschließen.

Möglichkeit 3: Die chemische Zusammensetzung des inneren Kernes ist in der Weise anders als die des äußeren Kernes, daß die Schmelztemperatur an der Innenkern-Grenze springt. Die Schmelztemperatur liegt innen bedeutend höher als außen, so daß eine mit der wirklichen identische adiabatische Temperaturkurve im äußeren Kern über, im inneren Kern unter der Schmelztemperaturkurve liegt. Trotzdem kann im äußeren Kern der Gradient der adiabatischen Temperatur größer sein als der der Schmelztemperatur. Dieser Vorschlag geht auf STACEY (1972) zurück, er vertritt ihn aber nicht mehr, weil er im Gegensatz zu damals jetzt die Schmelzpunktkurve von KENNEDY und HIGGINS ablehnt. Er spezialisierte ihn dahingehend, daß er für den inneren Kern reines Eisen oder Eisen mit Nickel und - wie auch MURTHY und HALL (1970), LEWIS (1971) und GOETTEL (1972) - für den äußeren Kern Eisen, FeS und kleine Mengen  $K^{40}$  annahm, genug  $K^{40}$  um  $10^{13}$  W zu erzeugen. Daraus würde folgen, daß 30 % des an der Erdoberfläche gemessenen Wärmeflusses aus dem Kern stammt und der Geodynamo durch thermische Konvektion angetrieben wird. Das würde bedeuten, daß der untere Mantel nicht nur von innen, sondern auch von unten beheizt würde.

Man kann feststellen, daß Möglichkeit 3 auch bei Annahme anderer Schmelzpunktkurven verwirklicht sein kann (s. VERHOOGEN, 1973). STACEY (1972), S. 111, war bei seinem Vorschlag, daß sich innerer und äußerer Kern chemisch bedeutend unterscheiden, von einem Dichtesprung zwischen 1 und 2  $g/cm^3$  an der Innenkern-Grenze ausgegangen. Moderne Erdmodelle zeigen jedoch niedrigere Sprünge: DZIEWONSKI u. a. (1975) 0,565  $g/cm^3$  und Modell B1 von JORDAN (1973) 0,17  $g/cm^3$ . Von einer größeren Sicherheit in der Bestimmung dieses Dichtesprunges kann man eine Entscheidung über die Richtigkeit von STACEYs Vorschlag erwarten, weil Metalle bei ihrer Verfestigung nur kleine Dichtesprünge zeigen.

#### 5.4. Aufhebung des Kernparadoxons bei Ablehnung der Schmelzpunktkurve von HIGGINS und KENNEDY

Die Kritik an der von KENNEDY und HIGGINS (1973) benutzten Schmelzpunktkurve setzt an verschiedenen Stellen an. Oft wird darauf verwiesen, daß ihre theoretische Begründung lückenhaft sei. Das stimmt, aber auch für die Herleitung anderer Schmelzpunktkurven gilt das. GILVARRY (1966) bewies, daß das Schmelzpunktgesetz von KRAUT und KENNEDY (1966) unter gewissen Voraussetzungen aus dem LINDEMANNschen Gesetz herleitbar ist. Ein schwerwiegender Einwand ist, daß die KENNEDY-HIGGINS-Kurve eine Extrapolation experimenteller Schmelzpunktkurven von Eisen und einigen anderen Metallen aus dem Druckbereich von 0 bis 40 kbar auf Drücke bis zu 3000 kbar ist (LEPPALUOTO, 1972; VERHOOGEN, 1973). Diese sicherlich unzulässig große Extrapolation wird allerdings durch die Beobachtung gestützt, daß die Schmelztemperatur für Kalium, Natrium und Rubidium bei isothermen Volumenkompressionen bis zu 35 % weiterhin linear wächst.

LEPPALUOTO (1972) bemerkte, daß die üblichen Schmelzpunkttheorien von der Festkörperphysik ausgingen, weil diese besser ausgearbeitet ist als die Theorie der Flüssigkeiten. Beim Schmelzen sind Festkörper und Flüssigkeit jedoch im Gleichgewicht, so daß auch die andere Seite zu betrachten wäre. LEPPALUOTO tat das, indem Eyrings Strukturtheorie der Flüssigkeiten

benutzte. Durch Gleichsetzung der freien Enthalpien von Flüssigkeit und Festkörper fand er seine Schmelzpunktkurve für Eisen. Abb. 5.2 zeigt, daß in Verbindung mit der adiabatischen Temperaturkurve überall im äußeren Kern thermische Konvektion möglich wäre. Für die untere Hälfte des äußeren Kernes läge die Temperatur sehr dicht über der Schmelztemperatur. Das Aktivierungsvolumen ist jedoch nur unsicher bestimmbar, so daß die Güte von LEPPALUOTOs Kurve schwer zu beurteilen ist. Bei Berücksichtigung des elektronischen Anteils von  $\gamma$  liegt die adiabatische Temperatur etwas höher, die Schlußfolgerung bleibt bestehen.

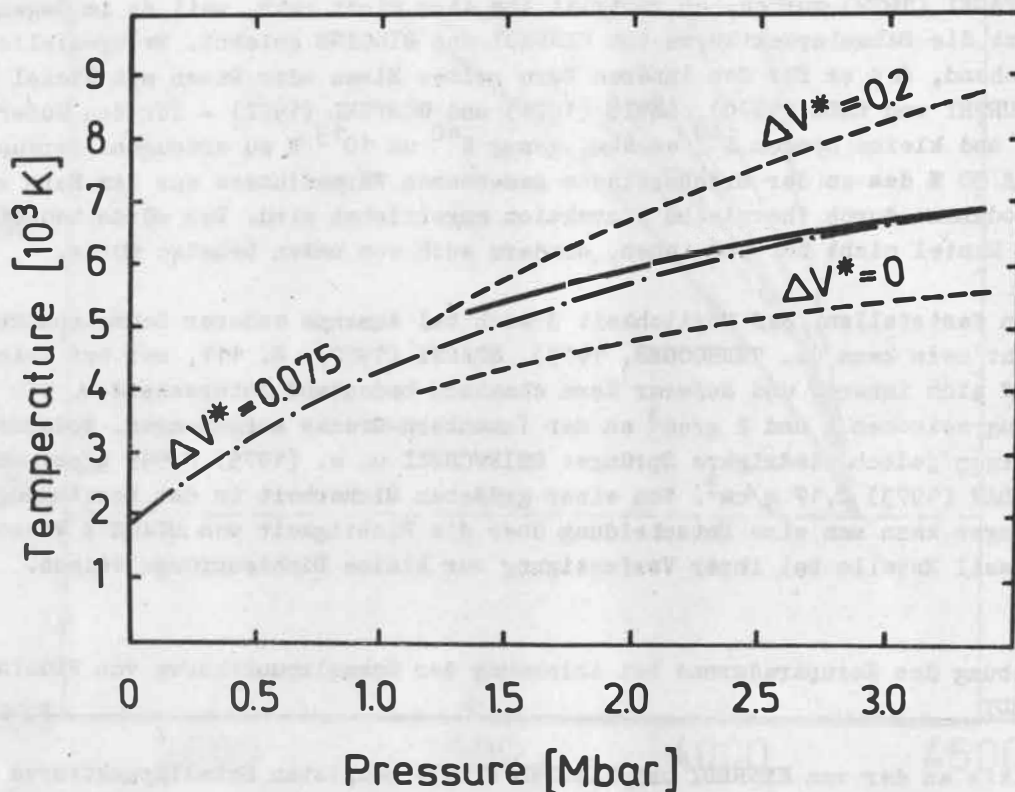


Abb. 5.2 Aufgehobenes Kernparadoxon. Die Schmelztemperatur-Druck-Kurve für Eisen nach LEPPALUOTO (1972) für ein Aktivierungsvolumen  $\Delta V^* = 0,075 \text{ cm}^3/\text{mol}$  ist strichpunktiert. Die durchgezogene Linie zeigt die adiabatische Temperatur für den Fall, daß die Innenkern-Grenze eine Fläche zwischen geschmolzenem und festem Material darstellt. Verschwindendes Aktivierungsvolumen kennzeichnet eine Kurve, die im wesentlichen die von HIGGINS und KENNEDY (1971) ist. (Nach ULLMANN und WALZER, 1980a)

BOSCHI (1975) untersuchte dicht gepackte Strukturen an Modellsystemen von inkompressiblen Kugeln. So berechnete er die Schmelztemperatur von Eisen mit Hilfe einer Monte-Carlo-Methode. Abb. 5.3 zeigt, daß seine Kurve (gestrichelt, 2) in Verbindung mit der adiabatischen Temperaturkurve 2 für den Fall, daß die Innenkern-Grenze eine Schmelzgrenze ist, thermische Konvektion für den gesamten äußeren Kern erlaubt. Wie die Kurven 1 in Abb. 5.3 noch einmal zeigen, wäre für HIGGINS und KENNEDYs Schmelzpunktkurve und die dazugehörige adiabatische Kurve das für den ganzen äußeren Kern verboten.

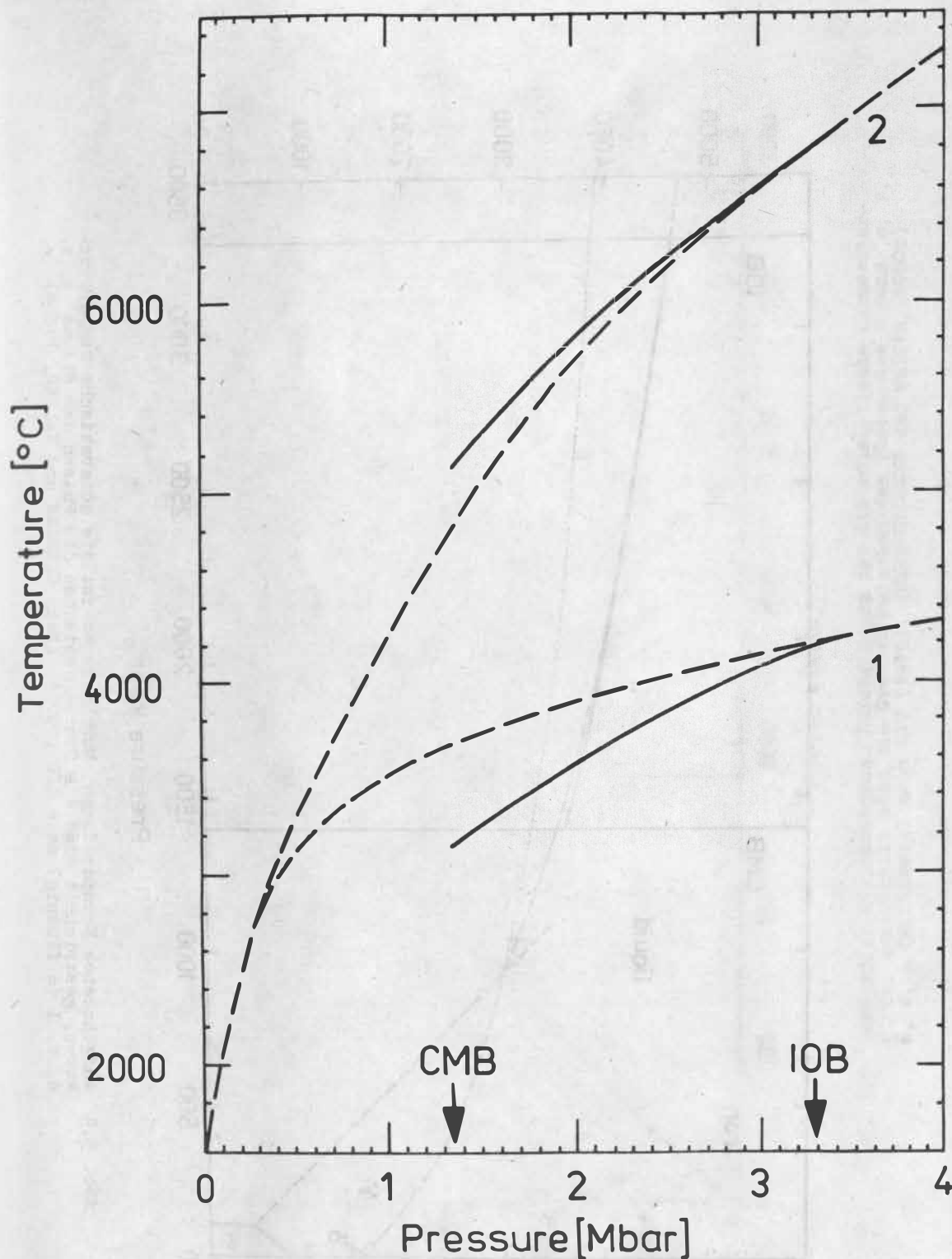


Abb. 5.3 Die gestrichelte Kurve 2 zeigt BOSCHIs (1975) Schmelztemperaturkurve für Eisen, die durchgezogene Kurve 2 die dazugehörige adiabatische Temperatur. Die gestrichelte Kurve 1 stellt die Schmelztemperaturkurve für Eisen von HIGGINS und KENNEDY (1971), die durchgezogene Kurve 1 die dazugehörige adiabatische Temperatur dar. CMB bedeutet Kern-Mantel-Grenze (core-mantle boundary), IOB bedeutet Innenkern-Grenze (inner-core outer-core boundary). (Nach ULLMANN und WALZER, 1980a)

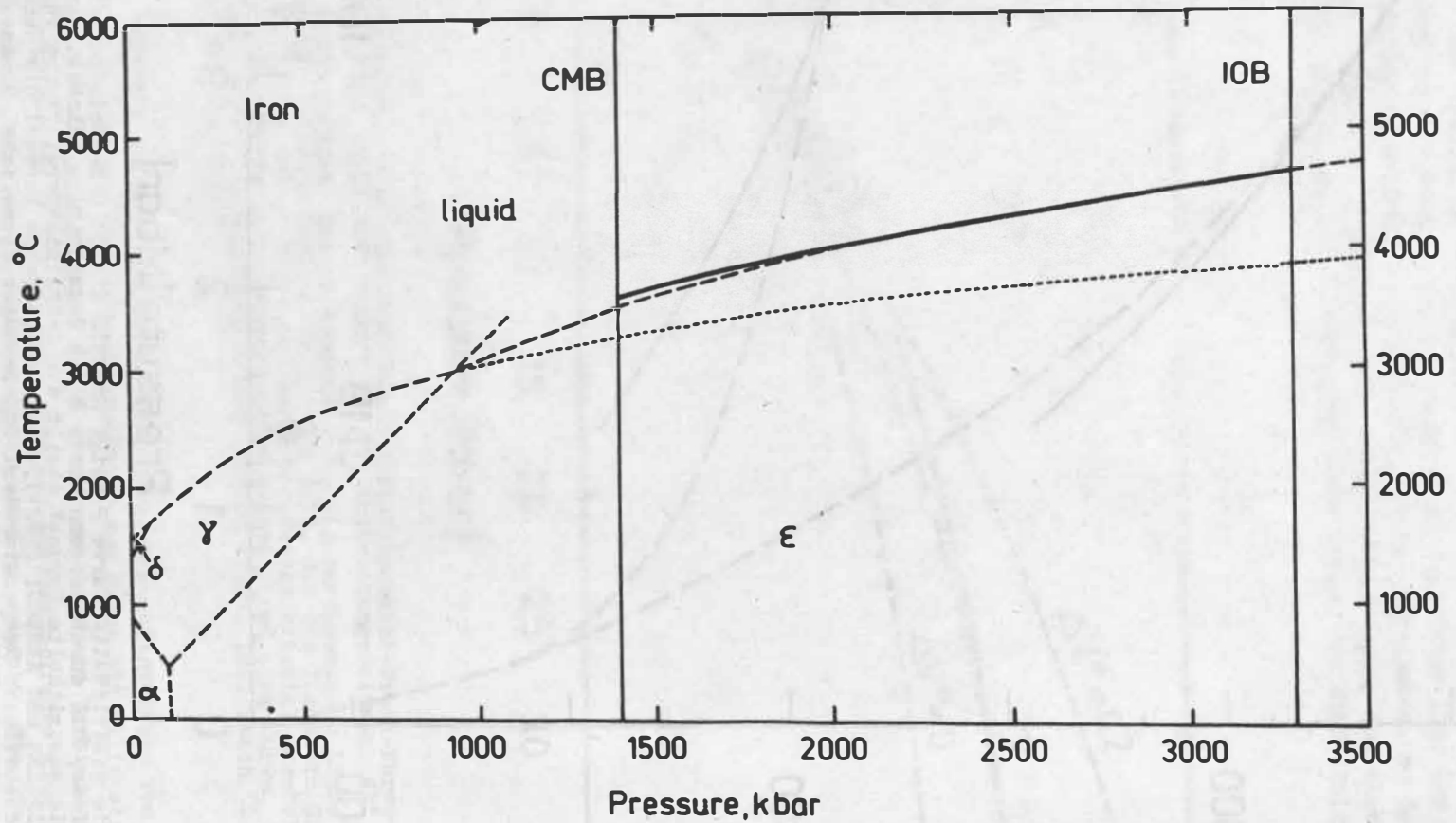


Abb. 5.4 Aufgehobenes Kernparadoxon. Durchgezogen ist die adiabatische Temperaturkurve, gestrichelt sind die Grenzen zwischen den Phasen des Eisens  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ , l (= flüssig) nach LIU (1975). (Nach ULLMANN und WALZER, 1980a)



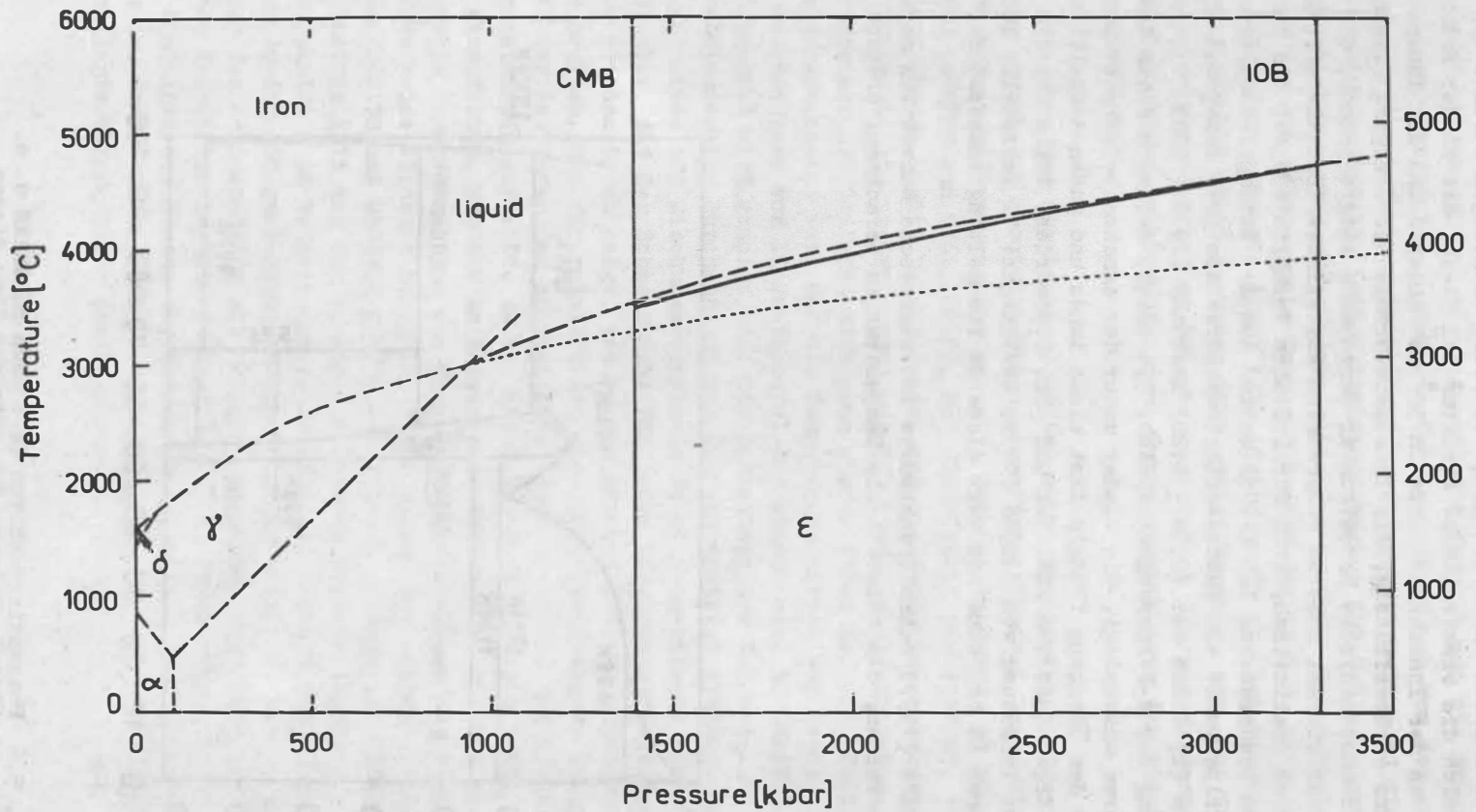


Abb. 5.5 Erneuerter Kernparadoxon. Durchgezogen ist die adiabatische Temperaturkurve, gestrichelt sind die Grenzen zwischen den Phasen des Eisens  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ , l (= flüssig) nach LIU (1975). (Nach ULLMANN und WALZER, 1980b)

Die bisher erwähnten Schmelztemperaturkurven für Eisen können dahingehend kritisiert werden, daß in ihnen keine Phasenübergänge in Betracht gezogen wurden. Ein Vorschlag ging dahin, daß sich die elektronische Struktur von Eisen, die an der Erdoberfläche  $3d^{7.0} 4s^{1.0}$  ist, an der Innenkern-Grenze in  $3d^8 4s^0$  änderte und der innere Kern glasig wäre. Dadurch wäre es überflüssig, die Innenkern-Grenze als Übergang flüssig-fest zu deuten. Eine quantenmechanische Bandstruktur-Berechnung zeigte jedoch, daß dieser Übergang erst bei einer viermal höheren Kompression stattfindet (BUKOWINSKI, 1976). Es ist also wahrscheinlich realistisch, sich für irdische Verhältnisse auf die bekannten Phasen des Eisens zu beschränken. LIU (1975) schloß aus der Extrapolation experimenteller Daten, daß der Tripelpunkt von kubisch-flächenzentriertem ( $\gamma$ ), hexagonal-dichtgepacktem ( $\epsilon$ ) und flüssigem (l) Eisen bei  $(0,94 \pm 0,20)$  Mbar und  $(2970 \pm 200)$  °C läge. Kritisch ist die Berechnung der  $\epsilon$ -l-Phasengrenze. Abb. 5.4 zeigt, daß sich diese Grenze unserer adiabatischen Kurve anschmiegt, die wieder unter der Annahme berechnet wurde, daß die Innenkern-Grenze dem Übergang flüssig-fest eines innen und außen einheitlichen Stoffes entspricht. Die Ergebnisse von Abb. 5.2 und Abb. 5.4 würden, falls man den Kurven vertrauen darf, eine Vermutung von JACOBS (1976) bestätigen: "I personally believe that actual temperatures in the core are very close to the melting temperature."

Auch für STACEYS (1977) Schmelzpunktkurve ist thermische Konvektion nach beiden in 5.2. erwähnten Methoden, die adiabatische Temperatur zu berechnen, erlaubt.

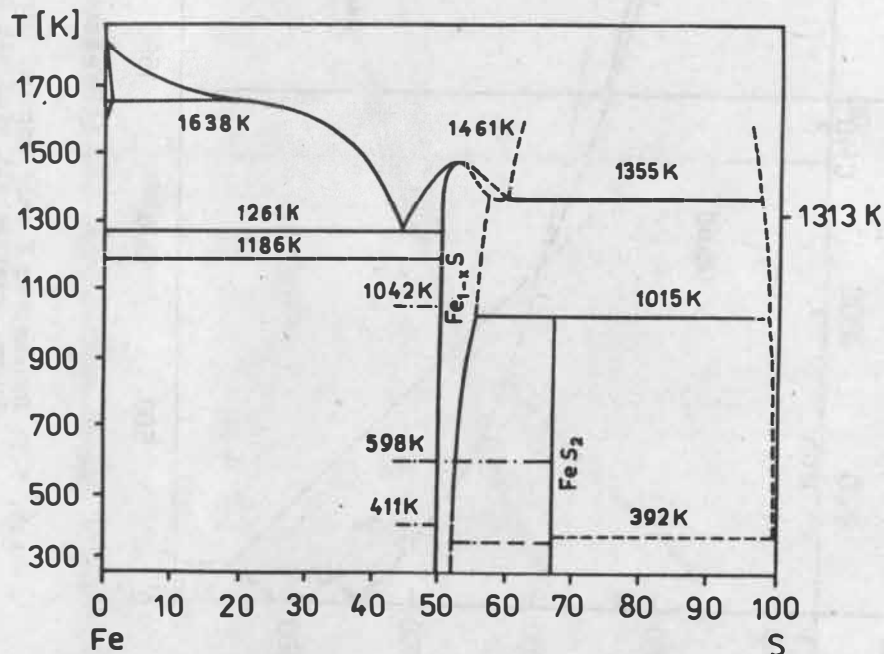


Abb. 5.6 Phasendiagramm von Fe-S nach BURGMANN u. a. (1968). Weitere Erkenntnisse über dieses Diagramm findet man bei RAU (1976)

### 5.5. Schlußfolgerungen

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Antwort auf die Frage nach der Möglichkeit thermischer Konvektion im äußeren Kern hauptsächlich von der angenommenen Schmelzpunktkurve abhängt. Interessant dürfte das Ergebnis sein, daß die Berücksichtigung des elektronischen Anteils beim Grüneisenparameter die Schlußfolgerungen bei fast allen Schmelztemperaturkurven unverändert läßt. Nur im Falle der Schmelzpunktkurve von LIU (1975), bei der die adiabatische Temperatur nach der in 5.2. skizzierten Theorie knapp über der Schmelzpunktkurve liegt (Abb. 5.4), gerät sie bei Berücksichtigung des elektronischen  $\gamma$ -Anteils knapp darunter (Abb. 5.5). Vermutet man, daß die Beachtung des Elektronenanteils realistischer ist, so ergibt sich für zwei moderne Schmelzpunktkurven stabile Schichtung, während für drei Schmelzpunktkurven thermische Konvektion im äußeren Kern erlaubt ist.

Es ist zu erwarten, daß die 10 bis 20 % Beimengungen anderer Stoffe zu dem Hauptbestandteil Eisen sowohl den absoluten Betrag (um einige Hundert Grad) als auch den Gradienten der Schmelzpunktkurve senken. Das gilt unabhängig davon, ob man als leichten Bestandteil FeS (MURTHY und HALL, 1970), FeO (DUBROVSKII und PAN'KOV, 1972) oder MgO (ITO, 1976) in Erwägung zieht. Das bedeutet, daß die Schmelzpunktkurven von BOSCHI (1975), LEPPALUOTO (1972), STACEY (1977) und LIU (1975) obere Schranken sind und daß die Schmelztemperatur des Gemischs sich doch wieder etwas der von HIGGINS und KENNEDY nähert, wobei vorausgesetzt ist, daß die Schmelzkomposition vom Druck abhängt. Abb. 5.6 stellt das Phasendiagramm von Eisen-Schwefel-Mischungen nach BURGMANN u. a. (1968) dar. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die Herleitung der Volumen- oder Druckabhängigkeit der Schmelztemperatur durchaus von den Gittersymmetrien abhängt. Da man nicht annehmen kann, daß diese vom Mischungsverhältnis Fe zu S unabhängig sind, ist es auch nicht a priori klar, daß der Schmelzpunkt für jedes Mischungsverhältnis die gleiche relative Zunahme mit dem Druck zeigt, wie es von manchen Autoren angenommen wird. Es ist also durchaus möglich, daß für reines Eisen eine Schmelzpunktkurve gilt, deren Gradient größer ist als der der Kurve der adiabatischen Temperatur und daß trotzdem für das Gemisch das Kernparadoxon auftritt. Es ist nicht das Ziel dieser Arbeit, daß Kernparadoxon wieder einzuführen, sondern zu zeigen, daß das Problem solange ungelöst ist, wie über die chemische Zusammensetzung und über das Phasendiagramm des Gemischs als Funktion des Druckes keine Klarheit herrscht. Eines jedoch ist sicher: Falls die Schmelzpunktkurve von HIGGINS und KENNEDY (1971) und die von ULLMANN und WALZER (1980a,b) beschriebene  $\gamma$ -Theorie gilt und der innere dem äußeren Erdkern chemisch gleicht, dann ist thermische Konvektion - im Widerspruch zu KENNEDY und HIGGINS (1973) - im gesamten äußeren Kern, auch in der 300-km-Schicht in der Nähe der Innenkern-Grenze, verboten. Man kann also keineswegs das Kernparadoxon als gelöst betrachten. Die Frage nach der Möglichkeit der thermischen Konvektion im äußeren Kern ist z. Z. offen. Wesentliche Fortschritte kann man von künftigen sichereren Ergebnissen hinsichtlich der Druckabhängigkeit der Schmelzpunkte (s. auch WALZER, 1980a,b) erhoffen. Das ist der Grund für die im nächsten Abschnitt dargelegte Untersuchung des Verfassers.

## 6. Die Volumenabhängigkeit der Schmelztemperatur unter hohem Druck und ihre Beziehung zu einer neuen dimensionslosen Größe<sup>\*)</sup>

### 6.1. Problemstellung

Das Problem der Abhängigkeit der Schmelztemperatur  $T_m$  vom Druck  $P$  ist für die hohen Drücke des unteren Mantels und des Erdkerns weder theoretisch noch experimentell zufriedenstellend gelöst. Damit soll gesagt werden, daß die publizierten Schmelzpunktkurven im Gegensatz zu den modernen Druck-Abhängigkeits-Kurven von Dichte, Inkompressibilität, Schermodul und seismischen Geschwindigkeiten von Autor zu Autor erheblich voneinander abweichen. Für verschiedene grundlegende Fragen der Geodynamik z. B. für die Mantelkonvektion und für die magnetohydrodynamische Theorie des äußeren Erdkerns, ist aber gerade diese Größe entscheidend. Das ist so, erstens weil die Viskosität - unabhängig davon, welcher Kriechmechanismus bei der Mantelkonvektion vorherrscht - proportional zu  $\exp(k_2 T_m / T)$  ist, wobei  $k_2$  eine Konstante, und  $T$  die wirkliche Temperatur bedeuten, und zweitens weil die gegenseitige Lage der Kurven der adiabatischen Temperatur, der Schmelztemperatur, der Konduktionstemperatur und der wirklichen Temperatur entscheidend für die thermische Konvektion im äußeren Erdkern sind (siehe KENNEDY und HIGGINS, 1973; LOPER, 1978b; ULLMANN und WALZER, 1980b). Das Problem der wirklichen Schmelztemperaturkurve des äußeren Kerns kann man formal in drei Fragen zerlegen:

- a) Welche Theorie für  $T_m(P)$  gilt für reine Stoffe unter derartig hohen Drücken?
- b) Was ist die chemische Zusammensetzung des Kerns?
- c) Wie verändern sich die Phasendiagramme wahrscheinlicher Mischungen mit dem Druck?

Dieser Abschnitt soll zu der Frage a) einen Beitrag liefern.

### 6.2. Eine neue Herleitung des Lindemannschen Schmelzpunktgesetzes

Im folgenden wird gezeigt, daß man auf zwei getrennten Wegen dasselbe Gesetz für die Abhängigkeit der Schmelztemperatur vom Volumen herleiten kann, welches für Drücke, wie sie im Inneren von Planeten herrschen, gilt.

Die erste Herleitung geht von der Gittertheorie und einem Versetzungsmodell aus. Wir setzen voraus, daß für Drücke des tiefen Erdinneren ein Atom (oder Molekül) meist zwölf nächste Nachbarn hat. Deshalb betrachten wir im folgenden immer ein kubisch-flächenzentriertes Gitter (fcc) (siehe Abb. 6.1). Wir vermuten, daß unsere Überlegungen mit kleinen Änderungen auch auf andere Gitter mit hoher Koordinationszahl übertragbar sind. Das Volumen pro Zahl der Atome ist  $v = a^3/4$ , der Abstand nächster Nachbarn ist  $r_0 = a/\sqrt{2}$ . Gitterpunkte werden durch  $l_1 \vec{a}_1 + l_2 \vec{a}_2 + l_3 \vec{a}_3$  ausgedrückt, wobei  $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = r_0$  gilt und  $l_1, l_2$  und  $l_3$  ganze Zahlen sind. Für fcc muß  $l_1 + l_2 + l_3$  eine ganze Zahl sein. Ferner definieren wir

$$(6.1) \quad l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2.$$

Nach BORN und HUANG (1964) nehmen wir an, daß die zwischenatomaren Kräfte folgendes Potential haben:

<sup>\*)</sup> Tabellen und Abbildungen sind im Anhang.



$$(6.2) \quad \psi(r^2) = u_0 \frac{mn}{m-n} \left\{ \frac{1}{m} \left(\frac{e_0}{r}\right)^m - \frac{1}{n} \left(\frac{e_0}{r}\right)^n \right\}$$

wobei  $m > n$ . Das Minimum der Potentialfunktion  $\psi$  hat den Wert  $-u_0$  und liegt in einer Entfernung  $e_0$  (siehe Abb. 6.2). Für kubische Bravais-Gitter gibt es drei unabhängige elastische Konstanten:  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$ . Wegen der Cauchy-Relation für Zentralkräfte gilt zusätzlich  $c_{12} = c_{44}$ . Aus Gl. (6.2) folgt für die elastischen Konstanten

$$(6.3) \quad c_{11} = \frac{u_0}{2} \cdot \frac{mn}{m-n} \left\{ (m+2) \left(\frac{e_0}{4^{1/3}}\right)^m v^{-(m/3+1)} \varepsilon \frac{1_1^4}{1^{m+4}} - (n+2) \left(\frac{e_0}{4^{1/3}}\right)^n v^{-(n/3+1)} \varepsilon \frac{1_1^4}{1^{n+4}} \right\},$$

$$(6.4) \quad c_{12} = \frac{u_0}{2} \cdot \frac{mn}{m-n} \left\{ (m+2) \left(\frac{e_0}{4^{1/3}}\right)^m v^{-(m/3+1)} \varepsilon \frac{1_1^2 1_2^2}{1^{m+4}} - (n+2) \left(\frac{e_0}{4^{1/3}}\right)^n v^{-(n/3+1)} \varepsilon \frac{1_1^2 1_2^2}{1^{n+4}} \right\}.$$

Die Summation ist über alle Gitterpunkte auszuführen. Der mittlere isotrope Schermodul  $\mu$  ist

$$(6.5) \quad \mu = \frac{1}{5} (c_{11} - c_{12} + 3c_{44}).$$

Das ist die Voigt-Formel. Aus Gl.n. (6.3) bis (6.5) und der Cauchy-Relation folgt

$$(6.6) \quad \mu = \frac{u_0}{10} \cdot \frac{mn}{m-n} \left\{ c_1 v^{-(m/3+1)} - c_2 v^{-(n/3+1)} \right\}$$

wobei

$$(6.7) \quad c_1 = \left( \varepsilon \frac{1_1^4}{1^{m+4}} + 2 \varepsilon \frac{1_1^2 1_2^2}{1^{m+4}} \right) (m+2) \left(\frac{e_0}{4^{1/3}}\right)^m$$

und

$$(6.8) \quad c_2 = \left( \varepsilon \frac{1_1^4}{1^{n+4}} + 2 \varepsilon \frac{1_1^2 1_2^2}{1^{n+4}} \right) (n+2) \left(\frac{e_0}{4^{1/3}}\right)^n.$$

Für einen Idealkristall und unsere Potentialfunktion (6.2) haben wir folgende Enthalpie  $H$ :

$$(6.9) \quad H = \frac{N}{2} u_0 \frac{mn}{m-n} \left\{ \frac{e_0^m}{m} 2^{m/3} \left(\varepsilon \frac{1}{1^m}\right) v^{-m/3} - \frac{e_0^n}{n} 2^{n/3} \left(\varepsilon \frac{1}{1^n}\right) v^{-n/3} \right\} + PNv.$$

$N$  ist die Zahl der Atome bzw. Moleküle. Aus den allgemeinen thermodynamischen Relationen  $H = E + PV$  und  $P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$  folgt für eine elastische Kompression  $\partial H / \partial v = 0$ .  $E$  ist die innere Energie,  $P$  der Druck,  $V$  das Volumen,  $v$  wie bisher das Atomvolumen. Index  $S$  bedeutet isentrop. Die Zustandsgleichung folgt aus Gl. (6.9) und  $\partial H / \partial v = 0$ .

$$(6.10) \quad P = \frac{u_0}{6} \cdot \frac{mn}{m-n} \left\{ 2^{m/3} e_0^m \left(\varepsilon \frac{1}{1^m}\right) v^{-(m/3+1)} - 2^{n/3} e_0^n \left(\varepsilon \frac{1}{1^n}\right) v^{-(n/3+1)} \right\}$$

Die Inkompressibilität  $\kappa$  ergibt sich daraus und aus  $\kappa = -v dP/dv$ .

$$(6.11) \quad \kappa = \frac{u_0}{18} \cdot \frac{mn}{m-n} \{c_3 v^{-(m/3+1)} - c_4 v^{-(n/3+1)}\}$$

wobei

$$(6.12) \quad c_3 = 2^{m/3} e_0^m \left(\varepsilon \frac{1}{1^m}\right)(m+3)$$

und

$$(6.13) \quad c_4 = 2^{n/3} e_0^n \left(\varepsilon \frac{1}{1^n}\right)(n+3).$$

Bisher haben wir mit Hilfe der Theorie des idealen Gitters Größen ausgerechnet, die wir jetzt in einer Versetzungstheorie des Schmelzens benutzen wollen. Wie MACKENZIE und MOTT (1950), KUHLMANN-WILSDORF (1965), STACEY und IRVINE (1977b), NINOMIYA (1978a) und andere nehmen wir an, daß die freie Enthalpie der Versetzungen am Schmelzpunkt verschwindet bzw. daß die Versetzungskonzentration  $C_d$  einen Sättigungswert erreicht. Einen ausgezeichneten Überblick über die Verbindung zwischen Schmelzen, Versetzungen, Anharmonizität, Solitonen und anderen Erscheinungen gibt COTTERILL (1978a,b). Der Grundgedanke im folgenden ist der, daß die Zahl der Versetzungen bei Annäherung an den Schmelzpunkt derart rasch anschwillt, daß der Schermodul fast auf null sinkt.

Die Deformationsenergie pro Einheitslänge der Versetzungslinie einer Schraubenversetzung kann durch

$$(6.14) \quad E_{sc} = \frac{\mu b^2}{4\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

ausgedrückt werden, wobei  $b$  der Betrag des Burgers-Vektors ist.  $r_1$  bzw.  $r_2$  ist der äußere bzw. innere Abschneideradius der Versetzung. Der innere Radius kennzeichnet den Bereich der Verzerrungen im Kern der Versetzung, der äußere Radius ist näherungsweise gleich dem Abstand zweier benachbarter Versetzungen. Die Deformationsenergie pro Einheitslänge der Versetzungslinie einer Stufenversetzung wird durch

$$(6.15) \quad E_{ed} = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

beschrieben, wobei  $\nu$  das Poisson-Verhältnis ist. Nach KUHLMANN-WILSDORF (1965) und NINOMIYA (1978a) kann man für die Deformationsenergie pro Einheitslänge einer Versetzung näherungsweise  $\alpha \mu b^2 / 4\pi$  benutzen, wobei  $\alpha \approx 0,9$ , falls für die Versetzungskonzentration  $C_d < 0,33$  gilt. Die Möglichkeit der Einführung einer Konstanten  $\alpha$  hängt damit zusammen, daß  $r_1$  und  $r_2$  in gleicher Weise von Druck  $P$  und Temperatur  $T$  abhängen. Für die Versetzungsdichte  $NC_d$  folgt daher ein Anteil der Versetzungen an der Deformationsenergie von  $NC_d \alpha \mu b^3 / 4\pi$ . Zählt man hierzu die Deformationsenergie des idealen Gitters, so ergibt sich die totale Deformationsenergie. Die weiteren Schritte bis Gl. (6.17) sind nur angedeutet, weil wir hierin NINOMIYA (1978a) folgen. Ein weiterer Beitrag zur freien Enthalpie geht auf die Gitterschwingungen zurück, so daß sich für die freie Enthalpie (oder Gibbssche freie Energie)

$$(6.16) \quad G = \frac{1}{2} Nv\kappa\varepsilon^2 + NC_d \alpha \mu b^3 / 4\pi + 3NkT \ln \frac{\hbar\omega}{kT} + NC_d kT \ln \lambda$$

ergibt. Die letzten zwei Terme beschreiben die Wärmeschwingungen,  $\varepsilon$  ist die Dilatation des Gitters,  $k$  die Boltzmannkonstante,  $\omega$  die durchschnittliche Frequenz der Phononen,

$\lambda \omega$  die durchschnittliche Frequenz der Versetzungsschwingungen,  $k$  die Plancksche Konstante. Aus Gl. (6.16) folgt

$$(6.17) \quad G = G_0 + Nk v \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{r_0^3}{v} \right) \alpha C_d \frac{\mu}{\kappa} - \frac{1}{2} \epsilon_d^2 \right] - NkT [3\epsilon_d \gamma + C_d \ln \frac{1}{\lambda}] .$$

Diese Formel ist nun der Ausgangspunkt für unsere weiteren Überlegungen.  $G_0$  ist die freie Enthalpie des idealen Gitters,  $\gamma$  ist das Grüneisenverhältnis. Am Schmelzpunkt verschwindet die freie Enthalpie der Versetzungen, d. h.  $G - G_0 = 0$  gilt dort.  $\epsilon_d$  kann näherungsweise als konstant angesehen werden, weil die relative Volumenänderung beim Schmelzen für die chemischen Elemente näherungsweise konstant ist, wobei die Abweichung vom Mittel für kubisch-flächenzentrierte (fcc), kubisch-raumzentrierte (bcc) und hexagonal-dichtgepackte (hcp) Strukturen am geringsten ist (GSCHNEIDNER, 1964). Wir wollen die Schmelzpunkttheorie - wie unten sichtbar - auf Elemente unter hohen Drücken anwenden, so daß diese Voraussetzungen gerade zutreffen. Für fcc-Gitter gilt  $r_0^3/v = \sqrt{2}$ . Daraus, aus  $G - G_0 = 0$  und aus Gln. (6.6), (6.11), (6.17) folgt:

$$(6.18) \quad T_m = \frac{N}{\Delta S} \left[ \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \alpha C_d \frac{u_0}{10} \cdot \frac{mn}{m-n} (c_1 v^{-m/3} - c_2 v^{-n/3}) - \frac{1}{2} \epsilon_d^2 \frac{u_0}{18} \cdot \frac{mn}{m-n} (c_3 v^{-m/3} - c_4 v^{-n/3}) \right]$$

wobei die Schmelzentropie durch

$$(6.19) \quad \Delta S = Nk [3\epsilon_d \gamma + C_d \ln (1/\lambda)]$$

ausgedrückt wird. Gl. (6.18) enthält keine wesentlichen verborgenen Abhängigkeiten von  $v$ . Insbesondere ist auch  $\Delta S$  näherungsweise unabhängig von  $P(v)$  (GSCHNEIDNER, 1964; STISHOV, 1969). Auch JACKSON (1977) fand, daß die Schmelzentropie in der Hauptsache eine Funktion der Kristallstruktur ist. Die Struktur aber wird in unserer Berechnung als unveränderlich angesehen. Aus Gl. (6.18) entsteht

$$(6.20) \quad T_m = \frac{N}{\Delta S} \cdot \frac{u_0}{4} \cdot \frac{mn}{m-n} (c_5 v^{-m/3} - c_6 v^{-n/3})$$

wobei

$$(6.21) \quad c_5 = \frac{\sqrt{2}}{10\pi} \alpha C_d c_1 - \frac{\epsilon_d^2}{9} c_3$$

und

$$(6.22) \quad c_6 = \frac{\sqrt{2}}{10\pi} \alpha C_d c_2 - \frac{\epsilon_d^2}{9} c_4 .$$

Unabhängig von den bisherigen Rechnungen soll Gl. (6.20) nun aus drei völlig anderen Ausgangsgleichungen hergeleitet werden. Zwei dieser Ausgangsgleichungen wurden schon bestätigt, die dritte ist das Lindemannsche Gesetz in Form einer Differentialgleichung. Man kann zeigen, daß sich die Schlußkette umkehren läßt, so daß man aus den zwei ersten Ausgangsgleichungen der nun folgenden zweiten Herleitung von Gl. (6.20) und aus Gl. (6.20) auf das Lindemannsche Gesetz schließen kann. Nach unseren Voraussetzungen ist das jedoch nur für hohe Drücke eine gute Approximation. Wie MATSUDA und HIWATARI (1973) vermuten wir, daß das Schmelztemperatur-Minimum, welches man für niedrige Drücke bei Ge, Ga, Sb, Bi und Eis beobachtet, auf locker gepackte Festkörper-Strukturen zurückzuführen ist. Für hohe Koordinationszahlen muß - wie oben gezeigt wurde - Gl. (6.20) gelten.

Die erwähnte erste Ausgangsgleichung ist die Zustandsgleichung (Modell 1) von ULLMANN und PAN'KOV (1976)

$$(6.23) \quad P = - \frac{3\kappa_0}{2 - \kappa_1} \left( x^{(1/3) - (2/3)\kappa_1} - x^{-(1/3) - (1/3)\kappa_1} \right),$$

wobei  $x = V/V_0 = v/v_0$ . Index 0 kennzeichnet die entsprechende Größe für  $P = 0$ .  $\kappa_0 = \kappa|_{P=0}$  und  $\kappa_1 = \frac{\partial \kappa}{\partial P}|_{P=0}$ , d. h.  $\kappa_0$  bezeichnet die Inkompressibilität bei Null-Druck,  $\kappa_1$  die erste Ableitung der Inkompressibilität bei verschwindendem Druck. Für  $\kappa_1 = 4$  geht Gl. (6.23) in die Zustandsgleichung von BIRCH (1952) über. WALZER, ULLMANN und PAN'KOV (1979) verglichen Gl. (6.23) mit anderen modernen Zustandsgleichungen. Zum Vergleich diente eine aus der Gittertheorie hergeleitete anharmonische Theorie vierter Ordnung von LEIBFRIED und LUDWIG (1961) und THOMSEN (1970) und eine Theorie, die auf der Eulerschen Darstellung endlicher Verzerrungen beruht. Es ergab sich, daß von diesen drei Theorien (6.23) den Kompressionsdaten von 17 kubisch kristallisierenden Festkörpern am besten angepaßt ist. Die zweite Ausgangsgleichung ist der Ausdruck, den VASHCHENKO und ZUBAREV (1963) aus der Theorie des freien Volumens für den Grüneisenparameter erhielten

$$(6.24) \quad \gamma = \frac{\frac{1}{2} \frac{d\kappa}{dP} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} \frac{P}{\kappa}}{1 - \frac{4}{3} \frac{P}{\kappa}}.$$

Auf einem neuen Weg leiteten IRVINE und STACEY (1975) Gl. (6.24) für reine Zentralkräfte her, wobei sie die spezielle Form des zwischenatomaren Potentials weitgehend offen ließen. Falls man unrealistischerweise annimmt, daß die Atome nur in einer Richtung schwingen, so kommt man auf demselben Wege zu dem bekannten Ausdruck für  $\gamma$  von DUGDALE und MacDONALD (1953). Angeregt durch STACEY (1977a) haben ULLMANN und WALZER (1980b) den Beitrag der Elektronen zu  $\gamma$  berücksichtigt, der jedoch für manche Anwendungen nicht allzu stark ins Gewicht fällt. Sie haben auch gezeigt, daß man aus Gln. (6.23) und (6.24) auf

$$(6.25) \quad \gamma = \frac{\kappa_1 - 1}{3} + \frac{1}{6} \frac{(\kappa_1 - 2)(\kappa_1 - 3)}{(2\kappa_1 - 5)x^{(2/3) - (1/3)\kappa_1} - \kappa_1 + 3}$$

geführt wird. Die dritte Ausgangsgleichung dieses Abschnitts ist Lindemanns Schmelzpunktgesetz

$$(6.26) \quad T_m^{-1} dT_m/dP = 2(\gamma - \frac{1}{3})/\kappa,$$

wobei  $T_m$  die Schmelztemperatur ist. Eine thermodynamische Herleitung von Lindemanns Gesetz findet man bei STACEY und IRVINE (1977a). Mit  $\kappa = -xdP/dx$  entsteht aus Gl. (6.26)

$$(6.27) \quad \frac{d \ln T_m}{d \ln x} = 2(\frac{1}{3} - \gamma).$$

Nun setzt man Gl. (6.25) in Gl. (6.27) ein. Mit Hilfe der Substitutionen  $T_m = e^\tau$  und  $x = e^\xi$  gelingt es, die Differentialgleichung ohne Vernachlässigungen zu lösen:

$$(6.28) \quad \tau(\xi) = \frac{2 - \kappa_1}{3} \xi + \ln \left( \frac{2\kappa_1 - 5}{\kappa_1 - 3} \exp[(((2/3) - (1/3)\kappa_1)\xi] - 1) \right) + \text{const}_1.$$



Daraus folgt

$$(6.29) \quad T_m = \text{const} \cdot \left[ \frac{2\kappa_1 - 5}{\kappa_1 - 3} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{(4/3)-(2/3)\kappa_1} - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{(2/3)-(1/3)\kappa_1} \right].$$

Es fällt sofort auf, daß Gl. (6.20) und Gl. (6.29) dieselbe mathematische Form für  $T_m = T_m(v)$  haben. Wir wollen nun die Exponenten vergleichen. Um das unabhängig zu be-  
werkstelligen, vergleichen wir die Zustandsgleichung (6.10), die allein aus der Gitter-  
theorie (ohne Benutzung der Versetzungstheorie) stammt, mit der Zustandsgleichung (6.23),  
zu deren Herleitung weder die Vashchenko-Zubarev-Formel noch das Lindemann-Gesetz nötig  
ist. Aus der Gleichsetzung entsprechender Exponenten in den zwei Zustandsgleichungen er-  
halten wir

$$(6.30) \quad m = 2\kappa_1 - 4 \quad \text{und} \quad n = \kappa_1 - 2.$$

Während die  $\kappa_1$  für Metalle etwa zwischen 2,5 und 6,5 liegen, liegen sie für Edelgase  
höher. Nach BIRCH (1966) hat z. B. Neon  $\kappa_1 = 8,3$ , demzufolge gilt  $m = 12,6$  und  
 $n = 6,3$ . Also ergibt Gl. (6.2) für Neon fast ein 12-6-Lennard-Jones-Potential. Allge-  
mein (d. h. für alle Stoffe) gilt  $m = 2n$ . Setzt man die Gln. (6.30) in Gl. (6.20) ein,  
so sieht man, daß die Exponenten genau mit denen von Gl. (6.29) übereinstimmen. Wie be-  
reits in den Bemerkungen unter Gl. (6.22) ausgeführt, bedeutet diese Übereinstimmung  
auch einen neuen Beweis für die Lindemannsche Schmelzpunktformel für hohe Drücke, wenn  
man die anderen Voraussetzungen als richtig annimmt.

### 6.3. Diskussion

LINDEMANN (1910) hatte die Vorstellung, daß Schmelzen dann einsetzt, wenn durch die  
thermischen Oszillationen sich benachbarte Atome direkt stoßen, so daß das Kristallgitter  
zerstört wird. GILVARRY (1956) wandelte dieses Bild dahingehend ab, daß er voraus-  
setzte, daß der quadratische Mittelwert der Amplituden der Wärmeschwingungen einen ge-  
wissen Prozentsatz des Abstandes nächster Nachbarn erreichen muß. MARTIN und O'CONNOR  
(1977) maßen diese Amplituden durch Separation der elastischen Komponenten der Bragg-  
diffraktions-Maxima, wobei sie den Mößbauer-Effekt benutzten. Als Untersuchungssubstan-  
zen verwandten sie einfache Alkalihalogenid- und Metallkristalle. Sie fanden eine gute  
Übereinstimmung mit dem Lindemann-Gesetz. Die in Gl. (6.26) benutzte Fassung des Linde-  
mannschen Gesetzes geht auch auf GILVARRY (1956) zurück. Beim Schmelzen müssen die  
freien Enthalpien des Festkörpers  $G_{\text{sol}}$  und der Flüssigkeit  $G_L$  gleich sein. Daraus läßt  
sich bekanntlich mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik leicht die Clau-  
sius-Clapeyron-Formel herleiten:

$$(E - T_m S + PV)_{\text{sol}} = (E - T_m S + PV)_L,$$

wobei  $E$  die innere Energie und  $S$  die Entropie ist. Ändert sich der Druck längs der  
Schmelzpunktkurve um  $dP$ , so muß immer  $dG_{\text{sol}} = dG_L$  gelten, damit für jeden Druck  
 $G_{\text{sol}} = G_L$  erhalten bleibt. Bildet man das totale Differential von  $G$  und setzt den  
ersten Hauptsatz, d. h.

$$dE - TdS + PdV = 0,$$

ein, so ergibt sich die Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$\frac{dT_m}{dP} = \frac{V_L - V_{\text{sol}}}{S_L - S_{\text{sol}}}.$$

Hieraus und aus der Mie-Grüneisen-Gleichung leiteten STACEY und IRVINE (1977a) auf thermodynamischem Wege eine Relation her, die sich von Gl. (6.26) nur dadurch unterscheidet, daß  $\frac{1}{3}$  durch 0,23 ersetzt ist. Gestützt auf Eyrings Strukturtheorie der Flüssigkeiten und auf die Gleichheit der freien Enthalpien kommt LEPPALUOTO (1972) zu Abschätzungen für die Schmelztemperaturen von Eisen für den äußeren Erdkern entsprechende Drücke. Diese erwiesen sich als verträglich mit dem Lindemann-Gesetz. Eine Arbeit zu dem besprochenen Thema stammt von BOSCHI (1975). Seine  $T_m$ -P-Kurve für Fe ähnelt der von LEPPALUOTO, obgleich sie auf anderem Wege berechnet wurde.

Manche Substanzen zeigen Maxima und Minima in ihrer Schmelzpunktkurve, z. B. Rubidium nach BUNDY (1959), Tellur nach TIKHOMIROVA und STISHOV (1962), Schwefel nach VEZZOLI und WALSH (1977). Die genannten Beispiele sprechen nicht gegen die Gültigkeit des Lindemannschen Gesetzes bei hohem Druck, weil jedes der Minima der Schmelzkurve ein Tripelpunkt ist, wo die P-T-Gebiete einer wenig dicht gepackten Festkörperphase mit einer dichteren aneinander grenzen. Das ist ein Beweis dafür, daß in diesem Druckbereich unsere Voraussetzung, daß dichteste Kugelpackung vorliegt, noch nicht erfüllt ist. Es gibt verschiedene Versuche, Maxima der Schmelzkurve theoretisch zu berechnen (z. B. OGURA u. a., 1977; BRINDEAU u. a., 1977), wobei die gemachten Voraussetzungen oft recht stark voneinander abweichen. Es ist durchaus theoretisch zu erwarten, daß viele stark kompressible Stoffe im derzeit mit statischen Experimenten zugänglichen Druckbereich experimentelle  $T_m$ -Werte zeigen, die niedriger sind als die nach dem Lindemann-Gesetz berechneten. Von einer Extrapolation der empirischen linearen  $T_m$ -P-Relation von KRAUT und KENNEDY (1966) auf die Drücke im Erdkern muß jedoch wegen der oben dargestellten Theorie abgeraten werden. Wegen der noch nicht ganz geklärten chemischen Zusammensetzung des Erdkerns (siehe z. B. RINGWOOD, 1977; AHRENS, 1979; ITO, 1976) ist es z. Z. unmöglich, eine verbindliche spezielle  $T_m$ -P-Kurve für den Erdkern anzugeben. Trotz der Ablehnung der Extrapolation nach KENNEDY und HIGGINS (1973) ist aber das Kernparadoxon noch keineswegs gelöst. Denn es hat sich gezeigt (siehe Abb. 5.5), daß, falls man zusätzlich den kleinen, durch die Elektronen bedingten Anteil am Grüneisenparameter berücksichtigt, der Gradient der adiabatischen Temperatur ein wenig größer ist als der der Schmelzkurve von hcp-Eisen nach LIU (1975). IRVINE und STACEY schlossen jedoch, daß im Kern fcc-Eisen vorliegt (STACEY, 1977b). Dieser Unterschied dürfte aber nicht gravierend sein, da es sich in beiden Fällen um dichteste Kugelpackung handelt. Für eine bessere Bestimmung der Schmelzpunktkurve wird es nötig sein, den Einfluß der leichteren Bestandteile des äußeren Kerns zu berücksichtigen. Das Phasendiagramm kann durchaus recht kompliziert sein. Es gibt z. Z. keine Mittel, es hinreichend exakt für diese Drücke zu berechnen. Man kann vermuten, daß sowohl die Schmelztemperatur als auch ihr Gradient niedriger sind als für reine Stoffe. - Für reine Stoffe einschließlich Eisen ist der Verfasser jedoch sehr zuversichtlich, daß die oben hergeleitete Volumenabhängigkeit der Schmelztemperatur bzw. das Lindemann-Gesetz unter hohen Drücken (und also auch für den Erdkern) eine gute Approximation ist.

#### 6.4. Eine neue dimensionslose Größe und ihre Druckabhängigkeit

Als Hilfsmittel für eine spätere numerische Bestimmung der  $T_m$ -P-Kurve des äußeren Erdkerns und für eine Diskussion der möglichen chemischen Zusammensetzung desselben wollen wir nach dimensionslosen Größen suchen. Diese Größen sollen sich für unterschiedliche Stoffe möglichst wenig voneinander unterscheiden. Bei der Konstruktion sind drei Forderungen zu beachten: Erstens soll die Schmelztemperatur eine der Eingangsgrößen sein. Zweitens sollen, obwohl wir die dimensionslose Größe zunächst nur für reine Stoffe (die chemischen Elemente und einige einfache Verbindungen) untersuchen, die benutzten Meßgrößen möglichst solche sein, die auch für die Erde zuverlässig als Funktion der Tiefe bekannt sind. Drittens muß die Druckabhängigkeit der benutzten Meßgrößen berücksichtigt werden, wozu wir die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte anwenden. Wegen der zweiten Forderung kann man nicht einfach die Leibfried-Zahl oder die Bragg-Zahl (siehe GSCHNEIDNER, 1964) nehmen, weil diese den Schermodul enthalten. Denn der auf  $T = 0$  reduzierte Schermodul läßt sich für den äußeren Kern nicht bestimmen, so daß eine spätere Anwendung hierauf nicht möglich wäre. Um nun einen Fingerzeig zu bekommen, betrachten wir Abb. 6.3, in der für  $P = 0$  mit Hilfe der Daten von Tab. 6.1 die Schmelztemperatur der chemischen Elemente über der Inkompressibilität aufgetragen ist. Die Koordinationszahl stammt von PLENDL und GIELISSE (1972). Es zeigt sich zwar eine große Streuung der Punkte; die Lage der Punktwolke rechtfertigt jedoch die Hoffnung, daß  $T_m/\kappa$  in dem gesuchten Ausdruck vorkommen muß.

Wir definieren dimensionslose Größen  $Q_j$  durch

$$(6.31) \quad Q_j = N_1^{-1} \gamma^j$$

wobei  $j$  eine reelle Zahl und

$$(6.32) \quad N_1 = \frac{F}{R_0} \cdot \frac{\kappa}{T_m \rho}.$$

$F$  ist das Formelgewicht,  $\rho$  die Dichte,  $R_0$  die universelle Gaskonstante. Warum die Größen  $Q_j$  gerade so gebildet werden, wurde oben angedeutet und soll in Abschn. 6.6. ausführlicher mitgeteilt werden. Wir wollen hier die Abhängigkeit dieser Größen vom Druck untersuchen, wobei in den Figuren hauptsächlich die Ergebnisse für  $Q_0 = N_1^{-1}$  dargestellt werden. Aus Gl. (6.32) entsteht

$$(6.33) \quad d(\ln N_1)/dP = \partial(\ln \kappa)/\partial P - \partial(\ln T_m)/\partial P - \partial(\ln \rho)/\partial P.$$

Hieraus und aus der Lindemann-Formel, Gl. (6.26), folgt

$$(6.34) \quad d(\ln N_1)/dP = [\partial \kappa / \partial P - 2(\gamma - \frac{1}{3}) - (\kappa/\rho)(\partial \rho / \partial P)]/\kappa.$$

Wegen  $\kappa = \rho \partial P / \partial \rho$  gilt

$$(6.35) \quad d(\ln N_1)/dP = (\partial \kappa / \partial P - 2\gamma - 1/3)/\kappa.$$

Hieraus und aus Gl. (6.24) ergibt sich

$$(6.36) \quad \frac{d \ln N_1}{dP} = \frac{1 - (P/\kappa)(\partial \kappa / \partial P)}{(3/4)\kappa - P}.$$

Wir bilden nun das Analogon zu dieser Gleichung für  $\gamma$ , wobei wir von Gl. (6.24) ausgehen

$$(6.37) \quad \frac{d \ln \gamma}{dP} = \frac{\partial^2 \kappa / \partial P^2 + f}{\partial \kappa / \partial P - 5/3 + (4/9)(P/\kappa)} + \frac{f}{1/3 - (4/9)(P/\kappa)}$$

wobei

$$(6.38) \quad f = (4/9)[1/\kappa - (P/\kappa^2)(\partial \kappa / \partial P)] .$$

Die Druckabhängigkeit von  $Q_j$  erhält man durch Integration der Größe

$$(6.39) \quad q_j \equiv d(\ln Q_j)/dP = j \cdot d(\ln \gamma)/dP - d(\ln N_1)/dP ,$$

wobei man Gl. (6.36) bis (6.38) in Gl. (6.39) einsetzen muß. Bisher wurde in diesem Abschnitt noch keine spezielle Zustandsgleichung benutzt. Die bisherigen Formulierungen setzen voraus, daß die Zustandsgleichung es erlaubt,  $\kappa$  als Funktion von  $P$  explizite aufzuschreiben, damit die Integration ausgeführt werden kann. Dieser Wunsch ist gleichbedeutend damit, daß aus  $P = P(x)$  analytisch  $x = x(P)$  gebildet werden kann, wobei  $x = V/V_0$ . Für die Zustandsgleichungen von TAIT (siehe MacDONALD, 1969), von MAO (1970) und von GROVER u. a. (1973) ist das möglich, nicht aber für Gl. (6.23) von ULLMANN und PAN'KOV (1976) und ihrem Spezialfall, der Zustandsgleichung von BIRCH (1952). Weil wir Gl. (6.23) durch Vergleich mit Meßdaten für gut gesichert halten (ULLMANN und PAN'KOV, 1976; WALZER u. a., 1979), wollen wir, um keine Vernachlässigungen einführen zu müssen, einen Umweg gehen: Wir fassen die Hilfsgröße  $q_j$  als Funktion allein von  $x$  auf, indem wir  $P$ ,  $\kappa$ ,  $\partial \kappa / \partial P$  und  $\partial^2 \kappa / \partial P^2$  aus der rechten Seite von Gl. (6.39) eliminieren. Dabei ist zu beachten, daß für alle Zustandsgleichungen

$$(6.40) \quad \partial \kappa / \partial P = - \kappa' / \kappa$$

und

$$(6.41) \quad \partial^2 \kappa / \partial P^2 = \{ \kappa'' + \kappa' [(1/x) - (\kappa' / \kappa)] \} / (\kappa/x)^2$$

gilt, wobei  $\kappa' \equiv \partial \kappa / \partial x$  und  $\kappa'' = \partial^2 \kappa / \partial x^2$  ist. Bei der Herleitung wurde

$$(6.42) \quad \partial P / \partial x = - \kappa / x$$

und  $\partial^2 P / \partial x^2 = -x^{-1} \partial \kappa / \partial x + x^{-2} \kappa$  benutzt. Nun erst verwenden wir die spezielle Zustandsgleichung (6.23) zur Berechnung von  $\kappa$ ,  $\partial \kappa / \partial P$  und  $\partial^2 \kappa / \partial P^2$  mit Hilfe der Gl. (6.42), (6.40) und (6.41). Jetzt können wir die  $q_j$  für beliebige  $x$  im Intervall  $1 \geq x > C$  analytisch und numerisch berechnen. Jedem  $x$  wird umkehrbar eindeutig durch Gl. (6.23) ein  $P$  zugeordnet. Dadurch kann durch numerische Integration  $Q_j$  als Funktion von  $P$  bestimmt werden.

#### 6.5. Ergebnisse: $Q_0(P)$ - ein neues Hilfsmittel zur Bestimmung der Schmelzpunkttemperatur im Erdkern

Ähnlich wie es O.L. ANDERSON (1972) für elastische Konstanten tat, wollen wir nicht nur die Druckabhängigkeit von  $Q_0$  untersuchen, sondern auch nachforschen, ob die  $Q_0(P)$  der chemischen Elemente, wenn man sie nach dem Periodensystem ordnet, eine Systematik zeigen. Erst dann wollen wir uns den chemischen Verbindungen zuwenden. Mit Hilfe eines Computers wurden die  $Q_0(P)$  und  $Q_1(P)$  berechnet. Es soll hier jedoch zunächst über  $Q_0$  berichtet werden. Für Elemente stehen die zur Berechnung nötigen Stoffkonstanten in Tab. 6.1, für Verbindungen in Tab. 6.2. In Abb. 6.4 bis Abb. 6.6 ist die dimensionslose Größe  $Q_0$  als Funktion des Druckes dargestellt. Bei fast allen Elementen ist diese



Größe für im Kern herrschende Drücke nur wenig veränderlich, während die mit dem Druck variablen Größen, die bei der Bildung von  $Q_0$  eine Rolle spielen, nämlich  $T_m$ ,  $\kappa$  und  $\rho$ , im Bereich des Kerns eine erheblich größere relative Änderung zeigen. Die Kurven der Elemente zeigen eine starke Bündelung. Beschränkt man sich in der Betrachtung auf Elemente, die für die Bestimmung der benutzten Stoffkonstanten in dichtester Packung, also in fcc- oder hcp-Struktur, vorlagen, so liegen die Kurven fast ausschließlich in den Bündeln. Auf Abb. 6.6 sieht man, daß die Kurven der Elemente der sechsten Periode im Kern-Gebiet zwei Bündel bilden. Alle Elemente des unteren Bündels außer Wismut (Bi) haben fcc- oder hcp-Struktur, im oberen Bündel herrscht die bcc-Struktur vor. In den Abb. 6.7, 6.8 und 6.9 sind die  $Q_0$  für verschwindenden Druck, für den Druck an der Kern-Mantel-Grenze bzw. für den Druck an der Innenkern-Grenze im Periodensystem dargestellt. Die Punkte der Elemente der vierten Periode sind in den drei Figuren durch durchgezogene Linien verbunden, die der fünften Periode durch gestrichelte, die der sechsten Periode durch punktierte Linien, so daß die Bilder untereinander gut vergleichbar sind. Bei  $P = 0$  und der 4. bis 6. Periode zeigt sich von Gruppe IA bis VA eine sehr enge Nachbarschaft der drei Kurven, die von den Kurven der 5. und 6. Periode noch bis Gruppe VIIIA fortgesetzt wird. Während die Größe  $Q_0$  der Elemente für  $P = 0$  einen großen Wertebereich hat, also sehr streut, zeigt sich in den Abb. 6.8 und 6.9, daß für die hohen Drücke des Erdkerns, von denen hier nur die seiner zwei Grenzflächen dargestellt sind, die Größen  $Q_0$  für die meisten Elemente einschließlich Eisen gar nicht sehr streuen. Das gilt noch stärker, wenn man sich auf Metalle beschränkt. Das  $Q_0$  von Eisen liegt dabei recht nahe am Mittelwert der  $Q_0$  der metallischen Elemente. Diese geringe Streuung der  $Q_0$  und die oben erwähnte stärkere Bündelung der  $Q_0$ -P-Kurven bei Beschränkung auf fcc- und hcp-Packungen, erweckt die Hoffnung, den Quotienten aus Schmelztemperatur und Formelgewicht

$$(6.43) \quad T_m(P)/F = [\bar{Q}_0(P) \cdot \kappa(P)]/[R_0 \cdot \rho(P)]$$

für den Erdkern näherungsweise als Funktion des Druckes  $P$  bestimmen zu können. Dabei sind  $\kappa(P)$  und  $\rho(P)$  aus einem zuverlässigen Erdmodell, z. B. von DZIEWONSKI u. a. (1975), für den Kern zu nehmen,  $\bar{Q}_0$  ist das Mittel der  $Q_0$ -Werte aller Elemente mit dichtester Kugelpackung für einen speziellen Druck  $P$ . Fixiert man  $F$  durch Annahme einer geochemischen Hypothese, so kann man  $T_m(P)$  bestimmen. Die Durchführung dieses Vorschlags muß jedoch einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

#### 6.6. Die Druckabhängigkeit weiterer dimensionsloser Zahlen, die die Schmelztemperatur enthalten

In diesem Abschnitt sollen Erkenntnisse über andere dimensionslose Zahlen, die  $T_m$  enthalten, und ihre Analoga dargestellt werden. Zunächst wird beschrieben, wie die geophysikalisch brauchbare Größe  $Q_0$  gefunden wurde. Die Suche nach einer Relation, aus der man die Schmelztemperatur auch des äußeren Erdkerns näherungsweise aus geophysikalisch gut bekannten Daten als Funktion der Tiefe bzw. des Drucks bestimmen kann, begann im Normaldruck-Bereich.

Ausgangspunkt war eine Arbeit von PLENDL (1974), aus der Abb. 6.14 stammt.  $Z_a$  ist die Wertigkeit der Atome in der Koordination, die als Produkt aus der Wertigkeit im Grundzustand und dem Verhältnis der atomaren Koordinationen zweier aufeinander folgender Festkörperphasen definiert ist.  $C_{str}$  ist ein Strukturparameter, wobei  $C_{str}^{-1}$  zur

atomaren Packungsdichte proportional ist.  $C_{\text{str}}^{-1}$  ist auch proportional zur Zahl der starken Annäherungen benachbarter schwingender Atome. Vergleicht man Abb. 6.14 mit Abb. 6.15, so erkennt man, daß die erhoffte Proportionalität  $T_m \sim Z_a \cdot C_{\text{str}}$  zwar angedeutet ist, leider ist die Streuung aber erheblich größer als von PLENDL angegeben. Nach PLENDL und GIELISSE (1969, 1970) gibt es auch eine Proportionalität zwischen Inkompressibilität  $\kappa$  und  $Z_a \cdot C_{\text{str}}$ . Demzufolge dürfen wir auch eine Proportionalität zwischen Schmelztemperatur und Inkompressibilität erwarten. Um das zu prüfen, tragen wir die Schmelztemperaturdaten der Elemente von GSCHNEIDNER (1964) über der Inkompressibilität für Nulldruck nach der Datensammlung von ULLMANN und PAN'KOV (1976) auf (siehe Abb. 6.3). Die Koordinationszahlen sind in dem Diagramm durch Symbole bezeichnet. Es deutet sich tatsächlich eine Proportionalität an. Jedoch ist die Streuung auch hier so erheblich, daß man für praktische Zwecke kaum etwas damit anfangen kann. Wenn wir jedoch möglichst wenig vom Stoff abhängende dimensionslose Größen bilden, können wir aus Abb. 6.3 die Vermutung herleiten, daß der Quotient  $T_m/\kappa$  darin enthalten sein muß.

Zunächst wollen wir für die chemischen Elemente einige dimensionslose Größen bilden und ihre Relationen zueinander beim Druck  $P = 0$  untersuchen. Wir definieren

$$(6.44) \quad N_1 = \frac{F}{R_0} \cdot \frac{\kappa}{T_m \rho}$$

und tragen diese Größe in Abb. 6.16 über den Gruppennummern des Periodensystems auf.  $R_0 = 8,31441 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)}$  ist die universelle Gaskonstante. Die Zahlen für das Formelgewicht  $F$  in kg/mol nehmen wir von EBERT (1976), für die Inkompressibilität  $\kappa$  und die Dichte  $\rho$  von ULLMANN und PAN'KOV (1976) und für die Schmelztemperatur  $T_m$  von GSCHNEIDNER (1964). Weiterhin definieren wir

$$(6.45) \quad N_2 = \frac{F}{R_0} \cdot \frac{3\alpha_1 \kappa}{\rho}$$

und stellen diese Größe ebenfalls im Periodensystem dar (siehe Abb. 6.17), wobei wir den linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_1$ , das Atomvolumen  $F/\rho$  und die Dichte  $\rho$  von GSCHNEIDNER (1964) nehmen. Nach GSCHNEIDNER (1964) ist das Produkt  $\alpha T_m = 0,0186 \pm 0,0080$  für alle Elemente nahezu konstant, wobei  $\alpha$  der thermische Ausdehnungskoeffizient ist. Die erwartete Parallelität zwischen den Kurven von Abb. 6.16 und Abb. 6.17 ist jedoch nicht allzu gut. Erstaunlich gut ist übrigens die Parallelität zwischen  $N_2$  und dem Grüneisenparameter

$$(6.46) \quad \gamma = \frac{\alpha \kappa_S}{\rho C_P} = \frac{\alpha \kappa_T}{\rho C_V}$$

(s. Abb. 6.18), wobei  $\kappa_S$  die adiabatische Inkompressibilität,  $\kappa_T$  die isotherme Inkompressibilität,  $C_P$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck,  $C_V$  die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bedeuten.

Diese Feststellung gilt unabhängig davon, ob man die allgemein, d. h. unabhängig vom jeweiligen Verfasser, etwas problematischen  $\gamma$ -Werte nach GSCHNEIDNER (1964) oder nach GUINAN und STEINBERG (1974) benutzt. Das zeigt ein Vergleich von Abb. 6.17 mit Abb. 6.18 und Abb. 6.19. Wie ein Blick auf die Relationen (6.45) und (6.46) zeigt, bedeutet dies eine annähernde Proportionalität zwischen spezifischer Wärme und dem reziproken Wert des Formelgewichts.

Um nun die Verteilung der dimensionslosen Größe  $Q_1$  (d. h.  $Q_j$  nach Gl. (6.31) für  $j = 1$ ) zu untersuchen, wurde in Abb. 6.20 diese Größe für  $P = 0$  über den Gruppen des Periodensystems aufgetragen. Mit Hilfe der Formeln des Abschnitts 6.4. wurde  $Q_1$  für den Druck, der an der Kern-Mantel-Grenze (CMB) herrscht, für die chemischen Elemente berechnet und in Abb. 6.21 über den Gruppen aufgetragen. Abb. 6.22 zeigt die entsprechende Verteilung für den Druck an der Innenkern-Grenze (ICB). Ein Vergleich dieser drei Abbildungen ergibt, daß die Veränderung der charakteristischen Kurven im äußeren Erdkern nicht so beträchtlich ist wie im Mantel. Die zur Berechnung nötigen Stoffparameter wurden in Tab. 6.1 gesammelt, ihre Herkunft in der Legende der Tabelle erwähnt. In den Abbildungen 6.23 bis 6.25 wurden die Größen  $Q_1$  als Funktion des Druckes aufgetragen. Insgesamt gesehen zeigt sich für die Elemente der Perioden 4 bis 6 keine starke Bündelung der Kurven. Insbesondere für die 5. und 6. Periode fällt auf, daß die Elemente mit dichtester Kugelpackung, d. h. die, die in hcp- oder fcc-Struktur vorliegen, in den oberen Kurven vorherrschen. Bedeutend günstiger liegen die Ergebnisse für die dimensionslose Größe  $Q_0$ , die für die 4. Periode in Abb. 6.4 über dem Druck dargestellt ist, für die 5. Periode in Abb. 6.5, für die 6. Periode in Abb. 6.6. In Abb. 6.4 findet man alle fcc- und hcp-Stoffe in dem starken mittleren Bündel. Nur das Element Sc ordnet sich nicht in dieses Schema ein. In Abb. 6.5 sieht man dasselbe Ergebnis für die Elemente der 5. Periode. Abgesehen von Y und Sr findet man alle Elemente mit fcc- oder hcp-Gittern in dem starken mittleren Kurvenbündel. Zwei deutlich getrennte Kurvenbündel erkennt man auch für die Elemente der 6. Periode in Abb. 6.6. Abgesehen von Hf und Re findet man alle Elemente mit fcc- und hcp-Strukturen im unteren engen Bündel von Kurven, während im oberen Bündel die bcc-Struktur vorherrscht. Da man für die Drücke, die im äußeren Kern bestehen, mit dichtesten Kugelpackungen rechnen müßte, falls die Temperaturen niedriger wären, ergeben die fcc-hcp-Bündel von  $Q_0$  eine Möglichkeit, den Quotienten  $T_m/F$  für den äußeren Kern zu schätzen, ohne sich bezüglich der chemischen Zusammensetzung allzu sehr festzulegen. In Abb. 6.8 wurde  $Q_0$  über den Gruppen des Periodensystems aufgetragen, wobei der Druck  $P = 1354$  kbar ist. Für die noch höheren Drücke im Inneren des äußeren Kerns ändern sich diese Charakteristiken nicht wesentlich. Die charakteristischen Kurven von  $Q_0$  bei  $P = P_{CMB}$  zeigen eine entfernte Ähnlichkeit mit der Leibfried-Zahl  $L$ , der modifizierten Leibfried-Zahl  $L'$  und der Bragg-Zahl  $B$ , wie man durch einen Vergleich von Abb. 6.8 mit den Abbildungen 6.26 bis 6.28 feststellt. (Diese Größen sind aber für Nulldruck dargestellt.) Die Figuren wurden nach den Zahlenwerten von GSCHNEIDNER (1964) aufgetragen. Die Leibfried-Zahl ist wie in der Arbeit von LEIBFRIED (1950) definiert als

$$(6.47) \quad L = \frac{R \cdot T_m}{\mu v},$$

wobei  $v$  das Atomvolumen und  $\mu$  der Schermodul ist. Diese Größe wurde von GSCHNEIDNER (1964) abgewandelt:

$$(6.48) \quad L' = \frac{KT_m}{\mu v}.$$

In dieser modifizierten Leibfried-Zahl ist  $K$  eine Konstante, die aber für jede Kristallstruktur einen anderen Wert hat, während  $R_0$  wie bisher die universelle Gaskonstante bedeutet. Die Bragg-Zahl ist dagegen durch

$$(6.49) \quad B = \frac{\Delta H}{\mu v}$$

definiert (BRAGG, 1948), wobei  $\Delta H$  die Schmelzwärme ist. Wegen der Richard-Regel

$\Delta H \sim R_0 T_m$  ist es nicht verwunderlich, wenn  $L, L'$  und  $B$  im Periodensystem aufgetragen ganz ähnliche charakteristische Kurven ergeben (vgl. Abb. 6.26 bis 6.28). Für eine Abschätzung von  $T_m$  im äußeren Kern sind diese Größen aber nicht geeignet, weil der Schermodul  $\mu$  im flüssigen Zustand verschwindet. Die Inkompressibilität  $\kappa$  ändert sich dagegen beim Schmelzen nicht stark. Deshalb scheint  $Q_0$  eine geophysikalisch nützliche Größe zu sein. Selbstverständlich muß die Druckabhängigkeit der eingehenden Größen berücksichtigt werden.

*[The following text is extremely faint and largely illegible due to low contrast and bleed-through from the reverse side of the page. It appears to be a continuation of the scientific discussion.]*

$$(6.27) \quad \frac{\partial \ln Q_0}{\partial \ln P} = \dots$$

$$(6.28) \quad \frac{\partial \ln Q_0}{\partial \ln T} = \dots$$

*[The following text is extremely faint and largely illegible due to low contrast and bleed-through from the reverse side of the page. It appears to be a continuation of the scientific discussion.]*



## 7. Eine neue Zustandsgleichung für hohe Kompressionen<sup>\*)</sup>

### 7.1. Problemstellung

Um aus der Verteilung der Dichte im Inneren der Erde oder anderer Planeten auf die Verteilung der chemischen Elemente und Verbindungen schließen zu können, ist es notwendig (wenn auch nicht hinreichend), zuverlässige Zustandsgleichungen für so hohe Drücke zu haben. Das ursprüngliche Ziel dieser Untersuchung war es, für den metallischen Kern der Erde aus der Festkörperphysik eine neue isotherme Zustandsgleichung herzuleiten, die für Metalle eine noch bessere Approximation der Meßwerte ergibt. Es ist klar (siehe Abschnitt 6.), daß das sowohl zur Bestimmung einer noch besseren allgemeinen Schmelzpunkt-Druck-Relation als auch zur Klärung der Frage der leichten Elemente im Außenkern beiträgt. Damit besteht die Hoffnung, daß diese Untersuchung das Problem der Möglichkeit thermischer Konvektion im äußeren Kern einer Lösung näherführt. Es zeigt sich, daß die neue Gleichung auch für Halogenide, für MgO und Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> gut anwendbar ist und die entsprechenden Kurven im Druck-Volumen-Diagramm näher an die Meßdaten herankommen. Deshalb kann man die neue Gleichung auch für die Inversion der Daten der gesamten Erde benutzen. Während die meisten in der Geophysik gebräuchlichen Zustandsgleichungen aus der Thermodynamik und der Mechanik der Kontinua hergeleitet wurden oder einfach empirische Ausdrücke sind, soll hier eine Analyse der Bindungskräfte versucht werden, aber auf eine solche Weise, daß das Ergebnis nicht zu kompliziert, d. h. noch geophysikalisch anwendbar ist.

### 7.2. Physikalische Vorbetrachtungen zur Herleitung der neuen Zustandsgleichung

Bekanntlich lassen sich die Festkörper je nach Bindungsart in verschiedene Gruppen einteilen, die sich durch die Wechselwirkung, die benachbarte Atome aufeinander ausüben, unterscheiden: Edelgaskristalle, ionisch gebundene Kristalle, Kristalle mit kovalenter Bindung, Metalle und Kristalle mit Wasserstoffbrücken. Die unterschiedlichen Bindungen werden mathematisch durch unterschiedliche zwischenatomare Potentiale ausgedrückt. Daraus erhält man durch Ableitung unterschiedliche Ausdrücke für die Zustandsgleichungen der Festkörperarten. Einheitliche Zustandsgleichungen für alle Festkörper können deshalb nur als erste Näherung gelten. Freilich ließe sich eine festkörperphysikalisch einwandfreie Vereinheitlichung durch eine Theorie der gemischten Bindungen erreichen. Das ist jedoch sehr schwierig. Eine halbempirische Theorie der teilweise ionischen, teilweise kovalenten Bindungen gab z. B. PHILLIPS (1969). Jedenfalls steht zu erwarten, daß man durch eine genauere Berücksichtigung der Bindungskräfte bessere Zustandsgleichungen herleiten kann. Genau das soll das Hauptziel dieses Abschnitts sein. Meist benutzt man heute halbempirische Ansätze für die zwischenatomaren Potentiale, die sich für die verschiedenen Bindungstypen voneinander unterscheiden. Für Edelgaskristalle z. B. schlug MIE im Jahre 1907 folgendes zwischenatomare Potential vor, welches heute meist Lennard-Jones-Potential genannt wird:

$$(7.1) \quad \phi(r) = \frac{A_1}{r^m} - \frac{B_1}{r^n}, \quad \text{wobei} \quad m > n.$$

<sup>\*)</sup> Tabellen und Abbildungen sind im Anhang.

Weil dieser Ansatz empirisch ist, benutzt man statt dessen oft auch

$$(7.2) \quad \Phi(r) = A_2 e^{-r/r_0} - B_2/r^6$$

(LIDIARD, 1974). Dieser Ansatz ist physikalisch besser erklärbar. Der erste Term beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Schalen der Atome in der Born-Mayer-Formulierung, der zweite stellt die anziehenden van-der-Waals-Kräfte dar. Gl. (7.1) wurde auch schon dazu verwandt, die Ionenbindung auszudrücken, wobei aus dem zweiten Term mit  $n = 1$  die elektrostatische Anziehungskraft resultiert. Für die kovalente Bindung dagegen ergab sich noch nie (7.1), mitunter wurde ein Morse-Potential benutzt.

Noch komplizierter liegen die Bindungsverhältnisse für Metalle. Diese interessieren uns aber besonders, und dies nicht nur, um eine realistischere Zustandsgleichung, sondern auch um eine bessere Schmelztemperatur-Druck-Relation zu gewinnen. Letztere wäre besonders wichtig bei der weiteren Diskussion des Kernparadoxons (KENNEDY und HIGGINS, 1973; ULLMANN und WALZER, 1980a,b). MATSUDA und HIWATARI (1973) schlagen folgendes Paarpotential vor:

$$(7.3) \quad \Phi(r) = \varepsilon(\sigma/r)^n - \alpha\gamma^3 \exp(-\gamma r) .$$

In allen drei erwähnten Formeln bezeichnet  $r$  den Abstand zwischen den Atomen, die anderen Größen sind Konstanten. Die aus Gl. (7.3) hergeleiteten theoretischen Kurven der  $n$ -Abhängigkeit der Tripelpunkt-Temperatur, der kritischen Temperatur, der relativen Volumenänderung beim Schmelzen und anderer Größen zeigen jedoch nur für Alkalimetalle und Edeltgaskristalle Verträglichkeit mit den Meßdaten. Für Übergangsmetalle und Edelmetalle versagt der Ansatz (7.3) jedoch vollständig. Das ist ein deutlicher Hinweis darauf, daß in einem neuen Ansatz die Elektronentheorie der Metalle stärker benutzt werden muß. Die metallische Bindung ist bekanntlich sehr kompliziert. Die freie Beweglichkeit der Leitungselektronen erzeugt eine große Unschärfe der Ortskoordinaten. Nach Heisenbergs Unbestimmtheitsprinzip ist dann aber die Unschärfe der Impulskoordinaten gering. Die mittlere kinetische Energie der Leitungselektronen ist gering und ihre Wechselwirkung mit den Atom-Rümpfen (d. h. den Atomen ohne Leitungselektronen) bewirkt einen großen Teil der Metallbindung. Übergangsmetalle haben außerdem noch unvollständige  $d$ -Schalen, so daß z. B. für Eisen auch die inneren Elektronenschalen stark zur Bindung beitragen. Wie bei dem Edelgas-Festkörper Ar (KEELER und BATCHELDER, 1970) ist die Cauchy-Relation  $c_{12} = c_{44}$  auch für die elastischen Konstanten der meisten Übergangs- und Edelmetalle nicht erfüllt (siehe Tab. 4.2. bis 4.4. von LEIBFRIED und BREUER, 1978). Das ist ein Zeichen dafür, daß hier eigentlich auch Nicht-Zentralkräfte berücksichtigt werden müßten. Bekanntlich gibt es die verschiedensten Näherungsmethoden zur Lösung der Schrödinger-Gleichung für Metalle. Wir sind aber nur an Lösungen interessiert, die sich auf die in der Geophysik bekannten Parameter des Erdinneren übertragen lassen. Es hat zwei interessante Versuche gegeben, Zustandsgleichungen, die aus dem Thomas-Fermi-Atommodell (TF-Modell) hergeleitet wurden, für die Geophysik anwendbar zu machen (GILVARRY, 1969; BOSCHI und CAPUTO, 1970). Die in der Erde erreichten Drücke von höchstens 363,24 GPa (3,6324 Mbar) sind jedoch noch so niedrig, daß die Schalenstruktur der Atome noch wesentlich ist. Am TF-Modell sind eine Reihe von Verbesserungen angebracht worden, die es einer Anwendung näherführen. Bekanntlich wurde das Modell durch Hinzufügung eines aus der Austauschenergie der Elektronen stammenden Terms durch DIRAC (1930) erweitert. Eine weitere Verbesserung führt von WEIZSÄCKER (1935) durch die Hinzufügung eines Terms zur kinetischen

Energiedichte ein, der dem Quadrat des Gradienten der Elektronendichte proportional ist. Dieser Gedanke wurde durch HOHENBERG und KOHN (1964) systematisch erweitert, indem der von-Weissäcker-Term durch eine Entwicklung nach dem Gradienten der Elektronendichte ersetzt wurde. Doch all diese Erweiterungen reichen nicht aus, um radiale Schwankungen der Elektronendichte im Atom, d. h. die Schalenstruktur des Atoms, zu berücksichtigen. Das ist aber für Anwendungen in der planetaren Physik nötig, weil bis zu den höchsten dort vorkommenden Drücken ( $\sim 3000$  GPa in der Mitte des Jupiters) die Schalenstruktur noch existiert. Einen Versuch, die Schalenstruktur in einem erweiterten TF-Modell für Elemente mit Kernladungszahlen zwischen 5 und 30 zu beachten, unternahmen LEE und THORSOS (1978). Die Berechnung des Massendichte-Druck-Diagramms für Eisen ist aber für geophysikalische Zwecke wenig erfolgversprechend. Inzwischen gibt es auch interessante Arbeiten, in denen die TF-Theorie auf zwei- und dreiatomige Moleküle übertragen wird (JACOB u. a., 1978; GROSS und DREIZLER, 1979; DREIZLER u. a., 1979; SHIH, 1979). In überaus klarer Weise beschrieb PERROT (1979a), wie die Dichte als Funktion des Druckes und der Temperatur für das TF-Modell und einige Erweiterungen des Modells berechnet wird. Das Kernstück dieser Rechnungen ist die Lösung einer Differentialgleichung 4. Ordnung zur Bestimmung der lokalen Elektronendichte. Die Rechnungen sind zwar viel zu umfangreich, um als eine geophysikalisch brauchbare Zustandsgleichung Verwendung zu finden; sie und die weiter oben erwähnten Arbeiten ergaben jedoch wichtige Hinweise zur Berechnung der im nächsten Abschnitt hergeleiteten Zustandsgleichung. Die erwähnten Abkömmlinge des TF-Modells gelten außerdem erst bei höheren Kompressionen, als sie in der Erde vorkommen. So ist z. B. das TF-Dirac-Modell wahrscheinlich erst für  $x \leq 0,02$  bei Li, für  $x \leq 0,05$  bei Be und Al und für  $x \leq 0,1$  bei Cu anwendbar, wobei  $x = \rho/\rho_0$  gilt,  $\rho$  die Massendichte und  $\rho_0$  die Massendichte bei Nulldruck bedeutet (PERROT, 1979b).

### 7.3. Herleitung der neuen Zustandsgleichung

Die freie Energie eines Metalls sei als folgende Summe dargestellt

$$(7.4) \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_0 + \Phi_t + \Phi_e .$$

Dabei ist

$$(7.5) \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} N Z \epsilon^* [A(v/v^*)^{-4} - 2B(v/v^*)^{-2}]$$

die freie Energie der Gitter-Wechselwirkung unter Annahme eines Lennard-Jones-Potentials,

$$(7.6) \quad \Phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} h \nu_i$$

die freie Nullpunktsenergie,

$$(7.7) \quad \Phi_t = kT \sum_{i=1}^{3N} \ln \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h \nu_i}{kT}\right) \right]$$

die thermische freie Energie und  $\Phi_e$  die freie Energie der freien Elektronen. Viele Autoren (z. B. MIDHA und NANDA, 1975; MULARGIA u. a., 1979) haben eine solche oder eine ähnliche Darstellung benutzt. HIRSCHFELDER u. a. (1954) finden für fcc-Gitter und bei Berücksichtigung von 3 Schalen von Nachbaratomen um ein mittleres Atom  $A = 1,0110$  und  $B = 1,2045$ . Im übrigen bedeuten die Größen: T Temperatur, h Plancksche Konstante,

$k$  Boltzmann-Konstante,  $\nu_1$  Frequenz,  $v$  Atomvolumen,  $N$  Zahl der Atome,  $Z$  Koordinationszahl,  $\varepsilon^*$  und  $v^*$  sind Energie- und Volumenkonstanten. Ab jetzt vernachlässigen wir die Abhängigkeit von der Temperatur, wir wollen uns also auf isotherme Zustandsgleichungen beschränken. Zur Berechnung der elektronischen Anteile der freien Energie gibt es mehrere Möglichkeiten (MARCH, 1974). Wir verwenden die Hartree-Fock-Energie  $E_{HF}$

$$(7.8) \quad E_{HF} = N(2,21/r_B^2 - 0,916/r_B) .$$

Der erste Term der rechten Seite (Fermi-Term) stellt die mittlere kinetische Energie der Elektronen dar, der zweite Term (Austausch-Term) beschreibt die gegenseitige Abstoßung von Elektronen mit gleichem Spin. Um die gegenseitige Beeinflussung der Leitungselektronen vollständig zu erfassen, benutzen wir zusätzlich WIGNERS (1938) Interpolationsformel für die Korrelationsenergie  $E_{corr}$ :

$$(7.9) \quad E_{corr} = N[-0,88/(r_B + 7,8)]$$

$r_B$  ist der mittlere Elektronenabstand, gemessen in Bohr-Einheiten. Dabei werden nur die Valenzelektronen berücksichtigt. Die Energien sind in (7.8) und (7.9) in Ryd ausgedrückt. Durch eine einfache Überlegung findet man, daß man das oben definierte  $x$  auch durch  $x = r_B^3/r_{B0}^3$  ausdrücken kann, wobei  $r_{B0}$  das  $r_B$  für Nulldruck ist.  $r_B$  liegt für Metalle zwischen 2 und 6 Bohr-Einheiten. Um die Formeln zu vereinfachen, führen wir deshalb heuristisch und etwas gewaltsam  $r_{B0} = 4$  Bohr-Einheiten in die Formeln ein. Durch Einsetzen der Gln. (7.5) bis (7.9) in Gl. (7.4) entsteht ein gut begründeter Ausdruck für die freie Energie der Metalle.

Dieser Ausdruck wird nun durch die Einführung von freien Parametern  $a$ ,  $b$  und  $n$  verallgemeinert. Gleichzeitig wird es dadurch möglich, makrophysikalische Größen in die Formeln einzuführen. Damit wird der Vergleich der Formeln mit Hochdruck-Daten und mit Daten aus dem Erdinneren möglich. Unser physikalisch gut begründeter Ansatz für die freie Energie lautet:

$$(7.10) \quad \Phi = a\left(\frac{A}{x^{2n/3}} - \frac{2B}{x^{n/3}}\right) + b\left(\frac{C}{x^{2/3}} - \frac{D}{x^{1/3}} - \frac{E}{x^{1/3} + F}\right) .$$

Die Terme der rechten Seite bedeuten der Reihe nach: Abstoßungs- und Anziehungs-Gitterterm, freie Fermi-Energie der Elektronen, Austausch- und Korrelationsterm der Elektronen. Die Größen  $A$  bis  $F$  liegen fest und sind physikalisch gut begründet:

$$\begin{array}{lll} A = 1,0110 & B = 1,2045 & C = 0,138 \text{ Ryd} \\ D = 0,229 \text{ Ryd} & E = 0,220 \text{ Ryd} & F = 1,95 \end{array}$$

Die Größen  $a$ ,  $b$  und  $n$  liegen dagegen nur für je einen Stoff fest und werden im folgenden durch besser bekannte Größen ausgedrückt. Mit Hilfe der thermodynamischen Relation  $P = -(\partial\Phi/\partial x)_T$  folgt aus (7.10) folgende neue Zustandsgleichung

$$(7.11) \quad P = \frac{2n}{3} a\left(\frac{A}{x^{2n/3+1}} - \frac{B}{x^{n/3+1}}\right) + \frac{2}{3} b\left(\frac{C}{x^{5/3}} - \frac{D}{2x^{4/3}} - \frac{E}{2(x^{1/3} + F)x^{2/3}}\right) .$$

Aus dem Druck  $P$  berechnet man die Inkompressibilität  $\kappa$  mit Hilfe von  $\kappa = -x\partial P/\partial x$  und erhält



$$(7.12) \quad \kappa = \frac{2n}{3} a \left[ \frac{(2n/3+1)A}{x^{2n/3+1}} - \frac{(n/3+1)B}{x^{n/3+1}} \right] + \\ + \frac{2}{9} b \left[ 5 Cx^{-5/3} - 2 Dx^{-4/3} - E \frac{2 + Fx^{-1/3}}{(x^{1/3} + F)^{3x^{1/3}}} \right].$$

Ferner gilt

$$(7.13) \quad -x\partial\kappa/\partial x = \frac{2n}{3} a \left[ \frac{(2n/3+1)^2 A}{x^{2n/3+1}} - \frac{(n/3+1)^2 B}{x^{n/3+1}} \right] + \\ + \frac{2}{27} b \left[ 25 Cx^{-5/3} - 8 Dx^{-4/3} - E(x^{1/3} + F)^{-4} \{ Fx^{-1/3}(1 + Fx^{-1/3}) + \right. \\ \left. + (2 + Fx^{-1/3})(4 + Fx^{-1/3}) \} \right].$$

Wir bezeichnen die Inkompressibilität bei verschwindendem Druck mit  $\kappa_0$ , ihre Druckableitung bei verschwindendem Druck mit  $\kappa_1$ . Also  $\kappa_0 \equiv \kappa|_{x=1}$  und  $\kappa_1 \equiv \partial\kappa/\partial P|_{x=1}$ . Ferner gilt  $\partial\kappa/\partial P = (-x\partial\kappa/\partial x)\kappa^{-1}$ . Damit kann man aus den auf  $x = 1$  spezialisierten Gleichungen (7.11) bis (7.13) die Größen  $a$ ,  $b$  und  $n$  als Funktionen der für viele Stoffe bekannten Konstanten  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  und der stoffunabhängigen Konstanten  $A$  bis  $F$  bestimmen. Das ist für die numerische Bestimmung der Größen  $\Phi$ ,  $P$  und  $\kappa$  als Funktion von  $x(=p/p_0)$  nötig. Es ergibt sich:

$$(7.14) \quad n = (L\kappa_1 - K)/2 + \{ [(L\kappa_1 - K)/2]^2 - M + N\kappa_1 \}^{1/2},$$

$$(7.15) \quad a = (3/2)\kappa_0 n^{-1} [(2n/3 + 1)A - (n/3 + 1)B + GH]^{-1},$$

$$(7.16) \quad b = Gna$$

wobei

$$G \equiv (B - A)[C - \{D + E/(1 + F)^2\}/2]^{-1}$$

$$H \equiv [5C - 2D - E(2 + F)(1 + F)^{-3}]/3$$

$$I \equiv [25C - 8D - E(1 + F)^{-4}\{F(1 + F) + (2 + F)(4 + F)\}]/9$$

$$J \equiv (4A - B)/9$$

$$K \equiv (4A - 2B)/3J$$

$$L \equiv (2A - B)/3J$$

$$M \equiv (A - B + GI)/J$$

$$N \equiv (A - B + GH)/J.$$

Die neue Zustandsgleichung (7.11), die zusammen mit den Gln. (7.14) bis (7.16) und den Konstanten  $A$  bis  $N$  verwendet werden muß, enthält eine genauere Analyse der Bindungskräfte und wir wollen zeigen, daß sie sich auch in der Anwendung auf Hochdruck-Meßdaten besser als andere Zustandsgleichungen bewährt. Die Konstanten  $A$  bis  $N$  sind für alle Stoffe gleich, nur  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  muß stoffspezifisch gewählt werden. Damit ist (7.11) für die praktische Hochdruckforschung und für die Geophysik leicht anwendbar. Der Verfasser hofft, daß die neue Zustandsgleichung ein gesunder Kompromiß zwischen einer tieferen theoretisch-physikalischen Durchdringung des Problems und den Forderungen nach Einfachheit und Übereinstimmung mit Meßdaten, die von praktischer Hochdruckforschung und geophysikalischer Modellierung ausgehen, ist.

#### 7.4. Andere Zustandsgleichungen

In der Anwendung unserer neuen Zustandsgleichung erwies es sich, daß sie auch für geophysikalisch wichtige Oxide sehr gute und für Halogenide gute Übereinstimmung mit den Hochdruck-Meßdaten zeigt, obwohl sie ursprünglich nur für Metalle vorgesehen war. Das führte auf den Gedanken, auch andere Zustandsgleichungen zum Vergleich heranzuziehen, wobei nur zwei sehr wirklichkeitsnahe in unseren Abbildungen zum Vergleich genommen wurden. Diese zwei anderen Zustandsgleichungen sollen im folgenden hergeleitet werden.

Für Stoffe mit Ionenbindung (z. B. für Alkalihalogenide) benutzt man bekanntlich (siehe z. B. GUPTA und SHANKER, 1979) häufig ein zwischenatomares Potential folgender Gestalt:

$$(7.17) \quad \Phi = -\frac{\alpha_m e^2}{r} + \beta e^{-r/r_0} - \frac{\delta_1}{r^6} - \frac{\delta_2}{r^8}$$

$\alpha_m$  ist die Madelung-Konstante,  $\beta$  und  $r_0$  sind die Konstanten des Born-Mayer-Abstoßungsterms,  $\delta_1$  und  $\delta_2$  sind die Dipol-Dipol- und Dipol-Quadrupol-Wechselwirkungskonstanten nach van der Waals. Um die Konstanten nach dem im vorigen Abschnitt angewandten Verfahren durch makrophysikalische Größen  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  zu ersetzen, müssen wir die letzten zwei Glieder der rechten Seite von (7.17) vernachlässigen, weil die höheren Druckableitungen der Inkompressibilität für die meisten Stoffe unbekannt oder nur unsicher bekannt sind.  $r$  bezeichnet wieder den zwischenatomaren Abstand. Wir ersetzen also (7.17) durch (7.18), wobei  $c_1$  bis  $c_3$  Konstanten sind, die im folgenden durch Funktionen von  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  ausgedrückt werden.

$$(7.18) \quad \Phi = -c_1 x^{-1/3} + c_2 \exp(-x^{1/3}/c_3) .$$

Daraus folgt

$$(7.19) \quad P = [3\kappa_0/(D_2 - 2)][x^{-2/3} \exp\{D_2(1 - x^{1/3})\} - x^{-4/3}]$$

wobei

$$(7.20) \quad D_2 = (3/2)(\kappa_1 - 1) + (1/2)[(3\kappa_1 - 7)^2 + 8]^{1/2} .$$

Gl. (7.19) stellt die Born-Mayer-Zustandsgleichung dar (siehe auch ZHARKOV und KALININ, 1971; PAN'KOV und ULLMANN, 1979).

Spezialisiert man das Lennard-Jones-Potential von (7.1) auf  $m = 2n$ , so erhält man

$$(7.21) \quad \Phi = \frac{A_1}{x^{2n/3}} - \frac{B_1}{x^{n/3}} .$$

Eliminiert man nach dem im vorigen Abschnitt angewandten Verfahren  $A_1$ ,  $B_1$  und  $n$ , so erhält man aus (7.21)

$$(7.22) \quad P = [3\kappa_0/(\kappa_1 - 2)] [x^{(1-2\kappa_1)/3} - x^{-(1+\kappa_1)/3}] .$$

Das ist die Zustandsgleichung M1 von ULLMANN und PAN'KOV (1976), die diese vorwiegend gestützt auf thermodynamische Überlegungen herleiteten. Die praktische Brauchbarkeit

dieser Zustandsgleichung wurde durch die zwei Autoren selbst und durch WALZER u. a. (1979) bewiesen. Aus (7.2) folgt dagegen

$$(7.23) \quad P = [3\kappa_0 / (D_1 - 7)] [x^{-2/3} \exp\{D_1(1 - x^{1/3})\} - x^{-3}] ,$$

wobei

$$(7.24) \quad D_1 = (3/2)(\kappa_1 - 1) + (1/2)[(3\kappa_1 - 17)^2 + 28]^{1/2} .$$

Die Zustandsgleichung (7.23) wird hier nicht zum Vergleich verwandt. Sie dürfte für Edelgaskristalle von Bedeutung sein.

### 7.5. Vergleich der drei Zustandsgleichungen mit Meßdaten

Zum Vergleich der Zustandsgleichungen mit Meßdaten verwenden wir experimentelle Kompressionswerte aus Volumenmessungen sowie Daten aus Stoßwellen- und Röntgenstrahl-Untersuchungen. Ich habe unter anderem isotherme Daten benutzt, die aus experimentellen Hugoniot-Daten stammen. ULLMANN und PAN'KOV (1976) haben diese Werte aus der Literatur gesammelt und unter Verwendung der üblichen Methode auf Isothermen bei Zimmertemperatur reduziert. Die Berechnung des Hugoniot-Druckes mit Hilfe der Mie-Grüneisen-Gleichung und der Rankine-Hugoniot-Erhaltungsgleichungen ist beispielsweise bei WALZER u. a. (1979) dargestellt. Für die theoretischen Kurven (Isothermen bei Zimmertemperatur) der drei benutzten Modelle wurden dieselben Eingangsdaten verwandt, die in Tab. 7.1 zusammengestellt sind. Die drei Kurven wurden jeweils in P-x-Diagramme eingetragen und zwar gemeinsam mit den auf isotherme Bedingungen reduzierten experimentellen Ergebnissen. Das ermöglicht eine schnelle Entscheidung, welche Zustandsgleichung für welche Stoffe am besten geeignet ist. Die aus der neuen Zustandsgleichung (7.11) stammende Kurve wurde mit MX bezeichnet, die Born-Mayer-Zustandsgleichung (7.19) mit BM und (7.22), d. h. Modell 1 von ULLMANN und PAN'KOV (1976), mit M1. Um einen gerechten Vergleich der Zustandsgleichungen zu ermöglichen, habe ich mich bewußt auf die von ULLMANN und PAN'KOV (1976) ausgewählten Stoffe beschränkt und auch die Darstellung der experimentellen Daten in den P-x-Diagrammen übernommen. Die Herkunft der Beobachtungsergebnisse ist in Tab. 7.2 angegeben. Mit Kreuzen sind adiabatische Hugoniot-Daten markiert, während die isothermen Daten mit Kreisen, Vierecken, Dreiecken und anderen mehr ins Auge fallenden Symbolen bezeichnet wurden. Es ist klar, daß hauptsächlich die Übereinstimmung der isothermen Meßdaten mit den theoretischen Kurven für die Güte der Theorie entscheidend ist. Die Abbildungen sind in derselben Reihenfolge angeordnet wie in Tab. 7.1.

### 7.6. Schlußfolgerung

Durch eine Analyse der zwischenatomaren Kräfte wurde eine neue Zustandsgleichung (7.11) hergeleitet. Diese Gleichung wurde hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit bei der Vorhersage der Kompression unter hohem Druck mit zwei anderen Zustandsgleichungen verglichen, die sich in der Anwendung gut bewährt haben. Durch Betrachtung der Abb. 7.1 bis 7.3 sieht man im einzelnen, für welchen Stoff welche der Gleichungen am besten ist. Es zeigte sich, daß die neue Zustandsgleichung nicht nur für Metalle geht (für die sie eigentlich hergeleitet wurde), sondern auch für Halogenide und einige Oxide. Unter den





## 8. Konvektion mit anderen temperaturabhängigen Materialparametern

### 8.1. Herleitung der Konvektions-Differentialgleichungen mit temperaturabhängigen Materialparametern

In 3. und 4. wurde der Einfluß der temperatur- und druckabhängigen Viskosität auf die Mantelkonvektion behandelt, wobei in 4. zusätzlich der Einfluß innerer Heizung berücksichtigt wurde. Es ist zur Zeit unmöglich, alle Aspekte der Konvektion im Erdmantel in einem Modell gleichzeitig analytisch oder auch nur numerisch zu behandeln. So wurden bisher in allen bekannten Konvektionsmodellen die Wärmeleitfähigkeit, die spezifische Wärme und der thermische Ausdehnungskoeffizient als konstant vorausgesetzt, um die Aufgabe zu vereinfachen. Hier soll jedoch das Bénard-Problem mit zusätzlichen inneren räumlichen Wärmequellen behandelt werden, wobei die genannten Materialgrößen die für den Erdmantel kennzeichnenden Temperaturabhängigkeiten besitzen. In diesem Abschnitt benutzte Zahlenwerte dienen nur zur größenordnungsmäßigen Abschätzung, die gebraucht wird, um die Rechnung etwas zu vereinfachen. Leichte Änderungen der Zahlenwerte beeinflussen die Ergebnisse nicht. Um die Rechnungen so allgemein wie möglich zu halten, werden die Vereinfachungen so spät wie möglich eingeführt.

Wir benutzen die in der Oberbeck-Boussinesq-Approximation übliche Form der Kontinuitätsgleichung:

$$(8.1) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$$

wobei  $x_1$  oder  $r$  der Ortsvektor,  $v_1$  oder  $v$  der Geschwindigkeitsvektor ist. Das bedeutet, daß wie üblich die Dichteschwankungen nur im Auftriebsterm berücksichtigt werden. Die pro Volumen und Zeiteinheit erzeugte Wärme sei  $Q$ ,  $T$  die Temperatur,  $p$  der Druck.  $Q$  hängt bei vorwiegend radioaktiver Wärmezeugung im Mantel von  $T$  und  $p$  nicht ab. Wie TOZER (1967) und WEERTMAN (1970) nehmen wir die Temperaturabhängigkeit der Viskosität  $\eta$  in folgender Form an:

$$(8.2) \quad \eta = k_1 T e^{k_2 T_m(p)/T}$$

$k_1$  und  $k_2$  sind Konstanten,  $T_m$  ist die Schmelztemperatur. Für die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  benutzen wir das Modell von SCHATZ und SIMMONS (1972):

$$(8.3) \quad \kappa = \kappa_L + \kappa_R.$$

Danach gilt für die Gitter-Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_L$ :

$$(8.4) \quad \kappa_L = (k_3 + k_4 T)^{-1}.$$

Für die Strahlungs-Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_R$ :

$$(8.5) \quad \kappa_R = 0 \quad \text{für } T \leq 500 \text{ K},$$

$$(8.6) \quad \kappa_R = k_5(T - k_6) \quad \text{für } T > 500 \text{ K},$$

wobei  $k_3$  bis  $k_6$  folgende Konstanten sind:

$$\begin{aligned}
 k_3 &= 31 \text{ cm sec K/cal} \\
 k_4 &= 0,21 \text{ cm sec/cal} \\
 (8.7) \quad k_5 &= 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm sec K}^2 \\
 k_6 &= 500 \text{ K} .
 \end{aligned}$$

Als Wärmeproduktionsdichte wurde folgender Wert verwandt:

$$(8.8) \quad Q = 0,1 \cdot 10^{-13} \text{ cal/cm}^3 \text{ sec} .$$

Für Moho-Temperaturen zwischen 500 und 1000 °C (siehe z. B. ČERMAK, 1975) genügt Formel (8.6) für  $\kappa_R$ . Die Exzitonen-Leitfähigkeit wurde vernachlässigt. Sie kann vermutlich auch im unteren Mantel vernachlässigt werden (vgl. ZHARKOV u. a., 1971, S. 51). Nach SCHATZ und SIMMONS (1972, S. 6975) kann die Druckabhängigkeit der Gitter-Wärmeleitfähigkeit indirekt durch

$$(8.9) \quad \kappa_{L \text{ min}} = 0,003 (1 + Z) \text{ cal/cm s } ^\circ\text{C}$$

beschrieben werden, wobei  $Z$  die Tiefe in  $10^3 \text{ km}$  ausdrückt. Näherungsformel (8.9) und Fig. 12 von LUBIMOVA (1967, S. 257) wurden aus derselben Formel hergeleitet und zeigen, daß die Druckabhängigkeit bis in etwa 400 km Tiefe vernachlässigt werden kann. Weil die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen für Festkörper fast gleich sind, genügt es, nur einen Buchstaben  $c$  einzuführen. Nach der Debye-Theorie lautet die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme  $c$  für Festkörper bekanntlich so:

$$(8.10) \quad c = c_0 \left\{ D(x) - x \frac{dD(x)}{dx} \right\} ,$$

wobei

$$(8.11) \quad x = \theta/T .$$

$\theta$  ist die Debye-Temperatur,  $c_0 = 3N\nu$  ist eine Konstante, nämlich die Gesamtzahl der Schwingungen,  $D$  bedeutet die Debye-Funktion

$$(8.12) \quad D(x) = \frac{3}{x} \int_0^x \frac{z^3 dz}{e^z - 1} .$$

Wenn man die Temperatur  $T$  als Funktion der Tiefe im Mantel (vgl. z. B. LUBIMOVA, 1967, S. 297, Fig. 26) mit der Debye-Temperatur als Funktion der Tiefe (siehe z. B. ZHARKOV u. a., 1971, S. 29, Fig. 2) vergleicht, so findet man, daß weder  $T \gg \theta$  noch  $\theta \gg T$  gilt. Deshalb muß die Interpolationsformel (8.10) benutzt werden. Gleichung (8.10) wurde in eine Reihe entwickelt. Folgende Approximation erwies sich als ausreichend:

$$(8.13) \quad c = c_0 (1 - k_7 T^{-2}) , \quad \text{wobei} \quad k_7 = \frac{\theta^2}{20} .$$

Nach LANDAU und LIFSCHITZ (1966, S. 199) ergibt sich im Gültigkeitsbereich des Gesetzes der korrespondierenden Zustände

$$(8.14) \quad \frac{\alpha}{c} = \frac{1}{\theta V_0(p)} \cdot \frac{d\theta}{dp} .$$

$\alpha$  ist der thermische Ausdehnungskoeffizient,  $V_0$  das Volumen als Funktion des Druckes.

Nach ZHARKOV u. a. (1971, S. 29, Fig. 2) kann  $d\theta/dp = \text{const}$  für die oberen 400 km des Mantels angenommen werden. Deshalb und wegen (8.1) und (8.14) kann für diesen Bereich  $\alpha/c$  als druckunabhängig angesehen werden. Deshalb und wegen (8.13) muß

$$(8.15) \quad \alpha = \alpha_0 (1 - k_7 T^{-2})$$

gelten, weil das Verhältnis von thermischem Ausdehnungskoeffizienten zu spezifischer Wärme für feste Körper eine von der Temperatur unabhängige Größe ist (Gesetz von Grüneisen (8.14)).  $\alpha_0$  ist eine Konstante. Die Formeln (8.4), (8.6), (8.13) und (8.15) gelten speziell für den oberen Mantel.

Die genannten vier Temperaturabhängigkeiten und (8.2) werden nun in die Konvektionsdifferentialgleichungen eingeführt. Es mag für Physiker, die keine enge Beziehung zur Geophysik haben, befremdlich erscheinen, Formeln, die aus der Festkörperphysik kommen, in Gleichungen für Flüssigkeitsströmungen einzusetzen. Das ist aber völlig gerechtfertigt, denn gegenüber den kurzen Zeiten der Laboratoriumsphysik ist der Mantel ein Festkörper, gegenüber Vorgängen von Millionen Jahren kann man ihn kontinuumsmechanisch in erster Näherung als Newtonsche Flüssigkeit behandeln. Man erhält folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten  $v_1$ , der Temperatur  $T$ , des Druckes  $p$  und der Dichte  $\rho$

$$(8.16) \quad \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \rho g_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ T e^{k_2 T_m(p)/T} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right) \right\},$$

$$(8.17) \quad c_0 \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] (T - \frac{k_7}{T}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ [(k_3 + k_4 T)^{-1} + k_5 (T - k_6)] \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\} + Q,$$

$$(8.18) \quad \rho = \rho_0 [1 - \alpha_0 (1 - k_7 T^{-2}) (T - T_0)],$$

$$(8.19) \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

In der Bewegungsgleichung (8.16) und der Wärmetransportgleichung (8.17) wurden Größen, die das Quadrat der Geschwindigkeiten enthalten, vernachlässigt, weil die Geschwindigkeiten der Mantelkonvektion in der Größenordnung von 10 cm/Jahr liegen. (8.18) ist die verwendete Zustandsgleichung und (8.19) die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Materie. (8.16) bis (8.19) sind die Grundgleichungen des Konvektionsproblems mit allen Temperaturabhängigkeiten. In dieser Form der Gleichungen sind aber selbst einfache Probleme zur Zeit noch nicht lösbar. Insbesondere stellt die in (8.16) steckende Temperaturabhängigkeit der Viskosität eine Schwierigkeit dar, die separat in 4. näherungsweise behandelt wurde. (8.18) und (8.19) in einem System zu verwenden, läuft darauf hinaus, Dichteschwankungen nur im Auftriebsterm zu verwenden. Die Approximation ist in der Hydrodynamik üblich (vgl. 2.).

Zwecks Vereinfachung setzen wir hier eine konstante Viskosität voraus. Dadurch vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$(8.20) \quad \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \rho g_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Mit  $g = (0, 0, -g)$  oder  $g_1$  ist wie üblich die Schwerebeschleunigung, mit  $\rho$  die Dichte, mit  $t$  die Zeit bezeichnet. Wir behandeln nun die Konvektion in einer horizontalen ebenen Schicht der Dicke  $h$  und benutzen ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem  $x_1 x_2 x_3$ . Der Ursprung des Systems liegt in der unteren Grenzebene,  $x_3$  wird nach oben positiv gezählt. Die Grenzebenen werden auf konstanten Temperaturen gehalten. Für  $x_3 = h$  sei  $T = T_1$  und für  $x_3 = 0$  sei  $T = T_0 > T_1$ . Das Problem soll sowohl für freie als auch für feste Grenzen gelöst werden. Wie es in der Hydrodynamik üblich ist, setzen wir voraus, daß der mittlere Zustand unmittelbar nach dem Einsetzen der Strömung gleich dem Gleichgewichtszustand ist. Die Gleichgewichts-Variablen werden mit einem Querstrich gekennzeichnet. Wir lösen das Problem jetzt für den statischen Fall, um dann für Geschwindigkeit, Druck und Temperatur kleine Störungen einzuführen. Unter Verwendung der statischen Lösungen werden dann die linearisierten Grundgleichungen bestimmt.

## 8.2. Die Herleitung der linearisierten Differentialgleichungen

Im Gleichgewichtszustand verschwindet die Geschwindigkeit:

$$(8.21) \quad \bar{v} = 0.$$

Aus der Wärmetransportgleichung (8.17) folgt

$$(8.22) \quad \frac{d}{dx_3} \left\{ [(k_3 + k_4 \bar{T})^{-1} + k_5 (\bar{T} - k_6)] \frac{d\bar{T}}{dx_3} \right\} = -Q.$$

Aus der Bewegungsgleichung (8.16) oder (8.20) ergibt sich

$$(8.23) \quad \nabla \bar{p} = g \bar{\rho}.$$

Daraus entsteht

$$(8.24) \quad \bar{p} = g \bar{\rho} (h - x_3).$$

Aus (8.22) erhält man

$$(8.25) \quad -\frac{Q}{2} x_3^2 + k_8 x_3 + k_9 = \frac{k_5}{2} \bar{T}^2 - k_5 k_6 \bar{T} + k_4^{-1} \ln(k_3 + k_4 \bar{T}),$$

wobei  $k_8$  und  $k_9$  Integrationskonstanten sind, die dadurch bestimmt werden, daß für  $x_3 = 0$  Gleichung  $\bar{T} = T_0$  und für  $x_3 = h$  Gleichung  $\bar{T} = T_1$  gelten muß. Also:

$$(8.26) \quad k_9 = \frac{k_5}{2} T_0^2 - k_5 k_6 T_0 + \frac{1}{k_4} \ln(k_3 + k_4 T_0).$$

In (8.25) und (8.26) müssen  $\bar{T}$  und  $T_0$  in Grad Kelvin eingesetzt werden, während sie als Argument des Logarithmus  $\ln$  dimensionslos genommen werden müssen.

$$(8.27) \quad k_8 = \frac{Q}{2} h + \frac{1}{h} \left[ \frac{k_5}{2} (T_1^2 - T_0^2) - k_5 k_6 (T_1 - T_0) + \frac{1}{k_4} \ln \frac{k_3 + k_4 T_1}{k_3 + k_4 T_0} \right].$$

Aus (8.25) ist  $\bar{T} = \bar{T}(x_3)$  mit numerischen Methoden in beliebig guter Approximation bestimmbar. Aus (8.18) folgt diese Zustandsgleichung:

$$(8.28) \quad \bar{\rho} = \rho_0 [1 - \alpha_0 (1 - k_7 \bar{T}^{-2}) (\bar{T} - T_0)].$$



Im folgenden wollen wir  $p$ ,  $T$ ,  $\varrho$  und  $v$  stets als Summe eines mittleren Wertes und einer kleinen Störung  $p'$ ,  $T'$ ,  $\varrho'$  und  $v$  auffassen:

$$(8.29) \quad p = \bar{p} + p' ; \quad T = \bar{T} + T' ; \quad \varrho = \bar{\varrho} + \varrho' ; \quad v = v .$$

Dabei ist der mittlere Wert, der gleich dem statischen Wert ist, nur eine Funktion von  $x_3$ , die kleinen Störungen aber hängen von  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  und  $t$  ab. Wenn man (8.29)<sub>2</sub> und (8.22) in die Wärmetransportgleichung (8.17) einsetzt, so bekommt man

$$(8.30) \quad v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \bar{T} - \frac{k_7}{\bar{T}} \right) + \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{1}{c_0 \varrho_0} \left\{ \frac{1}{k_3 + k_4 \bar{T}} + k_5 (\bar{T} - k_6) \right\} v^2 T' ,$$

woraus sich

$$(8.31) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_0 \varrho_0} \left\{ \frac{1}{k_3 + k_4 \bar{T}} + k_5 (\bar{T} - k_6) \right\} v^2 \right] T' = -v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \bar{T} - \frac{k_7}{\bar{T}} \right)$$

mit

$$(8.32) \quad v^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

ergibt. Indem wir die Oberbeck-Boussinesq-Approximation benutzen, erhalten wir aus der Bewegungsgleichung (8.20)

$$(8.33) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} v p' + \nu v^2 v + g \frac{\varrho'}{\varrho_0} ,$$

wobei  $\nu$  die kinematische Viskosität ist. Unter Benutzung der Zustandsgleichungen (8.18) und (8.28) und der Gleichungen (8.29)<sub>2</sub> und (8.29)<sub>3</sub> findet man

$$(8.34) \quad \varrho' = -\varrho_0 \alpha_0 \left( 1 - \frac{k_7}{\bar{T}} \right) T' .$$

Aus (8.33) und (8.34) ergibt sich

$$(8.35) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu v^2 \right] v = -\frac{1}{\varrho_0} v p' - g \alpha_0 \left( 1 - \frac{k_7}{\bar{T}} \right) T' .$$

Mit (8.31), (8.34), (8.35) und der Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot v = 0$  haben wir die linearisierten Grundgleichungen zur Bestimmung von  $v$ ,  $T'$ ,  $\varrho'$  und  $p'$  erhalten. Von (8.35) bilden wir  $(-\text{rot rot})$ , um den Druck  $p'$  zu eliminieren. Von der so entstehenden Vektorgleichung schreiben wir die  $x_3$ -Komponente auf:

$$(8.36) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu v^2 \right] v^2 v_3 = \left\{ \alpha_0 g \left( 1 - \frac{k_7}{\bar{T}} \right) v_1^2 \right\} T' ,$$

wobei

$$(8.37) \quad v_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

gilt. In der nächsten Formel wollen wir den in (8.31) vorkommenden Operator in eckigen Klammern mit [...] bezeichnen, den in (8.36) vorkommenden Operator in geschweiften Klammern mit {...}. Wir bilden

$$(8.38) \quad \{ \dots \} \{ \dots \} T' = \{ \dots \} \{ \dots \} T' - \\ - \frac{2k_7 \alpha_0 g}{T^3 c_0 e_0} \left( \frac{1}{k_3 + k_4 T} + k_5 (\bar{T} - k_6) \right) \sqrt{\frac{2}{T}} T' \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_3^2} - \frac{3}{T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right).$$

Wie man jedoch durch numerische Abschätzung zeigen kann, ist der zweite Term der rechten Seite in jedem Fall vernachlässigbar. Somit sind die beiden Operatoren [...] und {...} vertauschbar. Indem man diese Vertauschbarkeit benutzt, bildet man aus (8.36) und (8.31)

$$(8.39) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_0 e_0} \left( \frac{1}{k_3 + k_4 T} + k_5 (\bar{T} - k_6) \right) \nabla^2 \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right] \nabla^2 v_3 = \\ = - \alpha_0 g \left( 1 - \frac{k_7}{T^2} \right) \sqrt{\frac{2}{T}} \nabla_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_3} (\bar{T} - \frac{k_7}{T}) \right).$$

Damit wurde das Problem wesentlich vereinfacht, denn in (8.39) steht nur noch eine unbekannte skalare Funktion, die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit  $v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t)$ . Nun setzen wir eine Lösung in separabler Form voraus, wie es in der Hydrodynamik üblich ist:

$$(8.40) \quad v_3(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_3) \cdot f(x_1, x_2) e^{\sigma t}.$$

Dabei soll einem in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung periodischen Ansatz entsprechend

$$(8.41) \quad \nabla_1^2 f(x_1, x_2) + \frac{a^2}{h^2} f(x_1, x_2) = 0$$

gelten.

$a/h$  erweist sich als das Verhältnis von Höhe zu Breite einer längsten geschlossenen Stromlinie einer Konvektionszelle.

$$(8.42) \quad \nabla_1^2 v_3 = - \frac{a^2}{h^2} v_3$$

gilt wegen (8.40) und (8.41). Wir definieren eine dimensionslose Größe

$$(8.43) \quad \zeta = \frac{x_3}{h} \quad \text{und} \quad D = \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Wegen (8.42) und (8.43) gilt

$$(8.44) \quad \nabla^2 v_3 = \nabla_1^2 v_3 + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} = \frac{1}{h^2} (D^2 - a^2) v_3.$$

Aus (8.39) entsteht dann

$$(8.45) \quad \left[ \sigma - \left\{ \frac{1}{k_3 + k_4 T} + k_5 (\bar{T} - k_6) \right\} \frac{1}{c_0 e_0 h^2} (D^2 - a^2) \right] \cdot \\ \cdot \left[ \sigma - \frac{\nu}{h^2} (D^2 - a^2) \right] \frac{D^2 - a^2}{h^2} w = \alpha_0 g \left( 1 - \frac{k_7}{T^2} \right) \frac{a^2}{h^2} w \left( \frac{\partial}{\partial x_3} (\bar{T} - \frac{k_7}{T}) \right).$$

Mit (8.45) wurde das Problem so umgeformt, daß nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung sechster Ordnung für die Funktion  $w = w(\zeta)$  zu lösen ist. Jetzt nehmen wir -

wie es in der Hydrodynamik üblich ist - an, daß der kritische Temperaturgradient  $\sigma = 0$  entspricht. Dann bekommen wir aus (8.45)

$$(8.46) \quad (D^2 - a^2)z_w = \frac{\alpha_0 g h^4 c_0 \rho_0}{\nu} \cdot \left[ \left( (k_3 + k_4 \bar{T})^{-1} + k_5 (\bar{T} - k_6) \right)^{-1} \left( 1 - \frac{k_7}{\bar{T}^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \bar{T} - \frac{k_7}{\bar{T}} \right) \right] a^2 w.$$

Das Differentialsymbol  $\frac{\partial}{\partial x_3}$  wirkt dabei nur auf den dahinterstehenden Ausdruck in runden Klammern. Den Ausdruck in der eckigen Klammer von (8.46) nennen wir jetzt  $F$ .  $F$  ist eine Funktion von  $\zeta$  oder von  $x_3$ . Nun soll  $F$  bestimmt und in Gleichung (8.46) eingesetzt werden. Man kann  $F$  jedoch nicht explizite hinschreiben, weil  $\bar{T}$  infolge von (8.25) nicht explizite als Funktion von  $x_3$  bekannt ist. Aus (8.22) folgt durch Integration

$$(8.47) \quad \frac{d\bar{T}}{dx_3} = \frac{k_8 - Qx_3}{(k_3 + k_4 \bar{T})^{-1} + k_5 (\bar{T} - k_6)}.$$

In dem oben definierten  $F$  werden jetzt die Klammerausdrücke durch aus (8.47) entstehende Terme ersetzt. Der letzte Faktor wird etwas umgeformt:

$$(8.48) \quad F(x_3) = \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right) \frac{1}{k_8 - Qx_3} \left( 1 - \frac{k_7}{\bar{T}^2} \right) \left[ \frac{d\bar{T}}{dx_3} - k_7 \frac{d}{dx_3} \left( \frac{1}{\bar{T}} \right) \right].$$

Daraus entsteht unter Verwendung von  $k_7 = \theta^2/20$

$$(8.49) \quad F(x_3) = \frac{1}{k_8 - Qx_3} \left( 1 - \frac{1}{400} \left( \frac{\theta}{\bar{T}} \right)^4 \right) \left( \frac{d\bar{T}}{dx_3} \right)^2.$$

Für den Mantel zwischen 100 und 400 km Tiefe kann der zweite Faktor der rechten Seite durch eine Konstante  $k_{10}$  ersetzt werden, die etwas unter 1 liegt. So entsteht

$$(8.50) \quad F(x_3) = \frac{k_{10}}{k_8 - Qx_3} \left( \frac{d\bar{T}}{dx_3} \right)^2.$$

In diese Gleichung wird (8.47) eingesetzt:

$$(8.51) \quad F(x_3) = k_{10} \frac{k_8 - Qx_3}{\left[ (k_3 + k_4 \bar{T})^{-1} + k_5 (\bar{T} - k_6) \right]^2}.$$

Weil (8.51) noch  $\bar{T}$  enthält und (8.46) noch nicht integriert werden kann, wenn (8.51) in (8.46) eingesetzt wird, soll  $F$  durch eine andere Funktion ersetzt werden. Zum Zwecke dieser Ersetzung wollen wir das Modell etwas spezialisieren. Es sollen (8.7) und (8.8) gelten. In einer Tiefe von 400 km ( $z_3 = 0$ ) soll die Temperatur  $T_0 = 2600$  K konstant gehalten werden, in 100 km Tiefe ( $z_3 = h$ ) soll  $T_1 = 1200$  K gelten. Die Wahl dieser Zahlenwerte ist durch ANDERSON (1967, S. 407, Fig. 29) und LUBIMOVA (1967, S. 297, Fig. 26) begründet. Für die Theorie ist jedoch nur die Größenordnung dieser Zahlenwerte von Bedeutung. Unter Benutzung von (8.26) und (8.27) finden wir

$$(8.52) \quad k_9 = 41,8 \text{ cal/cm s} \quad \text{und} \quad k_8 = -3,22 \text{ cal/cm}^2 \text{ s}.$$

Aus (8.25) bestimmen wir jetzt auf numerischem Wege  $\bar{T} = \bar{T}(x_3)$ . Nun wird die Funktion  $-F$  durch eine quadratische Funktion  $-F^*$  ersetzt, was mit den angegebenen Zahlenwerten gut geht.

$$(8.53) \quad -F^* = k_{10}(k_{11}x_3^2 + k_{12}x_3 + k_{13}) \cdot$$

Die Konstanten lauten:

$$k_{11} = 1,296 \cdot 10^{-17} \text{ K/cm}^3,$$

$$(8.54) \quad k_{12} = -0,687 \cdot 10^{-10} \text{ K/cm}^2,$$

$$k_{13} = 1,827 \cdot 10^{-3} \text{ K/cm}.$$

In (8.46) ersetzen wir  $F$  durch  $F^*$ . So entsteht

$$(8.55) \quad (D^2 - a^2)^3 w = - \frac{\alpha_0 g h^4 c_0 \rho_0 k_{10}}{\nu} \{k_{11}x_3^2 + k_{12}x_3 + k_{13}\} a^2 w,$$

wobei  $k_{10}$  bis  $k_{13}$  neue bekannte Konstanten sind. Es werden nun drei neue Konstanten definiert:

$$(8.56) \quad R_0 = \frac{\alpha_0 g h^4 c_0 \rho_0 k_{10} k_{13}}{\nu},$$

$$(8.57) \quad R_1 = \frac{k_{12}}{k_{13}} h \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{k_{11}}{k_{13}} h^2.$$

Damit entsteht aus (8.55) folgende Differentialgleichung 6. Ordnung:

$$(8.58) \quad (D^2 - a^2)^3 w = - \{R_2 \zeta^2 + R_1 \zeta + 1\} R_0 a^2 w.$$

### 8.3. Die Lösung für eine Schicht mit freien Grenzen

Zuerst soll (8.58) für normalspannungsfreie Grenzen gelöst werden, die bei  $\zeta = 0$  und  $\zeta = 1$  liegen. Bekanntlich (siehe z. B. CHANDRASEKHAR, 1961, S. 35, Gl. 189 oder WATSON, 1968, S. 402, Gl. 3.4) gelten dann folgende Randbedingungen

$$(8.59) \quad w = D^2 w = D^4 w = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \quad \text{und für} \quad \zeta = 1.$$

Wir definieren

$$(8.60) \quad \psi = R_0 a^2 w,$$

und erhalten so aus (8.58):

$$(8.61) \quad (D^2 - a^2)^3 w = - \{R_2 \zeta^2 + R_1 \zeta + 1\} \psi.$$

Wir setzen die Lösung in Form einer Reihenentwicklung an

$$(8.62) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m w_m \quad \text{und} \quad \psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \psi_m.$$

Die  $\Gamma_m$  sind Konstanten. Die  $w_m$  und  $\psi_m$  müssen (8.61) und (8.59) für jedes  $m$  einzeln erfüllen.

$$\psi_m = \sin m\pi\zeta \quad \text{und} \quad w_m = (m^2\pi^2 + a^2)^{-3} \sin m\pi\zeta$$

sind Lösungen von (8.61) mit den Randbedingungen (8.59), falls  $R_1 = R_2 = 0$ . Deshalb



substituieren wir  $w_m = \sin m\pi\zeta$  in (8.61). Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$(8.63) \quad (D^2 - a^2)^3 w_m = -\{R_2\zeta^2 + R_1\zeta + 1\} \sin m\pi\zeta.$$

Durch Integration finden wir die Lösung:

$$(8.64) \quad w_m = \frac{1}{(m^2\pi^2 + a^2)^3} \left\{ [R_2\zeta^2 + R_1\zeta + 1 + \frac{a^2 - 7m^2\pi^2}{(m^2\pi^2 + a^2)^2} 6R_2] \cdot \right. \\ \cdot \sin m\pi\zeta + \frac{2R_2\zeta + R_1}{m^2\pi^2 + a^2} 6m\pi \cos m\pi\zeta + (A_m + B_m\zeta + C_m\zeta^2) \sinh a\zeta + \\ \left. + (D_m + E_m\zeta + F_m\zeta^2) \cosh a\zeta \right\}.$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Randbedingungen (8.59) und der Lösung (8.64):

$$(8.65) \quad A_m = \frac{m\pi}{a^2 \sinh a} \left\{ \left[ \frac{m^2\pi^2 + 9a^2}{4a} + \frac{(m^2\pi^2 + a^2)}{2 \sinh a} \cosh a \right] \cdot \right. \\ \cdot \left[ \frac{R_1 - (-1)^m(2R_2 + R_1) \cosh a}{\sinh a} \right] + \frac{1}{4} (-1)^m (m^2\pi^2 + a^2) (2R_2 + R_1) + \\ \left. + \frac{6a^2}{m^2\pi^2 + a^2} [R_1 \cosh a - (-1)^m(2R_2 + R_1)] \right\},$$

$$(8.66) \quad B_m = \frac{R_1 m\pi}{4a^3} (9a^2 + m^2\pi^2),$$

$$(8.67) \quad C_m = \frac{m\pi(m^2\pi^2 + a^2)}{4a^2 \sinh a} [R_1 \cosh a - (-1)^m(2R_2 + R_1)],$$

$$(8.68) \quad D_m = -\frac{6m\pi R_1}{m^2\pi^2 + a^2},$$

$$(8.69) \quad E_m = -\frac{m\pi}{2a^2 \sinh a} \left\{ \frac{(m^2\pi^2 + a^2)}{\sinh a} [R_1 - (-1)^m(2R_2 + R_1) \cosh a] + \right. \\ \left. + \frac{(m^2\pi^2 + 9a^2)}{2a} [R_1(\cosh a - (-1)^m) - 2R_2(-1)^m] \right\},$$

$$(8.70) \quad F_m = -\frac{R_1 m\pi}{4a^2} (m^2\pi^2 + a^2).$$

Wir setzen (8.62) in (8.60) ein:

$$(8.71) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma'_m \left\{ (m^2\pi^2 + a^2)^3 \sin m\pi\zeta - R_0 a^2 \left[ (R_2\zeta^2 + R_1\zeta + 1 + \frac{a^2 - 7m^2\pi^2}{(m^2\pi^2 + a^2)^2} 6R_2) \sin m\pi\zeta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2R_2\zeta + R_1}{m^2\pi^2 + a^2} 6m\pi \cos m\pi\zeta + (A_m + B_m\zeta + C_m\zeta^2) \sinh a\zeta + \right. \right. \\ \left. \left. + (D_m + E_m\zeta + F_m\zeta^2) \cosh a\zeta \right] \right\} = 0,$$

wobei

$$(8.72) \quad \Gamma'_m = \frac{\Gamma_m}{(m^2 \pi^2 + a^2)^3}.$$

Wir multiplizieren (8.71) mit  $\sin m\pi\zeta$  und integrieren von 0 bis 1. So erhalten wir homogene, lineare Gleichungen in  $\Gamma'_m$ . Unter Benutzung der Abkürzung

$$(8.73) \quad \int_0^1 \sin m\pi\zeta \sin n\pi\zeta \, d\zeta = \frac{1}{2} \delta_{mn}$$

muß die folgende Säkulargleichung gelöst werden, um nichttriviale Lösungen zu erhalten.

$$(8.74) \quad \left\| \frac{1}{2} (m^2 \pi^2 + a^2)^3 \delta_{mn} + R_0 a^2 (m:n) \right\| = 0,$$

wobei

$$(8.75) \quad (m:n) = \int_0^1 \left[ (R_2 \zeta^2 + R_1 \zeta + 1 + \frac{a^2 - 7m^2 \pi^2}{(m^2 \pi^2 + a^2)^2} 6R_2) \sin m\pi\zeta + \right. \\ \left. + \frac{2R_2 \zeta + R_1}{m^2 \pi^2 + a^2} 6m\pi \cos m\pi\zeta + (A_m + B_m \zeta + C_m \zeta^2) \sinh a\zeta + \right. \\ \left. + (D_m + E_m \zeta + F_m \zeta^2) \cosh a\zeta \right] \sin n\pi\zeta \, d\zeta.$$

Damit ist das Problem analytisch gelöst. Die hergeleiteten Formeln können benutzt werden, um das Geschwindigkeitsfeld numerisch zu berechnen.

#### 8.4. Die Lösung für eine Schicht mit festen Grenzen

Für den Fall, daß die Flüssigkeit zwischen festen Grenzebenen strömt, gilt bekanntlich (vgl. CHANDRASEKHAR, 1961, S. 36, Gl. 199 oder WATSON, 1968, S. 404, Gl. 4.4):

$$(8.76) \quad w = Dw = (D^2 - a^2)^2 w = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = 1.$$

Wir substituieren

$$(8.77) \quad (D^2 - a^2)^2 w = \psi.$$

Damit erhalten wir aus (8.58)

$$(8.78) \quad (D^2 - a^2) \psi = - \{R_2 \zeta^2 + R_1 \zeta + 1\} R_0 a^2 w.$$

Nun benutzen wir wieder den Ansatz (8.62), wobei  $w_m$  und  $\psi_m$  die Gleichungen (8.77) und (8.76) für jedes  $m$  erfüllt.

$$\psi_m = \sin m\pi\zeta \quad \text{und} \quad w_m = \frac{\sin m\pi\zeta}{(m^2 \pi^2 + a^2)^2}$$

befriedigen (8.77) und (8.76). Analog dem vorigen Unterabschnitt muß anstelle von (8.77) die folgende Gleichung erfüllt werden:

$$(8.79) \quad (D^2 - a^2)^2 w_m = \sin m\pi\zeta.$$

Die Lösung ist

$$(8.80) \quad w_m = \frac{1}{(m^2 \pi^2 + a^2)^2} \{ (A_m + B_m \zeta) \sinh a\zeta + (C_m + D_m \zeta) \cosh a\zeta + \sin m\pi\zeta \},$$

die auch WATSON (1968) schon kannte. Wir bestimmten die Konstanten so:

$$(8.81) \quad A_m = \frac{m\pi(a + (-1)^m \sinh a)}{\sinh^2 a - a^2},$$

$$(8.82) \quad B_m = \frac{m\pi}{\sinh^2 a - a^2} [(-1)^m(a \cosh a - \sinh a) - a + \sinh a \cosh a],$$

$$(8.83) \quad C_m = 0,$$

$$(8.84) \quad D_m = \frac{-m\pi \sinh a((-1)^m + \sinh a)}{\sinh^2 a - a^2}.$$

Dabei wurde (8.76) verwendet. Setzt man (8.62) in (8.78) ein, so erhält man

$$(8.85) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma'_m [(m^2\pi^2 + a^2)^3 \sin m\pi\zeta + (R_2\zeta^2 + R_1\zeta + 1)R_0 a^2 \{\sin m\pi\zeta + (A_m + B_m\zeta)\sinh a\zeta + (C_m + D_m\zeta)\cosh a\zeta\}] = 0,$$

wobei

$$(8.86) \quad \Gamma'_m = \frac{\Gamma_m}{(m^2\pi^2 + a^2)^2}.$$

Die Säkulargleichung lautet

$$(8.87) \quad \left\| \frac{1}{2}(n^2\pi^2 + a^2)^3 \delta_{mn} - (m:n) \right\| = 0,$$

wobei

$$(8.88) \quad (m:n) = \int_0^1 (m^2\pi^2 + a^2)^2 w_m (R_2\zeta^2 + R_1\zeta + 1) R_0 a^2 \sin n\pi\zeta \, d\zeta.$$

In dieser Weise wurde auch der Fall fester Grenzen analytisch gelöst.

## 9. Kinematik der Mantelkonvektion

### 9.1. Präliminarien

Das volle Konvektionsproblem einer Kugelschale mit kugelsymmetrischer, nach innen gerichteter Schwerebeschleunigung und kugelsymmetrischer Wärmequellverteilung ist weder analytisch noch experimentell lösbar, insbesondere wenn man noch die für Mantelkonvektion wichtigste, realistische Zusatzbedingung stellt: temperatur- und druckabhängige effektive Viskosität. Das gilt auch für beliebig einfache Rand- und Anfangsbedingungen und unabhängig davon, ob die Heizung von innen oder von unten erfolgt. Nach SCHUBERT (1979) sind auch mit Großrechnern gefundene, dreidimensionale numerische Lösungen noch für Jahre unmöglich. Die genannte Zusatzbedingung ist aber wesentlich für die Entstehung der ozeanischen Abkühlungshaut des Mantels (d. h. für die ozeanische Lithosphäre), für die Zunahme der Viskosität im tieferen Mantel und für den in Abschnitt 4. beschriebenen Mechanismus der zeitlichen Variabilität des Magmatismus und der Orogenese. Wegen der erwähnten Unlösbarkeit wird versucht, ob eine Übersicht über die Lösungen einfacherer, aber verwandter hydrodynamischer Probleme Hinweise gibt, wie man eine vereinfachte kinematische Theorie der im Mantel möglichen Strömungsmuster systematisch und quantitativ aufbauen und verifizieren kann. Dieser Unterabschnitt dient der Übersicht und der Diskussion, im nächsten wird die kinematische Konvektionstheorie entwickelt.

Wir beginnen mit dem Bénard-Problem, weil hier auch experimentelle Beweise vorliegen. Wie bereits beschrieben, versteht man unter Bénard-Konvektion den Wärmetransport durch eine waagrechte Schicht einer viskosen Flüssigkeit im homogenen Schwerfeld, deren Grenzflächen auf unterschiedlichen Temperaturen konstant gehalten werden. Die ursprünglichen Versuche von BÉNARD (1901) sind für uns belanglos, weil die Oberflächenkräfte der freien Oberfläche wesentlich das Strömungsmuster bestimmten. Erst in den letzten zwei Jahrzehnten wurde das Problem genauer untersucht. Dabei gab es anfangs noch erhebliche Meinungsverschiedenheiten auch im laminaren Bereich, die wohl vor allem darauf zurückzuführen sind, daß nicht in allen Versuchen die Anfangsbedingungen kontrolliert wurden. Hier sollen nur die Ergebnisse knapp dargestellt werden: Abb. 9.1 zeigt wesentliche Resultate nach BUSSE und WHITEHEAD (1971). Löst man das Stabilitätsproblem der linearisierten hydrodynamischen Grundgleichungen (CHANDRASEKHAR, 1961), so erhält man die Vertikalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit bekanntlich in dieser Form:

$$v_z^{(0)} = \left[ \sum_{\nu} c_{\nu} \exp(i \mathbf{t}_{\nu} \cdot \mathbf{r}) \right] f(z) \quad \text{wobei} \quad |\mathbf{t}_{\nu}| = k = \frac{2\pi h}{\lambda} .$$

$h$  ist die Schichtdicke,  $\lambda$  die Wellenlänge,  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor. Oberhalb der mit  $\lambda$  bezeichneten Kurve verliert die Flüssigkeit nach der linearen Theorie für feste Grenzflächen ihre Stabilität, d. h. eine anfangs infinitesimale Störung mit der Wellenlänge  $\lambda$  wächst monoton. Verzichtet man darauf, die Störung mit einer bestimmten Wellenlänge am Anfang aufzuprägen und überläßt die Störung dem Zufall, so ergeben sich bei sehr langsam wachsender Rayleigh-Zahl  $R$  Strömungsmuster mit einer Wellenzahl  $k_c = 3,117$ , die bei  $R_c = 1708$ , dem Minimum der Kurve  $\lambda$ , einsetzen, d. h. der natürlich einsetzende Strömungstyp hat im Profil kreisähnliche Stromlinien. Weil durch das lineare Problem die Vektoren  $\mathbf{t}_{\nu}$  und die Koeffizienten  $c_{\nu}$  unbestimmt sind, sind Größe und Aussehen der Strömungsmuster von oben (Streifen, reguläre Sechsecke, Quadrate, gleichseitige Dreiecke) zunächst nicht festgelegt. Aus gruppentheoretischen Gründen (FEJES TÓDT, 1965) ist es klar, daß es keine weiteren Formen gibt. Eine zweite Unbestimmtheit entsteht dadurch,



daß die Orientierung der Konvektionszellen in der Ebene nicht festgelegt ist. Diese zweite Unbestimmtheit ist theoretisch auch dann nicht zu beseitigen, wenn man das volle nichtlineare Gleichungssystem löst, weil in der unendlichen Ebene keine Richtung ausgezeichnet ist. Im Versuch wird die Richtungseindeutigkeit oft durch die Seitenwände der Schicht hergestellt, was z. B. Versuchsergebnisse von KOSCHMIEDER (1966) zeigen. Deshalb ist man bei den Versuchen natürlich bestrebt, das Verhältnis Breite zu Höhe  $h$  der Schicht möglichst groß zu halten. Die erste Unbestimmtheit kann man durch Übergang zum nichtlinearen Problem lösen. Für kleine Abweichungen von der Lösung des linearen Problems zeigten SCHLÜTER u. a. (1965), daß nahe an  $R_c$  nur Rollen stabile Lösungen des Bénard-Problems sind, weil keine physikalische Unterscheidung zwischen Auf- und Abstrom möglich ist, solange die Temperaturabhängigkeit der Dichte linear ist. Falls weitere Temperaturabhängigkeiten hinzukommen, tritt zwar zuerst Sechseck-Konvektion auf, die jedoch mit wachsender Amplitude in Rollen-Konvektion übergeht, wie BUSSE (1978a) (vgl. Abb. 9.2) zeigt. Steigt die Viskosität mit der Temperatur (wie bei den meisten Gasen), so ist der Abstrom in der Mitte der vorübergehend in der Nähe von  $R_c$  auftretenden Sechsecke. Sinkt die Viskosität mit steigender Temperatur (wie bei Flüssigkeiten und Festkörpern), so ist der Aufstrom in der Mitte der Sechsecke. Beides wurde experimentell von TIPPELSKIRCH (1956) gezeigt, der Schwefel benutzte. Schwefel hat bei  $153^\circ\text{C}$  ein Viskositätsminimum, so daß man mit diesem Stoff beide Erscheinungen zeigen kann. Geht man zum ursprünglichen Problem zurück und wandelt es diesmal so ab, daß vor Beginn der Konvektion kein konstanter Temperaturgradient aufgeprägt ist, sondern ein nach unten abnehmender (bzw. zunehmender), so ergibt sich als Übergangsstadium auch erst Sechseck-Konvektion mit Aufstrom (bzw. Abstrom) in der Mitte. Eine Übersicht zur Sechseck-Konvektion findet man bei PALM (1975).

Nebenbemerkung: Das System der Rift-Zonen setzt sich netzartig fort, selbst durch Kontinente. Die Abtauchplatten (subduction slabs) dagegen schließen zwar auch meist aneinander an, zeigen aber Enden und treten auch vereinzelt auf (Nord- und Südantillen). Falls man vermutet, daß die Bewegung der Lithosphären-Platten Ausdruck einer abgewandelten Sechseck-Konvektion ist, so müßte das Material an den Rändern der Sechsecke steigen und in der Mitte sinken. Damit ergäben sich die Temperaturabhängigkeit der effektiven Viskosität und der tiefenabhängige Temperaturgradient beide gerade falsch herum. Daß dieser Gedanke falsch ist, ergibt sich auch aus der hohen Rayleigh-Zahl des oberen Mantels, die ganz andere Strömungsmuster fordert, wie unten noch besprochen werden soll.

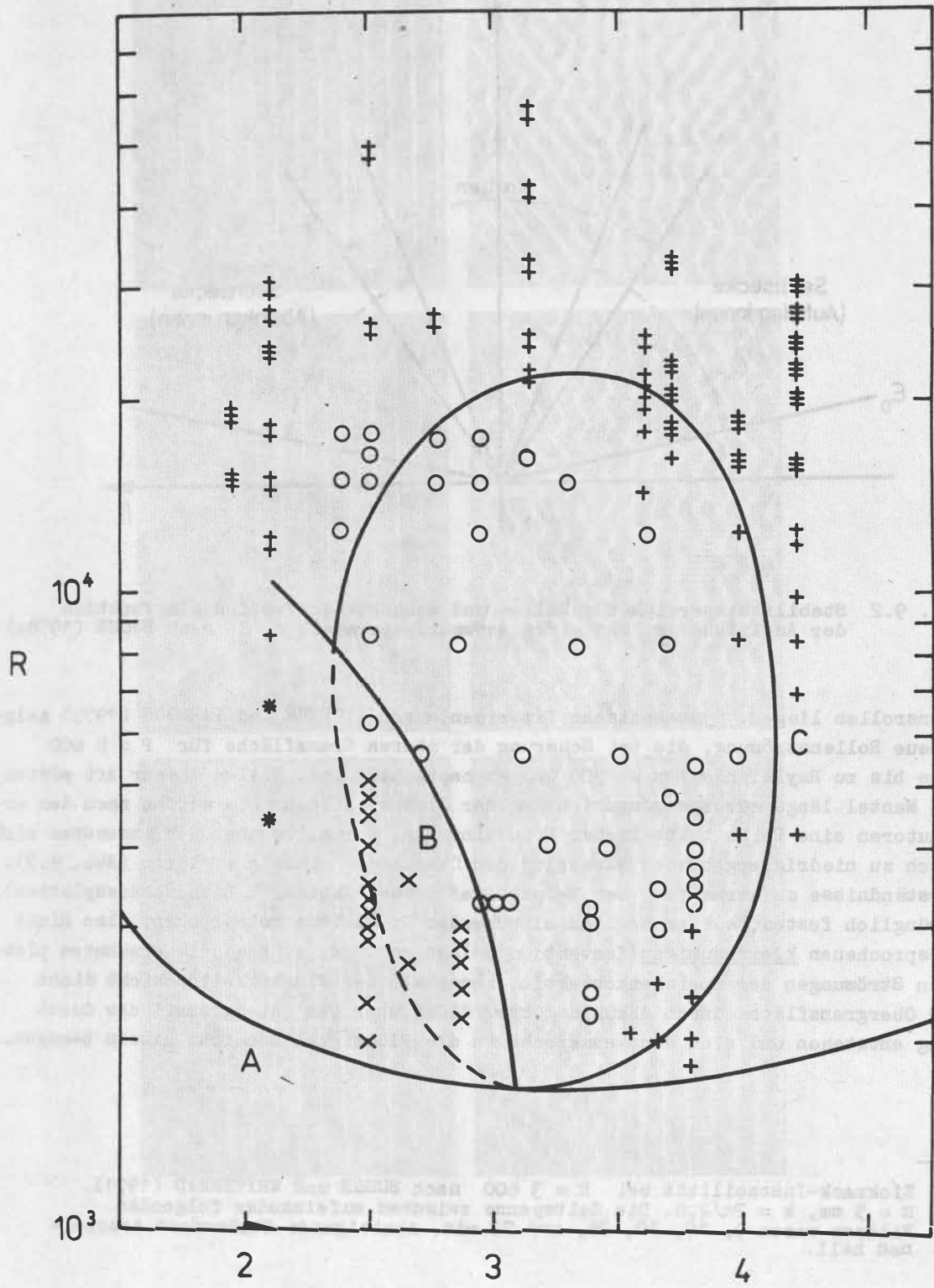
Bisher haben wir nur die Strömungen in der Nähe der Kurve A von Abb. 9.1 besprochen. BUSSE (1967) erweiterte den Bereich der Störungstheorie mit Hilfe der Galerkin-Methode auf größere Rayleigh-Zahlen. Es ergab sich ein Bereich zwischen den Kurven B und C, in dem Rollen stabil sind. Die theoretischen Kurven sind für  $P \rightarrow \infty$  berechnet. Die durch kleine Kreise in Abb. 9.1 markierten stabilen Rollen sowie die instabilen Strömungsmuster auf Abb. 9.3 und Abb. 9.4 sind bei  $P = 100$  gewonnen worden. Das Maximum der Kurve C liegt bei  $R = 22\ 600$ . Dieser Wert fungiert gewissermaßen als eine zweite kritische Rayleigh-Zahl. Darunter tritt links der Kurve B die Zickzack-Instabilität (Abb. 9.3), rechts von Kurve C die Kreuzrolleninstabilität (Abb. 9.4) auf. Wenn die Wellenzahl zu weit vom günstigen Wert  $k_c$  nach unten hin entfernt ist, d. h. wenn der Abstand der Konvektionszellen zu weit ist, biegen sich die ursprünglich geraden Rollen in wellenlinienartig angeordnete Rollen, wodurch  $k$  günstiger wird (Abb. 9.3). Wenn dagegen der Abstand zwischen den Konvektionszellen zu eng ist, entstehen senkrecht zu

den alten Rollen neue mit einer günstigeren Wellenzahl (Abb. 9.4), die allmählich die alten ersetzen. Für  $1708 < R < 22\,600$  sind also nur Rollen in dem durch B und C begrenzten k-R-Gebiet stabil. Welches k für ein bestimmtes R verwirklicht ist, richtet sich nach den Anfangsbedingungen. Für spannungsfreie Grenzebenen gibt es keinerlei Anzeichen, daß der Bereich stabiler Rollen nach oben, d. h. für noch größere Rayleigh-Zahlen, geschlossen ist (STRAUS, 1972). Wenn der untere Mantel nicht gekrümmt wäre, so trüfe dieser Fall zu, weil die Viskositäten des oberen Mantels und des äußeren Kerns einige Zehnerpotenzen niedriger liegen als die des unteren, so daß man mit freien Grenzflächen rechnen kann. In Unterabschnitt 4.1. wurde dargelegt, daß, wenn im unteren Mantel gerade Konvektion stattfindet, die Rayleigh-Zahl nur wenig oberhalb der kritischen Zahl  $R_c$  liegen kann. Damit läge für ein ebenes Modell die Strömung ohnehin in dem durch die Kurven B und C begrenzten k-R-Gebiet von Abb. 9.1. Das bedeutet, daß stabile Rollen vorlägen.

Doch kehren wir nun zum reinen Bénard-Problem zurück: Für feste Grenzebenen tritt oberhalb von  $R = 22\,600$  ein weiterer R-Bereich mit bimodaler Konvektion auf (vgl. Abb. 9.5, BUSSE, 1979). Für  $P = 8\,600$  ist nach Versuchen von WHITEHEAD und PARSONS (1978) diese Art der Konvektion bis  $R = 760\,000$  stabil, möglicherweise auch noch darüber. Die bimodale Konvektion ist (zunächst) stationär und dreidimensional. Man kann sie sich grob als Superposition von zwei orthogonalen Rollensystemen mit unterschiedlicher Wellenlänge denken. Nach weiterer Steigerung der Rayleigh-Zahl geht die bimodale Konvektion in Speichenkonvektion (spoke-like convection) über. Abb. 9.6 zeigt den Übergang. Während die zweite kritische Rayleigh-Zahl ( $R = 22\,600$ ) für  $P > 20$  (also auch für alle Bereiche des Mantels) nach KRISHNAMURTI (1973) nicht, nach anderen Autoren nur sehr schwach mit  $P$  wächst, hängt der Übergang zur Speichenkonvektion stark von der Prandtl-Zahl ab: Das neue kritische  $R$  steigt stark mit  $P$ . Bei der Speichenkonvektion ist das Innere der Schicht stark durchmischt und fast isotherm. Der Temperaturabfall konzentriert sich auf die dünnen Grenzschichten, die sich an den Grenzebenen bilden und die dann plattenartig senkrecht nach unten sinken (s. helle Linien in Abb. 9.6) bzw. nach oben steigen (s. dunkle Linien in Abb. 9.6). Weil in der voll entwickelten Speichenkonvektion sich 3 bis 6 Abtauch- bzw. Aufstiegsplatten in einem nabenartigen Punkte (von oben gesehen wie Speichen) treffen, hat sie diesen Namen erhalten. Da die Speichenkonvektion bei horizontal gleichförmig bewegter Obergrenzfläche in eine neue Art Rollenkonvektion übergeht und der obere Mantel in dem fraglichen R-Bereich liegt (vgl. auch WALZER, 1978b), schlossen RICHTER und PARSONS (1975), MCKENZIE und WEISS (1975) und MCKENZIE und RICHTER (1976), daß unter den ozeanischen Lithosphärenplatten

---

Abb. 9.1 Ergebnisse von BUSSE und WHITEHEAD (1971) für hohe Prandtl-Zahlen.  $R$  ist die Rayleigh-Zahl,  $k$  die Wellenzahl. Die theoretischen Kurven A, B und C werden im Text erläutert. Die anderen Zeichen symbolisieren Versuchsergebnisse: Kleine Kreise bezeichnen stabile Rollen, stehende Kreuze die auf Rollen führende Kreuzrollen-Instabilität, liegende Kreuze die Zickzack-Instabilität, stehende Doppelkreuze die auf bimodale Konvektion führende Kreuzrollen-Instabilität, stehende Dreifachkreuze die Kreuzrollen-Instabilität, die zunächst auf Rollen führen, die aber dann durch lokale Prozesse abgewandelt werden.



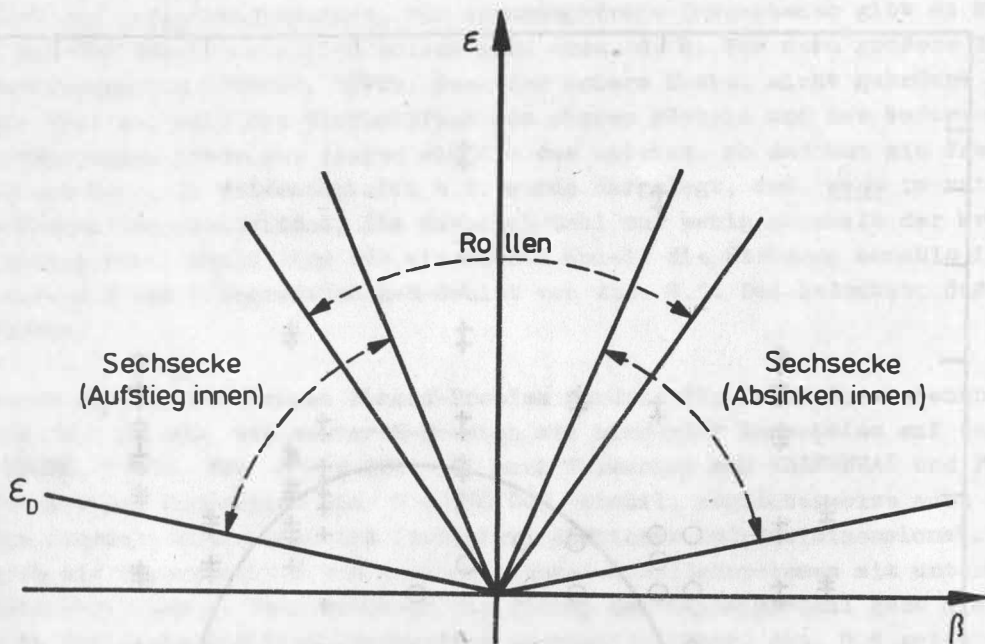
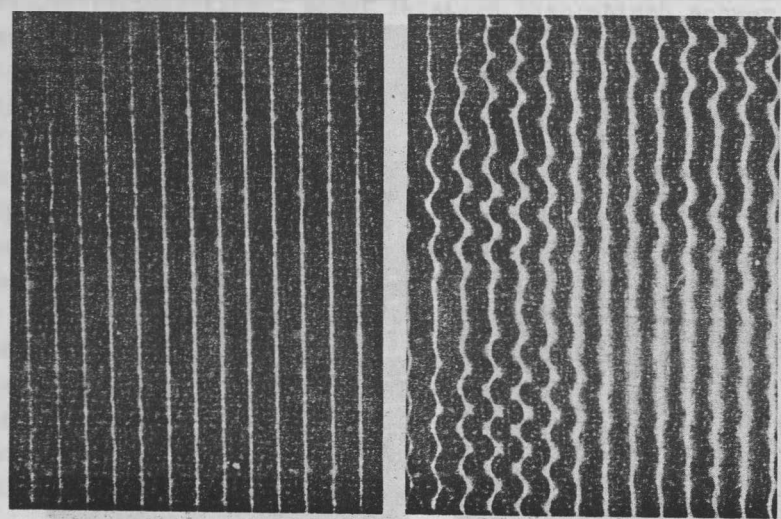
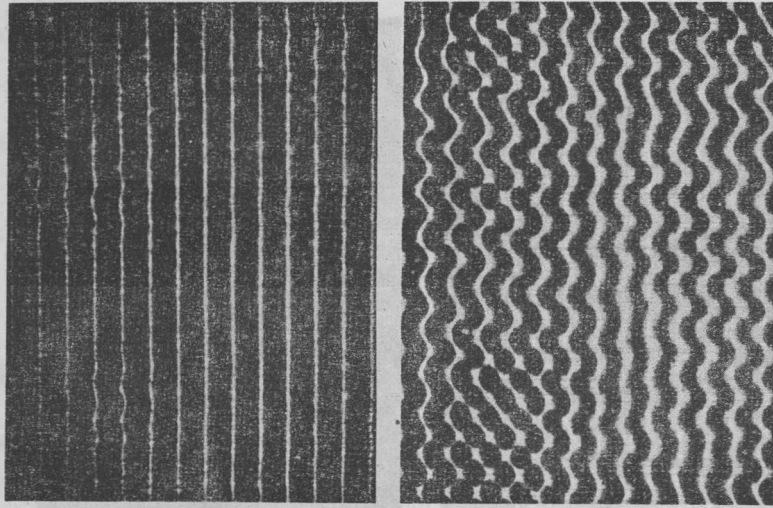
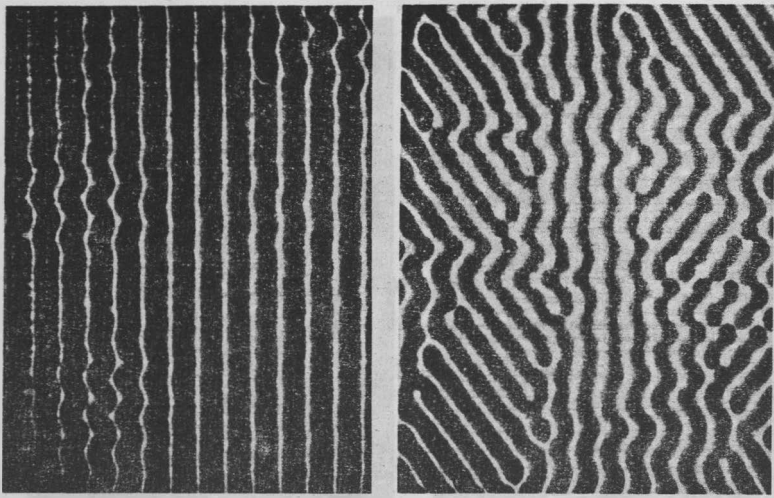


Abb. 9.2 Stabilitätsbereich für Rollen und Sechseck-Konvektion als Funktion der Amplitude  $\epsilon$  und eines Asymmetrieparameters  $\beta$  nach BUSSE (1978a)

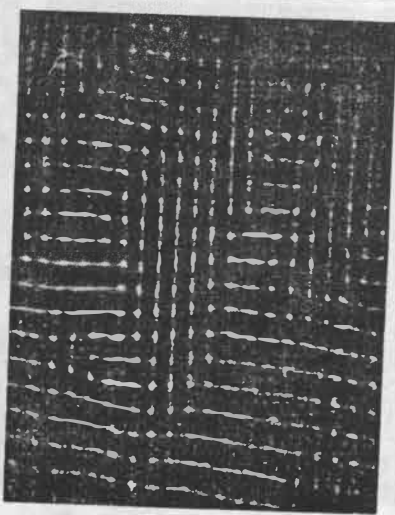
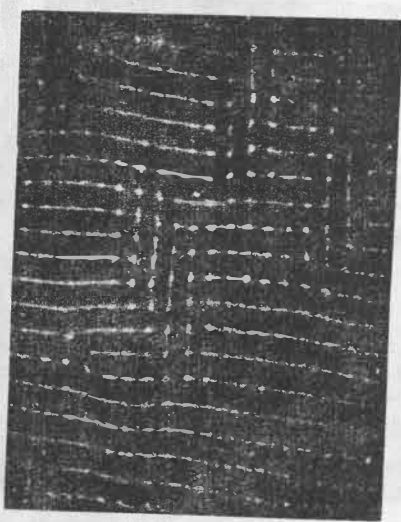
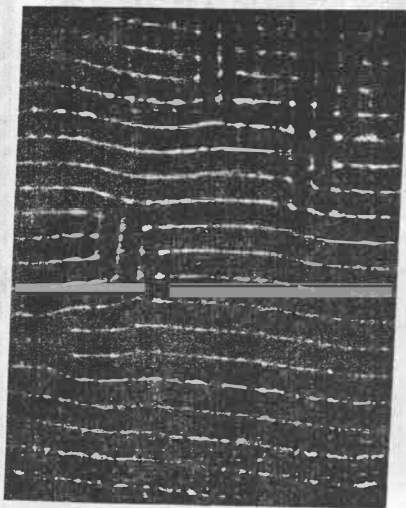
Konvektionsrollen liegen. Systematische Experimente von RICHTER und PARSONS (1975) zeigten die neue Rollenströmung, die bei Scherung der oberen Grenzfläche für  $P = 8\,600$  mindestens bis zu Rayleighzahlen um  $500\,000$  zu beobachten ist. Rollen dieser Art müßten im oberen Mantel längs zur Bewegungsrichtung der Platten liegen. Sie würden nach den erwähnten Autoren eine Reihe tektonischer Erscheinungen, vor allem aber den ansonsten sich theoretisch zu niedrig ergebenden Wärmefluß der Ozeanböden richtig erklären (Abb. 9.7). Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei betont, daß diese Platten (= Lithosphärenplatten) der ursprünglich festen, später horizontal bewegten Grenzebene entsprechen, also nicht zu der besprochenen kleinräumigen Konvektion selbst gehören, während die erwähnten plattenartigen Strömungen der Speichenkonvektion innerhalb der Flüssigkeitsschicht dicht unter der Obergrenzfläche durch Abkühlung bzw. dicht über der Untergrenzfläche durch Aufheizung entstehen und sich dann senkrecht in die Flüssigkeitsschicht hinein bewegen.

Abb. 9.3 Zickzack-Instabilität bei  $R = 3\,600$  nach BUSSE und WHITEHEAD (1971).  $h = 5\text{ mm}$ ,  $k = 2\pi/2,8$ . Die Zeitspanne zwischen aufeinander folgenden Bildern waren 9, 10, 10, 26, und 72 min. Absteigende Strömungen erscheinen hell.





An alle Leser  
 und gebildeten  
 Menschen ist,  
 es nicht durch  
 unrichtige Systeme  
 zu sehen, es ist  
 nicht 7.000 km  
 dunn, sondern  
 es. Was ist  
 das? Es ist  
 ein Bild, das  
 durch die  
 Wirkung der  
 Linien entsteht.  
 Es ist ein  
 Bild, das  
 durch die  
 Wirkung der  
 Linien entsteht.



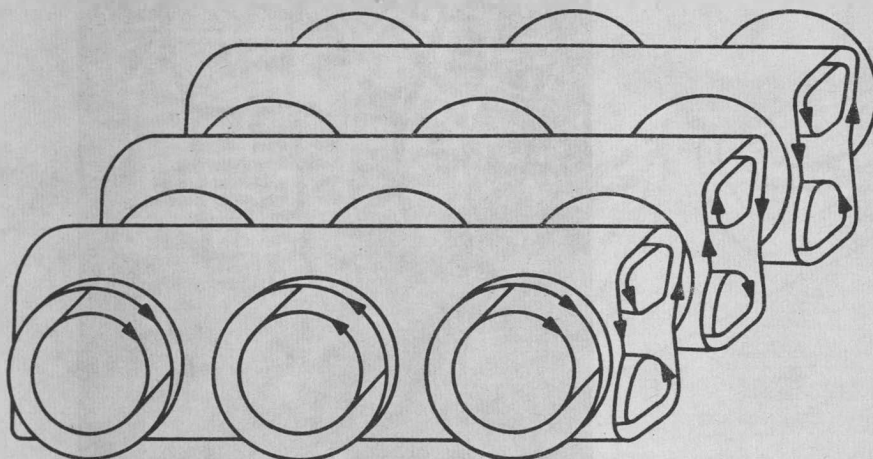


Abb. 9.5 Skizze der bimodalen Konvektion nach BUSSE (1979)

Zusammenfassend läßt sich bemerken, daß es im oberen Mantel vermutlich eine Superposition von zwei Konvektionsarten gibt: kleinräumiger Rollenkonvektion und großräumiger Lithosphärenplattenkonvektion, wobei letztere theoretisch schwer einzuordnen ist, was die vorangehende Erörterung zeigt. RICHTER und DALY (1978) weisen mit Recht darauf hin, daß im Gegensatz zu den meisten Laborergebnissen und natürlichen Konvektionssystemen die Lithosphärenplatten-Konvektion ganz unterschiedliche Wellenlängen zeigt: Z. B. sind die Pazifische, die Nazca- und die Cocos-Platte etwa 10 000, 3 000 und 1 000 km breit. Die waagrechten Ausmaße unterscheiden sich also um eine Größenordnung, während der Tiefgang der Abtauchplatten in derselben Größenordnung liegen dürfte. Soviel ist jedenfalls klar, daß die ozeanische Lithosphäre als Abkühlungshaut des Mantels aufzufassen ist, die im Durchschnitt geologisch bedeutend jünger als die Kontinente ist (JACOBY, 1975; de la CRUZ-REYNA, 1976; KONO und AMANO, 1978). Das Zusammenwirken von Konvektionsströmen verschiedener Größenordnung ist in der Natur oft anzutreffen und keineswegs außergewöhnlich. So gibt es z. B. in der Nähe der Sonnenoberfläche gleichzeitig drei Arten von Konvektionszellen, die sich durch die Größenordnung der Zellen stark voneinander unterscheiden (SPIEGEL, 1972): großräumige Strömungen, Supergranulation und Granula-

Abb. 9.4 Kreuzrollen-Instabilität bei  $R = 3\,000$  nach BUSSE und WHITEHEAD (1971).  $h = 5$  mm,  $k = 2\pi/1,64$ . Die Zeitspannen zwischen aufeinander folgenden Bildern waren 10, 4, 3, 7 und 28 min. Absteigende Strömungen erscheinen hell.

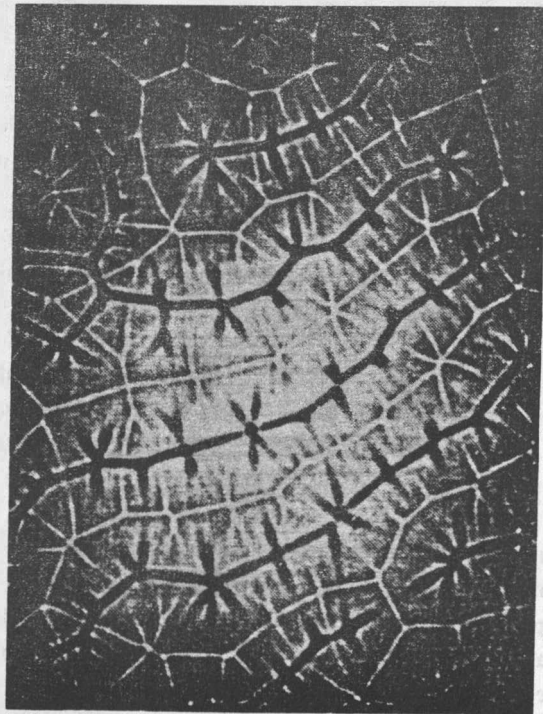
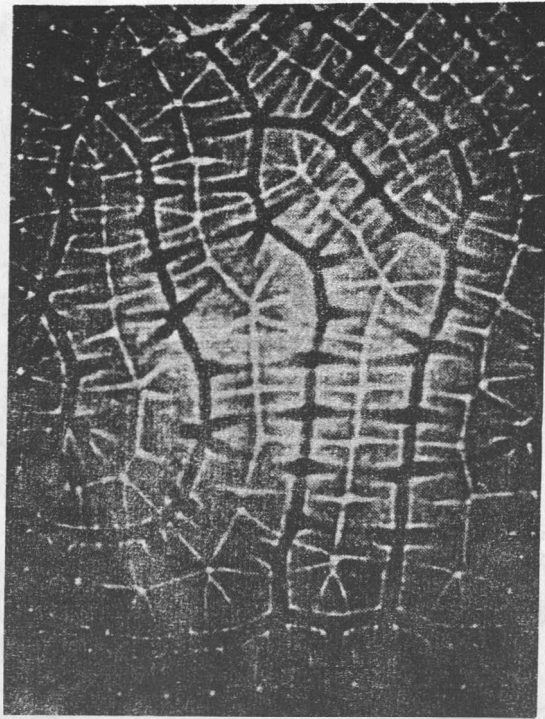


Abb. 9.6 Zwei Fotos des Übergangs von der bimodalen zur Speichenkonvektion nach WHITEHEAD und CHAN (1976) bei  $R = 80\,000$  und  $P = 126$ . Die beiden Bilder unterscheiden sich infolge der dem Zufall überlassenen Anfangsbedingungen.



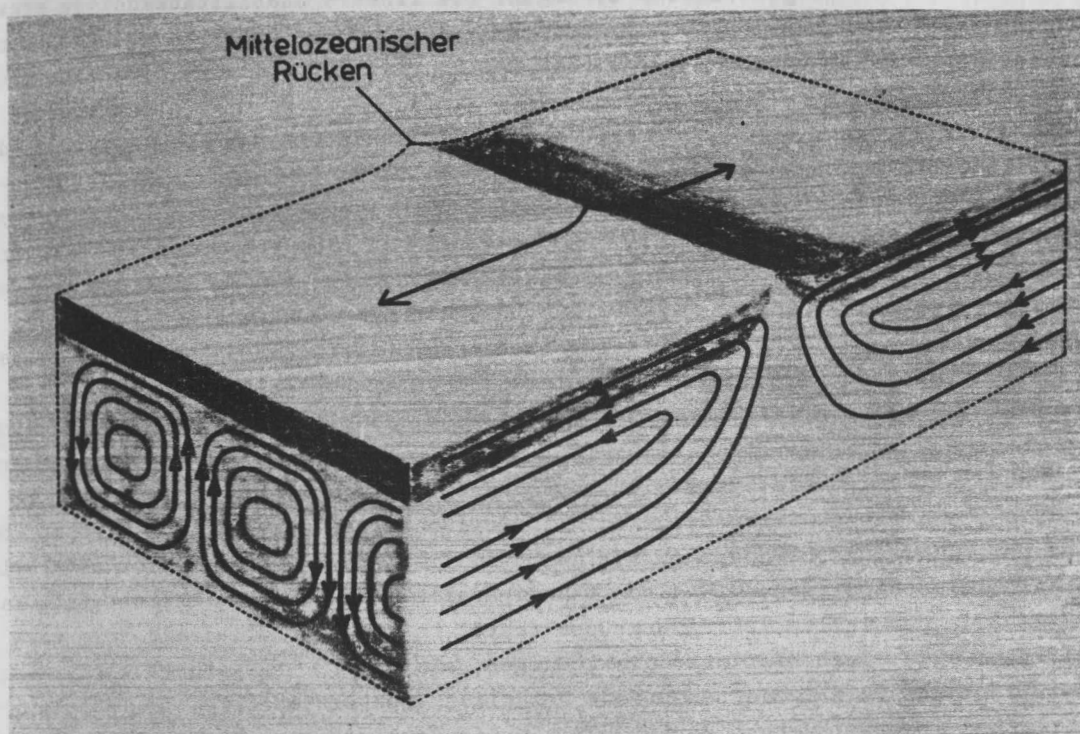


Abb. 9.7 Konvektionsmodell für den oberen Mantel unter ozeanischen Platten nach MCKENZIE und RICHTER (1976). Wenn die Lithosphäre sich mit einigen cm/a seitwärts bewegt, wird die kleinräumige Konvektion darunter in Rollen umgeformt. Das wurde auch im Experiment gezeigt.

tion. Insgesamt gesehen zeigt die Diskussion des Bénard-Problems, daß Rollen oder Überlagerungen von Rollen oft auftreten, insbesondere auch für die Umstände, die in oberem und unterem Mantel herrschen, falls man von der Kugelsymmetrie absehen könnte. Nebenbemerkung: Auch dann, wenn man entgegen der vorherrschenden Ansicht nicht davon ausgeht, daß der Mantel für langsame Strömungen wie eine viskose Flüssigkeit behandelt werden kann, sondern plastisches Fließen für wahrscheinlich hält, kommt man zu dem Schluß, daß rollenartige Bewegungen vorherrschen müssen. Denn im Falle von Rollen tritt hier bei einem Minimum an Deformationsarbeit, die sich auf eine Scherzone an der Rollenoberfläche konzentriert, ein Maximum an konvektivem Wärmetransport auf.

Das dem Bénard-Problem entsprechende Kugelschalen-Problem wurde - wie bereits eingangs erwähnt - bedeutend seltener behandelt: Experimente fehlen. CHANDRASEKHAR (1961) gab Lösungen für die linearisierte Theorie. YOUNG (1974) behandelte numerisch die thermische Kugelschalen-Konvektion mit nicht-infinitesimaler Amplitude, wobei er sowohl axialsymmetrische als auch nicht-axialsymmetrische Lösungen untersuchte. Allerdings beschränkte er sich auf gerade Lösungen. Gerade bedeutet, daß Temperatur und Radialgeschwindigkeit symmetrisch, die breitenparallelen Geschwindigkeiten aber antisymmetrisch zum Äquator sind. YOUNG fand, daß axialsymmetrische Lösungen nicht vorherrschen dürften, weil diese von einer gewissen Rayleigh-Zahl ab gegen nicht-axialsymmetrische Störungen instabil sind. Sowohl YOUNG (1974) als auch ZEBIB u. a. (1980) behandelten das Problem

ohne innere Wärmequellen und mit isothermen, spannungsfreien Grenzflächen. ZEBIB u. a. beschränkten sich auf axialsymmetrische Lösungen. Die lineare Stabilitätsanalyse ergab, daß dabei gerade Lösungen weniger stabil sind als andere. Schon diese kurze Gegenüberstellung numerischer Untersuchungen zeigt, daß das Problem nur voll-dreidimensional und numerisch gelöst werden kann, was aber nach SCHUBERT (1979) z. Z. noch nicht möglich ist. Zur Symmetrie der realisierten Verteilung der Strömungen in der Kugelschale findet man eine interessante hydrodynamische Untersuchung bei BUSSE (1975b). Er setzt lediglich die Schwerebeschleunigung und die Wärmequellen als kugelsymmetrisch verteilt voraus, wobei es z. B. offen bleibt, ob die Heizung von innen oder von unten erfolgt. Ansonsten wird eine Oberbeck-Boussinesq-Flüssigkeit angenommen. BUSSE setzt die Lösungen in Form von Kugelfunktionen an. Er findet, daß Lösungen mit geraden Koeffizienten  $n$  vorherrschen, wobei  $n$  unserer Schreibweise im nächsten Abschnitt entspricht. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit den anderen, oben erwähnten Arbeiten, weil für  $n > 2$  die Lösungen weder axialsymmetrisch noch gerade bezüglich Äquatorsymmetrie sind. BUSSEs  $R$ - $n$ -Abhängigkeit zeigt ein Minimum für  $n = 4$ . Diese nach BUSSE (1975b) vorherrschende Strömungsart zeigt die Symmetrien eines Würfels. Auch die Theorie von WALZER (1970, 1971, 1973a), die ausschließlich auf kinematischen und gruppentheoretischen Überlegungen beruht, führte auf Strömungen von der Symmetrie eines Würfels, hier zusätzlich mit kantenparalleler Streifung, die durch kantenparallele Rollen verwirklicht ist, was auf die Symmetrie der vollen Tetraedergruppe führt, in der der Würfel als Form vorkommt (vgl. Abb. 9.9). Auch hier sind die Lösungen, wie in 9.2. ausgeführt wird, weder axialsymmetrisch noch im allgemeinen gerade bezüglich Äquatorsymmetrie. Die Stärke dieser kinematischen Theorie besteht darin, daß sie die Verbindung zu beobachteten Ergebnissen der Geophysik herstellt. Sie gestattet, die Grundzüge der Kugelfunktionsentwicklung der Topographie der Erde und damit u. a. der Verteilung von Kontinenten und Ozeanen zu erklären (Abb. 9.17). Es ist klar, daß alle oben erwähnten theoretischen Strömungsmuster im Vergleich zu den Konvektionsströmungen, die im Erdmantel verwirklicht sind oder waren, stark vereinfacht sind. Die Gemeinsamkeiten der theoretischen Lösungen und die Übereinstimmung der kinematischen Theorie mit wesentlichen Beobachtungsergebnissen zeigen m. E. aber, daß hier ein richtiger Anfang gemacht wurde. Angesichts der Schwierigkeit des Problems, die tatsächlich im Mantel realisierten Strömungslinien oder auch nur die Strömungstypen zu bestimmen, ist es übrigens nicht verwunderlich, daß es hierzu nur wenige Arbeiten gibt, während die Zahl der Veröffentlichungen über andere Konvektionsprobleme rasch wächst.

## 9.2. Kinematische Theorie der Konvektionsströmungen im Erdmantel

### 9.2.1. Grundzüge

In 9.2. und 9.3. sollen die Konvektionsströme mit einer im Vergleich zu den anderen Kapiteln ganz andersartigen Methode behandelt werden. Der Mantel wird hier weder hydrodynamisch noch festkörperphysikalisch betrachtet. Es ist klar, daß eine Herleitung der Stromlinien aus den hydrodynamischen Grundgleichungen wünschenswert wäre. Wie in 9.1. ausgeführt wurde, ist das aber auch heute noch zu schwierig. Auch bezüglich Art und Verteilung der Energiequellen und hinsichtlich der im Mantel gültigen Stoffgesetze und der in diese einzusetzenden Viskositätswerte besteht noch nicht zwischen allen Bearbeitern Übereinstimmung, obwohl hier die letzten Jahre viel geklärt haben (vgl. 4.1.).

Diese Schwierigkeiten umgeht die kinematische Theorie der Mantelkonvektion, die der Verfasser (1970, 1971, 1973a) in einer Reihe von aufeinander aufbauenden Veröffentlichungen entwickelt hat. Hier soll der Kern dieser Theorie dargestellt werden.

Den Ausgangspunkt bilden neun strukturell einfache Grundvoraussetzungen (Postulate), die aber auch einzeln plausibel gemacht werden können. In Unterabschnitt 9.1. wurde z. B. gezeigt, daß manche dieser Voraussetzungen, wie das Vorherrschen von Rollenkonvektion und die Symmetrien der Verteilung der Strömungen in einer Kugelschale, inzwischen auch hydrodynamisch plausibel gemacht werden können. Obwohl alle Postulate immer gemeinsam als ein System wirken, ergeben sich die Maxima der Größen  $h_n$  (vgl. Abb. 9.16 und Abb. 9.17) der Kugelfunktionsentwicklung der Topographie der Erde richtig aus der Theorie. Es ist darauf hinzuweisen, daß die Postulate immer als System wirken: Ändert man eines  $a_0$ , so ändern sich alle Ergebnisse. Die Berechnung erfolgte mit einem Computer. (Die Idee, daß eine ursprünglich im wesentlichen kugelsymmetrische Verteilung durch Konvektion in der Kugelschale (Mantel) an der Oberfläche eine asymmetrische Verteilung der Kontinente erzeugt, wurde neuerdings auch von VESANEN und TEISSEYRE (1978) vertreten.) In unserer Theorie wird angenommen, daß sich der Mantel nach unten hin der Homogenität nähert und daß dies auch für die enthaltenen Wärmequellen gilt. Aus Symmetriegründen muß deshalb das Strömungsmuster einen hohen Grad an Regularität (im gruppentheoretischen Sinne) haben. Nur nach oben hin wird es durch die Verteilung der Kontinente und Ozeane und durch andere laterale Inhomogenitäten abgewandelt. Die Auswahl des richtigen Strömungsmusters erfolgte mit Hilfe der Theorie der Punktgruppen. Aus den theoretisch möglichen Strömungstypen, die in den verschiedenen geologischen Epochen herrschten, wurde eine ideale Topographie berechnet. Der Verfasser entwickelte diese ideale Topographie nach Kugelfunktionen und bildete aus den Koeffizienten solche Größen  $h_n$  und  $\bar{h}_n$  die von der räumlichen Orientierung des Strömungssystems in bezug auf das Gradnetz der Erde unabhängig sind. Vergleicht man diese Größen mit den entsprechenden Größen der Kugelfunktionsentwicklung der beobachteten Topographie, so stellt man bis zur 31. Ordnung, d. h. soweit wie letztere überhaupt bekannt ist, Übereinstimmung fest. Auch die Tiefe der wichtigsten seismischen Diskontinuitäten sind in dem System enthalten. Das bedeutet natürlich nicht, daß dieses die Phasenübergänge an den Diskontinuitäten erklärt. Vielmehr sind die Strömungstypen gerade so ausgebildet, daß der Durchfluß durch die Phasengrenzflächen oft vermieden wird. Die letztgenannten Übereinstimmungen scheinen ein quantitativer Beweis zu sein, daß die vorausgesetzten Postulate wesentliche Züge der gegenwärtigen oder früheren Realität erfassen und als Wegweiser bei der Aufstellung einer hydrodynamischen Theorie dienen können. Die kinematische Theorie hat den Vorteil, daß in sie weder die absolute Größe der Strömungsgeschwindigkeitsvektoren noch deren Zeitabhängigkeit eingeht. Es wird lediglich ein Teil der Geometrie der Stromlinien und der Umlaufsinn verwendet.

Hier sollen in Ergänzung zu 9.1. noch einige Gründe erläutert werden, weshalb es ratsam schien, zunächst keine dynamische Theorie zu versuchen. Bekanntlich reagiert ein bestimmter Körper nicht nur je nach Stärke der Beanspruchung, sondern auch je nach deren zeitlichem Verlauf verschieden. Die Stoffgesetze (hier: Spannungs-Deformationsgeschwindigkeits-Beziehungen) sind also nicht nur stoff- sondern auch vorgangsspezifisch. Dabei spielt vor allem die Größenordnung der Dauer des Vorgangs eine Rolle. Die Kontinuumsmechanik befindet sich also in der mißlichen Lage, für ein und denselben Körper zur Behandlung verschiedenartiger Vorgänge, bald dieses, bald jenes Stoffgesetz zugrunde legen zu

müssen. BUCHHEIM (1959) hat für dieses Problem einen Ausweg gezeigt, der auf ein allgemeines Stoffgesetz für isotrope Stoffe führt. Der Erdmantel reagiert bekanntlich gegenüber Erdbebenwellen und Erdzeiten in erster Approximation wie ein Hooke-Körper, in zweiter wie ein Kelvin-Körper. Um vieles weniger sicher ist man bei der Wahl des Stoffgesetzes für Vorgänge, die bedeutend länger andauern. Für isostatische Ausgleichsvorgänge, wie z. B. für das langsame Aufsteigen eingedrückter Kontinentaltafeln nach dem Abtauen von Inlandeis, rechnet man meist mit einer Newtonschen Flüssigkeit. WEERTMAN (1978) zeigte jedoch, daß es sich wahrscheinlich um Übergangskriechen (transient creep; vgl. 4.1.) handelt, so daß die von CATHLES (1975) angegebenen Viskositäten von  $\sim 10^{22}$  poise für den unteren Mantel zu niedrig wären. Für Vorgänge von der Dauer einer Orogenese oder gar von der Dauer eines orogenen Zyklus sind die verschiedensten Ansätze gemacht worden. Meist nimmt man Newtonsches Fließen an, vereinzelt wurde auch viskoplastisches (TEISSEYRE, 1977) und Andradesches Fließen vorgeschlagen. Auch der Bingham-Körper und der Maxwell-Körper wurden gelegentlich als Stoffgesetz eingeführt. Leider ist unser Problem, das Konvektionsströmungsmuster in einem als Kugelschale angenommenen Erdmantel zu finden, bereits unter stärksten Vereinfachungen zu verwickelt (siehe 9.1.), so daß die Einführung des verallgemeinerten Stoffgesetzes von BUCHHEIM die Aufgabe nur noch weiter erschweren würde. Wenn man sich der Einfachheit halber auf eine Newtonsche Flüssigkeit festlegt, steht man vor der Schwierigkeit, die richtige Größenordnung der Viskosität festzulegen. Die Viskositäten für den unteren Mantel schwanken je nach Autor zwischen  $10^{22}$  und  $10^{27}$  poise (vgl. 4.1.). Ein anderer Vorteil der kinematischen Theorie besteht darin, daß sie vom speziellen Stoffgesetz nicht abhängt. Weitere Überlegungen zu nicht-Newtonschen Stoffgesetzen findet man in den Abschnitten 11. bis 13. Als Vorstufe für die eigentliche (oder dreidimensionale) kinematische Theorie, in der der Mantel als Kugelschale vorausgesetzt wird, wird zunächst die zweidimensionale kinematische Konvektionstheorie entwickelt, in der der Mantel als unendlich langer Zylinder ring angesehen wird und keine Größe von der Zylinderhöhe abhängt.

### 9.2.2. Die zweidimensionale kinematische Konvektionstheorie

Wir wollen jetzt die sieben Grundvoraussetzungen (Postulate) einzeln aufführen, die später zwecks Erweiterung zur dreidimensionalen Theorie um zwei ergänzt werden.

Postulat 1: K o n v e k t i o n f i n d e t o d e r f a n d z e i t w e i -  
s e i m g e s a m t e n E r d m a n t e l s t a t t .

Dieser Satz ist heute weithin angenommen (vgl. 1. und 4.). Als die kinematische Theorie veröffentlicht wurde, herrschte jedoch die Ansicht vor, daß die Konvektion sich auf den oberen Mantel beschränkt. Postulat 1 legt die Geometrie (Kreisring bzw. in 9.2.3. Kugelschale) und die zwei Radien fest. Wegen der Endlichkeit des Konvektionsgebiets ist klar, daß bei festgelegter Art der Konvektionszellen die Zahl der möglichen Strömungstypen viel stärker eingeschränkt ist als in einer Flüssigkeitsschicht zwischen zwei unendlich großen waagrechten Ebenen, weil benachbarte Zellen an den Berührungsflächen gleiche Geschwindigkeiten haben müssen und das ganze Konvektionsgebiet durch die Strömungen erfaßt sein muß. Die Orientierung der Zellen bleibt natürlich wie auch in jeder hydrodynamischen Theorie des Problems offen. Falls man also in 9.2.3. irgendwelche theoretische Größen für die Oberfläche der Kugelschale in Form von Koeffizienten einer Kugelfunktionsentwicklung erhält, muß man erst in bekannter Weise (s. z. B. LEDERSTEGGER, 1969) daraus Größen berechnen, die nicht von der Orientierung des Grad-



netzes der Erde abhängen, bevor man sie mit Beobachtungsdaten vergleicht. Die Einführung des Postulats 2 kann hydrodynamisch (vgl. 9.1.) motiviert werden. Es ist jedoch keineswegs an eine Newtonsche Flüssigkeit gebunden (vgl. 9.2.1.).

Postulat 2: Es herrscht Rollenkonvektion, deren Stromlinien durch Kreise approximiert werden können.

Die Feststellung über die Form der Stromlinien kann auch abgeschwächt werden, indem man sie durch folgende ersetzt: Die Stromlinien sind geschlossene Kurven, deren radiale und tangentielle Maximaldurchmesser einer Zelle gleich groß sind. Auch bei diesem Postulat ist klar, daß es nicht an die vorausgeschickten Erörterungen über hydrodynamische Arbeiten gebunden ist. Auch mit einer blockartigen Bewegung der Rollen mit dünnen plastischen Gleitzonen an den Zylindermantelflächen im Sinne von VENING MEINESZ (1962) wäre Postulat 2 beispielsweise verträglich.

Zum Verständnis des Postulats 3 werden zwei Definitionen vorausgeschickt: Stromlinien, die nicht von anderen Stromlinien umschlossen werden, heißen Außenstromlinien. Kreisförmige Stromlinien, die nicht von anderen Stromlinien umschlossen sind, heißen Außenkreise.

Postulat 3: Außenstromlinien (Außenkreise) liegen einander tangierend in Schichten (Kreisringen) übereinander.

Numerische Lösungen der Konvektionsdifferentialgleichungen für eine zweidimensionale ebene Schicht, die dem Postulat ähnlich sind, findet man bei FROMM (1965). Diese Tendenz dürfte in der Erde durch die an den seismischen Diskontinuitäten sprunghaft ansteigende Viskosität (SAMMIS u. a., 1977) und eventuell durch chemische Schichtung (vgl. 1.) gefördert werden. Natürlich berühren sich bei einem hydrodynamischen Modell die Außenstromlinien nicht, sondern sie sind nur infinitesimal benachbart. Das ist aber für unser kinematisches Modell belanglos, da es ohnehin nur gewisse Grundzüge der möglichen Strömungen approximiert.

Postulat 4: Die Zahl der Außenstromlinien pro Schicht nimmt nach oben (außen) nicht ab.

Es ist festzustellen, daß diese Forderung nicht sehr einschneidend ist. Für ihre Einführung spielt die Tatsache eine Rolle, daß das Volumen von Schichten gleicher Dicke mit wachsendem Abstand vom Erdmittelpunkt zunimmt und daß der untere Mantel nach der Verteilung der P- und S-Geschwindigkeit zu urteilen viel weniger gegliedert ist als der obere. - Die Postulate 5 und 6 wurden lediglich eingeführt, um den Rechenaufwand zu beschränken. Sie sind vermutlich für die Ergebnisse nicht wesentlich, d. h. die Größen, die beim Vergleich mit Beobachtungsergebnissen eine Rolle spielen, würden wohl nur wenig verändert werden.

Postulat 5: Von einer Schicht zur nächsten kann sich die Zahl der Außenstromlinien höchstens verdreifachen.

Postulat 6: Für jeden möglichen Strömungstyp ändert sich die Zahl der Außenstromlinien nur an einer Schichtgrenze.

Postulat 7: Die Anzahl der Schichten muß gerade oder gleich eins sein.

Diese Voraussetzung kann weggelassen werden, wenn die Verteilung der seismischen Diskontinuitäten als bekannt vorausgesetzt wird. Auch bei Festlegung der Kerngrenze auf 2894 km Tiefe nach TAGGART und ENGDAHL (1968) und der Moho auf 35 km Tiefe ergibt sich aus den sieben Postulaten noch eine unendliche Anzahl von möglichen Strömungstypen. Auf eine endliche Anzahl kommt man, wenn man bedenkt, daß aus physikalischen Gründen der Durchmesser einer Konvektionsrolle nicht beliebig klein werden kann. Das wurde jedoch bei den Rechnungen nicht verwendet. Das war auch gar nicht nötig, weil die Rollen unterhalb eines gewissen Durchmessers vernachlässigbar wenig zu den Größen beitragen, die mit beobachteten Größen verglichen wurden. Die Zahl der Strömungstypen ist abzählbar unendlich, d. h. sie lassen sich nach abnehmendem Maximal-Rolldurchmesser ordnen. Wesentlich für die möglichen Strömungstypen ist, daß einander tangierende Außenkreise immer im entgegengesetzten Drehsinn rotieren müssen und daß die Außenkreise der obersten Schicht die Moho, die Außenkreise der untersten Schicht die Kerngrenze tangieren müssen. Die Strömungstypen werden folgendermaßen beschrieben:

1;2	2;3	3;4	4;5	5;6	usw.
	2;2	3;3	4;4	5;5	
		3;2	4;3	5;4	
			4;2	5;3	
				5;2	

Die erste Zahl  $j$  des Typs  $j;k$  ist die Zahl der Schichten des Strömungstyps. Die zweite Zahl  $k$  gibt an, in welcher Schicht (von unten gerechnet) die Anzahl der 2-dimensionalen Rollen gleich dem Dreifachen dieser Zahl der darunterliegenden Schicht ist. Aus Gründen der Verträglichkeit des Drehsinnes muß nämlich die Zahl der Außenkreise pro Schicht von Schicht zu Schicht entweder konstant bleiben oder sich verdreifachen. Gilt  $j + 1 = k$ , so sind in jeder Schicht gleich viele Rollen. Zur Veranschaulichung der Bezeichnungsweise kann Abb. 9.8 dienen.

Es wurde nun angenommen, daß die zweidimensionalen Rollen (Außenkreise) im Abstrom die Kruste etwas hinabsaugen, im Aufstrom etwas aufbeulen. Dadurch würden einer vorher schon unregelmäßigen Kruste weitere Täler und Erhebungen überlagert. Es wurde eine "ideale Topographie" gebildet, indem man die Beiträge der einzelnen nach den Postulaten möglichen Strömungstypen superponierte. Der Beitrag der einzelnen Typen wurde durch  $\sin$ -Funktionen approximiert. Man faßt nun die zweidimensionale "ideale Topographie" auf als Schnitt durch den Äquator einer dreidimensionalen "idealen Topographie" auf einer Kugel, die nur durch Superposition von Funktionen  $P_n^n(\cos \varphi) \cos n\lambda$  entsteht. Man kann diese dreidimensionale ideale Topographie, die zur zweidimensionalen Theorie gehört, nach Kugelfunktionen entwickeln und aus den Koeffizienten  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$  eine Größe  $h_n$  bilden, die von der Orientierung des Gradnetzes ( $\varphi, \lambda$ ) unabhängig ist. Der Vergleich mit orientierungsunabhängigen Größen  $h_n$  und  $h_n^*$  (Definition: siehe Formeln in 9.2.4.) der beobachteten Topographie brachte in den Maxima der  $h_n$ - bzw.  $h_n^*$ -Kurven über der Kugelfunktionsordnung  $n$  Übereinstimmung bis  $n = 24$  (siehe Tab. 9.1). Die Formeln für die Normierung der Kugelfunktionen sind dieselben wie die in 9.2.4. Die Rollen der Schicht, die die Kerngrenze tangieren, heißen Grundrollen. Typen mit  $2n$  Grundrollen tragen am meisten zur  $n$ -ten Kugelfunktionsordnung der "idealen Topographie" bei. Dabei muß natürlich angenommen werden, daß im Falle eines Anwachsens der Rollen-

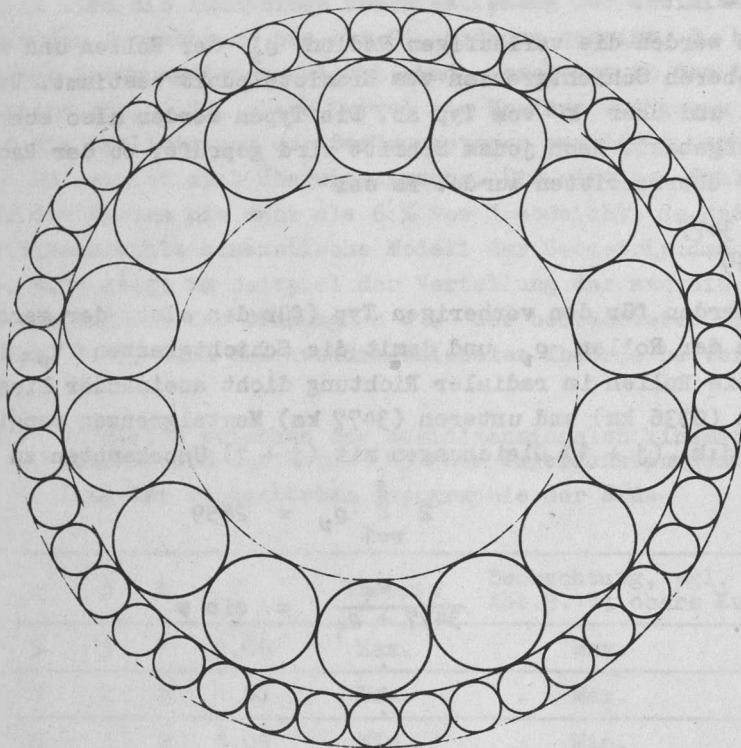


Abb. 9.8 Rollen des Strömungstyps 2;2. Verteilung im Mantel nach der zweidimensionalen Theorie von WALZER (1971)

zahl pro Schicht auch die Wirkung der unteren Rollen sich bis an die Kruste fort-pflanzt. Die Rollen unterhalb der Schichtfläche, an der die Rollenzahl pro Schicht an-wächst, heißen untere Rollen. Die Rollen darüber heißen obere Rollen. Für Typen  $j;k$  mit  $j + 1 = k$  gibt es also nur untere Rollen. Nun soll einiges zur Berechnung der Typen folgen. Wir definieren zunächst einen Winkel  $\psi$

$$\psi = \frac{180^\circ}{2n} .$$

Den vorläufigen Radius  $e_1^*$  der Rollen der ersten Schicht, d. h. der Grundrollen, be-kommt man aus

$$e_1^* = \frac{R_0}{\frac{1}{\sin \psi} - 1} , \quad \text{wobei} \quad R_0 = 3477 \text{ km} .$$

Mit  $R_1^* = R_0 + 2e_1^*$  ergibt sich für die nächste Schicht:

$$e_2^* = \frac{R_1^*}{\frac{1}{\sin \psi} - 1} , \quad \text{wenn} \quad 2 \neq k$$

$$e_2^* = \frac{R_1^*}{\frac{1}{\sin \frac{\psi}{3}} - 1}, \quad \text{wenn} \quad 2 = k$$

usw. In dieser Weise werden die vorläufigen Radien  $e_\nu^*$  der Rollen und vorläufigen Entfernungen  $R_\nu^*$  der oberen Schichtgrenzen vom Erdmittelpunkt bestimmt. Diese Größen hängen über  $\psi$  von  $n$  und über  $k$  vom Typ ab. Die Typen werden also schrittweise für jedes  $n$  einzeln aufgebaut. Nach jedem Schritt wird geprüft, ob der Radius der Mantelobergrenze (6336 km) überschritten wurde. Es sei

$$G = \frac{R_\nu^* - 3477}{2859}.$$

Wenn  $G > 1$  wird, werden für den vorherigen Typ (für den also, der gerade noch hineinpaßte) die Radien der Rollen  $e_\nu$  und damit die Schichtgrenzen  $R_\nu$  in der Weise neu berechnet, daß die Rollen in radialer Richtung dicht aneinander liegen und die idealisierten oberen (6336 km) und unteren (3477 km) Mantelgrenzen tangieren. Es waren also für jeden Typ  $j;k$  ( $j+1$ ) Gleichungen mit ( $j+1$ ) Unbekannten zu lösen:

$$2 \sum_{\nu=1}^j e_\nu = 2859$$

$$\frac{e_1}{3477 + e_1} = \sin \varphi$$

⋮

$$\frac{e_{k-1}}{3477 + 2 \sum_{\nu=1}^{k-2} e_\nu + e_{k-1}} = \sin \varphi$$

$$\frac{e_k}{3477 + 2 \sum_{\nu=1}^{k-1} e_\nu + e_k} = \sin \frac{\varphi}{3}$$

⋮

$$\frac{e_j}{3477 + 2 \sum_{\nu=1}^{j-1} e_\nu + e_j} = \sin \frac{\varphi}{3}.$$

Die Grenzen der Schichten folgen aus den  $e_\nu$  nach:

$$R_\nu = R_{\nu-1} + 2e_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, j$$

wobei  $R_0 = 3477$ . Um ein Maß für die Abweichungen von den vorläufigen  $e^*$ -Werten zu haben wurde noch

$$v = \frac{\psi}{\varphi}$$



gebildet. Tab. 9.1 zeigt nun mit Hilfe eines Computers berechnete Ergebnisse. Links sieht man für welche Ordnung  $n$  welcher Strömungstyp  $j;k$  verwirklicht wird. In den rechten zwei Spalten wird die lückenlose Übereinstimmung der zweidimensionalen kinematischen Theorie mit der Beobachtung bis zur 21. Ordnung gezeigt. D. h. genau für die Ordnungen, für welche Strömungstypen erlaubt sind, erscheint in der  $h_n^*$ -Kurve der gesamten Topographie (siehe Abb. 9.17, obere Kurve) ein Maximum und genau für die Ordnungen, für die Postulat 7 die Realisierung der Strömungstypen verbietet, erscheint ein Minimum. Auch für  $n = 24$  ergibt sich Übereinstimmung. Die mittlere Spalte von Tab. 9.1 zeigt, daß  $V$  für die Maxima nie mehr als 6 % von 1 abweicht, so daß man feststellen kann, daß das zweidimensionale kinematische Modell der Geometrie des Mantels sehr gut angepaßt ist. Abb. 9.11 zeigt am Beispiel der Verteilung der zweidimensionalen Rollen des Typs 2;2, wie das Maximum der Ordnung  $n = 7$  der beobachteten  $h_n^*$  der Topographie (obere Kurve von Abb. 9.17) nach der zweidimensionalen Theorie hervorgebracht wird.

Tab. 9.1 Vergleich zwischen der zweidimensionalen kinematischen Theorie und der Größe  $h_n^*$  der Kugelfunktionsentwicklung der beobachteten Topographie der Erde

$n$	$j$	$k$	$V$	Theorie	Beobachtung, vgl. Abb.9.17; obere Kurve
5	1	2	1,06	Max.	Max.
7	2	2	1,00	Max.	Max.
8	3	2	1,09	Min.	Min.
10	2	3	1,05	Max.	Max.
10	4	2	1,05		
12	3	3	1,02	Min.	Min.
12	5	2	1,02		
14	4	3	1,00	Max.	Max.
14	6	2	1,00		
15	3	4	1,05	Min.	Min.
15	5	3	1,05		
15	7	2	1,05		
17	4	4	1,03	Max.	Max.
17	6	3	1,03		
17	8	2	1,03		
19	5	4	1,01	Min.	Min.
19	7	3	1,01		
19	9	2	1,01		
20	8	3	1,05	Max., kleiner als für $n=21$	Max., kleiner als für $n=21$
20	10	2	1,05		
21	4	5	1,00	Max.	Max.
21	6	4	1,00		
22	5	5	1,03	Min.	Max., kleiner als für $n=21$
22	7	4	1,03		
22	9	3	1,03		
22	11	2	1,03		
24	6	5	1,02	Max.	Max.
24	8	4	1,02		
24	10	3	1,02		
24	12	2	1,02		

### 9.2.3. Die dreidimensionale kinematische Theorie der Mantelkonvektion

Für höhere Ordnungen ( $n = 22$  und  $25 \leq n \leq 31$ ) hört die erstaunliche Übereinstimmung der zweidimensionalen kinematischen Theorie mit den Beobachtungsergebnissen auf, d. h. es tritt eine Verschiebung der Maxima auf. Gleichzeitig ist die Frage ungelöst, wie sich die Strömungstypen in die dritte Dimension des Mantels fortsetzen. Zylinder im strengen Wortsinne sind wegen der Kugelsymmetrie der Erde nicht möglich. Beide Fragen wurden gleichzeitig gelöst (WALZER, 1973a): Wegen beschriebener Übereinstimmung bis  $n = 21$  war es klar, daß das neue Modell Züge des alten übernehmen mußte. Ferner bestand die Vermutung, daß die Abweichungen für höhere Ordnungen gerade durch die Beschränkung auf zwei Dimensionen käme. Wesentlich für die Einführung des neuen räumlichen Modells war die Annahme, daß der Mantel sich nach unten hin der Homogenität immer mehr nähert und daß das räumliche Strömungssystem deshalb durch die Kugelsymmetrie des Problems bestimmt ist. Abweichungen davon dürften sich also nur nach oben hin vor allem bedingt durch die Verteilung der Kontinente und Ozeane ergeben. Weil es sich bei der Suche nach dem Ansatz um ein Symmetrieproblem handelt, wurde die Theorie der Punktgruppen angewandt. Entsprechend der beherrschenden Stellung von Extremalprinzipien in der Physik liegt es nahe, einen höchstmöglichen Grad an Regularität nach der Definition von FEJES TÓDT (1965) für das dreidimensionale kinematische Modell zu fordern. Da im Gegensatz zur Anwendung der Gruppentheorie bei Kristallgittern (siehe z. B. BUERGER, 1956) die Forderung nach Translationswiederholung entfällt, war es nötig, auch die Formen der nichtkristallographischen Punktgruppen zu bestimmen (siehe Abb. 9.9). Für die kristallographischen Punktgruppen konnten die Formen aus BUERGER (1956) und LINCK (1923) genommen werden. FEJES TÓDT (1965, S. 67) leitet die vollständige Liste aller endlichen Transformationsgruppen her. Abb. 9.9 enthält davon alle regulären Gruppen und bringt dazu alle möglichen Formen (im Sinne der Kristallographie). Man setzt nun (im Gedankenversuch) diese Formen zentral in den Erdkern und projiziert die Kanten mit Hilfe einer im Mittelpunkt befindlichen Lichtquelle auf die zwei Kugelflächen der Kugelschale, die den Mantel darstellt (Zentralprojektion). Dadurch erhält man für jede kristallographische und nichtkristallographische Form eine Feldereinteilung des Erdmantels. Der Ansatz wird durch die zwei Forderungen gefunden, daß (1.) das Rollensystem des zweidimensionalen kinematischen Modells möglichst den ganzen Raum der Kugelschale ausfüllt und daß (2.) das eingepaßte Rollensystem selbst den Symmetrieforderungen der entsprechenden Gruppe genügt. Forderung (1.) bedeutet, daß die pro Zeiteinheit nach außen abgeführte Wärme ein Maximum sein soll. Es sind nun zwei Tatsachen zu beachten: a) In das zweidimensionale kinematische Modell gehen - was die Geometrie betrifft - nur die zwei Radien der Mantelbegrenzung, nicht aber die Geometrie der Formen ein. b) Die Zahl der Strömungstypen  $j;k$  ist unendlich. Die Forderung (1.) soll aber möglichst für jeden Typ  $j;k$  einzeln erfüllt sein. Aus a) und b) ergibt sich also, daß bereits Forderung (1.) recht einschneidend ist. Zur Auswahl der richtigen Form nach Forderung (1.) dient Tab. 9.2. In der ersten Spalte von links stehen die Strömungstypen, die nach der zweidimensionalen Theorie die Maxima hervorrufen (vgl. Tab. 9.1). Für jedes Maximum wurden nur die ersten Typen, d. h. diejenigen mit der geringsten Schichtenzahl, genommen, weil die anderen Typen, die zu demselben Maximum auch beitragen können, gleich große Rollen in der ersten Schicht haben und bezüglich des folgenden dasselbe ergeben. In der zweiten Spalte steht das in 9.2.2. eingeführte  $\varphi$ . Die Größe  $2\varphi$  bedeutet den Winkel, unter dem man vom Erdmittelpunkt aus eine Grundrolle sehen würde.  $\varphi$  ist also vom Typ  $j;k$  abhängig.  $\varphi$  wird in den nächsten Spalten von Tab. 9.2 mit den geraden ganzen Zahlen 2, 4, ... multipliziert. Damit ergibt sich zu den in der ersten Zeile stehenden Anzahlen

Tab. 9.2 Die Bestimmung der passenden Form für das dreidimensionale kinematische Modell nach WALZER (1971). Näheres siehe Text.

type	$\varphi$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1; 2	16.9387	33.877	67.755	101.632	135.510	169.387	203.264	237.142	271.019	304.897	338.774
2; 2	12.8092	25.618	51.237	76.855	102.474	128.092	153.710	179.329	204.947	230.566	256.184
2; 3	8.56341	17.127	34.253	51.380	68.507	85.634	102.761	119.888	137.015	154.141	171.268
4; 3	6.43605	12.872	25.744	38.616	51.488	64.361	77.233	90.105	102.977	115.849	128.721
4; 4	5.15095	10.302	20.604	30.906	41.208	51.510	61.811	72.113	82.415	92.717	103.019
8; 3	4.29550	8.591	17.182	25.773	34.364	42.955	51.546	60.137	68.728	77.319	85.910
4; 5	4.29372	8.587	17.175	25.762	34.350	42.937	51.525	60.112	68.700	77.287	85.874
6; 5	3.68156	7.363	14.726	22.089	29.452	36.816	44.179	51.542	58.905	66.268	73.631
6; 6	3.2217	6.443	12.887	19.330	25.774	32.217	38.660	45.104	51.547	57.991	64.434

der Rollen in der untersten Schicht der entsprechende Winkel in Grad, unter dem das "Rollenbündel" vom Erdmittelpunkt aus gesehen erscheint. Es gibt nur eine Folge sehr eng benachbarter Winkel, die bei allen Typen - auch den in Tab. 9.2 nicht aufgeführten - (mit Ausnahme von Typ 1;2) auftreten:  $51,237^\circ \dots 51,547^\circ$ . Typ 1;2 paßt für eine Rolle auch in dieses Intervall. Es kommen also nur die wenigen Formen in Betracht, bei denen eine Kantenlänge  $51,547^\circ$  oder nur wenige Grad darüber auftritt. Forderung (2.) wird nun durch folgendes verdeutlicht: In Abb. 9.9 tritt oft dieselbe geometrische Figur in verschiedenen Gruppen auf. In derselben Weise wie man in der Kristallographie die Einordnung nach den Eigenschaften der Flächen vornimmt - das wurde am Beispiel des Würfels in der letzten Spalte von Abb. 9.9 demonstriert -, bestimmt die Orientierung der eingepaßten Rollen zusätzlich die Gruppe.

Beide Forderungen zugleich werden nur vom Disdodekaeder (diploid) der Gruppe  $T_h$  nach der Schönflies-Notation erfüllt. Die Rollen müssen dabei in der in Abb. 9.11 und Abb. 9.12 gezeigten Weise senkrecht auf dem  $2 \cdot 26,56518^\circ = 53,13036^\circ$  geöffneten Sektor des Großkreis-Ringes stehen. Es kann gezeigt werden, daß es genügt, in der dreidimensionalen kinematischen Theorie die Postulate der zweidimensionalen um zwei zu ergänzen.

Postulat 8: Das Strömungssystem hat den höchstmöglichen Grad an Regularität im Sinne der Gruppentheorie.

Postulat 9: Nach Erfüllung aller anderen Forderungen soll das System so sein, daß es einen maximalen Wärmetransport gewährleistet.

Es gilt nun, den Verlauf der Rechnungen für das räumliche Modell im einzelnen darzustellen. Die durchgezogenen Linien von Abb. 9.10 zeigen die Feldereinteilung, die durch Zentralprojektion des Disdodekaeders auf die Kugel erzeugt wird. Andere Linien sind Hilfsgrößen, die die Berechnungen veranschaulichen. Kleine schwarze Linsen geben die Punkte an, wo 2-zählige Drehachsen die Kugelfläche durchstoßen. Kleine schwarze Dreiecke geben die Durchstoßpunkte von 6-zähligen Drehspiegelungsachsen an. Starke Linien geben an, wo die drei zueinander orthogonalen Spiegelungsebenen die Kugelfläche schneiden. Die Bezeichnungen der Seiten und Winkel kann man aus Abb. 9.10 entnehmen. Es ergeben sich 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten:

$$\begin{aligned} b + c &= 90^\circ & \beta + \gamma &= 120^\circ \\ \cos d &= \cos b \cdot \cos c & \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{\sin a}{\sin b} \\ \cos d &= \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos 120^\circ & \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} &= \frac{\sin a}{\sin c} \end{aligned}$$

Dieses System kann man auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten vereinfachen:

$$\cos b \sin b = \cos^2 a - \frac{1}{2} \sin^2 a$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \beta)} = \frac{\sin a}{\cos b}.$$



Aus Symmetriegründen gilt dabei  $\alpha = 45^\circ$ . Das Gleichungssystem wurde gelöst und die anderen Größen von Abb. 9.10 mit Hilfe von Formeln der sphärischen Trigonometrie berechnet. Es ergibt sich

im Bogenmaß:	in Grad:
a = 0,684 719 18	a = 39,232°
b = 1,107 148 71	b = 63,435°
c = 0,463 647 61	c = 26,565°
$\epsilon$ = 1,991 330 66	$\epsilon$ = 114,095°
$\eta$ = 1,150 262 00	$\eta$ = 65,905°

Ferner gilt:  $\delta = 45^\circ$ ;  $\gamma = 30^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$ . Wenn das Strömungssystem die Symmetrie der Gruppe  $T_h$  haben soll, muß die Längsachse der Walzen parallel zu b oder c sein. Von WALZER (1971, Tab. 3) wurde gezeigt, daß 22 Strömungstypen zur zweidimensionalen "idealen Topographie", die bis zur 31. Kugelfunktionsordnung entwickelt wurde, beitragen. Da die Rollen in der dreidimensionalen Theorie irgendwie verkürzt werden müssen, können auf jeden Fall wegen des Verlaufs der tesseralen Kugelfunktionen nicht mehr Strömungstypen dazu beitragen. Wie Tab. 9.2 zeigt, paßt der Querschnitt von 21 dieser Strömungstypen gerade knapp in den 2c geöffneten Sektor des Großkreis-Ringes. Das wird in Abb. 9.11 am Beispiel des Typs 2;2 verdeutlicht. Es gibt sonst in der vollständigen Tabelle der gruppentheoretischen Formen (Abb. 9.9) keinen anderen Abschnitt, der dieses knappe Einpassen in derart idealer Weise für alle Strömungstypen erlauben würde. Fordert man ein Maximum der transportierten Wärme, so wird aber das gerade dann am ehesten realisiert. Diese Forderung ist also das zweite und letzte zusätzliche Postulat der dreidimensionalen kinematischen Konvektionstheorie. Der 22. Typ ist der Typ 1;2, der aber auch in den Großkreisringsektor 2c paßt, nur liegen dabei die Rollen nicht so eng an den (gedachten) radialen Wandungen der Feldereinteilung des Mantels. Aus den genannten Gründen werden wir die Rollen also parallel zu b einführen.

Abb. 9.9 Die Formen der regulären Gruppen. Erläuterungen: n-fold axis = n-zählige Drehachse, n-fold rotation-reflection axis = n-zählige Drehspiegelungsachse, polar n-fold axis = polare n-zählige Drehachse, M = Hauptsymmetrieebene, m = Nebensymmetrieebene, i = Symmetriezentrum.

Die Formen der vollen Ikosaeder-Gruppe lauten der Reihe nach: Hekatonikosaeder, Hexekontaeder, Dodekakispentaeder, Ikosakistrieder, Rhombentriakontaeder, Ikosaeder, Dodekaeder.

Die Formen der reinen Ikosaeder-Gruppe lauten der Reihe nach: Pentagonales Hexekontaeder, Triakontaeder, Ikosaeder, Dodekaeder. In den bisher erwähnten Punktgruppen ist Translationswiederholung unmöglich. Es folgen die kristallographischen Punktgruppen. Diese Unterscheidung ist für unsere Zwecke unwichtig.

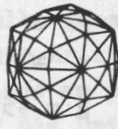
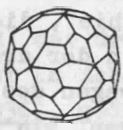
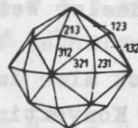
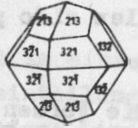
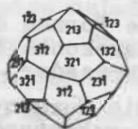
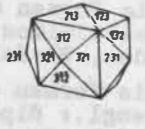
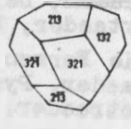
Die Formen der vollen Oktaeder-Gruppe lauten der Reihe nach: Hexakisoktaeder, Deltoidikositetraeder, Pyramidenoktaeder, Pyramidenwürfel, Dodekaeder, Oktaeder, Würfel (Holoedrie).

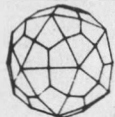


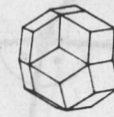
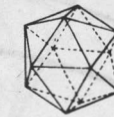
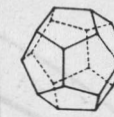
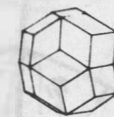
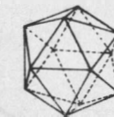
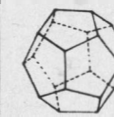

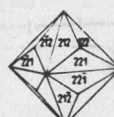

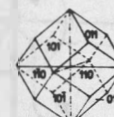


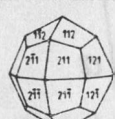
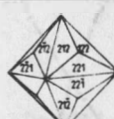
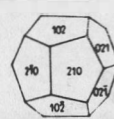




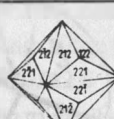
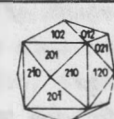
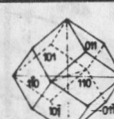


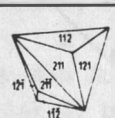

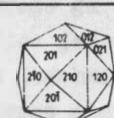
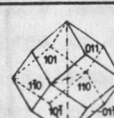
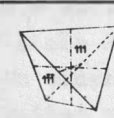
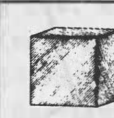
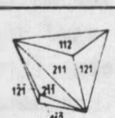

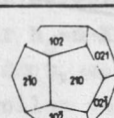
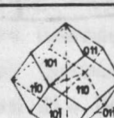
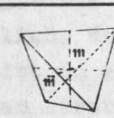

Die Formen der vollen Tetraeder-Gruppe lauten der Reihe nach: Disdodekaeder (engl.: diploid), Deltoidikositetraeder, Pyramidenoktaeder, Pentagondodekaeder, Dodekaeder, Oktaeder, Würfel (Pentagonale Hemiedrie).

Die Formen der reinen Oktaeder-Gruppe lauten der Reihe nach: Pentagonikositetraeder, Deltoidikositetraeder, Pyramidenoktaeder, Pyramidenwürfel, Dodekaeder, Oktaeder, Würfel (Gyroedrische Hemiedrie).

Die Formen der Oktaeder-Tetraeder-Gruppe lauten der Reihe nach: Hexakistetraeder, Pyramidentetraeder, Deltoiddodekaeder, Pyramidenwürfel, Dodekaeder, Tetraeder, Würfel (Tetraedrische Hemiedrie).

Die Formen der reinen Tetraeder-Gruppe lauten der Reihe nach: Tetraedrisches Pentagondodekaeder, Pyramidentetraeder, Deltoiddodekaeder, Pentagondodekaeder, Dodekaeder, Tetraeder, Würfel (Tetartoedrie).

POINT GROUP		SUBGROUP			SYMMETRY			FORMS	
Name	Fejes Tódt	Schoenflies	Number of points	Axes	Reflection planes	inversion centre	General form		
Number of elements	notation								
Full Icosahedral Group	I <sub>h</sub>	I <sub>h</sub>	I <sub>h</sub>	1	6 ●	3 $\sigma$	i		
			C <sub>5v</sub>	12					
			C <sub>3v</sub>	20	10 ●				30 m
120			C <sub>2v</sub>	30					
			C <sub>s</sub>	60	15 ●				
		C <sub>i</sub>	120				Hecatonicosahedron		
Pure Icosahedral Group	I	I	I	1	6 ●				
			C <sub>5</sub>	12					
			C <sub>3</sub>	20	10 ▲				
60			C <sub>2</sub>	30					
			C <sub>i</sub>	60	15 ●				
							Pentagonal Hexecontahedron		
General form									
Full Octahedral Group	O <sub>h</sub>	O <sub>h</sub>	O <sub>h</sub>	1	4 ▲	3 $\sigma$	i		
			C <sub>4v</sub>	6					
			C <sub>3v</sub>	8	3 ■				6 m
48			C <sub>2v</sub>	12					
			C <sub>s</sub>	24	6 ●				
		C <sub>i</sub>	48				Hexoctahedron		
Full Tetrahedral Group	T <sub>h</sub>	T <sub>h</sub>	T <sub>h</sub>	1	4 ●	3 $\sigma$	i		
			C <sub>2v</sub>	6					
			C <sub>3</sub>	8	3 ●				
24			C <sub>s</sub>	12					
			C <sub>i</sub>	24					
							Diploid		
Pure Octahedral Group	O	O	O	1	4 ▲				
			C <sub>4</sub>	6					
			C <sub>3</sub>	8	3 ■				
24			C <sub>2</sub>	12					
			C <sub>i</sub>	24	6 ●				
							Gyroid		
Octahedral-tetrahedral Group	O <sub>T</sub>	T <sub>d</sub>	T <sub>d</sub>	1	4 ▲				
			C <sub>3v</sub>	4					
			C <sub>2v</sub>	6	3 ●	6 m			
24			C <sub>s</sub>	12					
			C <sub>i</sub>	24					
							Hextetrahedron		
Pure Tetrahedral Group	T	T	T	1	4 ▲				
			C <sub>3</sub>	4					
			C <sub>2</sub>	6	3 ●				
12			C <sub>i</sub>	12					
							Tetartoid		

FORMS					
5 - 3	5 - 2	3 - 2	2	3	5
 Hexecontahedron	 Dodecakis-pentahedron	 Icosacstrihedron	 Triacantahedron	 { 35 } Icosahedron	 { 53 } Dodecahedron
—	—	—	 Triacantahedron	 { 35 } Icosahedron	 { 53 } Dodecahedron
{ hll }	{ hhl }	{ hkO }	{ 110 }	{ 111 }	{ 100 }
 Trapezohedron	 Trisoctahedron	 Tetrahexahedron	 Dodecahedron	 { 34 } Octahedron	 { 43 } Cube
 Trapezohedron	 Trisoctahedron	 Pyritohedron	 Dodecahedron	 { 34 } Octahedron	 { 43 } Cube
 Trapezohedron	 Trisoctahedron	 Tetrahexahedron	 Dodecahedron	 { 34 } Octahedron	 { 43 } Cube
 Tristetrahedron	 Deltahedron	 Tetrahexahedron	 Dodecahedron	 { 33 } Tetrahedron	 { 43 } Cube
 Tristetrahedron	 Deltahedron	 Pyritohedron	 Dodecahedron	 { 33 } Tetrahedron	 { 43 } Cube

Explanation. ● 5 - fold axis    ■ 4 - fold axis    ▲ 3 - fold axis    ● 2 - fold axis  
 ● 10 - fold rotation - reflection axis    ▲ 6 - fold rotation - reflection axis  
 ● 4 - fold rotation - reflection axis    ▲ polar 3 - fold axis    i inversion  
 /- main reflection plane    m secondary reflection plane

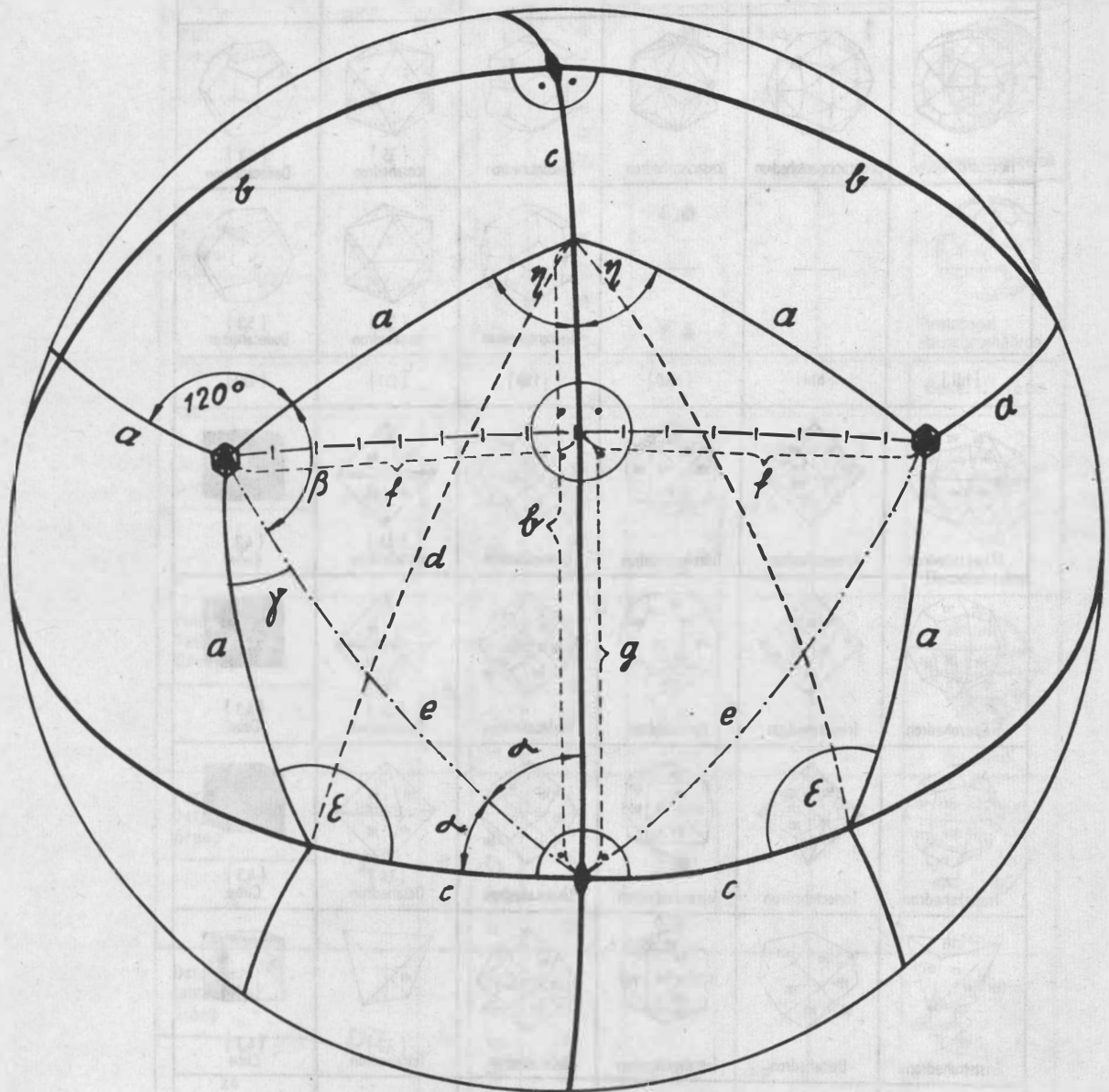


Abb. 9.10 Die Feldereinteilung des Mantels durch Zentralprojektion eines Disdodekaeders nach WALZER (1973a)



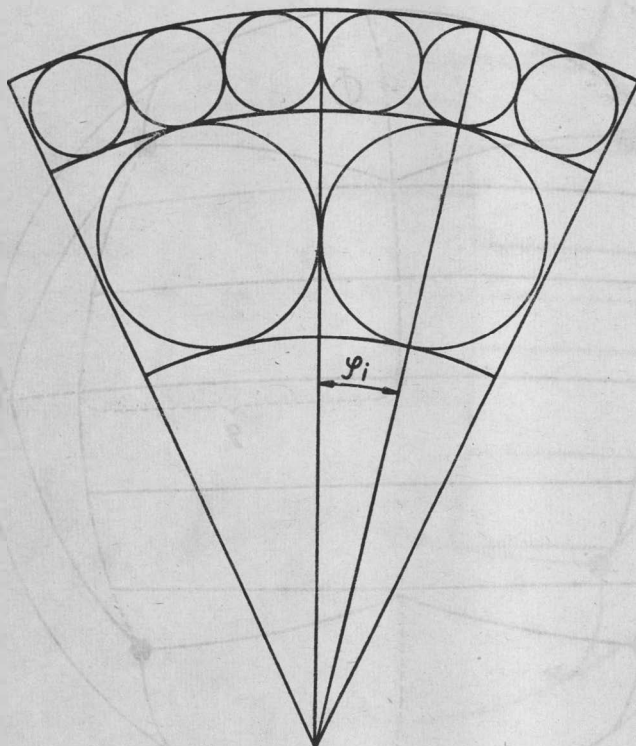


Abb. 9.11 Profil durch 2c für den Strömungstyp 2;2

Ein ungelöstes Problem ist nun die Frage, wie die Rollen am Ende der Felder aufhören. (Für eine endgültige Lösung könnten experimentell gefundene Rollenden bzw. -umbiegungen von SOMERSCALES und DROPKIN (1966) eventuell Hinweise geben, wobei diese Ergebnisse für Konvektion in einer horizontalen Schicht gelten.) Es hat sich gezeigt, daß verschiedene Lösungen des Problems zu einer gleichartigen Verteilung der Maxima in den Kurven  $h_n$  über  $n$  führen, so daß diese Frage gar nicht besonders wichtig ist. Nach Variante A enden die Rollen jedes Typs an der Linie 2f (vgl. Abb. 9.10 und Abb. 9.12). Vor dem Ende sollen die Geschwindigkeiten nach einer sin-Funktion auf Null abgeklungen sein: D. h. die Rolle dreht sich bei Fortschreiten von der Linie 2c zur Linie 2f nicht en bloc sondern immer langsamer. Damit ist gewährleistet, daß an den Enden kein Sprung in der Geschwindigkeitsverteilung auftritt. Die Annahme einer sin-Funktion ist für die Lage der Maxima der  $h_n$ -n-Kurve unwesentlich. Nach Variante B (siehe Abb. 9.13) enden die Rollen dort, wo der Querschnitt es erlaubt, eine weitere Grundrolle einzufügen. Unter Grundrollen sollen die Rollen verstanden werden, die die Kerngrenze tangieren. An diesem Querschnitt setzt sich dann das Strömungssystem weiterhin parallel zu  $b$  und vermehrt um eine Grundrolle und die Rollen über ihr fort. Falls weitere Hinzufügungen dieser Art möglich sind, erfolgen auch diese. Am Ende der Felder endet jede Grundrolle einzeln. Um bei Erweiterungen und am Ende Geschwindigkeitsdiskontinuitäten zu vermeiden, erfolgt jeweils wieder ein Absinken der Geschwindigkeiten auf Null in Form einer sin-Funktion.

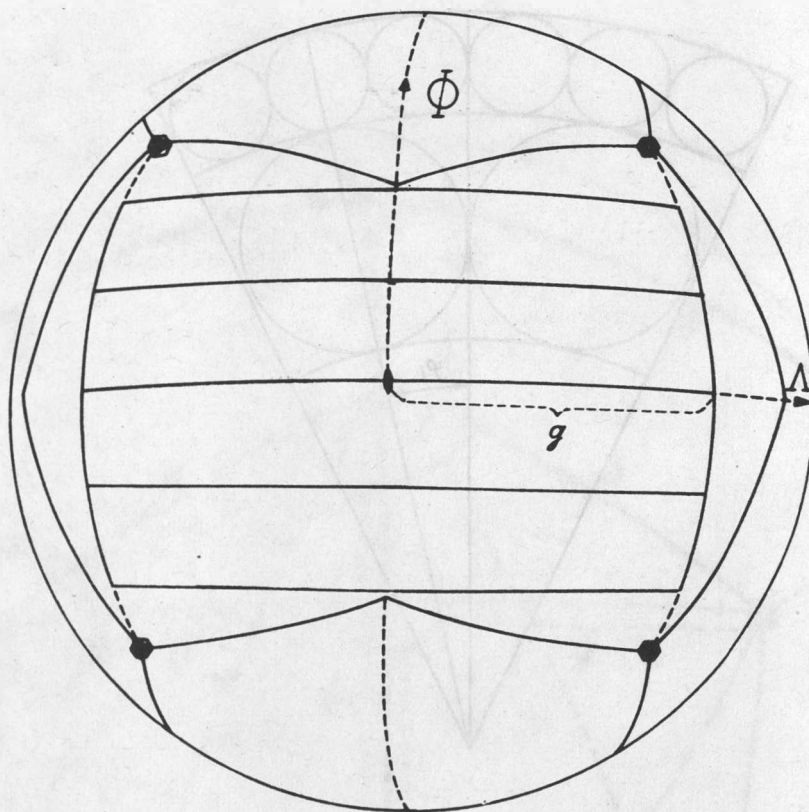


Abb. 9.12 Verteilung der Grundrollen auf die Feldereinteilung nach Variante A (dargestellt am Beispiel von Typ 4;3. Nach WALZER, 1973a)

Der Autor ist sich dessen bewußt, daß man das Problem der Rollenenden oder Umbiegungen an den Enden noch in verschiedener anderer Weise lösen kann. Aus der Erfahrung verschiedener Versuche heraus ist jedoch klar, daß die Verteilung der Extrema der  $h_n$ - $n$ -Kurven sich dabei nicht oder nur sehr gering ändern kann. Aus der zweidimensionalen Theorie her ist sogar gewiß, daß bis zu Ordnungen  $n = 24$  hinauf selbst das Regularitätspostulat (Postulat 8) unwesentlich ist. Wir wollen uns jetzt, um numerisch etwas ausrechnen zu können, auf die Varianten A und B beschränken.

#### 9.2.4. Variante A der dreidimensionalen kinematischen Theorie der Mantelkonvektion

Gemäß Abb. 9.12 wird ein Koordinatensystem  $(\Phi, \Lambda)$  zur Festlegung von Punkten auf der Kugel definiert. Zuerst soll eine theoretische Topographie  $U(\Phi, \Lambda)$  hergeleitet werden. Alle Höhen sind dabei nur relative Größen, d. h. nur untereinander vergleichbar. Diese Topographie ist eine Superposition der Beiträge der einzelnen Strömungstypen. Es genügt daher, zunächst nur die Topographie eines Typs zu behandeln.  $i$  sei der Laufindex, der den Typ kennzeichnet. Für die Topographie  $T_i$ , die die unteren Rollen des Typs  $i$  an der

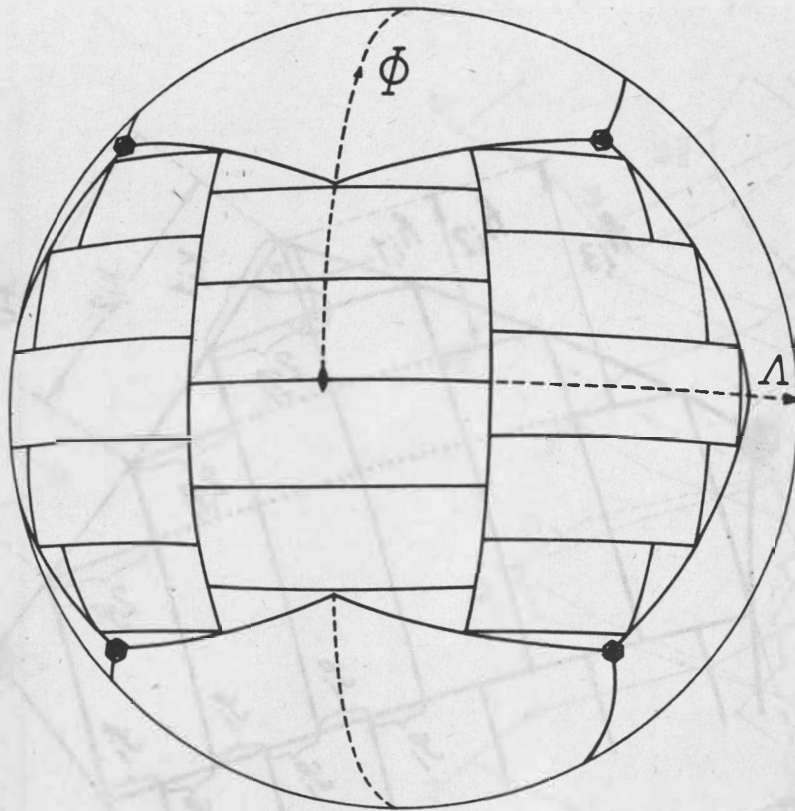


Abb. 9.13 Verteilung der Grundrollen auf die Feldereinteilung nach Variante B (dargestellt am Beispiel von Typ 4;3. Nach WALZER, 1973a)

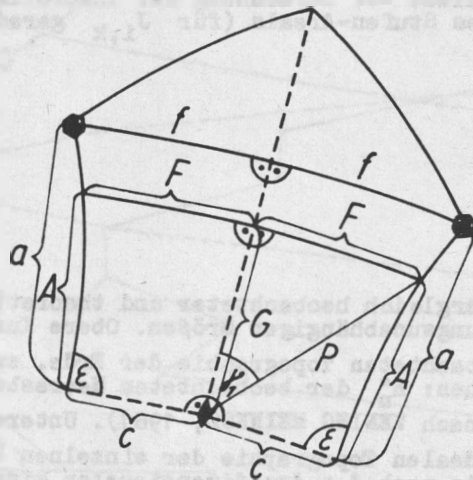


Abb. 9.14 Skizze zur Berechnung der Querschnitte  $2F$  quer durch die Feldereinteilung. An  $2F$  erhöht sich die Grundrollenzahl, die in den Querschnitt paßt, um eins.

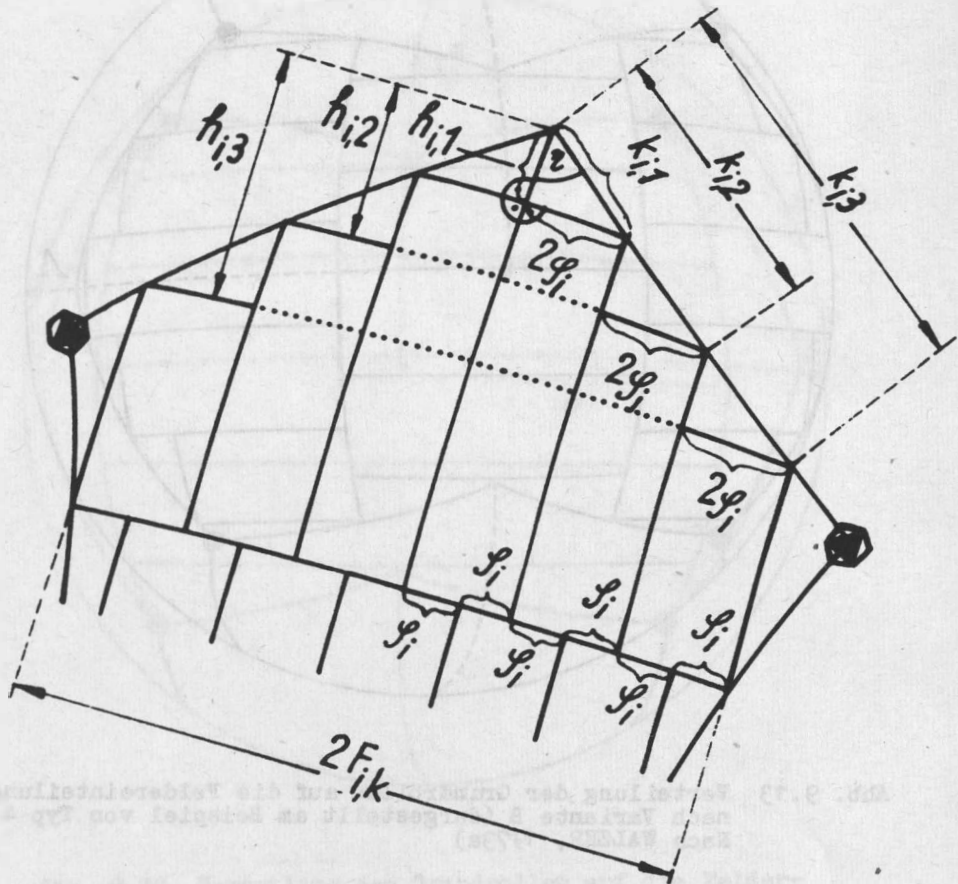
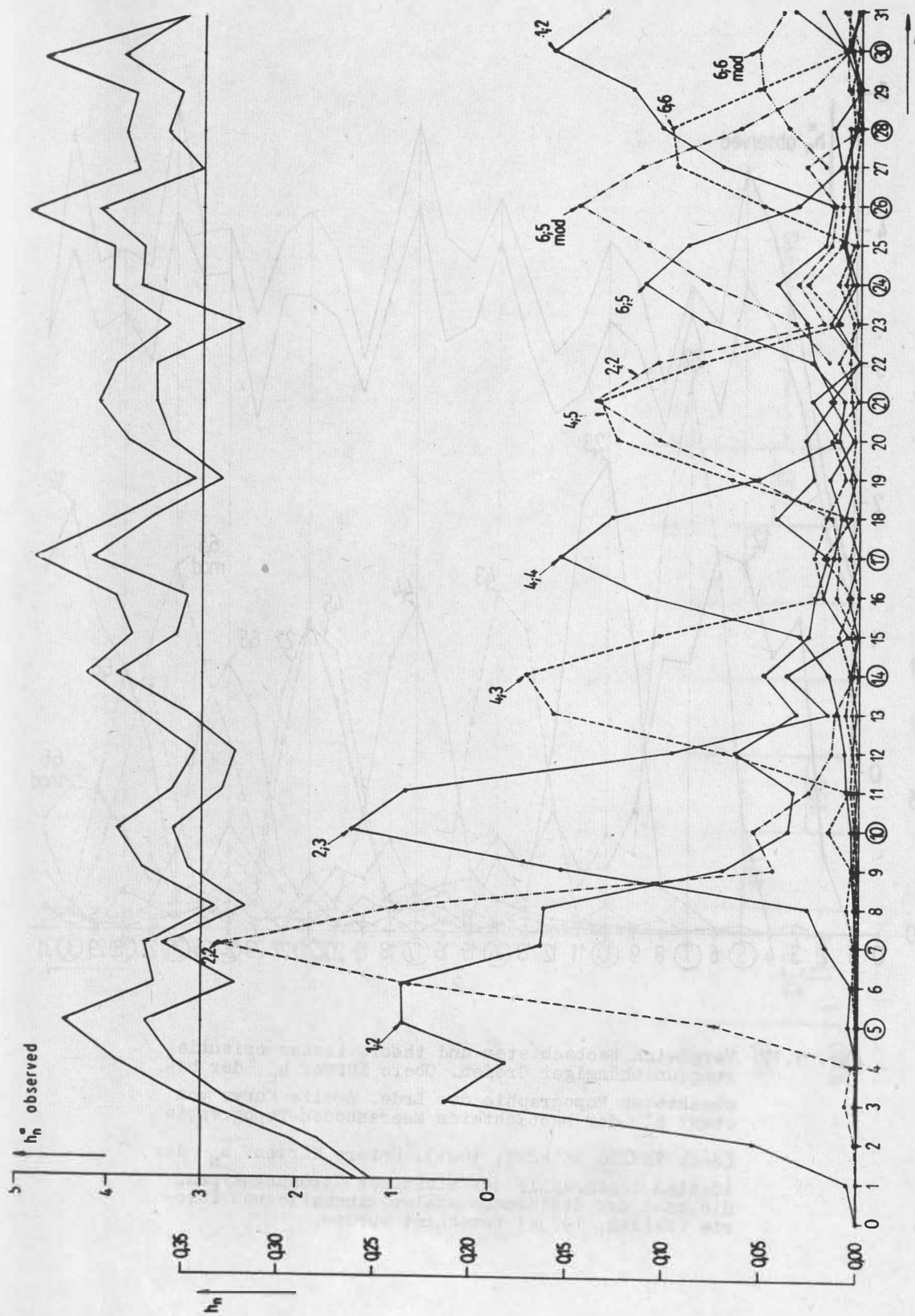


Abb. 9.15 Skizze zur Berechnung der theoretischen Topographie des Stufen-Areals (für  $J_{i,k}$  gerade)

Abb. 9.16 Vergleich beobachteter und theoretischer orientierungsunabhängiger Größen. Obere Kurve:  $h_n^*$  der beobachteten Topographie der Erde, zweite Kurve von oben:  $h_n^o$  der beobachteten Meeresboden-Topographie (nach VENING MEINESZ, 1961). Untere Kurve:  $h_n$  der idealen Topographie der einzelnen Strömungstypen, die nach der dreidimensionalen kinematischen Theorie (WALZER, 1973a) berechnet wurden.





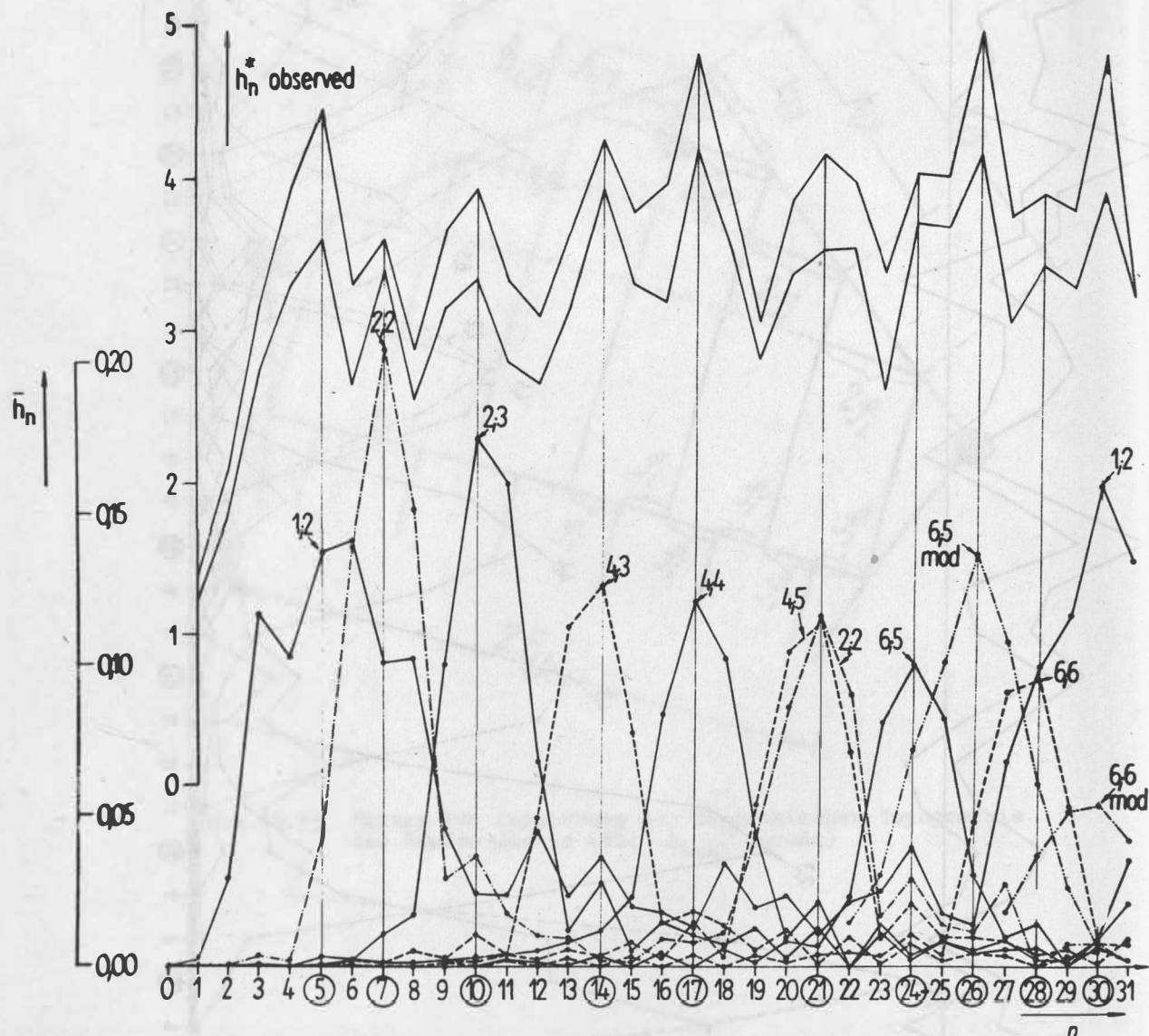


Abb. 9.17 Vergleich beobachteter und theoretischer orientierungsunabhängiger Größen. Obere Kurve:  $h_n^*$  der beobachteten Topographie der Erde. Zweite Kurve von oben:  $h_n^*$  der beobachteten Meeresboden-Topographie (nach VENING MEINESZ, 1961). Untere Kurven:  $\bar{h}_n$  der idealen Topographie der einzelnen Strömungstypen, die nach der dreidimensionalen kinematischen Theorie (WALZER, 1973a) berechnet wurden.

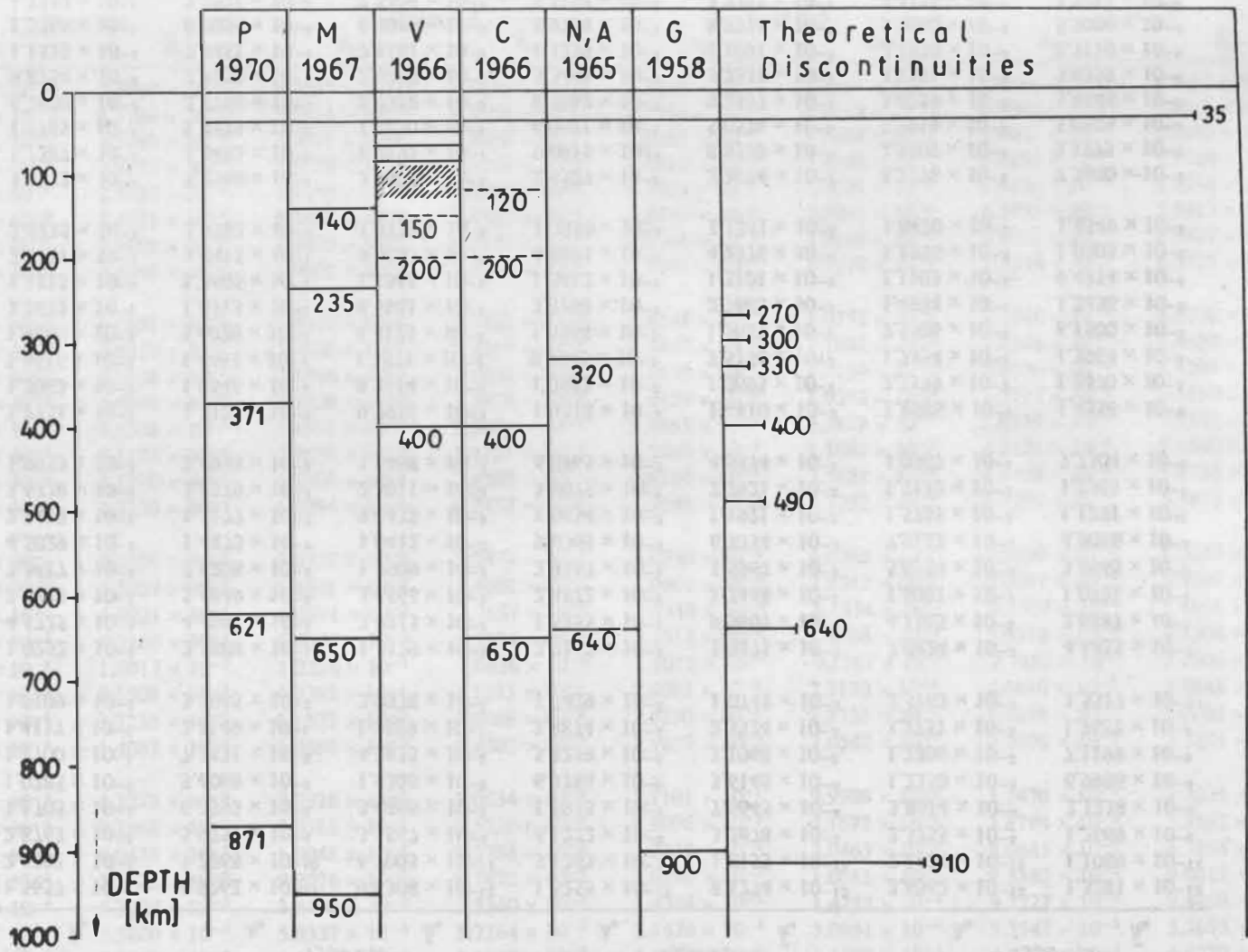


Abb. 9.18 Ein Vergleich seismischer und theoretischer Diskontinuitäten. (P = PRESS (1970); M = MOHAWADJOUN (1967); V = VANER (1966); C = CARDER u. a. (1966); N, A = NIAZI und ANDERSON (1965); G = GUTENBERG (1958))

Tab. 9.3 Die orientierungsunabhängigen Größen  $h_n$  und  $\bar{h}_n$  der theoretischen Topographie in Abhängigkeit vom Typ  $j;k$

n	Type 1;2		Type 2;2		Type 2;3		Type 4;3	
	$h_n$	$\bar{h}_n$	$h_n$	$\bar{h}_n$	$h_n$	$\bar{h}_n$	$h_n$	$\bar{h}_n$
0	$3.1314 \times 10^{-4}$	$1.5657 \times 10^{-4}$	$1.9262 \times 10^{-11}$	$9.6308 \times 10^{-12}$	$1.6255 \times 10^{-11}$	$8.1274 \times 10^{-12}$	$2.6562 \times 10^{-12}$	$1.3281 \times 10^{-12}$
1	$5.1061 \times 10^{-3}$	$2.6382 \times 10^{-3}$	$1.2968 \times 10^{-10}$	$6.7003 \times 10^{-11}$	$3.1263 \times 10^{-11}$	$1.6153 \times 10^{-11}$	$2.1424 \times 10^{-11}$	$1.1069 \times 10^{-11}$
2	$5.3931 \times 10^{-2}$	$2.8763 \times 10^{-2}$	$5.9751 \times 10^{-4}$	$3.1867 \times 10^{-4}$	$6.1272 \times 10^{-5}$	$3.2678 \times 10^{-5}$	$2.3755 \times 10^{-4}$	$1.2669 \times 10^{-4}$
3	$2.1281 \times 10^{-1}$	$1.1705 \times 10^{-1}$	$6.3393 \times 10^{-3}$	$3.4866 \times 10^{-3}$	$1.3935 \times 10^{-3}$	$7.6645 \times 10^{-4}$	$3.8614 \times 10^{-4}$	$2.1238 \times 10^{-4}$
4	$1.8150 \times 10^{-1}$	$1.0285 \times 10^{-1}$	$3.4068 \times 10^{-3}$	$1.9305 \times 10^{-3}$	$6.3786 \times 10^{-4}$	$3.6145 \times 10^{-4}$	$1.2350 \times 10^{-3}$	$6.9986 \times 10^{-4}$
5	$2.3486 \times 10^{-1}$	$1.3700 \times 10^{-1}$	$7.3431 \times 10^{-2}$	$4.2835 \times 10^{-2}$	$5.3259 \times 10^{-3}$	$3.1068 \times 10^{-3}$	$1.2206 \times 10^{-3}$	$7.1199 \times 10^{-4}$
6	$2.3528 \times 10^{-1}$	$1.4117 \times 10^{-1}$	$2.3149 \times 10^{-1}$	$1.3889 \times 10^{-1}$	$3.8874 \times 10^{-3}$	$2.3324 \times 10^{-3}$	$3.2751 \times 10^{-3}$	$1.9651 \times 10^{-3}$
7	$1.6393 \times 10^{-1}$	$1.0109 \times 10^{-1}$	$3.3045 \times 10^{-1}$	$2.0378 \times 10^{-1}$	$1.7429 \times 10^{-2}$	$1.0748 \times 10^{-2}$	$2.5163 \times 10^{-3}$	$1.5517 \times 10^{-3}$
8	$1.6187 \times 10^{-1}$	$1.0252 \times 10^{-1}$	$2.3888 \times 10^{-1}$	$1.5129 \times 10^{-1}$	$2.7112 \times 10^{-2}$	$1.7171 \times 10^{-2}$	$7.0824 \times 10^{-3}$	$4.4855 \times 10^{-3}$
9	$7.0346 \times 10^{-2}$	$4.5725 \times 10^{-2}$	$4.4947 \times 10^{-2}$	$2.9215 \times 10^{-2}$	$1.5355 \times 10^{-1}$	$9.9807 \times 10^{-2}$	$4.1365 \times 10^{-3}$	$2.6887 \times 10^{-3}$
10	$3.7092 \times 10^{-2}$	$2.4728 \times 10^{-2}$	$5.4849 \times 10^{-2}$	$3.6566 \times 10^{-2}$	$2.6172 \times 10^{-1}$	$1.7448 \times 10^{-1}$	$1.6081 \times 10^{-2}$	$1.0721 \times 10^{-2}$
11	$3.4562 \times 10^{-2}$	$2.3617 \times 10^{-2}$	$2.6208 \times 10^{-2}$	$1.7909 \times 10^{-2}$	$2.3367 \times 10^{-1}$	$1.5967 \times 10^{-1}$	$5.6554 \times 10^{-3}$	$3.8645 \times 10^{-3}$
12	$6.4327 \times 10^{-2}$	$4.5029 \times 10^{-2}$	$1.4875 \times 10^{-2}$	$1.0412 \times 10^{-2}$	$9.6763 \times 10^{-2}$	$6.7734 \times 10^{-2}$	$7.0123 \times 10^{-2}$	$4.9086 \times 10^{-2}$
13	$3.2669 \times 10^{-2}$	$2.3413 \times 10^{-2}$	$1.3177 \times 10^{-2}$	$9.4433 \times 10^{-3}$	$1.6634 \times 10^{-2}$	$1.1921 \times 10^{-2}$	$1.5755 \times 10^{-1}$	$1.1291 \times 10^{-1}$
14	$4.9540 \times 10^{-2}$	$3.6329 \times 10^{-2}$	$3.1379 \times 10^{-3}$	$2.3011 \times 10^{-3}$	$3.8075 \times 10^{-2}$	$2.7921 \times 10^{-2}$	$1.7132 \times 10^{-1}$	$1.2563 \times 10^{-1}$
15	$2.6607 \times 10^{-2}$	$1.9955 \times 10^{-2}$	$2.1958 \times 10^{-3}$	$1.6468 \times 10^{-3}$	$6.0765 \times 10^{-3}$	$4.5574 \times 10^{-3}$	$1.0307 \times 10^{-1}$	$7.7304 \times 10^{-2}$
16	$2.3154 \times 10^{-2}$	$1.7751 \times 10^{-2}$	$1.2125 \times 10^{-2}$	$9.2956 \times 10^{-3}$	$1.9318 \times 10^{-2}$	$1.4810 \times 10^{-2}$	$1.8986 \times 10^{-2}$	$1.4556 \times 10^{-2}$
17	$1.6676 \times 10^{-2}$	$1.3063 \times 10^{-2}$	$1.0546 \times 10^{-2}$	$8.2614 \times 10^{-3}$	$1.3653 \times 10^{-2}$	$1.0695 \times 10^{-2}$	$2.3579 \times 10^{-2}$	$1.8470 \times 10^{-2}$
18	$4.3270 \times 10^{-2}$	$3.4616 \times 10^{-2}$	$1.4463 \times 10^{-2}$	$1.1571 \times 10^{-2}$	$9.3945 \times 10^{-3}$	$7.5156 \times 10^{-3}$	$1.7454 \times 10^{-2}$	$1.3964 \times 10^{-2}$
19	$2.4079 \times 10^{-2}$	$1.9665 \times 10^{-2}$	$5.4028 \times 10^{-2}$	$4.4123 \times 10^{-2}$	$1.5964 \times 10^{-2}$	$1.3037 \times 10^{-2}$	$7.5306 \times 10^{-3}$	$6.1500 \times 10^{-3}$
20	$2.8408 \times 10^{-2}$	$2.3673 \times 10^{-2}$	$1.0313 \times 10^{-1}$	$8.5941 \times 10^{-2}$	$3.3198 \times 10^{-3}$	$2.7665 \times 10^{-3}$	$1.4924 \times 10^{-2}$	$1.2436 \times 10^{-2}$
21	$1.3309 \times 10^{-2}$	$1.1313 \times 10^{-2}$	$1.3605 \times 10^{-1}$	$1.1565 \times 10^{-1}$	$1.5412 \times 10^{-2}$	$1.3101 \times 10^{-2}$	$1.1103 \times 10^{-3}$	$9.4374 \times 10^{-4}$
22	$2.4348 \times 10^{-2}$	$2.1101 \times 10^{-2}$	$1.0415 \times 10^{-1}$	$9.0263 \times 10^{-2}$	$4.8895 \times 10^{-4}$	$4.2376 \times 10^{-4}$	$1.1776 \times 10^{-2}$	$1.0205 \times 10^{-2}$
23	$2.8568 \times 10^{-2}$	$2.5235 \times 10^{-2}$	$1.9382 \times 10^{-2}$	$1.7121 \times 10^{-2}$	$1.2850 \times 10^{-2}$	$1.1351 \times 10^{-2}$	$1.6470 \times 10^{-3}$	$1.4549 \times 10^{-3}$
24	$4.3635 \times 10^{-2}$	$3.9272 \times 10^{-2}$	$3.2560 \times 10^{-2}$	$2.9304 \times 10^{-2}$	$2.4527 \times 10^{-3}$	$2.2074 \times 10^{-3}$	$8.1778 \times 10^{-3}$	$7.3600 \times 10^{-3}$
25	$1.8967 \times 10^{-2}$	$1.7387 \times 10^{-2}$	$1.5482 \times 10^{-2}$	$1.4191 \times 10^{-2}$	$9.0915 \times 10^{-3}$	$8.3339 \times 10^{-3}$	$2.3209 \times 10^{-3}$	$2.1275 \times 10^{-3}$
26	$1.4746 \times 10^{-2}$	$1.3763 \times 10^{-2}$	$1.3575 \times 10^{-2}$	$1.2670 \times 10^{-2}$	$6.0621 \times 10^{-3}$	$5.6579 \times 10^{-3}$	$5.3919 \times 10^{-3}$	$5.0324 \times 10^{-3}$
27	$7.1158 \times 10^{-2}$	$6.7600 \times 10^{-2}$	$2.8798 \times 10^{-2}$	$2.7358 \times 10^{-2}$	$8.6882 \times 10^{-3}$	$8.2537 \times 10^{-3}$	$3.6259 \times 10^{-3}$	$3.4446 \times 10^{-3}$
28	$1.0216 \times 10^{-1}$	$9.8754 \times 10^{-2}$	$2.7150 \times 10^{-3}$	$2.6245 \times 10^{-3}$	$3.3446 \times 10^{-3}$	$3.2331 \times 10^{-3}$	$3.7591 \times 10^{-4}$	$3.6338 \times 10^{-4}$
29	$1.1724 \times 10^{-1}$	$1.1528 \times 10^{-1}$	$7.7451 \times 10^{-3}$	$7.6161 \times 10^{-3}$	$1.1279 \times 10^{-3}$	$1.1091 \times 10^{-3}$	$2.7570 \times 10^{-3}$	$2.7110 \times 10^{-3}$
30	$1.5765 \times 10^{-1}$	$1.5765 \times 10^{-1}$	$8.0056 \times 10^{-3}$	$8.0056 \times 10^{-3}$	$8.9738 \times 10^{-3}$	$8.9738 \times 10^{-3}$	$5.3080 \times 10^{-3}$	$5.3080 \times 10^{-3}$
31	$1.3121 \times 10^{-1}$	$1.3339 \times 10^{-1}$	$2.3021 \times 10^{-3}$	$2.3404 \times 10^{-3}$	$3.5194 \times 10^{-2}$	$3.5781 \times 10^{-2}$	$3.4634 \times 10^{-2}$	$3.5212 \times 10^{-2}$



n	Type 4:4		Type 4:5		Type 6:5		Type 6:6	
	$h_n$	$\bar{h}_n$	$h_n$	$\bar{h}_n$	$h_n$	$\bar{h}_n$	$h_n$	$\bar{h}_n$
0	$5.0193 \times 10^{-12}$	$2.5097 \times 10^{-12}$	$9.0487 \times 10^{-13}$	$4.5244 \times 10^{-13}$	$2.5429 \times 10^{-12}$	$1.2714 \times 10^{-12}$	$3.8944 \times 10^{-13}$	$1.9472 \times 10^{-13}$
1	$1.1842 \times 10^{-11}$	$6.1184 \times 10^{-12}$	$8.7813 \times 10^{-12}$	$4.5370 \times 10^{-12}$	$6.3934 \times 10^{-12}$	$3.3033 \times 10^{-12}$	$4.9380 \times 10^{-12}$	$2.5513 \times 10^{-12}$
2	$1.0058 \times 10^{-4}$	$5.3643 \times 10^{-5}$	$8.9171 \times 10^{-5}$	$4.7558 \times 10^{-5}$	$7.0055 \times 10^{-5}$	$3.7362 \times 10^{-5}$	$3.9641 \times 10^{-5}$	$2.1142 \times 10^{-5}$
3	$3.4424 \times 10^{-4}$	$1.8933 \times 10^{-4}$	$2.9126 \times 10^{-4}$	$1.6019 \times 10^{-4}$	$1.3056 \times 10^{-4}$	$7.1806 \times 10^{-5}$	$2.0953 \times 10^{-4}$	$1.1524 \times 10^{-4}$
4	$5.1768 \times 10^{-4}$	$2.9335 \times 10^{-4}$	$4.3940 \times 10^{-4}$	$2.4900 \times 10^{-4}$	$3.5364 \times 10^{-4}$	$2.0039 \times 10^{-4}$	$1.9136 \times 10^{-4}$	$1.0844 \times 10^{-4}$
5	$1.1001 \times 10^{-3}$	$6.4171 \times 10^{-4}$	$9.3488 \times 10^{-4}$	$5.4535 \times 10^{-4}$	$3.9846 \times 10^{-4}$	$2.3243 \times 10^{-4}$	$6.5971 \times 10^{-4}$	$3.8483 \times 10^{-4}$
6	$1.3300 \times 10^{-3}$	$7.9801 \times 10^{-4}$	$1.0479 \times 10^{-3}$	$6.2872 \times 10^{-4}$	$8.7764 \times 10^{-4}$	$5.2648 \times 10^{-4}$	$4.4012 \times 10^{-4}$	$2.6407 \times 10^{-4}$
7	$2.3264 \times 10^{-3}$	$1.4346 \times 10^{-3}$	$1.9801 \times 10^{-3}$	$1.2211 \times 10^{-3}$	$7.7801 \times 10^{-4}$	$4.7977 \times 10^{-4}$	$1.3545 \times 10^{-3}$	$8.3525 \times 10^{-4}$
8	$2.6270 \times 10^{-3}$	$1.6638 \times 10^{-3}$	$1.8410 \times 10^{-3}$	$1.1666 \times 10^{-3}$	$1.6345 \times 10^{-3}$	$1.0352 \times 10^{-3}$	$7.2948 \times 10^{-4}$	$4.6200 \times 10^{-4}$
9	$4.0631 \times 10^{-3}$	$2.6410 \times 10^{-3}$	$3.4180 \times 10^{-3}$	$2.2217 \times 10^{-3}$	$1.1847 \times 10^{-3}$	$7.7002 \times 10^{-4}$	$2.2286 \times 10^{-3}$	$1.4486 \times 10^{-3}$
10	$4.5951 \times 10^{-3}$	$3.0634 \times 10^{-3}$	$2.6856 \times 10^{-3}$	$1.7904 \times 10^{-3}$	$2.5836 \times 10^{-3}$	$1.7224 \times 10^{-3}$	$9.6576 \times 10^{-4}$	$6.4384 \times 10^{-4}$
11	$6.5695 \times 10^{-3}$	$4.4892 \times 10^{-3}$	$5.2428 \times 10^{-3}$	$3.5826 \times 10^{-3}$	$1.4929 \times 10^{-3}$	$1.0202 \times 10^{-3}$	$3.1727 \times 10^{-3}$	$2.1680 \times 10^{-3}$
12	$7.9054 \times 10^{-3}$	$5.5338 \times 10^{-3}$	$3.4101 \times 10^{-3}$	$2.3871 \times 10^{-3}$	$3.6655 \times 10^{-3}$	$2.5659 \times 10^{-3}$	$1.0339 \times 10^{-3}$	$7.2372 \times 10^{-4}$
13	$1.1327 \times 10^{-2}$	$8.1174 \times 10^{-3}$	$7.5658 \times 10^{-3}$	$5.4221 \times 10^{-3}$	$1.5486 \times 10^{-3}$	$1.1098 \times 10^{-3}$	$4.0521 \times 10^{-3}$	$2.9040 \times 10^{-3}$
14	$1.6186 \times 10^{-2}$	$1.1870 \times 10^{-2}$	$3.8598 \times 10^{-3}$	$2.8305 \times 10^{-3}$	$4.8310 \times 10^{-3}$	$3.5427 \times 10^{-3}$	$8.1458 \times 10^{-4}$	$5.9736 \times 10^{-4}$
15	$3.0973 \times 10^{-2}$	$2.3230 \times 10^{-2}$	$1.0994 \times 10^{-2}$	$8.2453 \times 10^{-3}$	$1.1696 \times 10^{-3}$	$8.7722 \times 10^{-4}$	$4.7295 \times 10^{-3}$	$3.5471 \times 10^{-3}$
16	$1.0899 \times 10^{-1}$	$8.3556 \times 10^{-2}$	$3.9752 \times 10^{-3}$	$3.0477 \times 10^{-3}$	$6.0996 \times 10^{-3}$	$4.6764 \times 10^{-3}$	$1.9609 \times 10^{-4}$	$1.5033 \times 10^{-4}$
17	$1.5394 \times 10^{-1}$	$1.2059 \times 10^{-1}$	$1.8641 \times 10^{-2}$	$1.4602 \times 10^{-2}$	$1.0001 \times 10^{-4}$	$7.8342 \times 10^{-5}$	$5.0897 \times 10^{-3}$	$3.9869 \times 10^{-3}$
18	$1.2776 \times 10^{-1}$	$1.0221 \times 10^{-1}$	$4.2071 \times 10^{-3}$	$3.3657 \times 10^{-3}$	$7.7318 \times 10^{-3}$	$6.1854 \times 10^{-3}$	$9.3319 \times 10^{-4}$	$7.4656 \times 10^{-4}$
19	$5.2849 \times 10^{-2}$	$4.3160 \times 10^{-2}$	$6.6005 \times 10^{-2}$	$5.3904 \times 10^{-2}$	$2.2515 \times 10^{-3}$	$1.8388 \times 10^{-3}$	$5.0579 \times 10^{-3}$	$4.1306 \times 10^{-3}$
20	$1.2016 \times 10^{-2}$	$1.0013 \times 10^{-2}$	$1.2524 \times 10^{-1}$	$1.0436 \times 10^{-1}$	$1.1012 \times 10^{-2}$	$9.1767 \times 10^{-3}$	$2.7487 \times 10^{-3}$	$2.2906 \times 10^{-3}$
21	$2.5303 \times 10^{-2}$	$2.1508 \times 10^{-2}$	$1.3392 \times 10^{-1}$	$1.1383 \times 10^{-1}$	$8.6083 \times 10^{-3}$	$7.3170 \times 10^{-3}$	$4.6880 \times 10^{-3}$	$3.9848 \times 10^{-3}$
22	$4.2965 \times 10^{-4}$	$3.7236 \times 10^{-4}$	$8.1573 \times 10^{-2}$	$7.0696 \times 10^{-2}$	$2.6230 \times 10^{-2}$	$2.2733 \times 10^{-2}$	$5.7694 \times 10^{-3}$	$5.0001 \times 10^{-3}$
23	$1.5943 \times 10^{-2}$	$1.4083 \times 10^{-2}$	$1.0698 \times 10^{-2}$	$9.4502 \times 10^{-3}$	$7.9859 \times 10^{-2}$	$7.0542 \times 10^{-2}$	$3.9896 \times 10^{-3}$	$3.5241 \times 10^{-3}$
24	$4.5859 \times 10^{-3}$	$4.1273 \times 10^{-3}$	$2.2926 \times 10^{-2}$	$2.0634 \times 10^{-2}$	$1.1101 \times 10^{-1}$	$9.9908 \times 10^{-2}$	$1.2470 \times 10^{-2}$	$1.1223 \times 10^{-2}$
25	$9.9784 \times 10^{-3}$	$9.1468 \times 10^{-3}$	$1.0388 \times 10^{-2}$	$9.5226 \times 10^{-3}$	$8.9096 \times 10^{-2}$	$8.1672 \times 10^{-2}$	$3.8794 \times 10^{-3}$	$3.5562 \times 10^{-3}$
26	$6.4755 \times 10^{-3}$	$6.0438 \times 10^{-3}$	$1.0048 \times 10^{-2}$	$9.3784 \times 10^{-3}$	$3.2639 \times 10^{-2}$	$3.0463 \times 10^{-2}$	$5.0645 \times 10^{-2}$	$4.7268 \times 10^{-2}$
27	$6.0025 \times 10^{-3}$	$5.7023 \times 10^{-3}$	$9.2076 \times 10^{-3}$	$8.7472 \times 10^{-3}$	$1.0590 \times 10^{-2}$	$1.0061 \times 10^{-2}$	$9.5380 \times 10^{-2}$	$9.0611 \times 10^{-2}$
28	$6.5201 \times 10^{-3}$	$6.3027 \times 10^{-3}$	$3.4490 \times 10^{-3}$	$3.3340 \times 10^{-3}$	$1.4744 \times 10^{-2}$	$1.4252 \times 10^{-2}$	$9.7727 \times 10^{-2}$	$9.4469 \times 10^{-2}$
29	$5.6745 \times 10^{-4}$	$5.5800 \times 10^{-4}$	$5.8337 \times 10^{-3}$	$5.7364 \times 10^{-3}$	$3.1476 \times 10^{-4}$	$3.0951 \times 10^{-4}$	$5.3547 \times 10^{-2}$	$5.2655 \times 10^{-2}$
30	$7.5840 \times 10^{-3}$	$7.5840 \times 10^{-3}$	$1.1158 \times 10^{-3}$	$1.1158 \times 10^{-3}$	$6.1180 \times 10^{-3}$	$6.1180 \times 10^{-3}$	$6.6229 \times 10^{-3}$	$6.6229 \times 10^{-3}$
31	$2.0904 \times 10^{-2}$	$2.1252 \times 10^{-2}$	$9.1755 \times 10^{-3}$	$9.3285 \times 10^{-3}$	$2.1431 \times 10^{-3}$	$2.1789 \times 10^{-3}$	$7.0021 \times 10^{-3}$	$7.1188 \times 10^{-3}$

Oberfläche von vier Feldern hervorbringen, gilt

$$T_1 = S_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4g} \Lambda\right) \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{COS} \\ \text{SIN} \end{matrix} \right\} \left( \frac{2\pi}{4\varphi_1} \Phi \right)$$

$$\text{für} \quad -J_1\varphi_1 < \Phi < J_1\varphi_1 \quad \text{und} \quad -g < \Lambda < +g ;$$

$T_1 = 0$  für den Rest der Fläche der betrachteten vier Felder des Disdodekaeders.  $2\varphi_1$  bedeutet dabei den Winkel, unter dem man die Grundrolle vom Erdmittelpunkt aus sieht. Für Typ 2;2 kann man  $\varphi_1$  in Abb. 9.11 sehen. Untere Rollen heißen solche unterhalb der Schichtgrenze, an der sich die Zahl der Rollen pro Schicht erhöht hat. Falls die Rollenzahl pro Schicht konstant ist, wie z. B. beim Typ 2;3, heißen alle Rollen untere Rollen.  $J_1$  ist die Zahl der Grundrollen in dem Sektor des Großkreis-Ringes unter 2c. Einen derartigen Sektor zeigt Abb. 9.11. Für den Typ 2;2 gilt also  $J_1 = 2$ .  $S_1$  ist die vom Typ abhängige Amplitude, die noch erläutert wird.

$\left\{ \begin{matrix} \text{COS} \\ \text{SIN} \end{matrix} \right\}$  bedeutet cos, wenn  $m + n$  gerade ist; es bedeutet sin, wenn  $m + n$  ungerade ist.

$m$  und  $n$  sind die Indizes der später verwendeten Kugelfunktionen  $P_{n,m}$ . Diese Festlegung hat auf die Berechnung von  $h_n$  keinen Einfluß, wenn man die  $h_n$  für jeden Typ einzeln berechnet. Für den Fall, daß man die ideale Topographie  $U(\Phi, \Lambda)$  aus der Summe der  $T_1$  und  $t_1$  bilden will, bedeutet

$\left\{ \begin{matrix} \text{COS} \\ \text{SIN} \end{matrix} \right\}$  den cos, wenn  $J_1$  gerade ist, den sin, wenn  $J_1$  ungerade ist.

Obere Rollen heißen alle Rollen, die nicht untere Rollen sind. Für die Topographie  $t_1$ , die die oberen Rollen eines Typs an der Oberfläche von vier Feldern erzeugen, gilt:

$$t_1 = s_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4g} \Lambda\right) \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{COS} \\ \text{SIN} \end{matrix} \right\} \left( \frac{2\pi}{4 \cdot \frac{\varphi_1}{3}} \Phi \right)$$

$$\text{für} \quad -J_1\varphi_1 < \Phi < J_1\varphi_1 \quad \text{und} \quad -g < \Lambda < +g ;$$

$t_1 = 0$  für den Rest der Fläche der betrachteten vier Felder des Disdodekaeders. Da anzunehmen ist, daß Typen mit großen Rollen an der Oberfläche größere Veränderungen hervorrufen als solche mit kleineren, wurden  $S_1$  und  $s_1$  folgendermaßen definiert:

$$S_1 = \frac{R(\text{Typ})}{R(1;2)} \quad s_1 = \frac{r(\text{Typ})}{R(1;2)}$$

$R$  ist der Radius der Grundrollen des entsprechenden Typs.  $r$  ist der Radius der tiefsten der oberen Rollen für den entsprechenden Typ. Für den Fall, daß keine oberen Rollen existieren, d. h. für Typen  $j;k$  mit  $k = j + 1$ , gilt  $r = 0$ . Die  $R$  und  $r$  berechnet man wie in 9.2.2. beschrieben. Einige Ergebnisse findet man bei WALZER (1971, Tab. 3). Wenn man die  $S_1$  und  $s_1$  nicht einführt, d. h. für jeden Typ  $S_1 = s_1 = 1$  setzt, bekommt man die Maxima in den  $h_n$ -n-Kurven bei denselben  $n$ . Nur werden die Spitzen für höhere  $n$  etwas höher. Man entwickelt nun die  $T_1$ ,  $t_1$  und  $U$  nach Kugelfunktionen. Dabei erscheinen diese oben nur für vier Felder aufgeschriebenen Funktionen insgesamt sechs mal auf der Kugeloberfläche, weil der Disdodekaeder durch Zentralprojektion 24 Felder im Mantel bzw. auf der Kugeloberfläche erzeugt. Mit dem Ansatz

$$T_1(\Phi, \Lambda) \approx \sum_{n=0}^{31} \left\{ A_{n,0} P_{n,0}(\cos\theta) + \sum_{m=1}^n (A_{n,m} \cos m\Lambda + B_{n,m} \sin m\Lambda) P_{n,m}(\cos\theta) \right\}$$

ergibt sich

$$A_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi T_1(\theta, \Lambda) \cdot P_{n,0}(\cos\theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \right) d\Lambda,$$

wobei

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{n,m} \\ B_{n,m} \end{bmatrix} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos m\Lambda \\ \sin m\Lambda \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \left( \int_0^\pi T_1(\theta, \Lambda) \cdot P_{n,m}(\cos\theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \right) d\Lambda \end{aligned}$$

für  $n = 0, \dots, 31$  und  $m = 1, \dots, 31$ . [...] bedeutet: Für A nimm cos, für B nimm sin. Dabei bedeutet ferner:

$$\theta = 90^\circ - \Phi;$$

$$P_{n,0} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(\cos^2\theta - 1)^n}{d(\cos\theta)^n}$$

und

$$P_{n,m} = (-\sin\theta)^m \cdot \frac{d^m P_{n,0}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}.$$

Die Entwicklungen für  $t_1(\Phi, \Lambda)$  und  $U(\Phi, \Lambda)$  lauten analog. Ferner gilt:

$$\begin{bmatrix} A_n^m \\ B_n^m \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \cdot \begin{bmatrix} A_{n,m} \\ B_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Daraus wurden folgende orientierungsunabhängige Größen berechnet:

$$h_n = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{m=0}^n \{(A_n^m)^2 + (B_n^m)^2\}},$$

$$h_n^* = h_n \sqrt{n(n+1)},$$

$$\bar{h}_n = \left(\frac{n}{60} + \frac{1}{2}\right) \cdot h_n.$$

Die Größen  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$ ,  $A_n^m$ ,  $B_n^m$ ,  $h_n$ ,  $h_n^*$  und  $\bar{h}_n$  wurden von der Rechenmaschine jeweils ausgedruckt. Die zonalen Kugelfunktionen wurden nach folgenden Formeln berechnet:

$$P_{n,0}(\cos\theta) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot n!}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!^2} \cdot F\left(-\frac{n}{2}; \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2\theta\right) \quad \text{für } n \text{ gerade};$$

$$P_{n,0}(\cos\theta) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n!}{2^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!^2} \cdot \cos\theta \cdot F\left(\frac{1-n}{2}; \frac{n}{2} + 1; \frac{3}{2}; \cos^2\theta\right) \quad \text{für } n \text{ ungerade}.$$

Dabei bedeutet  $F$  die hypergeometrische Reihe

$$F(A; B; C; X) = 1 + \frac{AB}{1!C} X + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)} X^2 + \dots$$

### 9.2.5. Variante B der dreidimensionalen kinematischen Theorie der Mantelkonvektion

Für Variante B müssen zunächst die Querschnitte  $2F_{1,\kappa}$  berechnet werden, an denen eine Erhöhung der Zahl der Grundrollen in zwei an b benachbarten Disdodekaeder-Feldern möglich ist. Bei der Aufstellung der nötigen Formeln hilft Abb. 9.14. 2-zählige Rotationsachsen sind durch kleine schwarze Linsen, 6-zählige Drehspiegelungsachsen sind durch kleine schwarze Dreiecke gekennzeichnet. Gestrichelt sind die Kreise, in denen Spiegelungsebenen die Kugel schneiden. Im übrigen sind mit Abb. 9.10 übereinstimmende Bezeichnungen mit diesen identisch. Rechte Winkel sind durch Punkte gekennzeichnet. Es gilt:

$$\frac{c}{\varphi_1} = J_{1,0} + \text{Rest}$$

wobei  $J_{1,0}$  eine ganze Zahl und der Rest  $< 1$  ist.  $J_{1,0}$  entspricht also dem  $J_1$  von Variante A. Ferner wird definiert:

$$J_{1,1} = J_{1,0} + 1$$

$$\vdots$$

$$J_{1,\kappa} = J_{1,0} + \kappa \quad \kappa = 1, 2, 3 \dots$$

wobei sich  $\kappa$  nach der Zahl der möglichen Neueinführungen von jeweils einer Grundrolle richtet. Für die ersten 22 Strömungstypen  $j;k$  ist immer:  $\kappa \leq 2$ .

$$(9.1) \quad F_{1,\kappa} \equiv J_{1,\kappa} \cdot \varphi_1$$

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wurden in Abb. 9.14 und werden ab jetzt die Indizes  $i$  und  $\kappa$  weggelassen. Es gilt:

$$(9.2) \quad \cos p = \cos c \cos A + \sin c \sin A \cos \varepsilon,$$

$$(9.3) \quad \cos p = \cos F \cos G,$$

$$(9.4) \quad \cos \gamma_1 = \tan G \cdot \cot p$$

$$(9.5) \quad \frac{\sin A}{\sin p} = \frac{\cos \gamma_1}{\sin \varepsilon}.$$

In dem Gleichungssystem (9.2) bis (9.5) sind  $c$  und  $\varepsilon$  aus Abschnitt 4,  $F$  ist aus (9.1) und die  $\varphi_1$  in (9.1) sind aus Tab. 9.2 bekannt. (9.2) bis (9.5) sind also vier Gleichungen für folgende vier Unbekannten:  $p, A, G, \gamma_1$ . Die Auflösung führt am einfachsten über folgende Gleichung:

$$\hat{u} = \frac{k_1 k_2 + \frac{k_3^2}{2}}{k_2^2 + k_3^2} - \sqrt{\left(\frac{k_1 k_2 + \frac{k_3^2}{2}}{k_2^2 + k_3^2}\right)^2 - \frac{k_1^2}{k_2^2 + k_3^2}}.$$

Dabei gelten folgende Substitutionen:

$$\sin A = + \sqrt{\hat{u}}; \quad k_1 = \cos^2 F - \cos^2 c$$

$$k_2 = \sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon \cdot \sin^2 c - \cos^2 c$$

$$k_3 = \sin 2c \cos \varepsilon.$$



Dabei sind also  $k_2$  und  $k_3$  vom Typ  $j;k$  unabhängig. Wenn man  $A$  berechnet hat, folgen dann  $p$ ,  $G$  und  $\gamma_1$  der Reihe nach aus (9.2) bis (9.4).

Wir betrachten jetzt die Verteilung der Rollen und ihre theoretische Topographie für vier Disdodekaederfelder (siehe Abb. 9.13). Falls für einen Typ nur ein  $F_{i,\kappa}$  existiert, d. h. also nur für  $\kappa = 1$ , wie das z. B. für Typ 4;3 in Abb. 9.13 der Fall ist, werden die Rollen von vier Disdodekaederfeldern durch  $F_{i,1}$  in drei Areale geteilt: In den zwei Arealen an den Enden haben die nebeneinanderliegenden Rollen verschiedene Längen. Aus naheliegenden Gründen sollen diese Areale Stufen-Areale genannt werden. Das Areal in der Mitte, das gleiche Rollenlängen zeigt und in dessen Mitte der Abschnitt  $2c$  liegt, heißt Mittel-Areal. Für  $\kappa = 2$  würde bei einem höheren Typ, z. B. bei 6;6, zwischen dem Mittel-Areal und den zwei Stufen-Arealen, noch zusätzlich je ein Areal mit gleichen Rollenlängen sein. Diese Areale wollen wir Zwischen-Areale nennen. Für die theoretische Topographie, die die unteren Rollen eines Typs, der durch den Index  $i$  gekennzeichnet ist, im Mittel-Areal hervorbringen, gilt also:

$$(9.6) \quad T_i = S_i \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4G_{i,1}} \Lambda\right) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \left(\frac{2\pi}{4\varphi_i} \Phi\right)$$

für  $-J_{i,0}\varphi_i < \Phi < +J_{i,0}\varphi_i$  und  $-G_{i,1} < \Lambda < G_{i,1}$ .

Dabei bedeutet  $\left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\}$  den cos, wenn  $J_{i,0}$  gerade,

den sin, wenn  $J_{i,0}$  ungerade ist.

$$T_i = 0 \text{ sonst.}$$

Entsprechend gilt für ein eventuelles erstes Zwischen-Areal auf der positiven  $\Lambda$ -Seite:

$$(9.7) \quad T_i = S_i \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{2(G_{i,2} - G_{i,1})} \cdot \left(\Lambda - \frac{G_{i,1} + G_{i,2}}{2}\right)\right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \left(\frac{2\pi}{4\varphi_i} \Phi\right),$$

$$(9.8) \quad \text{für } -J_{i,1}\varphi_i < \Phi < +J_{i,1}\varphi_i \text{ und } G_{i,1} < \Lambda < G_{i,2}.$$

Dabei bedeutet  $\left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\}$  den cos, wenn  $J_{i,1}$  gerade,

den sin, wenn  $J_{i,1}$  ungerade ist.

Für ein entsprechendes erstes Zwischen-Areal auf der negativen  $\Lambda$ -Seite müßte das - in (9.7) durch + und Ungleichung (9.8)<sub>2</sub> durch  $-G_{i,2} < \Lambda < -G_{i,1}$  ersetzt werden.

Für die Beiträge der oberen Rollen zur theoretischen Topographie des Mittel-Areals und der Zwischen-Areale muß in den Gleichungen (9.6) und (9.7)  $\varphi_i$  durch  $\frac{\varphi_i}{3}$ ,  $T_i$  durch  $t_i$  und  $S_i$  durch  $s_i$  ersetzt werden. Es bleibt also nur noch die Topographie der Stufen-Areale zu berechnen. Zum Verständnis der Herleitung der entsprechenden Formeln dient Abb. 9.15.

Das größte  $A_{i,\kappa}$ , für das  $A_{i,\kappa} < a$  gilt, heiße  $A_{i,k}$ . Dieser Index  $k$  darf nicht mit dem vom Typ  $j;k$  verwechselt werden, der ja hier nicht mehr auftritt, weil die Typen mit dem Index  $i$  durchnummeriert worden sind.  $F_{i,k}$  bezeichnet also den Querschnitt, an dem für den Typ  $i$  das Stufen-Areal beginnt. Es geht zunächst darum, die verschiedenen Längen der Rollen im Stufen-Areal durch die Größen  $h_{i,1}, \dots$  (siehe Abb. 9.15) auszudrücken.

Für  $J_{i,k}$  gerade gilt:

$$\frac{\sin k_{i,1}}{\sin 2\varphi_1} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \eta} \quad \text{und} \quad \cos k_{i,1} = \cos h_{i,1} \cdot \cos 2\varphi_1$$

Damit gilt:

$$h_{i,1} = \arccos \left[ \frac{\cos(\arcsin[\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin \eta}])}{\cos 2\varphi_1} \right]$$

und verallgemeinert:

$$h_{i,\nu} = \arccos \left[ \frac{\cos(\arcsin[\frac{\sin(\nu \cdot 2\varphi_1)}{\sin \eta}])}{\cos(\nu \cdot 2\varphi_1)} \right]$$

$$\text{für } \nu = 1, \dots, \frac{1}{2} \cdot J_{i,k}.$$

Für  $J_{i,k}$  ungerade gilt:

$$\cos h_{i,1} = \frac{\cos k_{i,1}}{\cos \varphi_1} \quad \text{wobei} \quad \sin k_{i,1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \eta}$$

und verallgemeinert:

$$h_{i,\nu} = \arccos \left[ \frac{\cos(\arcsin[\frac{\sin((2\nu-1)\varphi_1)}{\sin \eta}])}{\cos((2\nu-1)\varphi_1)} \right]$$

$$\text{für } \nu = 1, \dots, \frac{1}{2}(J_{i,k} + 1).$$

Für die entsprechenden Anteile der unteren Rollen an der theoretischen Topographie des Stufen-Areals für die negative  $\Lambda$ -Seite folgt:

$$(9.9) \quad T_i = S_i \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{2(b - \frac{G_{i,k}}{2} - h_{i,\nu})} \left( \Lambda + \frac{b + G_{i,k} - h_{i,\nu}}{2} \right) \right] \cdot \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\} \left( \frac{2\pi}{4\varphi_1} \Phi \right).$$

Dabei bedeutet  $\left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\}$  den cos, wenn  $J_{i,k}$  gerade,  
den sin, wenn  $J_{i,k}$  ungerade ist.

Die Formel (9.9) gilt für den Bereich

$$(9.10) \quad -b + h_{i,\nu} < \Lambda < G_{i,k}$$

und

$$\{2(\nu - 1) - 1\} \varphi_1 < \Phi < \{2\nu - 1\} \varphi_1$$

sowie für (9.10) und

$$-\{2(\nu - 1) - 1\} \varphi_1 > \Phi > -\{2\nu - 1\} \varphi_1.$$

In den Klammern {...} gilt wieder der obere Ausdruck, wenn  $J_{i,k}$  gerade, der untere Ausdruck, wenn  $J_{i,k}$  ungerade ist. Entsprechend gilt:

$$\nu = 1, \dots, \frac{1}{2} \cdot J_{i,k}, \quad \text{wenn } J_{i,k} \text{ gerade,}$$

$$\nu = 1, \dots, \frac{1}{2} (J_{i,k} + 1), \quad \text{wenn } J_{i,k} \text{ ungerade ist.}$$

Für das Stufen-Areal an der positiven  $\Lambda$ -Seite braucht nur (9.9) durch

$$T_i = S_i \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{2(b - G_{i,k} - h_{i,\nu})} \left(\Lambda - \frac{b + G_{i,k} - h_{i,\nu}}{2}\right)\right] \cdot \left\{\frac{\cos}{\sin}\right\}\left(\frac{2\pi}{4\varphi_1} \varphi\right)$$

und (9.10) durch

$$+b - h_{i,\nu} > \Lambda > +G_{i,k}$$

ersetzt werden. Außerhalb der angegebenen Bereich gilt im Stufen-Areal  $T_i = 0$ . All das bisher über das Stufen-Areal Geschriebene gilt genau so für die oberen Rollen, nur muß in allen Ausdrücken ab Gleichung (9.9) das  $\varphi_i$  durch  $\frac{1}{3} \varphi_i$ ,  $T_i$  durch  $t_i$  und  $S_i$  durch  $s_i$  ersetzt werden. Bevor man bei Variante B die theoretischen Topographien nach Kugelfunktionen entwickelt, müssen selbstverständlich die  $T_i$ ,  $t_i$  und  $U = \sum_i (T_i + t_i)$  für alle Areale zu je einer Funktion  $T_i$ ,  $t_i$  bzw.  $U$  zusammengefaßt werden. Die Entwicklung nach Kugelfunktionen erfolgt wieder nach den in 9.2.4. für die Koeffizienten  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$  usw. angegebenen Formeln. Auch hier ist wieder zu beachten, daß es nicht nur vier Disdodekaederfelder gibt, die wir bei unseren Formeln für  $T_i$  und  $t_i$  stets nur beachtet haben, sondern daß es diese Anordnung sechsmal auf der Kugel gibt.

#### 9.2.6. Vergleich der theoretischen mit Beobachtungsergebnissen

Es gilt nun, die Größen, die aus der kinematischen Theorie der Mantelkonvektion folgen (also die  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$ ,  $A_n^m$ ,  $B_n^m$ ,  $h_n$ ,  $h_n^*$ ,  $\bar{h}_n$ , Rollenradien, Radien der oberen Grenzen der Rollenschichten (vgl. WALZER, 1971, Tab. 3)), mit beobachteten Größen zu vergleichen. Da die Orientierung des Strömungssystems z. B. gegenüber einem bestimmten Kontinent nicht als Funktion der Zeit und auch nicht für einen einzelnen Zeitpunkt bekannt ist, ist bezüglich der Größen  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$ ,  $A_n^m$ ,  $B_n^m$  für keine Feldfunktion an der Erdoberfläche Übereinstimmung zu erwarten. Anders ausgedrückt: Da nicht vorausgesetzt werden kann, daß die Orientierung des Strömungssystems im Laufe der geologischen Zeiten immer dieselbe gewesen ist, kann auch nicht erwartet werden, daß sich die Regularität des Systems direkt im Aussehen des Anomalienbildes irgendwelcher Funktionen spiegelt, die an jedem Punkt der Erdoberfläche definiert sind. Dagegen ist eine Übereinstimmung in dem Verlauf der orientierungsunabhängigen Größen zu erwarten, wenn die Feldfunktion an der Erdoberfläche hauptsächlich durch das Strömungssystem bestimmt ist.

Die Feldfunktion an der Erdoberfläche, die uns bei weitem am genauesten bekannt ist, ist die Topographie. Sie wurde von BRUINS und Mitarbeitern bis zur 31. Ordnung nach Kugelfunktionen entwickelt. Die Koeffizienten findet man bei LEDERSTEGGER (1969), die Zahlenwerte von  $h_n$  und  $h_n^*$  bei VENING MEINESZ (1961). In Abb. 9.16 wurden über der Abszisse  $n$  oben die beobachteten Größen  $h_n^*$ , unten die Größen  $h_n$  für die theoretische Topographie aufgetragen. Die ganze Topographie  $T_i + t_i$  jedes Strömungstyps  $j;k$  wurde den Kugelfunktionsentwicklungen zugrundegelegt. Es sind die  $h_n$ - $n$ -Kurven nach Variante A dargestellt, nur wo sich bei Variante B Unterschiede gegenüber A herausstellten, wurden die Kurven dieser Typen auch (und zwar mit dem Zeichen mod versehen)

dargestellt. Der Vergleich der Maxima der Kurven spricht für sich. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß man gleich sieht, welcher Strömungstyp welches Maximum verursacht. Abb. 9.17 zeigt einen Vergleich derselben Beobachtungsgrößen  $h_n^*$  mit der ebenfalls orientierungsunabhängigen theoretischen Größe  $\bar{h}_n$  der einzelnen Typen. Entsprechend den Definitionen der in Abb. 9.16 und Abb. 9.17 verglichenen Größen  $h_n$ ,  $h_n^*$ ,  $\bar{h}_n$  ist es klar, daß die Größen nur relativ miteinander verglichen werden dürfen. Tab. 9.3 gibt eine Übersicht über die numerischen Werte der orientierungsunabhängigen Größen  $h_n$  und  $\bar{h}_n$  der theoretischen Topographie. Es ist nun wichtig, sich zu vergegenwärtigen, daß mit den Beobachtungsgrößen, mit denen Übereinstimmung festgestellt werden konnte, ganz fundamentale Beobachtungen beschrieben werden: Größe, Form und Verteilung der Kontinente, Ozeane und der jungen, im Relief noch hohen Gebirgsgürtel, in denen sich der Gesamtplan des jüngsten orogenen Zyklus widerspiegelt.

Die Kugelfunktionsentwicklungen anderer Feldfunktionen an der Erdoberfläche liegen entweder nur für niedrige Ordnungen vor oder hängen nicht bzw. nicht nur mit dem Mantel zusammen. RAPP (1968) entwickelte das Schwerfeld der Erde bis  $n = 14$  nach Kugelfunktionen. Orientierungsunabhängige Größen zeigen aber in ihrem Verlauf (über  $n$  aufgetragen) keine Übereinstimmung mit denen der Topographie. Die Nichtübereinstimmung der Maxima der theoretischen  $h_n$ - $n$ -Kurve mit denen der entsprechenden Kurve des Schwerfeldes wurde dem Verfasser von geodätischer Seite in der Entstehungszeit der kinematischen Theorie oft als Argument entgegengehalten. Heute ist restlos klar, daß dieses Argument unrichtig war. MCKENZIE (1977) bewies durch numerische Modellrechnungen, daß über konvektiven Aufströmen mit temperaturabhängiger Viskosität die Schwereanomalie sowohl positiv als auch negativ sein kann. Auch PHILLIPS und IVINS (1979) betonen ausdrücklich, wie verwickelt der Zusammenhang zwischen Schwerfeld und Konvektionsströmen ist und weisen alle Versuche zurück, aus den globalen Schwereanomalien direkt auf die Stromlinien zu schließen. - Ein anderes Gegenargument war, daß die kinematische Theorie keinen Raum für manteltiefe Plumes lasse. Das ist allerdings richtig. Die kinematische Theorie ist eine Vorstufe einer echten hydrodynamischen Konvektionstheorie mit temperaturabhängiger Viskosität, wobei zumindest zeitweise der ganze Mantel in Bewegung ist. Ob der Auftrieb rein thermisch oder durch eine Art von Entmischung entsteht, bleibt dabei zunächst offen. Wesentlich ist, daß die Konvektionszellen den ganzen Mantel erfassen, daß nicht nur dünne röhrenartige Aufstiegskanäle den unteren Mantel durchstoßen wie in der Plume-Theorie und daß die Wellenzahl der Zelle nahe  $k_c$  liegt, d. h. daß die Horizontalausmaße der Zelle in der Größenordnung ihrer Tiefe liegen. RUNCORN (1980) weist darauf hin, daß die Idee der Plumes aus Beobachtungen in der Lufthülle der Erde stammt. Z. B. steigt der Rauch aus einem Schornstein bei Windstille senkrecht nach oben und breitet sich dann in einer gewissen Höhe waagrecht aus. RUNCORN weist darauf hin, daß für Luft der Trägheitsterm in der Bewegungsgleichung viele Größenordnungen höher liegt als der der viskosen Reibung, während das im Mantel genau umgekehrt ist. RUNCORN weist deshalb die Plume-Theorie als "fundamentales Mißverständnis der Mechanik des Mantels" zurück. Beim geomagnetischen Potential, welches auch bis  $n = 15$  entwickelt vorliegt (FANSELAU u. a., 1964), spielt bekanntlich der Erdmantel als Ursache keine große Rolle. Es wird heute meist angenommen, daß die Knicke und Sprünge der Geschwindigkeits-Tiefen-Kurven der seismischen Kompressions- und Scherwellen innerhalb des Mantels auf Phasenübergänge zurückzuführen sind. VERHOOGEN hat thermodynamisch gezeigt, daß die Strömung durch die Phasengrenzen gehen kann, wenn das Material chemisch genügend homogen ist. FRÖLICH (1973) kommt aus strukturphysikalischen Gründen zu demselben Schluß,



daß nämlich Phasengrenzen zwar ein Hindernis für die Konvektion ist, daß aber der Strom durch die Unstetigkeitsfläche durchaus möglich ist. Demnach sollte man also erwarten, daß die Strömungstypen so beschaffen sind, daß die Schichtgrenzen der Rollen seismische Diskontinuitäten bevorzugen. Wie Abb. 9.18 zeigt, ist dies durchaus der Fall. Abb. 9.18 gibt einen zusammenfassenden Vergleich der seismischen Diskontinuitäten des oberen Erdmantels mit den theoretischen. Die theoretischen Diskontinuitäten sind rechts aufgetragen. Dabei ist die Strichlänge ein Maß für die Wichtigkeit der Diskontinuitäten, deren Berechnung bei WALZER (1971) beschrieben ist. Übereinstimmung von theoretischen und seismologischen Diskontinuitäten dürfen natürlich nicht so verstanden werden, daß die kinematische Konvektionstheorie die Existenz und Tiefe der Diskontinuitäten erklärt. Vielmehr haben sich die Strömungstypen  $j;k$  der Lage der Diskontinuitäten angepaßt.

Abschließend kann man also feststellen, daß die kinematische Theorie der Mantelkonvektion in ausgezeichneter Übereinstimmung mit grundlegenden Beobachtungstatsachen ist, wie besonders eine Betrachtung der Abbn. 9.16 bis 9.18 zeigt.

Hier soll noch eine Bemerkung über mögliche Verbindungen zwischen plattentektonischer Theorie und der kinematischen Konvektionstheorie folgen. Beiden Theorien ist eigen, daß sie sich hauptsächlich mit der Kinematik von Erdmassen beschäftigen und die Frage nach den Energiequellen nur am Rande behandeln. Die Plattentektonik beschäftigt sich mehr mit der Bewegung von Lithosphärenplatten, die kinematische Konvektionstheorie mehr mit den Bewegungen im Mantel. Beide Theorien finden ihre Bestätigung durch Deutung von Meßergebnissen, die die Kruste und den Mantel betreffen. Ein Unterschied entsteht durch die größere innere Systematik und Mathematisierung der kinematischen Konvektionstheorie. Die Plattentektonik ist etwas mehr beschreibend und kann deshalb eine größere Zahl von Phänomenen behandeln und erklären. Der Autor ist der Ansicht, daß die zwei Theorien sich ergänzen und sich möglicherweise vereinigen lassen.

### 9.3. Die Verteilung der Kontinente und Ozeane und ihre Beziehung zur kinematischen Konvektionstheorie

In 9.2. wurde eine Theorie der Mantelkonvektion hergeleitet. Die möglichen Strömungstypen  $j;k$  zeigen eine enge Korrelation zur Kugelfunktionsentwicklung der Topographie der Erde (vgl. Abb. 9.16). Weil die räumliche Lage der Strömungsrollen in bezug auf das Gradnetz der Erde weder für die Gegenwart noch für die geologische Vergangenheit bekannt ist, konnte nur für orientierungsunabhängige Größen eine Übereinstimmung gefunden werden. Orientierungsunabhängig bedeutet unabhängig von der Lage der Pole des Gradnetzes. Während die einzelnen Koeffizienten einer Kugelfunktionsentwicklung  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$ ,  $A_n^m$ ,  $B_n^m$  bekanntlich von der Orientierung des Gradnetzes abhängig sind, sind es die  $h_n$  und  $h_n^*$  nicht. Dabei verwenden wir:

$$A_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi f(\theta, \lambda) \cdot P_{n,0}(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \right) d\lambda$$

$$\left[ \begin{matrix} A_{n,m} \\ B_{n,m} \end{matrix} \right] = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \left[ \begin{matrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{matrix} \right] \left( \int_0^\pi f(\theta, \lambda) \cdot P_{n,m}(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \right) d\lambda.$$

Die Klammern [...] bedeuten: Für  $A_{n,m}$  nimm  $\cos$ , für  $B_{n,m}$  nimm  $\sin$ .  $\theta$  geographische Breite,  $\lambda$  geographische Länge.

$$\begin{bmatrix} A_n^m \\ B_n^m \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \cdot \begin{bmatrix} A_{n,m} \\ B_{n,m} \end{bmatrix}$$

$$h_n = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{m=0}^n \{(A_n^m)^2 + (B_n^m)^2\}}; \quad h_n^* = h_n \cdot \sqrt{n(n+1)}.$$

Hier soll nun zunächst die Frage untersucht werden, ob das Tableau der *e i n z e l - n e n* Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklungen der Topographie des Landes und der des Meeresbodens auch irgendwelche Gesetzmäßigkeiten zeigt. Es wurde wieder das Zahlenmaterial von BRUINS verwandt, welches auch den beiden oberen Kurven von Abb. 9.16 zugrunde liegt und welches man bei LEDERSTEGGER (1969) auf den Seiten 849 - 856 findet. Die in LEDERSTEGGERs Tabelle II angegebenen  $A(n,m)$  und  $B(n,m)$  entsprechen in unserer Schreibweise den  $A_n^m$  und  $B_n^m$ .

Betrachtet man die  $A_n^m$  von Tabelle II von LEDERSTEGGER (1969) bei  $n = \text{const.}$  als Funktion von  $m$ , so findet man, daß die  $A_n^m$  für den Meeresboden und die für die Landtopographie etwa denselben Kurvenverlauf zeigen. Dasselbe gilt für  $B_n^m$ . Die  $A_n^m$ - $m$ -Kurven (bzw.  $B_n^m$ - $m$ -Kurven) für benachbarte oder gar stark unterschiedliche  $n$  zu vergleichen, wird durch die verschiedenen Abszissenlängen erschwert, denn  $m_{\text{max}} = n$ . Da die Topographie der Erde bis zur Ordnung  $n = 31$  nach Kugelfunktionen entwickelt vorliegt, wurde eine Vergleichbarkeit mit den Koeffizienten für  $m_{\text{max}} = 32$  gefordert. Die Realisierung erfolgte durch gleichmäßige Teilung der  $A_n^m$  (bzw.  $B_n^m$ ) für  $n = \text{const.}$  in 32 Teile, wobei jeder Koeffizient das gleiche Gewicht hatte: z. B. für  $n = 18$  gilt:

$$\begin{aligned} C_{18}^1 &= \frac{18}{32} |A_{18}^0|; & C_{18}^2 &= \frac{14}{32} |A_{18}^0| + \frac{4}{32} |A_{18}^1|; \\ C_{18}^3 &= \frac{18}{32} |A_{18}^1|; & C_{18}^4 &= \frac{10}{32} |A_{18}^1| + \frac{8}{32} |A_{18}^2|; \\ C_{18}^5 &= \frac{18}{32} |A_{18}^2|; \dots; & C_{18}^{32} &= \frac{18}{32} |A_{18}^{18}|. \end{aligned}$$

Entsprechend:  $D_{18}^1 = \frac{18}{32} |B_{18}^1|$ ; ... Zu Vergleichszwecken kann man die  $C_n^m$  und  $D_n^m$  auch aufsummieren, z. B.:

$$f^{\bar{n}}(A_n^m) = \sum_{n=0}^{\bar{n}} C_n^m \quad \text{und} \quad f^{\bar{n}}(B_n^m) = \sum_{n=1}^{\bar{n}} D_n^m.$$

Für  $\bar{n} = 16$  und  $\bar{n} = 31$  sind die Ergebnisse in Abb. 9.19 und Abb. 9.20 graphisch dargestellt und in Tab. 9.4 numerisch angegeben. Wenn man die Kurven von Abb. 9.19 und Abb. 9.20 betrachtet, so ergeben sich in zweierlei Hinsicht enge Korrelationen:

- Die Kurven  $f^{\bar{n}}(A_n^m)$  bzw.  $f^{\bar{n}}(B_n^m)$  für  $n = 0$  bzw. 1 bis 16 einerseits und die entsprechenden Kurven für  $n = 0$  bzw. 1 bis 31 andererseits zeigen in ihrem Verlauf eine große Verwandtschaft, d. h. Übereinstimmung hervortretender Extrema usw. Das ist jedoch teilweise dadurch bedingt, daß die Werte der Koeffizienten, die zu den erstgenannten Kurven beitragen, auch in den zweitgenannten enthalten sind.
- Die Kurven  $f^{\bar{n}}(A_n^m)$  mit  $\bar{n} = 16$  für Land und für Meeresboden zeigen eine noch engere Verwandtschaft des Kurvenverlaufs als die unter a) genannte. Dasselbe gilt für  $\bar{n} = 31$ .

Bei b) haben die Vergleichskurven die gleiche Anzahl von Summanden  $\bar{n}$ . Dieselben Feststellungen gelten für  $f^m(B_n^m)$ . Die enge Verwandtschaft der Kurven des Vergleichs b) ist sehr interessant, denn bei der Berechnung der Koeffizienten  $A_n^m$  und  $B_n^m$  für Land waren die Meerestiefen gleich 0 gesetzt worden und bei Berechnung der  $A_n^m$  und  $B_n^m$  für Meeresboden waren die Höhen über dem Meeresspiegel gleich 0 gesetzt worden. Die Menge der Beobachtungsdaten für Land und Seeboden haben also außer der Küstenlinie nichts gemeinsam. Da die Epikontinentalmeere in der geologischen Gegenwart nur einen kleinen Teil der Kontinente bedecken, konnte vermutet werden, daß die Verwandtschaft der Kurven des Vergleichs b) dadurch bedingt ist, daß die Kugelfunktionsentwicklung der Topographie der Erde bis zur 31. Ordnung  $n$  hauptsächlich durch die Verteilung der Kontinente und Ozeane bedingt ist. Im folgenden wird dieser Frage im einzelnen nachgegangen.

Die Höhe der Kontinente  $E$  soll gleich 1, die der Ozeane gleich 0 gesetzt werden. Eine Kugelfunktionsentwicklung dieser Verteilung zeigt den Einfluß von Größe, Form und Verteilung von Kontinenten und Ozeanen auf die Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung der totalen Topographie der Erde. Als Grenzlinie zwischen Kontinent und Ozean wurde die -200-m-Tiefenlinie benutzt. Zur Entwicklung nach Kugelfunktionen wurde die Neumannsche Methode (siehe MAUERSBERGER (1959)) etwas modifiziert. Die Funktion  $E = E(\theta_\nu, \Lambda_\mu)$  wurde an 2664 diskreten Punkten vorgegeben und zwar für die Schnittpunkte der Meridiane  $\Lambda_\mu = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots$  und der Breitenkreise  $\theta_\nu$ , die durch die 37 Nullstellen der Legendre-Funktion  $P_{37;0}(\cos \theta)$  gegeben sind. Da die Koeffizienten nach einer anderen Näherungsmethode gewonnen werden als die der totalen Topographie und die analysierte Funktion eine andere ist, sollen die Bezeichnungen im Vergleich zu den obigen etwas abgewandelt werden. Den  $A_{n,m}, B_{n,m}, A_n^m$  und  $B_n^m$  entsprechen hier die  $a_{n,m}, b_{n,m}, a_n^m$  und  $b_n^m$ . Den  $h_n$  und  $h_n^*$  entsprechen die  $H_n$  und  $H_n^*$  (Groß- und Kleinschreibung sind deshalb nicht konsequent gleichartig eingeführt worden, um mit WALZER (1973a) in Übereinstimmung zu bleiben). Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{Bmatrix} &= \frac{2n+1}{2(M+1)} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=0}^M c_\nu \cdot E(\theta_\nu, \Lambda_\mu) \cdot \\ &\cdot P_{n,m}(\cos \theta_\nu) \cdot \begin{Bmatrix} \cos m\Lambda_\mu \\ \sin m\Lambda_\mu \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

für  $\nu = 1, \dots, N$  und  $\mu = 0, \dots, M$ , wobei in unserem Falle  $N = 37$  und  $M = 71$  gewählt wurde.

$$c_\nu = \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2j+1}{2} [P_{j,0}(\cos \theta_\nu)]^2 \right\}^{-1},$$

$$P_{n,0} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(\cos^2 \theta - 1)^n}{d(\cos \theta)^n},$$

$$P_{n,m} = (-1)^m \cdot \sin^m \theta \cdot \frac{d^m P_{n,0}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m},$$

$$\begin{Bmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \begin{Bmatrix} a_{n,m} \\ b_{n,m} \end{Bmatrix},$$

$$H_n = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{m=0}^n ((a_n^m)^2 + (b_n^m)^2)}, \quad H_n^* = H_n \cdot \sqrt{n(n+1)}.$$

Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen sind für  $H_n^*$  in Tab. 9.5, für  $a_n^m$  und  $b_n^m$  in Tab. 9.6 dargestellt. In Abb. 9.21 werden die Größen  $h_n^*$  der totalen Topographie und  $H_n^*$  der Verteilungsfunktion  $E$  miteinander verglichen. Es zeigt sich sowohl für niedrige als auch für höhere Ordnungen  $n$  eine enge Verwandtschaft der beiden Kurven, was unsere Vermutung bestätigt: Die Kugelfunktionsentwicklung der totalen Topographie der Erde spiegelt hauptsächlich die Verteilung, Größe und Form der Kontinente und Ozeane wider. Die Verwandtschaft von  $h_n^*$  und  $H_n^*$  existiert für folgende Intervalle:  $0 \leq n \leq 11$ ;  $22 \leq n \leq 31$ . Sie ist auch für  $15 \leq n \leq 19$  andeutungsweise zu erkennen.

Die Ergebnisse des letzten Absatzes zeigen die Richtigkeit der schon früher geäußerten Vermutung, daß das vom Verfasser hergeleitete System von Unterströmungen in erster Linie für die Verteilung von Kontinenten und Ozeanen verantwortlich ist oder - anders ausgedrückt - der Motor der Kontinentaldrift ist. Die kleinräumigere Orogenese ist zwar wahrscheinlich auch damit mehr oder weniger lose gekoppelt. Der Zusammenhang erwies sich aber bisher immer noch als so verwickelt, daß er quantitativen Methoden noch nicht zugänglich war.

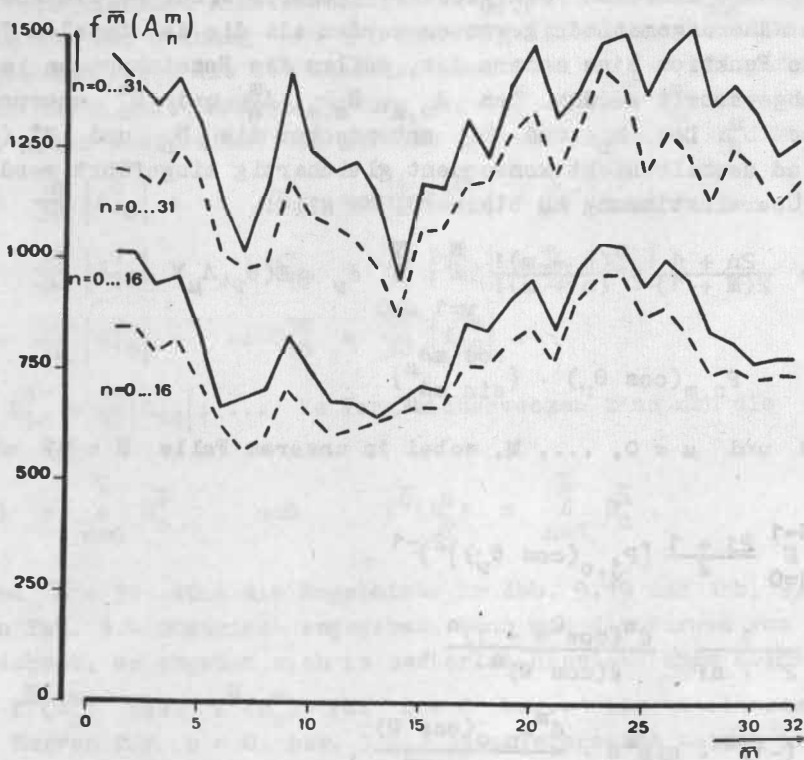


Abb. 9.19 Ergebnisse der  $\bar{m}$ -Spreizung der Kugelfunktionskoeffizienten  $A_n^m$  (Näheres s. Text). Durchgezogene Linien kennzeichnen die Topographie des Festlands, gestrichelte die des Meeresbodens.



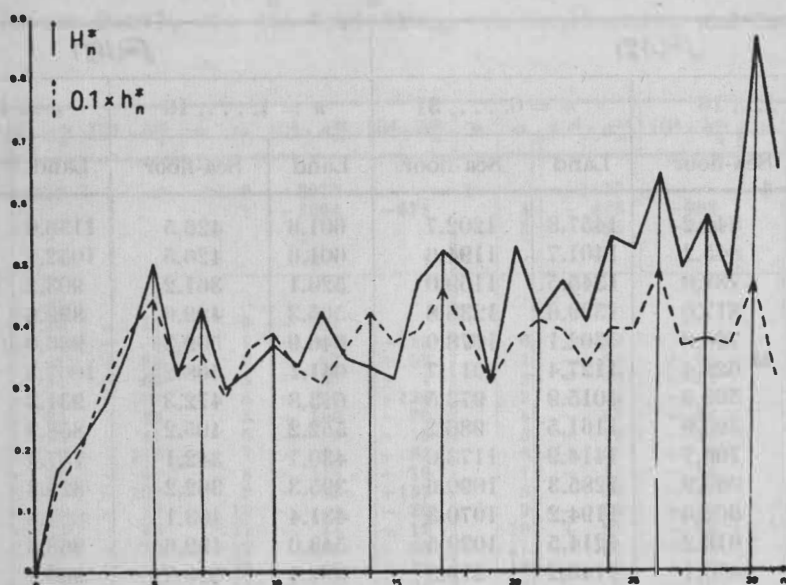


Abb. 9.21 Ein Vergleich der orientierungsunabhängigen Größen  $h_n^*$  der totalen Topographie der Erde und  $H_n^*$  der Funktion  $E$ , die die Verteilung der Kontinente und Ozeane beschreibt.

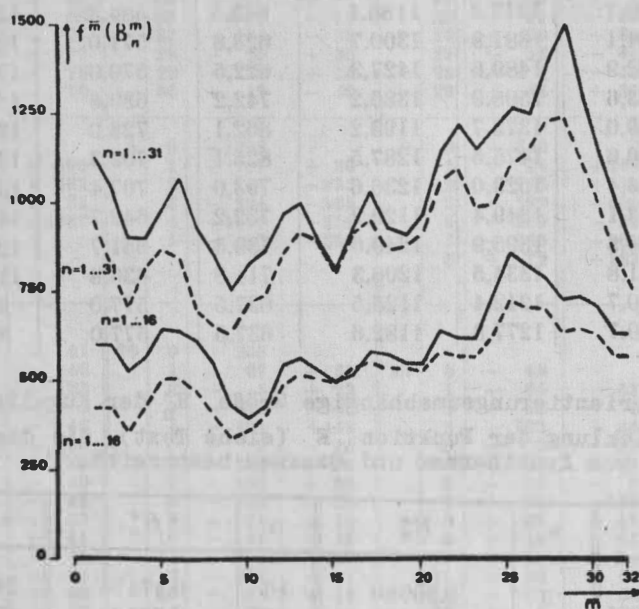


Abb. 9.20 Ergebnisse der  $\bar{m}$ -Spreizung der Kugelfunktionskoeffizienten  $B_n^m$  (Näheres s. Text). Durchgezogene Linien kennzeichnen die Topographie des Festlands, gestrichelte die des Meeresbodens.

Tab. 9.4 Ergebnisse der  $\bar{m}$ -Spreizung der Kugelfunktionskoeffizienten der Land- und der Seeboden-Topographie der Erde

$\bar{m}$	$f_{\bar{m}}(A_n^m)$				$f_{\bar{m}}(B_n^m)$			
	$n = 0, \dots, 16$		$n = 0, \dots, 31$		$n = 1, \dots, 16$		$n = 1, \dots, 31$	
	Land	Sea-floor	Land	Sea-floor	Land	Sea-floor	Land	Sea-floor
1	1014.1	845.2	1457.8	1202.7	601.6	426.5	1136.0	963.8
2	1014.1	845.2	1401.7	1194.6	601.6	426.5	1052.9	832.5
3	943.3	788.0	1345.5	1159.0	526.1	361.2	903.2	713.2
4	958.5	817.0	1399.6	1238.8	565.3	429.6	899.6	814.7
5	832.6	726.8	1302.1	1178.0	646.9	509.3	986.0	869.9
6	666.2	626.4	1127.4	1011.7	641.1	508.2	1067.5	849.8
7	619.9	569.8	1015.9	973.5	613.8	472.3	931.3	703.0
8	701.5	596.9	1161.5	986.2	552.2	405.2	858.9	657.7
9	826.9	705.7	1414.9	1173.0	430.7	342.1	757.2	634.2
10	746.0	650.9	1285.3	1090.6	395.3	362.2	829.8	716.1
11	679.2	602.6	1194.2	1070.3	431.4	403.1	865.8	741.8
12	673.2	613.2	1214.5	1039.5	548.0	489.6	968.6	854.8
13	645.3	630.1	1143.2	979.3	564.1	520.3	999.1	915.6
14	678.6	650.8	949.5	866.5	526.3	509.0	894.2	894.4
15	713.8	666.6	1167.9	1062.8	496.2	498.2	813.1	804.1
16	702.9	663.4	1159.5	1065.1	519.0	537.2	932.0	915.4
17	855.1	757.8	1313.0	1161.6	584.1	557.2	1031.1	954.6
18	838.8	754.3	1230.3	1170.3	576.0	540.6	932.5	868.4
19	910.9	811.5	1395.9	1281.0	552.6	539.0	913.3	880.2
20	953.4	847.3	1482.3	1331.9	552.1	529.2	968.5	918.5
21	843.9	769.1	1317.4	1186.1	643.5	584.3	1143.9	1062.1
22	976.1	904.1	1381.8	1300.7	623.8	571.0	1221.4	1099.9
23	1039.3	962.9	1489.6	1427.3	622.5	570.6	1151.5	992.4
24	1030.9	963.6	1508.9	1386.2	742.2	630.6	1203.5	995.0
25	944.7	869.0	1373.7	1193.2	862.1	728.0	1265.3	1108.3
26	1000.4	890.6	1475.5	1287.5	825.1	709.3	1248.6	1141.6
27	959.4	833.4	1523.0	1236.6	793.0	707.4	1397.5	1228.6
28	842.4	743.1	1349.4	1129.2	732.2	642.7	1498.2	1243.6
29	818.5	759.8	1395.9	1249.6	739.5	651.7	1299.5	1109.8
30	771.9	731.8	1334.5	1206.3	714.8	636.8	1141.9	1011.0
31	783.6	740.7	1242.4	1125.5	637.5	577.0	998.8	859.5
32	783.6	740.7	1277.8	1182.6	637.5	577.0	874.5	763.7

Tab. 9.5 Die orientierungsunabhängige Größe  $H_n^*$  der Kugelfunktionsentwicklung der Funktion E (siehe Text), die die Verteilung von Kontinenten und Ozeanen beschreibt.

$n$	$H_n^*$	$n$	$H_n^*$	$n$	$H_n^*$	$n$	$H_n^*$
0	0,00000	8	0.30086	16	0.47474	24	0.54859
1	0.16983	9	0.33220	17	0.52629	25	0.52967
2	0.21560	10	0.37286	18	0.49097	26	0.65246
3	0.27748	11	0.33769	19	0.30567	27	0.49861
4	0.36988	12	0.42683	20	0.53338	28	0.58518
5	0.50705	13	0.35144	21	0.42051	29	0.48167
6	0.32390	14	0.33683	22	0.47486	30	0.87891
7	0.43167	15	0.31507	23	0.40853	31	0.66196

Tab. 9.6 Die Koeffizienten  $a_n^m$  und  $b_n^m$  der Kugelfunktionsentwicklung der Funktion E (siehe Text), die die Verteilung von Kontinenten und Ozeanen beschreibt

$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$	$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$	$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$	$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$
0	0	+4968		1	0	+2076		2	0	-1487		3	0	-430	
					1	-1004	-671		1	-426	-602		1	+346	-212
									2	-555	-249		2	-679	+938
													3	-185	-918
31	0	+ 64		30	0	+ 261		29	0	- 40		28	0	-184	
	1	- 39	+ 47		1	- 80	-110		1	- 85	+ 25		1	+ 60	- 77
	2	+ 14	+ 9		2	+ 87	+ 56		2	+ 40	- 42		2	- 81	- 63
	3	- 47	+ 84		3	+ 35	+ 1		3	+ 14	- 7		3	- 22	- 36
	4	+ 84	+ 42		4	- 90	+132		4	+ 47	- 38		4	- 28	-119
	5	+ 55	-107		5	+109	- 70		5	+ 12	- 18		5	- 49	+ 24
	6	- 61	- 23		6	- 50	+ 13		6	+ 54	+ 4		6	+ 8	+117
	7	- 23	- 41		7	- 25	+ 64		7	- 11	- 24		7	- 1	- 36
	8	- 6	+113		8	+118	+ 76		8	- 38	- 17		8	- 55	+ 16
	9	+ 23	- 40		9	- 33	+137		9	- 62	+ 39		9	- 49	+ 5
	10	- 72	-129		10	- 4	- 29		10	+ 23	- 72		10	- 1	+ 23
	11	+ 65	- 19		11	- 74	+ 13		11	+ 17	- 60		11	+ 35	- 70
	12	-112	+ 43		12	- 95	- 38		12	- 3	+ 25		12	+ 66	+ 32
	13	+ 31	- 25		13	- 46	- 38		13	+ 6	- 49		13	+ 4	- 33
	14	- 66	- 6		14	- 5	- 84		14	+ 54	+ 9		14	+ 18	+ 61
	15	+ 32	- 28		15	- 12	- 28		15	- 34	+ 72		15	+ 33	+ 34
	16	- 26	- 23		16	+ 36	- 44		16	- 58	- 59		16	+ 48	+ 35
	17	+ 29	- 12		17	- 75	+ 25		17	- 17	+ 29		17	- 65	- 5
	18	- 64	- 63		18	- 36	- 29		18	- 81	- 8		18	+ 13	- 16
	19	+ 13	- 37		19	+100	+ 2		19	+ 22	+ 38		19	- 15	+ 2
	20	- 17	- 9		20	- 18	- 44		20	+ 76	+ 44		20	+ 59	- 31
	21	+ 3	+ 12		21	- 45	+ 65		21	+ 17	- 9		21	+ 8	+ 44
	22	- 1	- 54		22	- 62	-141		22	+ 55	- 41		22	- 0	- 52
	23	+ 24	- 26		23	- 91	+139		23	- 4	+ 78		23	- 64	+ 38
	24	+107	- 19		24	- 10	- 58		24	+ 33	+ 2		24	+ 2	- 69
	25	- 24	- 23		25	- 21	+ 97		25	+ 44	- 40		25	- 11	+ 84
	26	+ 19	- 23		26	+ 45	+ 41		26	+ 20	- 83		26	+ 43	- 25
	27	- 24	- 90		27	- 104	- 33		27	- 52	- 44		27	+ 46	- 64
	28	+ 38	- 95		28	- 25	+ 38		28	- 1	- 58		28	+ 82	+ 64
	29	+ 24	+ 77		29	- 38	+ 14		29	+ 18	+ 37				
	30	- 51	- 72		30	+ 12	- 40								
	31	+ 44	- 19												
4	0	+ 598		5	0	-1298		6	0	+ 740		7	0	-767	
	1	+ 417	+ 194		1	+ 107	+ 80		1	+ 74	+200		1	-114	-376
	2	- 785	+ 131		2	- 248	-235		2	- 125	+ 13		2	+390	+117
	3	- 545	+ 31		3	- 204	-365		3	- 129	-400		3	+170	-130
	4	- 238	+1087		4	+1127	-259		4	+ 269	- 21		4	-333	+ 74
					5	- 38	-309		5	+ 165	+306		5	-195	+105
									6	+ 72	+123		6	- 73	-401
													7	+110	+318
27	0	+ 47		26	0	+ 203		25	0	- 49		24	0	-198	
	1	- 31	- 41		1	+ 67	+ 31		1	+ 65	- 53		1	- 33	+ 78
	2	+ 57	+ 46		2	- 5	+ 73		2	+ 92	+ 9		2	- 86	-106
	3	- 10	+123		3	- 40	- 43		3	+102	+ 43		3	+ 61	- 77
	4	- 3	- 5		4	- 161	+149		4	- 9	- 37		4	+ 97	-114
	5	+ 37	- 42		5	- 9	- 15		5	+ 15	+ 78		5	+ 11	+ 28
	6	- 35	+108		6	+ 111	+ 50		6	- 25	+ 8		6	- 17	- 78
	7	+ 24	+ 17		7	+ 102	+ 23		7	- 28	+147		7	- 16	- 35
	8	+ 12	- 59		8	- 58	- 60		8	+ 69	- 17		8	+ 63	- 3
	9	+ 82	- 44		9	+ 74	+ 12		9	+ 39	- 63		9	- 51	+ 1
	10	- 1	+ 11		10	- 81	- 45		10	+ 27	- 94		10	+109	+ 27
	11	+ 38	+ 41		11	+ 8	+148		11	+ 36	+ 57		11	- 77	+ 54
	12	- 65	- 41		12	- 62	- 91		12	- 85	- 53		12	+ 4	+ 65
	13	- 35	- 65		13	+ 51	- 18		13	+ 5	+109		13	- 16	+ 8
	14	+ 10	- 69		14	+ 27	- 15		14	- 17	- 83		14	+ 14	+ 4
	15	+ 52	- 15		15	+ 88	- 4		15	+ 1	+ 57		15	- 52	+ 82
	16	- 7	+ 83		16	- 25	+ 3		16	- 11	- 42		16	+ 23	- 33
	17	+ 10	- 27		17	+ 78	- 46		17	+ 30	- 16		17	+ 18	+ 80
	18	- 31	+ 60		18	- 1	+ 4		18	+ 86	- 39		18	+114	+ 37
	19	- 9	+ 14		19	+ 19	- 9		19	+ 2	- 30		19	+ 56	+ 85
	20	+ 82	+ 13		20	- 15	- 39		20	- 51	-108		20	- 28	+ 34
	21	- 20	- 19		21	+ 36	+ 14		21	- 31	+ 2		21	+ 25	- 90
	22	- 1	- 54		22	+ 61	- 29		22	- 95	+ 96		22	+ 38	+ 5
	23	+ 66	+103		23	+ 63	- 31		23	- 24	- 21		23	- 34	+ 58
	24	- 18	- 17		24	+ 62	+ 87		24	+ 18	- 32		24	+ 51	- 2
	25	+ 55	- 47		25	+ 49	+ 98								
	26	- 30	- 32		26	- 24	+ 2								
	27	+ 90	+ 25												

$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$	$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$	$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$	$n$	$m$	$10^4 \cdot a_n^m$	$10^4 \cdot b_n^m$
9	0	421		9	0	421		10	0	25		11	0	29	
	1	129	68		1	129	68		1	112	7		1	455	166
	2	7	58		2	7	58		2	289	161		2	7	70
	3	18	159		3	18	159		3	235	85		3	20	15
	4	22	149		4	22	149		4	48	142		4	33	77
	5	129	78		5	129	78		5	118	97		5	98	105
	6	43	399		6	43	399		6	228	61		6	65	84
	7	56	83		7	56	83		7	28	161		7	9	65
	8	114	110		8	114	110		8	42	151		8	136	25
9	88	119	9	88	119	9	357	26	9	48	33				
												10	151	101	
												11	66	37	
21	0	156		21	0	156		21	0	200		20	0	199	
	1	24	135		1	24	135		1	77	3		1	14	102
	2	44	10		2	44	10		2	8	18		2	58	2
	3	62	92		3	62	92		3	55	74		3	66	40
	4	3	94		4	3	94		4	40	10		4	39	238
	5	127	39		5	127	39		5	28	87		5	135	51
	6	9	57		6	9	57		6	24	78		6	71	10
	7	44	89		7	44	89		7	62	43		7	82	4
	8	137	8		8	137	8		8	115	36		8	28	79
	9	11	39		9	11	39		9	25	69		9	158	58
	10	55	31		10	55	31		10	8	17		10	102	27
	11	22	46		11	22	46		11	72	40		11	34	16
	12	11	17		12	11	17		12	8	30		12	12	142
	13	10	17		13	10	17		13	24	21		13	70	44
	14	5	100		14	5	100		14	39	40		14	47	44
	15	72	54		15	72	54		15	30	99		15	50	36
	16	13	51		16	13	51		16	59	35		16	58	50
	17	55	44		17	55	44		17	28	25		17	96	50
	18	43	12		18	43	12		18	54	72		18	9	1
	19	113	103		19	113	103		19	50	5		19	31	120
	20	11	9		20	11	9		20	118	46		20	15	63
	21	20	23		21	20	23		21	0	19		21		
	22	5	31		22	5	31		22				22		
13	0	57		13	0	57		14	0	226		15	0	125	
	1	128	55		1	128	55		1	101	80		1	75	151
	2	53	210		2	53	210		2	168	65		2	110	27
	3	149	120		3	149	120		3	35	51		3	24	49
	4	6	18		4	6	18		4	21	54		4	30	16
	5	74	51		5	74	51		5	161	44		5	31	44
	6	72	31		6	72	31		6	42	59		6	4	80
	7	86	198		7	86	198		7	4	77		7	71	33
	8	41	28		8	41	28		8	12	47		8	15	63
	9	67	123		9	67	123		9	70	23		9	51	92
	10	62	156		10	62	156		10	105	36		10	113	53
	11	69	84		11	69	84		11	7	95		11	11	35
	12	120	107		12	120	107		12	33	121		12	92	81
13	106	71	13	106	71	13	22	156	13	52	61				
												14	161	82	
												15	53	1	
17	0	275		17	0	275		17	0	18		16	0	317	
	1	39	47		1	39	47		1	128	104		1	60	70
	2	35	107		2	35	107		2	136	81		2	29	43
	3	24	22		3	24	22		3	87	207		3	135	36
	4	76	97		4	76	97		4	108	21		4	23	53
	5	164	96		5	164	96		5	93	20		5	94	44
	6	106	9		6	106	9		6	161	38		6	70	66
	7	127	106		7	127	106		7	6	43		7	63	3
	8	25	41		8	25	41		8	9	70		8	132	16
	9	34	65		9	34	65		9	31	4		9	6	138
	10	20	100		10	20	100		10	35	68		10	112	95
	11	17	7		11	17	7		11	132	62		11	18	2
	12	25	49		12	25	49		12	70	192		12	208	19
	13	57	71		13	57	71		13	143	88		13	102	78
	14	50	125		14	50	125		14	15	108		14	50	171
	15	60	125		15	60	125		15	170	71		15	96	64
	16	66	65		16	66	65		16	198	21		16	81	52
17	99	61	17	99	61	17	11	143	17						



## 10. Bénard-Konvektion mit innerer flächenhafter Wärmequelle

### 10.1. Einführung

In 9. wurde eine quantitative kinematische Theorie der Konvektion im Erdmantel entwickelt. Das vorgeschlagene System von Konvektionsströmungen erklärt die Verteilung der orientierungsunabhängigen Größen der Kugelfunktionsentwicklung der Topographie der Erde. Ein enger Zusammenhang existiert zwischen Mantelkonvektion und Verteilung von Kontinenten und Ozeanen (vgl. 9.3.). Die seismischen Diskontinuitäten im Mantel erscheinen bei den möglichen Strömungstypen oft als Flächen, an denen sich Strömungsrollen berühren, die sich oberhalb und unterhalb entwickelt haben. Anders ausgedrückt: Die Stromlinien meiden oft die Überquerung der Diskontinuitäten. Die Überquerung ist aber möglich. Letztgenanntes Ergebnis ist gut mit den strukturphysikalischen Betrachtungen von FRÖLICH (1973) verträglich. Im folgenden soll ein erster Schritt bei der Entwicklung einer hydrodynamischen Konvektionstheorie getan werden, bei der zunächst besonders der Einfluß von entstehender Wärme an einer Diskontinuität untersucht werden soll. Die hier benutzte Methode unterscheidet sich wesentlich von der von SCHUBERT und TURCOTTE (1971), in der der Einfluß von Phasenübergängen auf das Absinken von Abtauchplatten untersucht wird. Es ist klar, daß Dichtesprünge, Viskositätsprünge und beim eventuellen Durchfluß entstehende Phasenumwandlungswärme die Strömung im realen Erdmantel beeinflussen werden. Es ist jedoch mathematisch zu schwierig, alle diese Einflüsse g l e i c h z e i t i g zu behandeln. Wir beschränken uns in Abschnitt 10. darauf, den Einfluß von an einer Grenzfläche zeitlich und räumlich gleichmäßig entstehender Wärme zu behandeln. Die Frage, ob diese flächenhafte Wärmequelle infolge gravitativer Differentiation, infolge von kosmologisch bedingter Migration der Phasengrenze oder infolge anderer Gründe existiert, ist in diesem Zusammenhange zweitrangig. Die behandelte Konvektion ist thermisch, d. h. die Strömung setzt infolge von durch Aufheizung entstandenen Dichtedifferenzen ein. Das Problem wird zunächst in einer ebenen Schicht behandelt. Im Ergebnis zeigt sich eine Bevorzugung von geschlossenen Stromlinien, die die wärmeerzeugende Fläche nicht durchdringen. Weil die wärmeproduzierende Fläche an einen bestimmten hydrostatischen Druck gebunden sein wird und weil der Betrag der Konvektionsströmungsgeschwindigkeiten so klein ist, daß keine bedeutenden Abweichungen der isobaren Fläche vom hydrostatischen Falle auftreten, wurde folgendes im Modell vorausgesetzt: Die wärmeerzeugende Fläche ist in konstanter Tiefe, d. h. sie wird durch die Strömungen nicht deformiert, die Strömungen werden aber mechanisch oder anders als eventuell durch die entstehende Wärme nicht behindert. Die Aufgabe wurde zunächst formuliert und dann in der Reihenfolge gelöst, wie es in der Hydrodynamik üblich ist. Die Grundgleichungen wurden aufgestellt, anschließend für den statischen Fall vereinfacht und für die Randbedingungen des statischen Falles gelöst. Dann führt man für Geschwindigkeit, Druck und Temperatur kleine Störungen des statischen Zustandes ein und gewinnt unter Benutzung der Grundgleichungen und Lösungen des statischen Falles die linearisierten Grundgleichungen. Durch Bildung des Rotors eliminiert man den Druck. Dadurch ist der quellenfreie Geschwindigkeitsvektor in den linearisierten Grundgleichungen durch die Vertikalkomponente des Geschwindigkeits- und des Wirbelfeldes ausgedrückt worden. Für die gesuchten Größen macht man Exponentialansätze. Dadurch werden die Differentialausdrücke in den linearisierten Grundgleichungen vereinfacht. Anschließend formuliert man die Randbedingungen für den dynamischen Fall und schreibt die Gleichungen (marginal state equations) auf dimensionslose Variable um. Das Problem wird auf die Lö-

sung einer gewöhnlichen Differentialgleichung sechster Ordnung reduziert. Für den Fall freier Grenzflächen wurde die exakte analytische Lösung dieser Gleichung gefunden.

## 10.2. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen

Gegeben ist eine ebene Schicht einer Newtonschen Flüssigkeit der Dicke  $h$ . Untersucht werden soll die Konvektion. Wir wählen ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem  $xyz$  so, daß der Nullpunkt des Systems in der Untergrenze der Schicht liegt und die  $z$ -Achse senkrecht zur Schicht nach oben zeigt. Für die Schwerebeschleunigung gilt überall  $g = (0, 0, -g)$ . Die Grenzen der Schicht werden auf konstanten Temperaturen gehalten: Für  $z = h$  gilt  $T = T_1$ , für  $z = 0$  gilt  $T = T_0 > T_1$ . Die Temperaturdifferenz heißt  $\Delta T = T_0 - T_1$ . In der Fläche  $z = z_0$  (mit  $0 < z_0 < h$ ) wird unabhängig von auftretenden Strömungen Wärme erzeugt. Die Wärmequellendichte ist auf der ganzen Fläche  $z = z_0$  konstant und auch zeitlich nicht variabel.

$\rho c_v q_0 \delta(z - z_0)$  ist die Dichte der Wärmeproduktion pro Zeiteinheit,  $\rho$  ist die Massendichte,  $c_v$  die spezifische Wärme bei konstantem Volumen. Dabei ist  $\delta$  durch

$$(10.1) \quad y(z) = \int y(z') \cdot \delta(z' - z) \cdot dz'$$

definiert. Gleichung (10.1) muß dabei für jede beliebige Funktion  $y$  erfüllt sein, wenn  $y$  absolut quadratisch integrierbar und stückweise stetig ist. Gleichung (10.1) ist äquivalent zu Gleichung (10.2).

$$(10.2) \quad y(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int y(z') \cdot \delta_\varepsilon(z' - z) \cdot dz'$$

In Gleichung (10.2) kann  $\delta_\varepsilon$  in verschiedener Weise eingeführt werden. Wir setzen:

$$(10.3) \quad \delta_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|z|/\varepsilon}$$

Um der Realität näher zu sein, soll im folgenden  $\delta_\varepsilon$  statt  $\delta$  benutzt werden.

Außer den bereits erwähnten werden folgende Bezeichnungen verwendet:  $t$  Zeit,  $p$  Druck,  $v = (u, v, w)$  Geschwindigkeit,  $\eta$  dynamische Viskosität,  $\nu$  kinematische Viskosität,  $k$  Wärmeleitfähigkeit,  $\alpha$  isobarer Wärmeausdehnungskoeffizient,  $a/\pi$  Verhältnis Höhe zu Breite einer in sich geschlossenen Stromlinie (aspect ratio). Ferner werden folgende Symbole verwendet:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Die Konvektionsströmung wird durch  $v$ ,  $T$  und  $p$  als Funktion von  $(x, y, z, t)$  beschrieben. Die Dichte hingegen wird durch

$$(10.4) \quad \rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0))$$

eingeführt.

Die Differentialgleichungen, deren Lösungen  $\rho$ ,  $T$  und  $p$  sind, lauten

$$(10.5) \quad \rho \frac{D\rho}{Dt} = \rho g - \nabla p + \eta \nabla^2 \rho \quad \text{Bewegungsgleichung}$$

$$(10.6) \quad \frac{DT}{Dt} = g_0 \delta(z - z_0) + k \nabla^2 T \quad \text{Wärmetransportgleichung}$$

$$(10.7) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Für den statischen Fall (Gleichgewichtszustand) gehen die Gleichungen (10.4) - (10.7) über in (10.8) - (10.11):

$$(10.8) \quad \bar{\rho} = \rho_0 (1 - \alpha (\bar{T} - T_0)) ,$$

$$(10.9) \quad \bar{v} = 0 ,$$

$$(10.10) \quad \nabla \bar{p} = \bar{\rho} g ,$$

$$(10.11) \quad -\nabla^2 \bar{T} = \frac{q_0 \delta(z - z_0)}{k} .$$

Wir nehmen an, daß der mittlere Zustand nach Einsetzen der Konvektion gleich dem Gleichgewichtszustand ist. Im statischen Falle soll gelten:

$$\bar{T} = \bar{T}(x, y, z, t) .$$

(10.11) geht dann über in:

$$(10.12) \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = \frac{q_0}{2k\varepsilon} e^{-|z-z_0|/\varepsilon} .$$

Dabei wurde  $\delta$  durch  $\delta_\varepsilon$  ersetzt. Für  $z \geq z_0$  gilt:

$$(10.13) \quad \frac{2k\varepsilon}{q_0} \bar{T} = \varepsilon^2 e^{(z_0-z)/\varepsilon} + c_1 z + c_2 .$$

Für  $z \leq z_0$  gilt:

$$(10.14) \quad \frac{2k\varepsilon}{q_0} \bar{T} = \varepsilon^2 e^{(z-z_0)/\varepsilon} + c_3 z + c_4 .$$

Die Konstanten  $c_1, c_2, c_3, c_4$  müssen so festgelegt werden, daß für (10.13) an der Ebene  $z = h$  gelten soll:  $\bar{T} = T_1$ .

Weiterhin muß für (10.14) an der Ebene  $z = 0$  gelten:  $\bar{T} = T_0$ . Als dritte Bedingung muß an der Ebene  $z = z_0$  für beide Gleichungen (13) und (14) dieselbe Temperatur  $\bar{T}(z_0)$  herauskommen. Durch die Erfüllung dieser drei Bedingungen geht (10.13) in (10.15), (10.14) in (10.16) über. Für  $z \geq z_0$  gilt:

$$(10.15) \quad \bar{T} = \frac{q_0 \varepsilon}{2k} e^{z_0/\varepsilon} (e^{-z/\varepsilon} - e^{-h/\varepsilon}) - \frac{\Delta T}{h} z + T_0 .$$

Für  $z \leq z_0$  gilt:

$$(10.16) \quad \bar{T} = \frac{q_0 \varepsilon}{2k} e^{-z_0/\varepsilon} \left\{ (e^{z/\varepsilon} - 1) + (1 - e^{(2z_0-h)/\varepsilon}) \frac{z}{z_0} \right\} - \frac{\Delta T}{h} z + T_0 .$$

Jetzt werden wir kleine Störungen des statischen Zustandes für Geschwindigkeit, Druck, Temperatur und Dichte einführen und unter Benutzung der Lösungen des statischen Falles die linearisierten Grundgleichungen des Problems erhalten:

$$(10.17) \quad \rho = \bar{\rho}; \quad p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'; \quad \varrho = \bar{\varrho} + \varrho'.$$

Der statische Zustand ist mit einem Querstrich, die Störung mit einem Längsstrich bezeichnet. Die Gleichungen (10.4) - (10.7) gehen in (10.18) - (10.21) über:

$$(10.18) \quad \varrho' = -\varrho_0 \alpha T',$$

$$(10.19) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varrho'}{\varrho_0} g - \frac{1}{\varrho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 v,$$

$$(10.20) \quad w \frac{d}{dz} \bar{T} + \frac{\partial T'}{\partial t} - k \nabla^2 T' = 0,$$

$$(10.21) \quad \nabla \cdot v = 0.$$

Mit Hilfe von (10.15) und (10.16) eliminiert man in (10.20)  $d\bar{T}/dz$ . (10.18) wird in (10.19) eingesetzt.

$$(10.22) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \alpha T' - \frac{1}{\varrho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 v.$$

Für  $z \geq z_0$ :

$$(10.23) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right) T' = \left\{ \frac{q_0}{2k} e^{(z_0 - z)/\varepsilon} + \frac{\Delta T}{h} \right\} w.$$

Für  $z \leq z_0$ :

$$(10.24) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right) T' = - \left\{ \frac{q_0}{2k} e^{-z_0/\varepsilon} \left[ e^{z/\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z_0} (1 - e^{(2z_0 - h)/\varepsilon}) \right] - \frac{\Delta T}{h} \right\} w.$$

Aus (10.22) wird jetzt der Druck eliminiert:

$$(10.25) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 v = \text{rot rot } (g \alpha T').$$

Aus (10.25) folgt:

$$(10.26) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right] \nabla^2 w = g \alpha \nabla_1^2 T'.$$

Schließlich bekommen wir aus (10.23), (10.24), (10.26) zwei Gleichungen für  $w$ .

Für  $z \geq z_0$ :

$$(10.27) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 w = + g \alpha \left\{ \frac{q_0}{2k} e^{(z_0 - z)/\varepsilon} + \frac{\Delta T}{h} \right\} \nabla_1^2 w.$$

Für  $z \leq z_0$ :

$$(10.28) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 w = - g \alpha \left\{ \frac{q_0}{2k} e^{-z_0/\varepsilon} \left[ e^{z/\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z_0} (1 - e^{(2z_0 - h)/\varepsilon}) \right] - \frac{\Delta T}{h} \right\} \nabla_1^2 w.$$

Die beiden Gleichungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen und den Inhalt der geschweiften Klammer auf der rechten Seite. Für  $z = z_0$  würden die Gleichungen nicht ineinander übergehen, auch nicht für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



Für  $z \geq z_0$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt:

$$(10.29) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - kv^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)\nabla^2 w = g\alpha\left(\frac{\Delta T}{h} + \frac{q_0}{2k}\right)\nabla_1^2 w.$$

Für  $z \leq z_0$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt:

$$(10.30) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - kv^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)\nabla^2 w = g\alpha\left(\frac{\Delta T}{h} - \frac{q_0}{2k}\right)\nabla_1^2 w.$$

Man sieht also, daß oberhalb der wärmeerzeugenden Fläche die einfache Bénard-Konvektion verstärkt, unterhalb abgeschwächt würde. Doch zurück zum realistischeren Fall  $\varepsilon \neq 0$ . Wir machen einen Separationsansatz:

$$(10.31) \quad w(x, y, z, t) = w(z) \cdot f(x, y) \cdot e^{\sigma t}$$

wobei

$$\nabla_1^2 f(x, y) + \frac{a^2}{h^2} f(x, y) = 0.$$

Daher:

$$(10.32) \quad \nabla_1^2 w = -\frac{a^2}{h^2} w.$$

Wir definieren folgende Symbole neu:

$$\zeta = \frac{z}{h}; \quad D = \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Damit gilt dann:

$$(10.33) \quad \nabla^2 w = \nabla_1^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2} (D^2 - a^2) w.$$

Für  $z \geq z_0$  entsteht aus Gleichung (10.27):

$$(10.34) \quad \left[\sigma - \frac{k}{h^2}(D^2 - a^2)\right] \cdot \left[\sigma - \frac{\nu}{h^2}(D^2 - a^2)\right] \frac{(D^2 - a^2)}{h^2} w(z) = \\ = g\alpha\left(-\frac{q_0}{2k} e^{[h(\zeta_0 - \zeta)]/\varepsilon} - \frac{\Delta T}{h}\right) \frac{a^2}{h^2} w(z).$$

Für  $z \leq z_0$  entsteht aus Gleichung (10.28):

$$(10.35) \quad \left[\sigma - \frac{k}{h^2}(D^2 - a^2)\right] \cdot \left[\sigma - \frac{\nu}{h^2}(D^2 - a^2)\right] \frac{(D^2 - a^2)}{h^2} w(z) = \\ = g\alpha\left(\frac{q_0}{2k} e^{-(h\zeta_0)/\varepsilon} \left[e^{h\zeta/\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{h\zeta_0} (1 - e^{[h(2\zeta_0 - 1)]/\varepsilon})\right] - \frac{\Delta T}{h}\right) \frac{a^2}{h^2} w(z).$$

Wenn der kritische Temperaturgradient  $\sigma = 0$  entspricht, wie man es üblicherweise annimmt, bekommen wir für  $z \geq z_0$ :

$$(10.36) \quad (D^2 - a^2)^3 w = \frac{g\alpha h^4}{\nu k} \left(-\frac{\Delta T}{h} - \frac{q_0}{2k} e^{[h(\zeta_0 - \zeta)]/\varepsilon}\right) a^2 w$$

und für  $z \leq z_0$ :

$$(10.37) \quad (D^2 - a^2)^3 w = \frac{g\alpha h^4}{\nu k} \left\{ -\frac{\Delta T}{h} + \frac{q_0}{2k} e^{-h\zeta_0/\varepsilon} \left[ e^{h\zeta/\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{h\zeta_0} (1 - e^{[h(2\zeta_0-1)]/\varepsilon}) \right] \right\} a^2 w.$$

Die Gleichungen (10.36) und (10.37) faßt man so zusammen:

$$(10.38) \quad (D^2 - a^2)^3 w = [-R + Q_\mu (e^{s_\mu \cdot (h/\varepsilon) \cdot \zeta} + S_\mu)] a^2 w$$

wobei

$$R = \frac{g\alpha h^3 \Delta T}{\nu k}$$

die Rayleigh-Zahl,

$$Q_\mu = s_\mu \cdot \frac{g\alpha h^4 q_0}{2k^2 \nu} e^{-s_\mu (h\zeta_0/\varepsilon)}; \quad s_1 = +1$$

$$s_1 = \frac{\varepsilon}{h\zeta_0} (1 - e^{[h(2\zeta_0-1)]/\varepsilon}); \quad s_2 = -1$$

und  $s_2 = 0$  bedeuten. Für  $z \leq z_0$  gilt  $\mu = 1$ , für  $z \geq z_0$  gilt  $\mu = 2$ .

### 10.3. Die Lösung des Problems

Wir suchen jetzt die Lösung von (10.38) für fixierte, spannungsfreie Grenzen bei  $\zeta = 0$  und  $\zeta = 1$ , an denen die Temperaturen  $T_0$  und  $T_1$  konstant gehalten werden. Aus dieser Forderung folgt bekanntlich:

$$(10.39) \quad w = D^2 w = D^4 w = \dots = D^{2n} w = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = 1.$$

Außerdem muß für  $\zeta = \zeta_0$  folgendes gelten:

$$(10.40) \quad w^{(1)} \Big|_{\zeta = \zeta_0} = w^{(2)} \Big|_{\zeta = \zeta_0}$$

und

$$(10.41) \quad T'^{(1)} \Big|_{\zeta = \zeta_0} = T'^{(2)} \Big|_{\zeta = \zeta_0}.$$

Der obere Index (1) bezieht sich dabei wieder auf  $\zeta \leq \zeta_0$ , (2) bezieht sich auf  $\zeta \geq \zeta_0$ . Wegen

$$T'^{(1)}(x, y, z_0) \equiv T'^{(2)}(x, y, z_0)$$

und

$$w^{(1)}(x, y, z_0) \equiv w^{(2)}(x, y, z_0)$$

folgt mit Hilfe von Gleichung (10.26) aus Gleichung (10.41):

$$(10.42) \quad (D^2 w)^{(1)} = (D^2 w)^{(2)} \quad \text{für} \quad \zeta = \zeta_0.$$

Zur Anpassung der Konstanten der allgemeinen Lösung an die Grenzbedingungen ist es notwendig und hinreichend, (10.40), (10.42) und (10.43) zu benutzen, wobei

$$(10.43) \quad w = D^2 w = 0$$

für  $\zeta = 0$  und  $\zeta = 1$  aus (10.39) folgt. Es soll nun (10.38) unter Einhaltung von (10.40), (10.42) und (10.43) gelöst werden. Wir definieren:

$$(10.44) \quad \psi^{(\mu)} = a^2(R - Q_\mu S_\mu)w.$$

Dabei gilt wieder  $\mu = 1$  für  $\zeta \leq \zeta_0$  und  $\mu = 2$  für  $\zeta \geq \zeta_0$ . Ferner definieren wir:  $k_\mu = s_\mu \cdot (h/\varepsilon)$ . Aus (10.38) entsteht:

$$(10.45) \quad (D^2 - a^2)^3 w = -(1 + C_\mu e^{k_\mu \zeta}) \psi$$

wobei

$$C_\mu = -\frac{Q_\mu}{R - Q_\mu S_\mu}$$

und  $\psi = a^2(R - Q_\mu S_\mu)w$  gilt.

Nun nehmen wir folgende Lösung an:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m w_m \quad \text{und} \quad \psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \psi_m.$$

Dabei erfüllen  $w_m$  und  $\psi_m$  die Gleichungen (10.45) mit (10.40), (10.42), (10.43). Die  $\Gamma_m$  sind Konstanten. Wenn  $C_\mu = 0$  ist, dann ist für (10.45), (10.40), (10.42), (10.43) folgende Lösung möglich:

$$\psi_m^{(\mu)} = \sin(M_\mu \zeta - P_\mu)$$

und

$$w_m = [M_\mu^2 + a^2]^{-3} \cdot \sin(M_\mu \zeta - P_\mu).$$

Es wurden folgende Substitutionen verwendet:

$$M_1 = \frac{m\pi}{\zeta_0}; \quad P_1 = 0; \quad M_2 = \frac{m\pi}{1 - \zeta_0}; \quad P_2 = \frac{m\pi \zeta_0}{1 - \zeta_0}.$$

Somit kann man (10.45) durch (10.46) ersetzen:

$$(10.46) \quad (D^2 - a^2)^3 w_m = -(1 + C_\mu e^{k_\mu \zeta}) \sin(M_\mu \zeta - P_\mu).$$

Man kann sich nun die Möglichkeit der Superposition von Lösungen zunutze machen und löst zuerst

$$(10.47) \quad (D^2 - a^2)^3 w_m = -C_\mu e^{k_\mu \zeta} \sin(M_\mu \zeta - P_\mu).$$

Das kann man folgendermaßen umformen:

$$(10.48) \quad ([D + k_\mu]^2 - a^2)^3 \left[ -\frac{1}{C_\mu} e^{-k_\mu \zeta} w \right] = \sin(M_\mu \zeta - P_\mu).$$

Daraus folgt die partikuläre Lösung in einfacher Weise. Die allgemeine Lösung von (10.46) ergibt sich wie folgt:

$$(10.49) \quad w_m = G_\mu e^{k_\mu \zeta} \cdot \\ \cdot [(k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)^2 + 4k_\mu^2 M_\mu^2]^{-3} \cdot \{6k_\mu M_\mu \cdot [(k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)^2 - \frac{4}{3}k_\mu^2 M_\mu^2] \cdot \\ \cdot \cos(M_\mu \zeta - P_\mu) - (k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)[(k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)^2 - 12k_\mu^2 M_\mu^2] \cdot \\ \cdot \sin(M_\mu \zeta - P_\mu)\} + [M_\mu^2 + a^2]^{-3} \cdot \{\sin(M_\mu \zeta - P_\mu) + \\ + (A_m + \zeta B_m + \zeta^2 C_m) \sinh \alpha \zeta + (D_m + \zeta E_m + \zeta^2 F_m) \cosh \alpha \zeta\}.$$

Die Integrationskonstanten  $A_m, \dots, F_m$  bestimmt man aus den Gleichungen (10.50), (10.51) und (10.52).

$$(10.50) \quad D_m = -\frac{G_1}{J_1}$$

$$(10.51) \quad \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \\ E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\sinh a] & [\sinh a - a \cosh a] \\ [\sinh a \zeta_0] & [\zeta_0 \sinh a \zeta_0 - a \zeta_0^2 \cosh a \zeta_0] \\ [a^2 \sinh a] & [-3a^2 \sinh a - a^3 \cosh a] \\ [a^2 \sinh a \zeta_0] & [-3a^2 \zeta_0 \sinh a \zeta_0 - a^3 \zeta_0^2 \cosh a \zeta_0] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [\sinh a] & [\cosh a] \\ [\zeta_0^2 \sinh a \zeta_0] & [\zeta_0 \cosh a \zeta_0] \\ [(2 + a^2) \sinh a + 4a \cosh a] & [2a \sinh a + a^2 \cosh a] \\ [(2 + a^2 \zeta_0^2) \sinh a \zeta_0 + 4a \zeta_0 \cosh a \zeta_0] & [2a \sinh a \zeta_0 + a^2 \zeta_0 \cosh a \zeta_0] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}$$

$$(10.52) \quad F_m = \frac{a^2 G_1 - I_1}{2J_1} - a B_m.$$

Dabei wurden folgende Substitutionen benutzt:

$$(10.53) \quad G_\mu = 6C_\mu k_\mu M_\mu [(k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)^2 + 4k_\mu^2 M_\mu^2]^{-3} [(k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)^2 - \frac{4}{3}k_\mu^2 M_\mu^2],$$

$$(10.54) \quad H_\mu = -2C_\mu k_\mu M_\mu [(k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)^2 + 4k_\mu^2 M_\mu^2]^{-3} \cdot \\ \cdot [k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2][(k_\mu^2 - M_\mu^2 - a^2)^2 - 12k_\mu^2 M_\mu^2],$$

$$(10.55) \quad J_\mu = [M_\mu^2 + a^2]^{-3},$$

$$(10.56) \quad I_\mu = (k_\mu^2 - M_\mu^2)G_\mu + H_\mu,$$



$$(10.57) \quad N_1 = \frac{G_2 e^{k_2}}{J_2} + \frac{I_1 + (2 - a^2)G_1}{2J_1} \cosh a ,$$

$$(10.58) \quad N_2 = \frac{G_1 e^{k_1 \zeta_0} + G_2 e^{k_2 \zeta_0}}{J_1 - J_2} + \frac{\zeta_0^2 I_1 + (2 - a^2 \zeta_0^2)G_1}{2J_1} \cosh a \zeta_0$$

$$(10.59) \quad N_3 = \frac{L_2 e^{k_2}}{J_2} + \frac{(2 + a^2)I_1 - a^4 G_1}{2J_1} \cosh a + \frac{2a(I_1 - a^2 G_1)}{J_1} \sinh a ,$$

$$(10.60) \quad N_4 = \frac{L_1 e^{k_1 \zeta_0} + L_2 e^{k_2 \zeta_0}}{J_1 - J_2} + \frac{(2 + a^2 \zeta_0^2)I_1 - a^4 \zeta_0^2 G_1}{2J_1} \cosh a \zeta_0 + \frac{2a \zeta_0 (I_1 - a^2 G_1)}{J_1} \sinh a \zeta_0 .$$

## 11. Konvektion in einer inkompressiblen mikropolaren Flüssigkeit

### 11.1. Vorbemerkungen

Dieser und der nächste Abschnitt dürften nicht nur vom geophysikalischen sondern auch vom mechanischen Standpunkt her interessant sein, weil hier das verallgemeinerte Bénard-Problem für mikropolare Medien behandelt ist. Die Mechanik dieser Medien wurde bisher im Detail nur wenig entwickelt, obwohl die Anwendungsmöglichkeiten groß sind.

In der herkömmlichen Kontinuumstheorie ordnet man jedem Punkt des Körpers drei Freiheitsgrade der Bewegung zu. Dabei nimmt man an, daß der Körper ohne Struktur sei. Es gibt nun durchaus Bewegungen großer Massen, bei denen sich die granulare oder molekulare Struktur des Körpers bemerkbar macht, d. h. wobei sich Abweichungen gegenüber der herkömmlichen Kontinuumstheorie ergeben. Aus diesem Grunde wurden Kontinuumstheorien mit mehr als drei Freiheitsgraden der Bewegung entwickelt. Diese Theorien werden Mikrokontinuumstheorien oder verallgemeinerte Cosserat-Kontinuumstheorien genannt. Den vermutlich ersten Versuch, eine derartige Theorie in der Geophysik anzuwenden, hat TEISSEYRE (1973) gemacht. Er benutzt ein mikroelastisches Kontinuum, um Herdmechanismen von Erdbeben zu beschreiben. WALZER (1974c) erörtert, ob im Erdmantel seismische Cosserat-Wellen möglich sind. Das Ergebnis war, daß für unregelmäßig angeordnete Blöcke die Cosserat-Kontinuumsmechanik mit sechs Freiheitsgraden wahrscheinlich nicht anwendbar ist. Falls man dagegen eine Blockstruktur annimmt, die aus einer Anordnung von Parallelepipeden besteht, wie es MORLAND (1974) in seinem Modell tut, dann kann man zusätzlich zu dem Verrückungsvektor noch einen zweimal differenzierbaren Mikrorotationsvektor einführen. Dabei darf nur die Drehung jedes zweiten Parallelepipeds verwandt werden, weil Nachbarn sich gegenläufig drehen müssen. Denn würde man beim Übergang zum Mikrokontinuum jedes Parallelepiped berücksichtigen, so wäre der Mikrorotationsvektor als Funktion des Ortsvektors unstetig.

In diesem Abschnitt soll versucht werden, Cosserat-Flüssigkeiten als Modell in die Geophysik einzuführen. Wir wollen uns dabei auf eine mikromorphe Flüssigkeit mit sechs Freiheitsgraden beschränken. Außer den üblichen Translationen wollen wir nur Mikrorotations-Effekte, jedoch keine Mikrodeformation (microstretch) zulassen. Ein derartiges Medium nennt man eine mikropolare Flüssigkeit. Unter Benutzung von ERINGENS (1966) Arbeit definieren wir die mikropolare Flüssigkeit durch folgende zwei Stoffgesetze:

$$(11.1) \quad t_{kl} = (-p + \lambda v_{r,r}) \delta_{kl} + \mu (v_{k,l} + v_{l,k}) + \kappa (v_{l,k} - e_{klr} n_r)$$

$$(11.2) \quad m_{kl} = \alpha n_{r,r} \delta_{kl} + \beta n_{k,l} + \gamma n_{l,k}$$

Die darin vorkommenden Größen werden durch das folgende erklärt:

$$(11.3) \quad e_{klr} = \begin{cases} 1 & \text{für } (k \ l \ r) \text{ zykl.} \\ & = (1 \ 2 \ 3) \\ -1 & \text{für } (k \ l \ r) \text{ zykl.} \\ & = (1 \ 3 \ 2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(11.4) \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

$t_{kl}$  = Spannungstensor;  $m_{kl}$  = Momentenspannungstensor;  $v_k$  oder  $v$  = Geschwindigkeit;  $p$  = Druck;  $\mu$  = dynamische Scherviskosität;  $\lambda, \kappa, \alpha, \beta, \gamma$  = andere Viskositätskonstanten;  $v_{k,1} = \frac{\partial v_k}{\partial x_1}$ ,  $x_1$  oder  $r$  = Ortsvektor;  $t$  = Zeit;

$$(11.5) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) \vec{\xi} = n \times \vec{\xi} = e_{1rk} n_r \xi_k e_1.$$

$e_1$  ist ein Einheitsvektor. Abb. 11.1 zeigt Translation und Rotation eines Elements der mikropolaren Flüssigkeit. In der Zeit  $t$  bewegt sich der Punkt  $R$  der Flüssigkeit nach  $r$ , der Punkt  $R'$  nach  $r'$ .  $\vec{\xi}(t)$  beschreibt, wie man auf Abb. 11.1 erkennt, die Mikrobewegung, d. h. wenn man zum Infinitesimalen übergeht, die Drehung eines Punktes. Wie aus der Definition (11.5) hervorgeht, ist  $n$  oder  $n_r$  der Mikrorotationsvektor. Dieser Vektor beschreibt die Winkelgeschwindigkeit eines mit dem Massenpunkt starr verbunden gedachten Dreibeins. Der Mikrorotationsvektor ist im allgemeinen nicht identisch mit dem klassischen Rotationsvektor  $\vec{\omega}$  oder  $\omega_r$ .

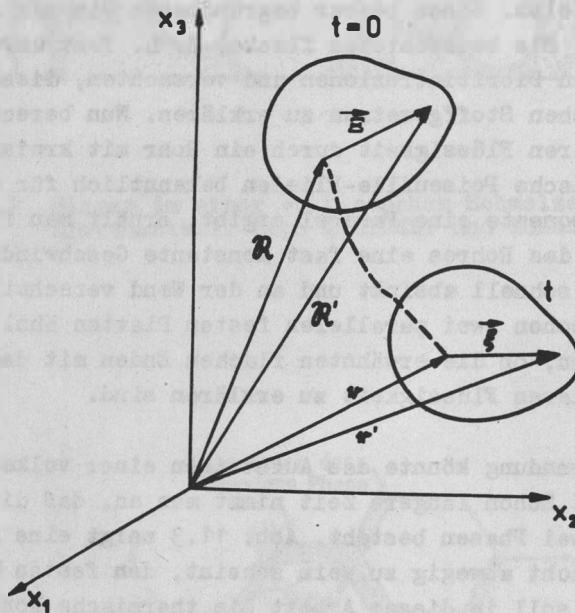


Abb. 11.1 Translation und Rotation eines Elements einer inkompressiblen mikropolaren Flüssigkeit

$$(11.6) \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times v \quad \text{oder} \quad \omega_r = \frac{1}{2} e_{rkl} v_{l,k}.$$

Nun definieren wir den klassischen Rotationstensor  $\omega_{kl}$

$$(11.7) \quad \omega_{kl} = -e_{klr} \omega_r.$$

Aus (11.6) und (11.7) folgt

$$(11.8) \quad \omega_{kl} = -\frac{1}{2} \epsilon_{klr} \epsilon_{rst} v_{t,s} = -\frac{1}{2} (\delta_{ks} \delta_{lt} - \delta_{ls} \delta_{kt}) v_{t,s} = \frac{1}{2} (v_{k,l} - v_{l,k}) .$$

Nun definieren wir den klassischen Verzerrungstensor  $d_{kl}$

$$(11.9) \quad d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) .$$

Mit Hilfe von (11.8) und (11.9) können wir Gl. (11.1) umformen:

$$(11.10) \quad t_{kl} = (-p + \lambda d_{rr}) \delta_{kl} + (2\mu + \kappa) d_{kl} + \kappa \epsilon_{klr} (\omega_r - n_r)$$

$\kappa$  ist also eine der Zusatzdrehung ( $n_r - \omega_r$ ) zugeordnete Viskositätskonstante.

## 11.2. Welche Anwendungen der mikropolaren Hydromechanik sind in der Geophysik erfolgversprechend?

Als erstes Beispiel kann man das Fließen von Gesteinsschmelzen nennen, in denen bereits auskristallisierte feste Brocken sind. Etwas derartiges könnte bei der Platznahme von Plutonen eine Rolle spielen. Einen besser begründbaren Hinweis findet man bei JOHNSON und POLLARD (1973). Sie beobachteten flache, d. h. fast unvermittelt abbrechende Enden von lakkolithischen Dioritintrusionen und versuchten, diese und ähnliche Phänomene mit Hilfe von klassischen Stoffgesetzen zu erklären. Nun berechnete ERINGEN (1966) das Fließen einer mikropolaren Flüssigkeit durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. Während sich für das klassische Poiseuille-Fließen bekanntlich für die Geschwindigkeit als Funktion der Radialkomponente eine Parabel ergibt, erhält man für eine mikropolare Flüssigkeit für das Innere des Rohres eine fast konstante Geschwindigkeit, die erst in der Nähe der Rohrwand sehr schnell absinkt und an der Wand verschwindet. Da die Ergebnisse für die Strömung zwischen zwei parallelen festen Platten ähnlich sein dürften, liegt es nahe zu untersuchen, ob die erwähnten flachen Enden mit dem flachen Geschwindigkeitsprofil der mikropolaren Flüssigkeit zu erklären sind.

Eine andere mögliche Anwendung könnte das Aufsteigen einer vulkanischen Schmelze mit Blasen sein (s. Abb. 11.2). Schon längere Zeit nimmt man an, daß die Langsamschicht (low-velocity layer) aus zwei Phasen besteht. Abb. 11.3 zeigt eine schematische Darstellung. Da es nun durchaus nicht abwegig zu sein scheint, den festen Körnern Rotationsfreiheitsgrade zuzuordnen, soll in dieser Arbeit die thermische Konvektion einer mikropolaren Flüssigkeit in einer horizontalen Schicht untersucht werden. Da die Konvektion im Erdmantel ein äußerst verwickelter Vorgang ist, konnten bisher immer nur einzelne Aspekte untersucht werden. In dieser Arbeit soll das Problem der hydrodynamischen Stabilität einer mikropolaren Flüssigkeit analytisch gelöst werden. Die numerische Auswertung der Ergebnisse muß einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

## 11.3. Grundgleichungen

$$(11.11) \quad -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{v} + \kappa \nabla \times \mathbf{n} + \rho \mathbf{f} = \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} .$$

Diese Gleichung drückt die Erhaltung des Impulses aus.  $\rho$  = Massendichte;  $\mathbf{f}$  = Beschleunigung oder Volumenkraft pro Masse.



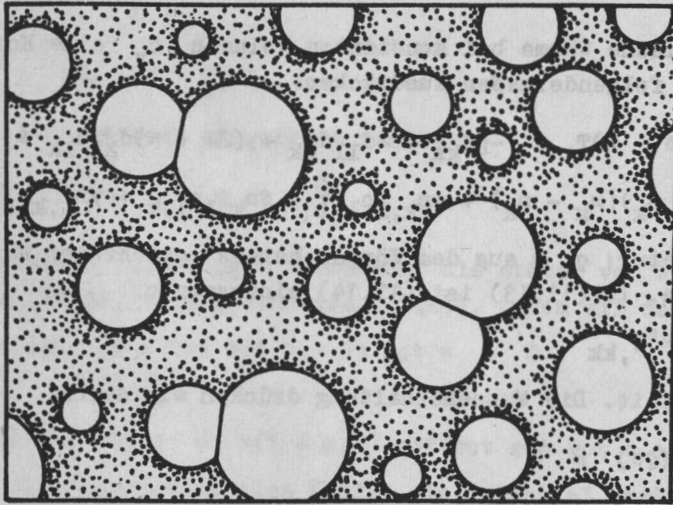


Abb. 11.2 Blasen in einer vulkanischen Schmelze mit kleinem Blasenanteil. Nach McBIRNEY und MURASE (1970)

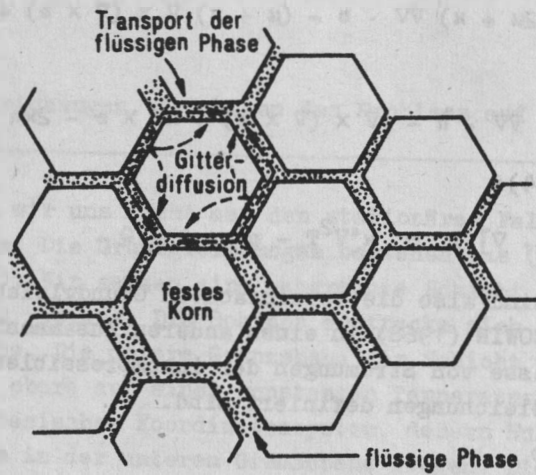


Abb. 11.3 Schematische Skizze der Anordnung der zwei Phasen im Material der Langsamschicht (low-velocity layer). Nach STOCKER und ASHBY (1973)

$$(11.12) \quad (\alpha + \beta) \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} + \gamma \nabla^2 \mathbf{n} + \kappa \nabla \times \mathbf{b} - 2\kappa \mathbf{n} + \rho \mathbf{b} = \rho j \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{n}.$$

Diese Relation beschreibt die Erhaltung des Drehimpulses.  $\mathbf{b}$  = axialer Vektor der volumenproportionalen Drehmomente pro Masse (body couple);  $j \delta_{kl}$  Mikroträgheitsmomententensor unserer Flüssigkeit, die wir als mikroisotrop voraussetzen.

Falls die spezifische Wärme bei konstantem Volumen  $c_v$  eine Konstante ist, können wir den Energiesatz folgendermaßen ausdrücken:

$$(11.13) \quad \rho c_v \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) T = -p d_{kk} + \lambda d_{ll} d_{kk} + (2\mu + \kappa) d_{kl} d_{lk} + \\ + 2\kappa (\omega_k - n_k)(\omega_k - n_k) + \alpha n_{k,k} n_{l,l} + \beta n_{k,l} n_{l,k} + \gamma n_{l,k} n_{l,k} + q_{k,k} + Q.$$

$T$  = absolute Temperatur;  $q_k$  = aus dem Körper heraus gerichteter Wärmeflußvektor;  $Q$  = Wärmeleistungsdichte. In (11.13) ist (11.14) einzusetzen.

$$(11.14) \quad q_{k,k} = \kappa^* T_{,kk}$$

$\kappa^*$  = Wärmeleitfähigkeit. Die Massenerhaltung drücken wir durch

$$(11.15) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

aus. Die Stoffgesetze sind durch

$$(11.16) \quad \rho = \rho_0 [1 - \delta(T - T_0)]$$

zu ergänzen, wobei  $\delta$  der Wärmeausdehnungskoeffizient und  $\rho_0$  die Dichte bei dem festen Temperaturwert  $T_0$  ist. Die Gleichungen (11.11) bis (11.16) sind zwölf skalare Gleichungen zur Bestimmung von zwölf skalaren Unbekannten:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $q_k$ .

Nun vereinfachen wir die Grundgleichungen, indem wir alle in  $\mathbf{v}$  oder  $\mathbf{n}$  quadratischen Glieder sowie alle Glieder, in denen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{n}$  multiplikativ verknüpft sind, vernachlässigen. Aus (11.11) entsteht

$$(11.17) \quad -\nabla p + (\lambda + 2\mu + \kappa) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} - (\mu + \kappa) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \kappa \nabla \times \mathbf{n} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Aus (11.12):

$$(11.18) \quad (\alpha + \beta + \gamma) \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} - \gamma \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) + \kappa \nabla \times \mathbf{v} - 2\kappa \mathbf{n} + \rho \mathbf{b} = \rho j \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}.$$

Aus (11.13) und (11.14):

$$(11.19) \quad \rho c_v \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] T = \kappa^* \nabla^2 T - p \nabla \cdot \mathbf{v} + Q.$$

(11.15) bis (11.19) sind also die vereinfachten Grundgleichungen einer mikropolaren Flüssigkeit. Wie es COWIN (1968) in einem anderen Zusammenhang tut, beschränken wir uns ab jetzt auf eine Klasse von Strömungen der inkompressiblen polaren Flüssigkeiten, die durch folgende drei Gleichungen definiert sind.

$$(11.20) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$(11.21) \quad \nabla \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(11.22) \quad \nabla \times \left[ \rho \left( j \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{n} - \mathbf{b} \right] = 0.$$

Mit diesen Inkompressibilitätsbedingungen entsteht aus (11.17):

$$(11.23) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} - (\mu + \kappa) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \kappa \nabla \times \mathbf{n}.$$

Aus (11.18):

$$(11.24) \quad \rho \left( j \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} - \mathbf{b} \right) = -\gamma \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) + \kappa \nabla \times \mathbf{b} - 2\kappa \mathbf{n}.$$

Aus (11.19):

$$(11.25) \quad \kappa \nabla^2 \mathbf{T} + \mathbf{q} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla \right] \mathbf{T},$$

wobei folgende zwei Definitionen eingeführt wurden

$$(11.26) \quad \mathbf{k} = \frac{\kappa^*}{\rho c_{\nabla}} \quad \text{und} \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{Q}}{\rho c_{\nabla}}.$$

Nun wollen wir noch einige Umformungen vornehmen, die später von Nutzen sein werden.

Unter Verwendung von (11.22) ergibt sich aus (11.24), indem wir den Rotor bilden,

$$(11.27) \quad -\gamma \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{n} + \kappa \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{b} - 2\kappa \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0.$$

Daraus entsteht

$$(11.28) \quad (\mu + \kappa) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \gamma(1 + \mu/\kappa) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{n} + 2(\mu + \kappa) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{n}.$$

Falls das Feld der volumenproportionalen Kräfte ein Potential besitzt, d. h. falls

$$(11.29) \quad \nabla \times \mathbf{f} = 0$$

gilt, folgt aus (11.23)

$$(11.30) \quad \rho \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -(\mu + \kappa) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{b} + \kappa \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{n}.$$

Im stationären Fall folgt aus (11.27) und (11.30)

$$(11.31) \quad \left[ \operatorname{rot} \operatorname{rot} + \frac{2\mu + \kappa}{\gamma(1 + \mu/\kappa)} \right] \mathfrak{R} = 0,$$

wobei

$$(11.32) \quad \mathfrak{R} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{n}.$$

#### 11.4. Linearisierte Grundgleichungen. Reduktion des Problems auf eine gewöhnliche Differentialgleichung

Im folgenden beschränken wir uns nicht auf den stationären Fall. Auch (11.29) muß nicht notwendig erfüllt sein. Die Grundgleichungen bestehen aus (11.23), (11.24), (11.25), (11.15) und (11.16). Wir setzen eine waagrechte Schicht einer mikropolaren Flüssigkeit mit der Dicke  $h$  voraus. Die Schicht erstreckt sich in allen horizontalen Richtungen bis ins Unendliche. Die untere Grenzebene der Schicht wird auf einer konstanten Temperatur  $T_0$ , die obere auf einer konstanten Temperatur  $T_1$  gehalten, wobei  $T_0 > T_1$ . Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Nullpunkt und dessen  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinatenachsen in der unteren Grenzebene liegen. Die  $x_3$ -Achse sei der Schwerkraft  $\rho \mathbf{g}$ , die die einzige auftretende Volumenkraft  $\rho \mathbf{f}$  sei, entgegengesetzt gerichtet:

$$(11.33) \quad \mathbf{g} = (0, 0, -g).$$

Bis zu Formel (11.66) wollen wir zusätzlich noch in der Flüssigkeit Wärmequellen annehmen, die jedoch zwecks Vereinfachung ab (11.69) gleich null gesetzt wird. Bei den

Berechnungen wollen wir ferner die in der Hydrodynamik übliche Annahme machen, daß nach Überwindung des Gleichgewichtszustandes zunächst eine stationäre Strömung herrscht. Zu Beginn der Konvektion (marginal state) soll der mittlere Zustand gleich dem Gleichgewichtszustand sein. Die Variablen können dabei aufgefaßt werden als Summen von Variablen des mittleren Zustands, die durch einen Querstrich gekennzeichnet sind und die nur von  $x_3$  abhängen, und von kleinen Störungen, die im allgemeinen von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  abhängen:

$$(11.34) \quad p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'; \quad \varrho = \bar{\varrho} + \varrho'; \quad v = v; \quad n = n.$$

Im Gleichgewichtszustand gilt

$$(11.35) \quad \bar{v} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{n} = 0.$$

Aus (11.23) entsteht

$$(11.36) \quad \nabla \bar{p} = \bar{\varrho} g; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = -\bar{\varrho} g; \quad \bar{p} = g\bar{\varrho}(h - x_3) + p_1.$$

$p_1$  ist der konstante Druck, der an der Fläche  $x_3 = h$  herrscht. Aus (11.25):

$$(11.37) \quad \nabla^2 \bar{T} = -\frac{q}{k}; \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_3^2} \bar{T} = -\frac{q}{k}.$$

Daraus

$$(11.38) \quad \bar{T} = \frac{q}{2k} (x_3^2 - hx_3) - \frac{T_0 - T_1}{h} x_3 + T_0.$$

Aus (11.16):

$$(11.39) \quad \bar{\varrho} = \varrho_0 (1 - \delta(\bar{T} - T_0))$$

Ferner folgt - ebenfalls im statischen Falle - aus (11.24) und (11.35)

$$(11.40) \quad \bar{v} = 0.$$

Wir benutzen nun die Lösungen des statischen Falles, um aus den Bewegungsgleichungen die linearisierten Bewegungsgleichungen herzuleiten. In Analogie zur Oberbeck-Boussinesq-Approximation erhalten wir aus (11.23)

$$(11.41) \quad \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p' - \nabla \bar{p} + \varrho' g + \bar{\varrho} g - (\mu + \kappa) \nabla \times (\nabla \times v) + \kappa \nabla \times n.$$

Unter Benutzung von (11.36)<sub>1</sub> entsteht daraus

$$(11.42) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \nabla p' + \frac{\mu + \kappa}{\varrho_0} \nabla^2 v + \frac{\kappa}{\varrho_0} \nabla \times n + \frac{\varrho' g}{\varrho_0}.$$

Aus (11.24) und (11.40)

$$(11.43) \quad \varrho_0 \frac{\partial n}{\partial t} = \varrho' v - \gamma \nabla \times (\nabla \times n) + \kappa \nabla \times v - 2\kappa n.$$

Aus (11.25) und (11.37) ergibt sich unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$(11.44) \quad \frac{\partial}{\partial t} T' - \kappa \nabla^2 T' = -v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{T}.$$

Aus (11.16) und (11.39):

$$(11.45) \quad \varrho' = -\varrho_0 \delta T'.$$



Die Gleichungen (11.42) bis (11.45) sowie  $\nabla \cdot v = 0$  dienen zur Bestimmung von  $v$ ,  $n$ ,  $T'$ ,  $p'$ ,  $q'$ . Mit Hilfe von (11.45) eliminieren wir  $q'$  in (11.42).

$$(11.46) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\delta g T' - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 v + \frac{\kappa}{\rho_0} \nabla \times n.$$

Zwecks Elimination von  $p'$  nehmen wir von (11.46) (-rot rot):

$$(11.47) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 \right] \nabla^2 v = -\delta g (e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}) T' + \delta g e_3 \nabla_3^2 T' + \frac{\kappa}{\rho_0} \nabla^2 \nabla \times n,$$

wobei

$$(11.48) \quad \nabla_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Die 3-Komponente von (11.47) lautet

$$(11.49) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 \right] \nabla^2 v_3 = \delta g \nabla_3^2 T' + \frac{\kappa}{\rho_0} \nabla^2 e_3 \cdot (\nabla \times n).$$

In (11.49) wird mit Hilfe von (11.38)  $\bar{T}$  eliminiert:

$$(11.50) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right] T' = - \left[ \frac{g}{k} (x_3 - \frac{h}{2}) - \frac{T_0 - T_1}{h} \right] v_3.$$

Aus (11.49) wird jetzt durch (11.50) die Variable  $T'$  eliminiert:

$$(11.51) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 \right] \nabla^2 v_3 = -\delta g \left[ \frac{g}{k} (x_3 - \frac{h}{2}) - \frac{T_0 - T_1}{h} \right] \nabla_3^2 v_3 + \frac{\kappa}{\rho_0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right] \nabla^2 e_3 \cdot (\nabla \times n).$$

In den folgenden Rechnungen soll daraufhingezielt werden, die Mikrorotation  $n$  ohne Vernachlässigungen zu eliminieren. Durch Rotorbildung entsteht aus (11.47)

$$(11.52) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 \right] \nabla^2 \text{rot } v = \delta g (e_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) \nabla^2 T' - \frac{\kappa}{\rho_0} \text{rot rot rot rot } n.$$

Aus (11.28):

$$(11.53) \quad -\frac{\kappa}{\rho_0} \text{rot rot rot rot } n = \frac{\kappa^2}{\rho_0 \gamma} \nabla^2 \text{rot } v - 2 \frac{\kappa^2}{\rho_0 \gamma} \nabla^2 n.$$

Aus (11.52) und (11.53):

$$(11.54) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 - \frac{\kappa^2}{\rho_0 \gamma} \right] \nabla^2 \text{rot } v = \delta g (e_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) \nabla^2 T' - 2 \frac{\kappa^2}{\rho_0 \gamma} \nabla^2 n.$$

Aus (11.47) und (11.50):

$$(11.55) \quad \frac{2\kappa}{\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 \right] \nabla^2 v = \frac{2\kappa \delta g}{\gamma} \left[ e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - e_3 \nabla_3^2 \right] \cdot \left[ \frac{g}{k} (x_3 - \frac{h}{2}) - \frac{T_0 - T_1}{h} \right] v_3 - \frac{2\kappa^2}{\gamma \rho_0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2 \right] \text{rot rot rot } n.$$

Aus (11.54)

$$(11.56) \quad -\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\epsilon_0} \nabla^2 - \frac{\kappa^2}{\epsilon_0 \gamma} \nabla^2 \nabla^2\right] \nabla^2 \nabla^2 v_3 = g \delta \left( \epsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - \epsilon_3 \nabla_3^2 \right) \nabla^2 T' + \frac{2\kappa^2}{\epsilon_0 \gamma} \text{rot rot rot } n.$$

Aus (11.56) und (11.50):

$$(11.57) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2\right] \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\epsilon_0} \nabla^2 - \frac{\kappa^2}{\epsilon_0 \gamma} \nabla^2 \nabla^2\right] \nabla^2 \nabla^2 v_3 = g \delta \left( \epsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - \epsilon_3 \nabla_3^2 \right) \left[ \frac{q}{k} \left( x_3 - \frac{h}{2} \right) - \frac{T_0 - T_1}{h} \right] \nabla^2 v_3 - \frac{2\kappa^2}{\gamma \epsilon_0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right] \text{rot rot rot } n.$$

Durch Kombination von (11.55) und (11.57) kann man  $n$  eliminieren:

$$(11.58) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2\right] \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\epsilon_0} \nabla^2\right] \left(\nabla^2 - \frac{2\kappa}{\gamma}\right) - \frac{\kappa^2}{\epsilon_0 \gamma} \nabla^2 \right\} \nabla^2 v_3 = g \delta \left( \epsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - \epsilon_3 \nabla_3^2 \right) \left[ \frac{q}{k} \left( x_3 - \frac{h}{2} \right) - \frac{T_0 - T_1}{h} \right] \left[ \nabla^2 - \frac{2\kappa}{\gamma} \right] v_3.$$

Die 3-Komponente von (11.58) lautet

$$(11.59) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2\right] \left\{ -\frac{\mu + \kappa}{\epsilon_0} \nabla^2 \nabla^2 + \left[ \frac{\kappa}{\epsilon_0 \gamma} (2\mu + \kappa) + \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^2 - \frac{2\kappa}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \nabla^2 v_3 = -g \delta \left[ \frac{q}{k} \left( x_3 - \frac{h}{2} \right) - \frac{T_0 - T_1}{h} \right] \left[ \nabla^2 - \frac{2\kappa}{\gamma} \right] \nabla_3^2 v_3.$$

Diese Differentialgleichung enthält nur noch eine gesuchte Funktion, nämlich  $v_3$  als Funktion von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$ . Wir setzen eine separable Lösung voraus, nämlich

$$(11.60) \quad v_3 = w(x_3) f_3(x_1, x_2) e^{\sigma t}$$

mit

$$(11.61) \quad \nabla_3^2 f_3(x_1, x_2) + \frac{a^2}{h^2} f_3(x_1, x_2) = 0.$$

Aus (11.60) und (11.61) folgt

$$(11.62) \quad \nabla_3^2 v_3 = -\frac{a^2}{h^2} v_3.$$

Wir definieren

$$(11.63) \quad \zeta = \frac{x_3}{h} \quad \text{und} \quad D = \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Aus (11.62) und (11.63) ergibt sich

$$(11.64) \quad \nabla^2 v_3 = \left( \nabla_3^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_3 = \frac{1}{h^2} (D^2 - a^2) v_3.$$

Unter Benutzung von (11.60), (11.62) und (11.64) entsteht aus (11.59)

$$(11.65) \quad \left[ \sigma - \frac{k}{h^2}(D^2 - a^2) \right] \left\{ -\frac{\mu + \kappa}{e_0 h^4}(D^2 - a^2)^2 + \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\kappa}{e_0 \gamma}(2\mu + \kappa) + \sigma \right] \right. \\ \cdot (D^2 - a^2) - \frac{2\kappa}{\gamma} \sigma \left. \right\} \frac{(D^2 - a^2)}{h^2} w = \\ = g\delta \left[ \frac{q_0 h}{2k}(2\zeta - 1) - \frac{T_0 - T_1}{h} \right] \left[ \frac{(D^2 - a^2)}{h^2} - \frac{2\kappa}{\gamma} \right] \frac{a^2}{h^2} w .$$

Damit wurde das Problem auf eine Differentialgleichung zur Bestimmung von  $w = w(x_3)$  reduziert. Die Gleichung für das Einsetzen der Konvektion (marginal state) erhält man, indem man  $\sigma = 0$  setzt, wobei die Gültigkeit des Prinzips des Stabilitätsaustausches (siehe CHANDRASEKHAR, 1961) vorausgesetzt wird. Damit erhält man aus (11.65)

$$(11.66) \quad (D^2 - a^2)^3 \{ (D^2 - a^2) - k_1 \} w = - (R_1 + R_2(1 - 2\zeta)) [(D^2 - a^2) - k_2] a^2 w .$$

Gleichung (11.66) ist in dimensionslosen Variablen geschrieben. Die gesuchte Funktion ist  $w = w(\zeta)$ . In (11.66) wurden folgende neue Parameter benutzt:

$$(11.67) \quad R_1 = \frac{g\delta h^3 (T_0 - T_1) e_0}{k(\mu + \kappa)} ; \quad R_2 = \frac{g\delta q_0 h^5 e_0}{2k^2(\mu + \kappa)}$$

$$(11.68) \quad k_1 = \frac{h^2 \kappa}{\gamma} \cdot \frac{2\mu + \kappa}{\mu + \kappa} ; \quad k_2 = \frac{2\kappa h^2}{\gamma} .$$

$R_1$ ,  $R_2$ ,  $k_1$  und  $k_2$  sind dimensionslos. Wäre  $\kappa = 0$ , so wäre  $R_1$  die herkömmliche Rayleigh-Zahl. Falls die Schicht keine inneren Wärmequellen enthält, d. h. falls  $Q = 0$  ist, vereinfacht sich (11.66) auf

$$(11.69) \quad (D^2 - a^2)^3 \{ (D^2 - a^2) - k_1 \} w = - R_1 [(D^2 - a^2) - k_2] a^2 w .$$

Aus Gründen der mathematischen Einfachheit wollen wir bei der weiteren Behandlung des Stabilitätsproblems von dieser Gleichung ausgehen. Wenn man entsprechende Gleichungen für die Komponenten von  $n$  sucht, so geht man von

$$(11.70) \quad \nabla^2 \left( \nabla^2 - \frac{k_1}{h^2} \right) n = 0$$

aus. (11.70) folgt aus (11.31) und (11.32).

## 11.5. Die Lösung des Problems für eine Schicht mit festen Grenzen

### 11.5.1. Grenzbedingungen

Für das Problem der Konvektion in einer partiell geschmolzenen Langsamschicht (low-velocity layer) ist selbstverständlich der Fall mit festen, starren Grenzen am interessantesten. Für diesen Fall wollen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems in die Mitte der Schicht verschieben. Alle in diesem Unterabschnitt aufgeschriebenen Formeln sollen notwendig nur an den Grenzen  $\zeta = \pm \frac{1}{2}$  gültig sein.

$$(11.71) \quad v = 0 ; \quad n = 0 .$$

Für die Temperatur gilt an einer Randebene  $\bar{T} = \text{const}$ . Das impliziert

$$(11.72) \quad T' = 0 .$$

(11.71)<sub>1</sub> bedeutet

$$(11.73) \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0,$$

also auch

$$(11.74) \quad w = 0.$$

Aus (11.20) und (11.73) folgt

$$(11.75) \quad -\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$

Daraus folgt

$$(11.76) \quad D w = 0.$$

Aus (11.49) ergibt sich mit (11.71)<sub>2</sub> und (11.72)

$$(11.77) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu + \kappa}{\rho_0} \nabla^2 \right] \nabla^2 v_3 = 0.$$

Also gelten für unseren stationären Fall

$$(11.78) \quad \nabla^2 \nabla^2 v_3 = 0 \quad \text{und} \quad (D^2 - a^2)^2 w = 0.$$

Aus (11.27) und (11.20):

$$(11.79) \quad \text{rot rot } v = -\nabla^2 v = 2 \text{ rot } n - \frac{\chi}{\kappa} \nabla^2 \text{ rot } n.$$

Wegen (11.71)<sub>2</sub> gilt

$$(11.80) \quad \text{rot } n = -\frac{\partial n_2}{\partial x_3} e_1 + \frac{\partial n_1}{\partial x_3} e_2,$$

wobei mit  $n_1, n_2, n_3$  die entsprechenden Komponenten des Vektors  $n$  bezeichnet sind. Aus (11.79) und (11.80) folgt

$$(11.81) \quad \nabla^2 v = \left( 2 - \frac{\chi}{\kappa} \nabla^2 \right) \left( e_1 \frac{\partial n_2}{\partial x_3} - e_2 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \right).$$

Die 3-Komponente von (11.81) lautet

$$(11.82) \quad \nabla^2 v_3 = 0.$$

Daraus erhalten wir

$$(11.83) \quad (D^2 - a^2) w = 0.$$

Aus (11.74) und (11.83) folgt

$$(11.84) \quad D^2 w = 0.$$

Aus (11.78)<sub>2</sub>, (11.74) und (11.84):

$$(11.85) \quad D^4 w = 0.$$

Man kann also die Grenzbedingungen, die im Fall fester Grenzen für die Lösung von (11.69) (oder von (11.66)) zu erfüllen sind, so zusammenfassen:

$$(11.86) \quad w = D w = D^2 w = D^4 w = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = \pm \frac{1}{2}.$$

### 11.5.2. Die Lösung

Die allgemeine Lösung der Gleichung (11.69), die die Randbedingungen (11.86) erfüllt, kann als Superposition von Lösungen mit dieser Gestalt geschrieben werden:

$$(11.87) \quad w = e^{\pm \psi \zeta}.$$

$\psi^2$  ist wegen (11.69) eine Wurzel der folgenden Gleichung:

$$(11.88) \quad (\psi^2 - a^2)^3 \{ (\psi^2 - a^2) - k_1 \} = -R_1 [ (\psi^2 - a^2) - k_2 ] a^2.$$

Die acht Lösungen  $\psi$  dieser Gleichung sind nun zu suchen und in (11.87) einzusetzen. Die so entstehenden acht partikulären Lösungen von Gl. (11.69) werden mit acht Konstanten multipliziert und dann addiert. So entsteht die allgemeine Lösung von (11.69). Dann bildet man die in (11.86) vorkommenden Ableitungen der allgemeinen Lösung, aus deren Verschwinden an den Grenzflächen man die acht Konstanten bestimmt. Um nichttriviale Lösungen dieses Gleichungssystems zu bekommen, muß die Determinante der Matrix des Systems verschwinden. Aus dieser Gleichung erhält man durch numerische Methoden die Hyperfläche  $a = a(R_1, k_1, k_2)$ , aus der man das vorherrschende  $a$  (aspect ratio) für den Einsatz der Konvektion bestimmen kann. Mit Hilfe der Substitutionen

$$(11.89) \quad x = \psi^2 - a^2; \quad k_3 = R_1 a^2; \quad k_4 = R_1 a^2 k_2$$

entsteht aus (11.88)

$$(11.90) \quad x^4 - k_1 x^3 + k_3 x - k_4 = 0,$$

wobei  $k_1, k_3$  und  $k_4$  positive Konstanten sind. Mit Hilfe der Substitutionen

$$(11.91) \quad k_5 = k_1/4; \quad y = x - k_5$$

und

$$(11.92) \quad A = -6k_5^2; \quad B = k_3 - 8k_5^3; \quad C = k_5(k_3 - 3k_5^3) - k_4$$

erhalten wir aus (11.90)

$$(11.93) \quad y^4 + Ay^2 + By + C = 0.$$

Diese Gleichung lösen wir durch Eulers Methode (siehe z. B. BÜRKLEN (1898), S. 55).

Wir bilden die Resolvente:

$$(11.94) \quad z^3 + \frac{A}{2} z^2 + \frac{A^2 - 4C}{16} z - \frac{B^2}{64} = 0.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung  $z_1, z_2$  und  $z_3$ , dann erhalten wir als Lösungen von (11.93)

$$(11.95) \quad \begin{aligned} y_1 &= \pm (+\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) & ; & \quad y_2 = \pm (+\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) \\ y_3 &= \pm (-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) & ; & \quad y_4 = \pm (-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \end{aligned}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, daß

$$(11.96) \quad \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} \sqrt{z_3} = -\frac{B}{8}$$



gilt. Um (11.94) lösen zu können, wird in (11.94) durch die Substitution

$$(11.97) \quad X = z - k_5^2$$

das zweite Glied zum Verschwinden gebracht. So entsteht

$$(11.98) \quad X^3 + 3bX + 2c = 0,$$

wobei

$$(11.99) \quad 3b = \frac{1}{4}(k_4 - \frac{1}{4}k_1k_3) \quad \text{und} \quad 2c = \frac{1}{64}(k_1^2k_4 - k_3^2).$$

Die Gleichungen (11.94) und (11.98) sind einander äquivalent. Die Lösungen von (11.98) finden wir, indem wir (11.100) einführen:

$$(11.100) \quad X = u + v \quad \text{und} \quad u^3 + v^3 + 2c = 0.$$

Dann ist

$$(11.101) \quad u = \sqrt[3]{-c + \sqrt{c^2 + b^3}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-c - \sqrt{c^2 + b^3}}.$$

Wie man durch eine Abschätzung zeigen kann, gilt

$$(11.102) \quad c^2 + b^3 > 0.$$

Weil (11.102) erfüllt ist, führen die Cardanschen Formeln (11.103) zur Lösung.

$$X_1 = u + v$$

$$(11.103) \quad X_2 = -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{i}{2}\sqrt{3}(u - v)$$

$$X_3 = -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{i}{2}\sqrt{3}(u - v).$$

Indem man nun die verschiedenen Substitutionen rückgängig macht, erhält man aus (11.103) in einfacher Weise die Lösungen  $\psi$  von (11.88). Damit hat man auch - wie nach Formel (11.88) beschrieben - die allgemeine Lösung des Problems. Da das Hinschreiben sehr einfach, die Formel aber sehr lang ist, soll hier darauf verzichtet werden. Das Problem ist also analytisch gelöst. Es bleibt jedoch noch die Hyperfläche  $a = a(R_1, k_1, k_2)$  aus einer langen skalaren Gleichung mit numerischen Mitteln zu lösen, was einer späteren Arbeit vorbehalten werden muß. Die Gleichung erhält man, wie es in dem Absatz unter (11.88) beschrieben wurde, aus dem Verschwinden einer Determinante.

## 12. Konvektion in einer kompressiblen mikropolaren Flüssigkeit mit Mikrodeformation

### 12.1. Grundgleichungen

Im vorigen Abschnitt wurden die Gründe dargelegt, weshalb für die Konvektion in einer partiell, d. h. zu 1 bis 2 %, geschmolzenen Asthenosphäre eine mikropolare Flüssigkeit eingeführt wurde. Die Kristalle und die dazwischenliegenden dünnen Flüssigkeitsschichten wurden in 11. als inkompressibel angesehen. Diese Einschränkung wird jetzt fallengelassen, d. h. wir führen jetzt Deformation (stretch) und Mikrodeformation (microstretch) ein und suchen, das so verallgemeinerte Bénard-Problem zu lösen. Wir stellen zunächst die Feldgleichungen für den Geschwindigkeitsvektor, den Mikrorotationsgeschwindigkeitsvektor, die Mikrodeformationsgeschwindigkeit, das Mikroträgheitsmoment, die Dichte, die Temperatur und den Druck auf. Dieses System von elf partiellen Differentialgleichungen dient zur Bestimmung von elf unbekanntem skalaren Funktionen. Es soll auf eine möglichst weitgehende Entkopplung des Systems hingearbeitet werden.

Die Dicke der horizontalen Schicht sei mit  $h$  bezeichnet. Die untere Grenzfläche der Schicht wird auf einer konstanten Temperatur  $T_0$ , die obere auf der konstanten Temperatur  $T_1$  gehalten, wobei  $T_0 > T_1$ . Wir benutzen ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$ . Der Ursprung liege in der unteren Grenzfläche,  $x_3$  sei nach oben gerichtet. Weil die allgemeine Theorie der Mikrofluide zu viele Freiheitsgrade hat, um die Bewegungsgleichungen mit vertretbarem Aufwand lösen zu können, wollen wir eine Flüssigkeit (ERINGEN, 1969) benutzen, bei der der Zustand eines Punktes durch elf skalare Größen beschrieben wird. Neu ist die Benutzung dieser Flüssigkeit in einem Konvektionsproblem. Der Mikroträgheitstensor  $i_{kl}$  habe folgende Form

$$(12.1) \quad i_{kl} = \frac{1}{2} j \delta_{kl}$$

wobei

$$(12.2) \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

$j$  ist eine skalare Größe, d. h. die Flüssigkeit ist mikroisotrop. Der Gyrationstensor  $n_{kl}$  habe 4 anstatt 9 skalare Funktionen:

$$(12.3) \quad n_{kl} = n \delta_{kl} + e_{klr} n_r,$$

wobei

$$(12.4) \quad e_{klr} = \begin{cases} 1 & \text{für } (klr)^{\text{zykl.}} = (1\ 2\ 3) \\ -1 & \text{für } (klr)^{\text{zykl.}} = (1\ 3\ 2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$n$  oder  $n_r$  bezeichne den Mikrorotationsgeschwindigkeitsvektor,  $n$  die Mikrodeformationsgeschwindigkeit. Abb. 12.1 veranschaulicht die Bedeutung dieser Größen. In der Zeit  $t$  bewegt sich der Punkt  $R$  nach  $r$ , der Punkt  $R'$  nach  $r'$ . Der Vektor  $\vec{\xi}(t)$  oder  $\vec{\xi}_k(t)$  ist die Mikrobewegung (micromotion):

$$(12.5) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) \vec{\xi} = n_{kl} \xi_k e_l = n \xi_1 e_1 + n \times \vec{\xi}.$$

Vektoren sind durch deutsche Buchstaben oder durch Pfeile über den Buchstaben bezeichnet.  $v$  oder  $v_r$  ist die Geschwindigkeit,  $e_1$  ist der Einheitsvektor in 1-Richtung.

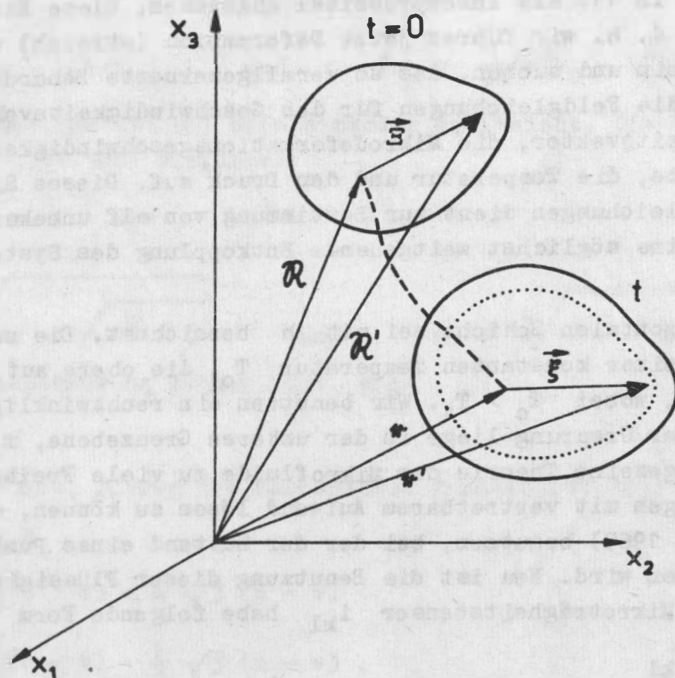


Abb. 12.1 Translation, Rotation und Mikrodeformation eines Elements einer kompressiblen mikropolaren Flüssigkeit

Gl. (12.5) zeigt, daß die totale Zeitableitung von  $\vec{\xi}$  in einen isotropen Mikrodeformations- und einen Mikrorotationsanteil zerlegt werden kann. Die Mikrorotationsgeschwindigkeit ist im allgemeinen nicht gleich dem klassischen Wirbelfeld  $\omega_r$ .

$$(12.6) \quad \omega_r = \frac{1}{2} \epsilon_{rkl} v_{l,k}$$

Als Abkürzung verwenden wir die Vereinbarung, daß, falls einem Index ein Komma und z. B. der Buchstabe  $k$  folgt, die Größe partiell nach der Ortskoordinate  $x_k$  abgeleitet wird, also:

$$(12.7) \quad v_{l,k} = \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$$

Es folgen die Grundgleichungen einer kompressiblen mikropolaren Flüssigkeit. Erhaltung der Masse:

$$(12.8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Erhaltung des Mikroträgheitsmoments:

$$(12.9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla\right) j - 2nj = 0,$$

$$(12.10) \quad (\alpha + \beta)\nabla\nabla \cdot n + \gamma\nabla^2 n + \kappa\nabla \times v - 2\kappa n + \rho b = \rho j \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla\right) n,$$

$$(12.11) \quad \alpha_0 \nabla^2 n - (\eta_0 - \lambda_0)n + \rho d^* = \frac{1}{2} \rho j \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla\right) n.$$

Energieerhaltung:

$$(12.12) \quad \rho c_v \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) T = - p d_{kk} + \lambda_0 n d_{kk} + \lambda d_{kk} d_{ll} + (2\mu + \kappa) d_{kl} d_{lk} +$$

$$+ 3(\eta_0 - \lambda_0) n^2 + 3\alpha_0 n_{,k} n_{,k} + (3\alpha_1 + \beta_0) e_{klr} n_{l,k} n_{r,k} + 2\kappa(\omega_k - n_k)(\omega_k - n_k) +$$

$$+ \alpha n_{k,k} n_{l,l} + \beta n_{k,l} n_{l,k} + \gamma n_{l,k} n_{l,k} + \kappa^* T_{,kk} + Q.$$

Impulserhaltung:

$$(12.13) \quad -\nabla p + \lambda_0 \nabla n + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot v + (\mu + \kappa)\nabla^2 v + \kappa\nabla \times n + \rho f = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla\right) v.$$

Zustandsgleichung:

$$(12.14) \quad \rho = \rho_0 [1 - \delta(T - T_0)].$$

Der Fluss der Deformationsspannung wird mit  $d_{kl}$  bezeichnet.

$$(12.15) \quad d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}).$$

Dabei bedeutet  $\rho$  Dichte,  $T$  absolute Temperatur,  $p$  Druck,  $f$  spezifische volumenproportionale Kraft,  $b$  spezifisches volumenproportionales Drehmoment, welches der Mikrorotation  $n$  zugeordnet ist,  $d^*$  spezifisches volumenproportionales Moment, welches der Mikrodeformation  $n$  zugeordnet ist,  $c_v$  spezifische Wärme bei konstantem Volumen,  $\kappa^*$  Wärmeleitfähigkeit,  $Q$  Wärmeleistungsdichte,  $\alpha$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\eta_0$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_0$ ,  $\mu$  Viskositätskonstanten,  $\delta$  thermischer Ausdehnungskoeffizient,  $\rho_0$  Dichte bei  $T_0$ .

(12.8) bis (12.14) sind elf skalare Gleichungen zur Bestimmung von elf skalaren Unbekannten:  $v_k$ ,  $n_k$ ,  $n$ ,  $j$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ . Im Gegensatz zur inkompressiblen mikromorphen Flüssigkeit treten hier  $n$  und  $j$  als neue gesuchte Funktionen auf.  $f$ ,  $b$  und  $d^*$  sind gegeben. Wegen des Zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre gelten nach ERINGEN (1969) und ERDOGAN (1972) folgende Ungleichungen für die Stoffkonstanten:

$$(12.16) \quad \left. \begin{array}{l} 3\lambda + 2\mu + \kappa \geq 0; \quad 2\mu + \kappa \geq 0; \quad \kappa \geq 0 \\ 3\alpha + \beta\gamma \geq 0; \quad -\gamma \leq \beta \leq \gamma; \quad \gamma \geq 0 \end{array} \right\} \text{wobei } T \neq 0$$

und

$$(12.17) \quad \alpha_0 \geq 0; \quad \eta_0 - \lambda_0 \geq 0; \quad (\eta_0 - \lambda_0)(3\lambda + 2\mu + \kappa) \geq \frac{\lambda_0^2}{4}.$$

Wir führen nun einige gut gerechtfertigte Vereinfachungen ein: Die Größen  $v$ ,  $n$  und  $n$  sind in der Asthenosphäre so klein, daß wir ihre quadratischen und gemischt quadratischen Glieder vernachlässigen dürfen. Deshalb lassen wir die in den Formeln (12.10) bis (12.13) unterstrichenen Glieder weg. Ferner sollen realistischerweise  $b$  und  $d^*$

verschwinden.  $f$  sei gleich  $g$ , es wirke also nur die Schwerebeschleunigung. Deshalb kann man die Grundgleichungen (12.8) bis (12.14) durch (12.18) bis (12.24) ersetzen

$$(12.18) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + v \cdot \nabla \varrho + \varrho \nabla \cdot v = 0,$$

$$(12.19) \quad \frac{\partial j}{\partial t} + v \cdot \nabla j - 2 n j = 0,$$

$$(12.20) \quad (\alpha + \beta) \nabla \nabla \cdot n + \gamma \nabla^2 n + \kappa \nabla \times v - 2 \mu n = e j \frac{\partial n}{\partial t},$$

$$(12.21) \quad \alpha_0 \nabla^2 n - (\eta_0 - \lambda_0) n = \frac{1}{2} e j \frac{\partial n}{\partial t},$$

$$(12.22) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T = -c_p \nabla \cdot v + k \nabla^2 T + q,$$

$$(12.23) \quad -\nabla p + \lambda_0 \nabla n + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot v + (\mu + \kappa) \nabla^2 v + \kappa \nabla \times n + e g = e \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$(12.24) \quad e = e_0 [1 - \delta(T - T_0)],$$

wobei

$$(12.25) \quad c = \frac{1}{\varrho c_v}; \quad k = \frac{\kappa^*}{\varrho c_v}; \quad q = \frac{Q}{\varrho c_v}.$$

## 12.2. Linearisierte Grundgleichungen

Wie es auch bei herkömmlichen Flüssigkeiten üblich ist, nehmen wir an, daß die Strömung nach Einsatz der Konvektion stationär ist. Beim Einsatz (marginal state) sei der mittlere Zustand gleich dem Gleichgewichtszustand, d. h. alle Größen seien als Summe einer nur von  $x_3$  abhängigen statischen Größen und einer kleinen Störung darstellbar, wobei die Störung von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  abhängt. Die statischen Größen werden durch einen Querstrich markiert:

$$(12.26) \quad p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'; \quad e = \bar{e} + e'; \\ v = v; \quad n = n; \quad n = n.$$

Im Gleichgewicht gibt es per definitionem keine Bewegung:

$$(12.27) \quad v = 0; \quad n = 0; \quad n = 0.$$

Damit folgt aus (12.22):

$$(12.28) \quad \nabla^2 \bar{T} = -\frac{q}{k}; \quad \frac{d^2}{dx_3^2} \bar{T} = -\frac{q}{k},$$

$$(12.29) \quad \bar{T} = \frac{q}{2k} (hx_3 - x_3^2) - \frac{T_0 - T_1}{h} x_3 + T_0.$$

Aus (12.23) und (12.27) ergibt sich

$$(12.30) \quad \nabla \bar{p} = \bar{e} g; \quad \frac{d\bar{p}}{dx_3} = -\bar{e} g; \quad \bar{p} = \bar{e} g (h - x_3) + p_1$$

wobei  $g = -ge_3$ . Der konstante Druck an der Oberfläche der Schicht heiße  $p_1$ . Aus (12.24) und (12.27) erhalten wir



$$(12.31) \quad \bar{e} = e_0 [1 - \delta(\bar{T} - T_0)] .$$

Die anderen Gleichungen werden trivialerweise durch (12.27) erfüllt. Die Relationen (12.27), (12.29), (12.30)<sub>3</sub> und (12.31) sind die Lösungen des statischen Falles. Um die linearisierten Grundgleichungen zu bekommen, setzen wir (12.26) in (12.18) bis (12.24) ein, wobei die Gleichgewichtslösungen bekannt sind:

$$(12.32) \quad \frac{\partial \bar{e}'}{\partial t} + v \cdot \nabla \bar{e} + \bar{e} \nabla \cdot v = 0 ,$$

$$(12.33) \quad \frac{\partial j}{\partial t} + v \cdot \nabla j - 2nj = 0 ,$$

$$(12.34) \quad (\alpha + \beta) \nabla \nabla \cdot n + \gamma \nabla^2 n + \kappa \nabla \times v - 2\kappa n = \bar{e} j \frac{\partial n}{\partial t} ,$$

$$(12.35) \quad \nabla^2 n = v^2 n + \frac{1}{2\alpha_0} \bar{e} j \frac{\partial n}{\partial t} ,$$

$$(12.36) \quad \frac{\partial T'}{\partial t} + v \cdot \nabla T = -c_p \nabla \cdot v + \kappa \nabla^2 T' ,$$

$$(12.37) \quad -\nabla p' + \lambda_0 \nabla n + e' g + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot v + (\mu + \kappa) \nabla^2 v + \kappa \nabla \times n = \bar{e} \frac{\partial v}{\partial t} ,$$

$$(12.38) \quad e' = -e_0 \delta T'$$

$v^2$  ist durch

$$(12.39) \quad v^2 = \frac{\eta_0 - \lambda_0}{\alpha_0}$$

definiert. Es ist wegen (12.17) positiv, falls  $\alpha_0 > 0$ . In (12.32) und (12.34) bis (12.37) vernachlässigt man alle Produkte der kleinen Störungen  $p'$ ,  $T'$ ,  $e'$ ,  $v$ ,  $n$  und  $n$ . In (12.36) wurden durch (12.28)<sub>1</sub>, in (12.37) durch (12.30)<sub>1</sub> Glieder eliminiert. Ab jetzt wollen wir uns auf den stationären Fall beschränken. Aus (12.32) bis (12.38) erhalten wir das System der linearisierten Grundgleichungen:

$$(12.40) \quad v \cdot \nabla \bar{e} + \bar{e} \nabla \cdot v = 0 ,$$

$$(12.41) \quad v \cdot \nabla j = 2nj ,$$

$$(12.42) \quad (\alpha + \beta + \gamma) \nabla \nabla \cdot n - \gamma \nabla \times (\nabla \times n) + \kappa \nabla \times v - 2\kappa n = 0 ,$$

$$(12.43) \quad [\nabla^2 - v^2] n = 0 ,$$

$$(12.44) \quad \kappa \nabla^2 T' = v_3 \frac{d}{dx_3} \bar{T} + c_p \nabla \cdot v ,$$

$$(12.45) \quad e_0 \delta g T' e_3 - \nabla p' + \lambda_0 \nabla n + (\lambda + 2\mu + \kappa) \nabla \nabla \cdot v - (\mu + \kappa) \text{rot rot } v + \kappa \nabla \times n = 0 .$$

(12.45) folgt aus (12.37), indem man  $e'$  mit Hilfe von (12.38) eliminiert. Die Gleichungen (12.32) bis (12.38) bilden ein System von elf partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung von elf unbekannt Funktionen:  $v$ ,  $n$ ,  $n$ ,  $j$ ,  $e'$ ,  $T'$ ,  $p'$ .

### 12.3. Reduktion des Problems auf eine gewöhnliche Differentialgleichung und Diskussion der Lösung

Wie bereits mit (12.45) begonnen, wollen wir das System jetzt schrittweise entkoppeln. Zur Elimination von  $p'$  lassen wir jetzt  $(-\text{rot rot})$  auf (12.45) wirken.

$$(12.46) \quad -e_0 g \delta (e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}) T' + e_0 g \delta e_3 \nabla_3^2 T' + (\mu + \kappa) \text{rot rot rot rot } v - \kappa \text{rot rot rot } n = 0,$$

wobei

$$(12.47) \quad \nabla_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Wir nehmen an, daß die Divergenz der Mikrorotation verschwindet:

$$(12.48) \quad \nabla \cdot n = 0.$$

Durch Rotorbildung erhalten wir aus (12.42) und (12.48)

$$(12.49) \quad -\gamma \text{rot rot rot } n + \kappa \text{rot rot } v - 2\kappa \text{rot } n = 0,$$

$$(12.50) \quad -\kappa \text{rot rot rot rot } n = -\frac{2\kappa^2}{\gamma} \nabla^2 n - \frac{\kappa^2}{\gamma} \text{rot rot rot } v.$$

Aus (12.40) folgt

$$(12.51) \quad -\nabla \cdot v = \frac{v \cdot \nabla \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = v_3 \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3}.$$

Aus (12.44) und (12.51)

$$(12.52) \quad -k \nabla^2 T' = v_3 \left[ c \bar{p} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} - \frac{d \bar{T}}{dx_3} \right].$$

Durch Rotorbildung folgt aus (12.46)

$$(12.53) \quad -(\mu + \kappa) \text{rot rot rot rot rot } v = e_0 g \delta (e_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) \nabla^2 T' - \kappa \text{rot rot rot rot } n.$$

Aus (12.50) und (12.53)

$$(12.54) \quad [-(\mu + \kappa) \text{rot rot} + \frac{\kappa^2}{\gamma}] \text{rot rot rot } v = e_0 g \delta (e_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) \nabla^2 T' - \frac{2\kappa^2}{\gamma} \nabla^2 n.$$

Wir lassen den Operator  $(-k \nabla^2)$  auf (12.46) wirken und kombinieren diese Gleichung mit (12.52) und (12.48):

$$(12.55) \quad k(\mu + \kappa) \text{rot rot rot rot } \nabla^2 v = e_0 g \delta \left[ e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - e_3 \nabla_3^2 \right] \left[ \frac{d \bar{T}}{dx_3} - c \bar{p} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} \right] v_3 - \kappa \nabla^2 \nabla^2 \text{rot } n.$$

Der Rotor von (12.54) ergibt

$$(12.56) \quad [-(\mu + \kappa) \operatorname{rot} \operatorname{rot} + \frac{\kappa^2}{\gamma}] \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} v = \\ = e_0 g_0^6 (e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - e_3 v_3^2) v^2 n - \frac{2\kappa^2}{\gamma} v^2 \operatorname{rot} n .$$

Aus (12.56) und (12.52):

$$(12.57) \quad [-(\mu + \kappa) \operatorname{rot} \operatorname{rot} + \frac{\kappa^2}{\gamma}] \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} v^2 v = \\ = \frac{e_0 g_0^6}{k} (e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - e_3 v_3^2) v^2 [\frac{d\bar{T}}{dx_3} - c\bar{p} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3}] v_3 - \frac{2\kappa^2}{\gamma} v^2 v^2 \operatorname{rot} n .$$

Wir multiplizieren (12.55) mit  $2\kappa/\gamma k$  und subtrahieren hiervon (12.57).

$$(12.58) \quad [(\mu + \kappa) \operatorname{rot} \operatorname{rot} + \kappa \frac{2\mu + \kappa}{\gamma}] \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} v^2 v = \\ = \frac{e_0 g_0^6}{k} (e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - e_3 v_3^2) [v^2 - \frac{2\kappa}{\gamma}] [c\bar{p} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} - \frac{d\bar{T}}{dx_3}] v_3 .$$

Damit wurde die Mikrorotation  $n$  eliminiert. Unter Verwendung von (12.51) wird jetzt (12.58) umgeformt.

$$(12.59) \quad [-(\mu + \kappa) v^2 + \kappa \frac{2\mu + \kappa}{\gamma}] v^2 v^2 [v^2 v + v (\frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} v_3)] = \\ = \frac{e_0 g_0^6}{k} (e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - e_3 v_3^2) [v^2 - \frac{2\kappa}{\gamma}] [c\bar{p} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} - \frac{d\bar{T}}{dx_3}] v_3 .$$

Die 3-Komponente davon lautet

$$(12.60) \quad [-(\mu + \kappa) v^2 + \kappa \frac{2\mu + \kappa}{\gamma}] v^2 v^2 [v^2 + (\frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3}) \frac{\partial}{\partial x_3} + \\ + (\frac{d^2 \ln \bar{\rho}}{dx_3^2})] v_3 = - \frac{e_0 g_0^6}{k} [v^2 - \frac{2\kappa}{\gamma}] [c\bar{p} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} - \frac{d\bar{T}}{dx_3}] v_3^2 v_3 .$$

Aus (12.60) bestimmt man  $v_3$ , aus (12.43) ergibt sich  $n$ . Falls  $j$  nur von  $x_3$  abhängt, folgt aus (12.41)

$$(12.61) \quad \frac{d \ln j}{dx_3} = \frac{2n}{v_3} \quad \text{und} \quad j = \exp(\int \frac{2n}{v_3} dx_3) .$$

Hieraus folgt  $j$ , wenn  $v_3$  und  $n$  schon berechnet wurde. Im allgemeinen hängt jedoch  $j$  nicht nur von  $x_3$ , sondern auch von  $x_1$  und  $x_2$  ab.  $v_1$  wird aus der 1-Komponente von (12.59) und aus  $v_3$ ,  $v_2$  wird aus der 2-Komponente von (12.59) und aus  $v_3$  bestimmt. Die nunmehr bekannten Funktionen  $n$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  werden in (12.41) eingesetzt, woraus  $j$  bestimmt werden kann.

Wir wollen nun die entscheidende Differentialgleichung (12.60) der Lösung näherführen. Aus (12.60), (12.29), (12.30)<sub>3</sub> und (12.31) ergibt sich

$$(12.62) \quad [(\mu + \kappa) v^2 - \kappa \frac{2\mu + \kappa}{\gamma}] v^2 v^2 [v^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + f_2] v_3 = - \frac{e_0 g_0^6}{k} [v^2 - \frac{2\kappa}{\gamma}] f_3 v_3^2 v_3 ,$$

wobei

$$(12.63) \quad f_1 = f_1(x_3) = -\delta \frac{e_0}{\rho} \frac{d\bar{T}}{dx_3},$$

$$(12.64) \quad f_2 = f_2(x_3) = \delta \frac{e_0}{\rho} \left( \frac{g}{k} - \delta \frac{e_0}{\rho} \left( \frac{d\bar{T}}{dx_3} \right)^2 \right),$$

$$(12.65) \quad f_3 = f_3(x_3) = \left\{ 1 + c\delta e_0 [g(h - x_3) + \frac{p_1}{\rho}] \right\} \frac{d\bar{T}}{dx_3}$$

und

$$(12.66) \quad \bar{e} = e_0 \left\{ 1 - \delta \left[ \frac{g}{2k} (hx_3 - x_3^2) - \frac{T_0 - T_1}{h} x_3 \right] \right\},$$

$$(12.67) \quad \frac{d\bar{T}}{dx_3} = \frac{g}{k} \left( \frac{h}{2} - x_3 \right) - \frac{T_0 - T_1}{h}.$$

Wir nehmen für (12.62) eine separable Lösung an:

$$(12.68) \quad v_3 = w(x_3) f(x_1, x_2)$$

mit

$$(12.69) \quad \nabla_3^2 f(x_1, x_2) + \frac{a^2}{h^2} f(x_1, x_2) = 0.$$

Die Größe  $a/\pi$  erweist sich als das Verhältnis von Höhe zu Breite einer geschlossenen Stromlinie. Aus (12.68) und (12.69) folgt

$$(12.70) \quad \nabla_3^2 v_3 = -\frac{a^2}{h^2} v_3.$$

Wir definieren

$$(12.71) \quad \zeta = \frac{x_3}{h} \quad \text{und} \quad D = \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Aus (12.70) und (12.71):

$$(12.72) \quad \nabla^2 v_3 = \left( \nabla_3^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_3 = \frac{1}{h^2} (D^2 - a^2) v_3.$$

Aus (12.62):

$$(12.73) \quad \left[ \nabla^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + f_2 \right] \left[ (\mu + \kappa) \nabla^2 - \kappa \frac{2\mu + \kappa}{\gamma} \nabla^2 \nabla^2 v_3 + \right. \\ \left. + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \left[ (\mu + \kappa) \nabla^2 - \kappa \frac{2\mu + \kappa}{\gamma} \nabla^2 \nabla^2 v_3 \right] + v_3 \left[ (\mu + \kappa) \nabla^2 - \kappa \frac{2\mu + \kappa}{\gamma} \nabla^2 \nabla^2 v_3 \right] \right] = \\ = -\frac{e_0 g \delta}{k} f_3 \left[ \nabla^2 - \frac{2\kappa}{\gamma} \nabla^2 v_3 \right] - \frac{e_0 g \delta}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \nabla_3^2 v_3 \left[ \nabla^2 - \frac{2\kappa}{\gamma} \right] f_3.$$

Setzt man den Ansatz (12.68) in (12.73) ein und multipliziert man mit  $h^8/(\mu + \kappa)$ , so erhält man

$$(12.74) \quad \left[ (D^2 - a^2) + f_4 D + f_5 \right] \left[ (D^2 - a^2) - k_1 \right] (D^2 - a^2)^2 w + \\ + f_6 D w + f_7 w = R_1 \{ f_8 [(D^2 - a^2) - k_2] + f_9 \} a^2 w,$$

wobei

$$(12.75) \quad f_4 = f_4(x_3) = hf_1(x_3),$$

$$(12.76) \quad f_5 = f_5(x_3) = h^2 f_2(x_3),$$

$$(12.77) \quad f_6 = f_6(x_3) = h[D^2 - k_1]D^4 f_1(x_3),$$

$$(12.78) \quad f_7 = f_7(x_3) = h^2[D^2 - k_1]D^4 f_2(x_3),$$

$$(12.79) \quad f_8 = f_8(x_3) = \frac{hf_3(x_3)}{T_0 - T_1},$$

$$(12.80) \quad f_9 = f_9(x_3) = \frac{h}{T_0 - T_1} [D^2 - k_2]f_3(x_3)$$

und

$$(12.81) \quad R_1 = \frac{g\delta h^3(T_0 - T_1)e_0}{k(\mu + \kappa)},$$

$$(12.82) \quad k_1 = \frac{\kappa}{\gamma} \frac{2\mu + \kappa}{\mu + \kappa} h^2; \quad k_2 = \frac{2\kappa}{\gamma} h^2.$$

$R_1$ ,  $k_1$  und  $k_2$  sind dimensionslose Konstanten. Für verschwindendes  $\kappa$  wäre  $R_1$  die herkömmliche Rayleigh-Zahl. Alle Größen in (12.74) sind dimensionslos. Der Herleitung von (12.74) bedeutet eine Reduktion des Problems auf eine gewöhnliche Differentialgleichung achter Ordnung für  $w$  als Funktion von  $\zeta$ . (12.74) bietet einen günstigen Ausgangspunkt für eine numerische Lösung des Problems. Diese Gleichung ist analytisch nicht lösbar, weil die Funktionen  $f_4, \dots, f_9$  noch von  $\zeta$  abhängen. In 11. wurde gezeigt, wie in dem Sonderfall einer inkompressiblen mikropolaren Flüssigkeit ohne Mikrodeformation und ohne innere Wärmequellen die analytische Lösung und ihre den Randbedingungen entsprechenden Konstanten gefunden werden können. Falls die inneren Wärmequellen in unserem allgemeineren Fall (Abschnitt 12.) verschwinden, ergeben sich einfachere Ausdrücke für  $f_4, \dots, f_9$ :

$$(12.83) \quad f_4 = [\zeta + \delta^{-1}(T_0 - T_1)^{-1}]^{-1},$$

$$(12.84) \quad f_5 = -[\zeta + \delta^{-1}(T_0 - T_1)^{-1}]^{-2},$$

$$(12.85) \quad f_6 = [D^2 - k_1]D^4[\zeta + \delta^{-1}(T_0 - T_1)^{-1}]^{-1},$$

$$(12.86) \quad f_7 = -[D^2 - k_1]D^4[\zeta + \delta^{-1}(T_0 - T_1)^{-1}]^{-2},$$

$$(12.87) \quad f_8 = -\left\{1 + c\delta e_0[gh(1 - \zeta) + \frac{P_1}{e_0(1 + \delta(T_0 - T_1)\zeta})]\right\},$$

$$(12.88) \quad f_9 = -[D^2 - k_2]\left\{1 + c\delta e_0[gh(1 - \zeta) + \frac{P_1}{e_0(1 + \delta(T_0 - T_1)\zeta})]\right\}.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß (12.74) für eine kompressible mikropolare Flüssigkeit mit Mikrodeformation selbst ohne innere Wärmequellen nicht analytisch lösbar ist, weil die  $f_4, \dots, f_9$  noch von  $\zeta$  abhängen. Das Hauptproblem, nämlich die Reduktion des Systems



[(12.8) bis (12.14)] von elf partiellen Differentialgleichungen mit elf unbekanntenen Funktionen und vier unabhängigen Variablen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer gesuchten Funktion wurde jedoch gelöst.

Abschließend wollen wir die Randbedingungen für  $w$  herleiten. Es ist klar, daß für eine Anwendung auf die Konvektion in der Asthenosphäre der Fall fester Grenzen am wichtigsten ist, deshalb wollen wir ihn hier ausschließlich voraussetzen. Die Formeln (12.89) bis (12.95) und (12.97) bis (12.98) gelten nur für die Grenzen  $\zeta = 0$  und  $\zeta = 1$ .

$$(12.89) \quad v = 0; \quad n = 0; \quad n = 0.$$

Weil die Temperatur an den Grenzflächen konstant bleiben soll, gilt

$$(12.90) \quad T' = 0.$$

Aus (12.89)<sub>1</sub>:

$$(12.91) \quad w = 0.$$

Aus (12.90) folgt  $\bar{T} = \text{const.}$  Daraus und aus (12.31) ergibt sich  $\bar{\rho} = \text{const.}$  Daraus, aus (12.40) und (12.89)<sub>1</sub> erhält man

$$(12.92) \quad D w = 0.$$

Aus (12.89)<sub>2</sub>:

$$(12.93) \quad \text{rot } n = -\frac{\partial n_2}{\partial x_3} e_1 + \frac{\partial n_1}{\partial x_3} e_2.$$

Aus (12.46), (12.48), (12.90) und (12.93):

$$(12.94) \quad 0 = e_3 \cdot (\text{rot rot rot rot } v) = \nabla^2 \nabla^2 v_3 + \nabla^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} v_3 \right)$$

Wegen  $\frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0$  und  $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_2} = 0$  gilt

$$(12.95) \quad \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} v_3 + \frac{\partial^3}{\partial x_3^3} \left( \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} v_3 \right) = 0.$$

Aus (12.48) und (12.49):

$$(12.96) \quad \text{rot rot } v = \left( 2 - \frac{\gamma}{\kappa} \nabla^2 \right) \text{rot } n.$$

Aus (12.51), (12.93) und (12.96):

$$(12.97) \quad e_3 \cdot \text{rot rot } v = e_3 \cdot (\nabla \nabla \cdot v - \nabla^2 v) = -e_3 \cdot \left[ \nabla \left( v_3 \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} \right) + \nabla^2 v \right] = 0,$$

$$(12.98) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} v_3 \right) = 0.$$

Wir wollen nun an der unteren bzw. oberen Grenze einige Ableitungen bilden:

$$(12.99) \quad \left. \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} \right|_{\zeta=0} = h^{-1} A_0 ; \quad \left. \frac{d \ln \bar{\rho}}{dx_3} \right|_{\zeta=1} = h^{-1} A_1 ,$$

$$(12.100) \quad \left. \frac{d^2 \ln \bar{\rho}}{dx_3^2} \right|_{\zeta=0} = h^{-2} B_0 ; \quad \left. \frac{d^2 \ln \bar{\rho}}{dx_3^2} \right|_{\zeta=1} = h^{-2} B_1 ;$$

$$(12.101) \quad \left. \frac{d^4 \ln \bar{\rho}}{dx_3^4} \right|_{\zeta=0} = h^{-4} C_0 ; \quad \left. \frac{d^4 \ln \bar{\rho}}{dx_3^4} \right|_{\zeta=1} = h^{-4} C_1 .$$

Die durch diese drei Gleichungen definierten Größen  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $C_0$  und  $C_1$  sind dimensionslose Konstanten, z. B.

$$(12.102) \quad A_0 = \delta \left\{ (T_0 - T_1) - \frac{qh^2}{2k} \right\}$$

und

$$(12.103) \quad A_1 = \frac{(T_0 - T_1) + qh^2/(2k)}{(T_0 - T_1) + \delta^{-1}} .$$

Durch diese sechs Konstanten können die Gleichungen (12.98) und (12.95) wie folgt umgeformt werden:

$$(12.104) \quad D^2 w + A_\zeta D w + B_\zeta w = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = 1 ,$$

$$(12.105) \quad D^4 w + A_\zeta D^3 w + C_\zeta w = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = 1 .$$

Damit können die Randbedingungen, die die Lösung  $w$  von (12.74) an den Grenzen  $\zeta = 0$  und  $\zeta = 1$  erfüllen muß, so zusammengefaßt werden:

$$(12.106) \quad w = D w = (D^2 + A_\zeta D + B_\zeta) w = (D^4 + A_\zeta D^3 + C_\zeta) w = 0 .$$

Im Sonderfall einer inkompressiblen mikropolaren Flüssigkeit ohne innere Wärmequellen verschwinden die sechs Konstanten  $A_\zeta$ ,  $B_\zeta$  und  $C_\zeta$ .

### 13. Nicht-Newton'sche Mantelkonvektion

#### 13.1. Motivation

PARMENTIER u. a. (1976) und WALZER (1977) untersuchten die Möglichkeit, daß der Mantelkonvektion nicht das Stoffgesetz einer Newton'schen Flüssigkeit zugrunde liegt (vgl. auch TURCOTTE, 1979). Es boten sich nichtlineare Stoffgesetze an, die aus Laborversuchen her gut gesichert sind. Ein etwas erstaunliches Ergebnis ist, daß sich viele Folgerungen nicht wesentlich von denen mit einer Newton'schen Flüssigkeit gewonnenen unterscheiden. Hier soll im wesentlichen die neue Theorie entwickelt werden.

Doch vorab einiges zur Motivation: Die Vorstellung von Massenströmungen im Erdmantel geht auf die Verschluckungshypothese Otto AMPFERERS (1906) zurück. In den Alpen konnte man feststellen, daß die gefalteten Sedimente geglättet eine bedeutend größere Fläche bedecken würden als das kristalline Grundgebirge. AMPFERER schloß daraus, daß dieses in den Narbenzonen nach unten abgeströmt sein müsse. Der erste, der die Orogenese durch thermische Konvektion im Erdmantel zu erklären suchte, war Robert SCHWINNER (1919). Obwohl es sich dabei hauptsächlich um qualitative Überlegungen handelt, ist es doch erstaunlich, wie viele Ideen zur Mantelkonvektion er bereits vorwegnahm, die erst Jahrzehnte später wieder aufgegriffen wurden. Auch war wegen der damals in der Geologie herrschenden Kontraktionslehre der Boden für das Wachstum solcher Ideen nicht günstig. Diese Lage änderte sich entscheidend durch die Entdeckung des erdumspannenden ozeanischen Grabensystems (rift system) und durch die Entwicklung der Paläomagnetik, was eine Wiederbelebung von Alfred WEGENERS (1920) Idee von der Kontinentaldrift zur Folge hatte. Um die Verschiebung der kontinentalen und ozeanischen Lithosphärenplatten sowie die Größe des Wärmestromes der Erde zu erklären, wurden verschiedene Konvektionsmodelle entwickelt. Dabei bezogen sich die meisten Untersuchungen auf Bénard-Konvektion oder Abwandlungen davon. Während man in jüngster Zeit zur Erklärung der Verschiebung und des Subduktionsmechanismus der Platten auch andere Konvektionsmechanismen in Erwägung zieht, kommt man zur Erklärung des Erdwärmestroms nicht umhin, den größten Teil der Wärmeabfuhr durch Bénard-Konvektion zu erklären, weil die kleinen Gitter- und Strahlungswärmeleitfähigkeiten der Mantelgesteine nur einen kleinen Teil des ozeanischen Wärmestromes zu erklären gestatten (RICHTER und PARSONS, 1975; MCKENZIE und WEISS, 1975, vgl. 9.1.).

Mit Mitteln der Kontinuumsmechanik und darin wurzelnden numerischen Methoden wurden verschiedene Aspekte der Mantelkonvektion untersucht. Dabei setzte man bis in die jüngste Zeit meist ein lineares Stoffgesetz, d. h. eine Newton'sche Flüssigkeit, voraus. Die Gründe für die Vorherrschaft dieses Stoffgesetzes sind mehr mathematischer als sachlicher Natur: Die Linearität bedeutet eine wesentliche Vereinfachung; z. B. ist der Superpositionssatz für Lösungen der linearisierten Differentialgleichungen anwendbar. Erste Schritte des Verfassers, neue Stoffgesetze für die Mantelkonvektion auszuprobieren, sind in 11. und 12. dargestellt. Ausgehend von einer möglichen Mikrostruktur der partiell, d. h. zu 1 bis 2 %, geschmolzenen Langsamschicht des oberen Mantels (siehe STOCKER und ASHBY, 1973) wurde als Modell eine mikropolare Flüssigkeit eingeführt.

Doch auch für die völlig ungeschmolzenen Teile des Mantels dürfte die Newton'sche Flüssigkeit nur eine erste Näherung für das Gesteinskriechen sein: Von festkörperphysikalischen Betrachtungen ausgehend diskutieren OROWAN (1965) und STACEY (1969) einige

nichtlineare Stoffgesetze für den Mantel. WEERTMAN (1970) findet, daß für niedrige Spannungen ( $< 10^{-2}$  bar) Nabarro-Herring-Kriechen entscheidend ist, welches auf eine Newtonsche Flüssigkeit als Stoffgesetz führt, während für die Mäntel der terrestrischen Planeten Versetzungs-Gleitkriechen (creep controlled by dislocation glide) vorherrscht. Das ergibt ein Potenzgesetz, nach dem die Deformationsgeschwindigkeit proportional zur dritten Potenz der Scherspannung ist. Ausführlicher wird die Rheologie des Mantels in 4.1. besprochen. Ähnlich wie WEERTMAN (1970) halten STOCKER und ASHBY (1973) Versetzungskriechen für den entscheidenden Deformationsmechanismus im oberen Mantel. Sie meinen, ein Exponent im Potenzgesetz von  $n = 4,2$  sei am wahrscheinlichsten. GOETZE und KOHLSTEDT (1973) prüften die Brauchbarkeit der Kriechtheorien im Labor. Das Material waren Olivinkristalle eines Lherzolitxenoliths, dessen Herkunft vermutlich der Mantel ist. GOETZE und KOHLSTEDT schließen aus elektronenmikroskopischen Aufnahmen, daß die Art und die Verteilung der Versetzungen im untersuchten Olivin Nabarro-Herring-Kriechen ausschließen, während Versetzungsklettern (a dislocation climb model) mit den Beobachtungen verträglich ist. Kriechen infolge Versetzungsklettern aber führt nach WEERTMAN (1970, S. 150) auch auf ein Potenzgesetz, wobei der Exponent  $n$  zwischen 4,5 und 6 liegt. KIRBY und RALEIGH (1973) untersuchten empirisch das Fließen polykristalliner Medien. Dabei fanden sie für mittel- bis grobkörnige Silikate und Oxide Exponenten im Potenzgesetz zwischen 2,6 und 4,0. Da nach OROWAN (1967) aufgrund des sich extrem langsam ändernden thermodynamischen Zustands mit großen Kristallen im Mantel gerechnet werden muß, haben diese Werte für den Mantel eine gewisse Wahrscheinlichkeit. Weitere experimentelle Arbeiten, die das nicht-Newtonsche Fließverhalten von Gesteinen zeigen, findet man in der von HEARD u. a. (1972) herausgegebenen Monographie. Die Unsicherheit bezüglich der Übertragbarkeit der genannten Laboruntersuchungen auf die geringen Kriechgeschwindigkeiten im Mantel scheint durch die Untersuchung von POST und GRIGGS (1973) verringert worden zu sein. POST und GRIGGS (1973) untersuchten den postglazialen Aufstieg Fennoscandias. Sie fanden, daß sich der obere Mantel nicht-Newtonsch verhält. Sie erhalten einen Exponenten im Potenzgesetz von  $n \approx 3$ , was mit WEERTMANs (1970) theoretischer Vorhersage für Versetzungsgleiten übereinstimmt, und schließen aus diesem Ergebnis: "This suggests that all studies of mantle motion, notably the search for the driving force for plate tectonics, and all inferences about the viscosity of the earth should endeavour to incorporate non-Newtonian flow of this kind." Es muß hier betont werden, daß WEERTMANs Modell auch von BRENNEN (1974) bestätigt wird, der dazu isostatische Aufstiegsdaten für Laurentia und Fennoscandia sowie des Bonneville-Sees benutzte. Wegen der hohen Wahrscheinlichkeit des Potenzgesetz-Fließens setzen auch FROIDEVAUX und SCHUBERT (1975) in ihrem komplexen Modell einen reinen Olivinmantel mit einem Potenzgesetz mit dem Exponenten  $n = 3$  voraus. Wegen der sich anbahnenden Klärung der Frage nach dem Mantel-Stoffgesetz und wegen der erwähnten Notwendigkeit, zur Erklärung des ozeanischen Erdwärmestromes im Mantel Bénard-Konvektion anzunehmen, soll hier die Theorie der Bénard-Konvektion einer Potenzgesetz-Flüssigkeit (power-law fluid) in einer horizontalen Schicht entwickelt werden, soweit das analytisch möglich ist. Der Exponent wird dabei erst möglichst spät auf  $n = 3$  festgelegt.

### 13.2. Das Stoffgesetz

Wir verwenden aus den in 13.1. behandelten geophysikalischen Gründen folgendes nicht-lineare Stoffgesetz

$$(13.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = B \tau^{n-1} \sigma'_{ij}$$

wobei  $\dot{\epsilon}_{ij}$  der Deformationsgeschwindigkeitstensor,  $\sigma'_{ij}$  der Spannungsdeviator,  $\tau$  die Wurzel der zweiten Invariante des Spannungsdeviators ist und  $B$  als Konstante angesehen wird.

$$(13.2) \quad \tau^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2.$$

Wir lösen Gleichung (13.1) nach  $\sigma'_{ij}$  auf.

$$(13.3) \quad \sigma'_{ij} = B^{-\frac{1}{n}} \left[ \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2) + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{13}^2 + \dot{\epsilon}_{12}^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \dot{\epsilon}_{ij}.$$

Falls eine Flüssigkeit inkompressibel ist und die Richtungen der Hauptachsen des Tensorellipsoids der beiden Tensoren übereinstimmen, dann ist das folgende Stoffgesetz (13.4) die allgemeinste isotrope Relation zwischen Spannungstensor und Deformationsgeschwindigkeitstensor. Denn wenn die Relation höhere Produkte von  $\dot{\epsilon}_{ij}$  enthält als  $\dot{\epsilon}_{im} \dot{\epsilon}_{mj}$ , dann ist es in jedem Fall möglich, diese Gleichung mit Hilfe des Cayley-Hamiltonschen Satzes in (13.4) umzuformen.

$$(13.4) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \alpha_1 (II_{\dot{\epsilon}}, III_{\dot{\epsilon}}) \dot{\epsilon}_{ij} + \alpha_2 (II_{\dot{\epsilon}}, III_{\dot{\epsilon}}) \dot{\epsilon}_{im} \dot{\epsilon}_{mj}.$$

Dabei ist  $\sigma_{ij}$  der Spannungstensor,  $p$  der Druck,  $\delta_{ij}$  der Einheitstensor,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind Funktionen, die von den Invarianten  $II_{\dot{\epsilon}}$  und  $III_{\dot{\epsilon}}$  abhängen.

$$(13.5) \quad II_{\dot{\epsilon}} = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{und} \quad III_{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kr} \dot{\epsilon}_{rl} \dot{\epsilon}_{lk}.$$

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Um eine nichtnegative Dissipationsfunktion zu haben, muß folgende Zusatzbedingung erfüllt sein.

$$(13.6) \quad -2 \alpha_1 II_{\dot{\epsilon}} + \alpha_2 III_{\dot{\epsilon}} \geq 0.$$

Gleichung (13.4) definiert eine verallgemeinerte Stokes-Flüssigkeit. Mit

$$(13.7) \quad \alpha_1 = B^{-\frac{1}{n}} (-II_{\dot{\epsilon}})^{\frac{1-n}{2n}} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 0$$

erweist sich das Potenzgesetz (13.1) als eine spezielle Stokes-Flüssigkeit. Gleichung (13.4) und damit auch (13.1) erfüllen die drei Prinzipien der Mechanik nach TRUESDELL (1965), insbesondere auch das Prinzip der Unabhängigkeit vom Koordinatensystem. Diese Bemerkung ist deshalb nicht trivial, weil in der angewandten Rheologie häufig Stoffgesetze benutzt wurden, die abhängig vom speziellen Bezugssystem, also unzulässig sind. Auch (13.6) ist in unserem Spezialfall gewährleistet. Wenn  $\psi$  durch

$$(13.8) \quad \psi = \frac{1}{2} B^{-\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1-n}{2n}}$$

definiert wird, dann gilt



$$(13.9) \quad \sigma_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\psi(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{\frac{1-n}{2n}} \dot{\epsilon}_{kl}.$$

### 13.3. Die dynamischen Grundgleichungen

Wir gewinnen die neuen Grundgleichungen, indem wir in den ersten sechs Formeln der Arbeit von WALZER (1973c) die dynamische Scherviskosität  $\eta$  durch  $\psi(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{(1-n)/2n}$  ersetzen und zunächst keine Glieder weglassen.

Impulssatz:

$$(13.10) \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} v_l + \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_l = \rho g_l + \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{kl}.$$

Energiesatz:

$$(13.11) \quad \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] (c_v T) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \Phi + Q$$

Erhaltung der Masse:

$$(13.12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0.$$

Zustandsgleichung:

$$(13.13) \quad \rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)),$$

$$(13.14) \quad \sigma_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\psi(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{(1-n)/2n} \dot{\epsilon}_{kl} + \left[ \zeta' - \frac{2}{3} \psi(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{\frac{1-n}{2n}} \right] \dot{\epsilon}_{hh} \delta_{kl}$$

Deformationsgeschwindigkeitstensor:

$$(13.15) \quad \dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right)$$

Energiedissipation pro Volumen- und Zeiteinheit:

$$(13.16) \quad \Phi = 2\psi(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{\frac{1-n}{2n}} \left[ \dot{\epsilon}_{gh}\dot{\epsilon}_{gh} - \frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_{ff})^2 \right]$$

$\rho$  = Dichte;  $t$  = Zeit;  $v_l = v$  = Geschwindigkeit;  $x_l = r$  = Ortsvektor;  $c_v$  = spezifische Wärme bei konstantem Volumen;  $T$  = Temperatur [K];  $\kappa$  = Wärmeleitfähigkeit;  $Q$  = Wärmeleistungsdichte;  $\alpha$  = isobarer Wärmeausdehnungskoeffizient;  $T_0$  = konstante Temperatur an der Unterfläche der horizontalen Schicht;  $\rho_0$  = konstante Dichte bei  $T_0$ ;  $\zeta'$  = Kompressionsviskosität;  $g_l = g = -g e_3$  = Schwerebeschleunigung;  $e_1 = e_3$  = nach oben gerichteter Einheitsvektor;  $e_1, e_2, e_3$  = orthogonale Einheitsvektoren;  $T_1$  = konstante Temperatur an der oberen Fläche der horizontalen Schicht, wobei  $T_0 > T_1$ ;  $h$  = Dicke der Schicht. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt in der Unterfläche der Schicht.

Wir setzen im folgenden immer eine inkompressible Potenzgesetz-Flüssigkeit (power-law fluid) gemäß Gleichung (13.14) voraus und benutzen die Oberbeck-Boussinesq-Approximation (vgl. 2.), d. h. nur in dem Term mit den volumenproportionalen Kräften berücksich-

tigen wir die temperaturbedingten Dichteschwankungen. Dadurch verschwinden die einfach unterstrichenen Ausdrücke und (13.12) geht in

$$(13.17) \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

über. Ferner vernachlässigen wir die zwei doppelt unterstrichenen Terme, wir nehmen also an, daß die Geschwindigkeiten in der Schicht klein sind und die innere Wärmeproduktion verschwindet. Aus (13.16) entsteht

$$(13.18) \quad \Phi = 2\psi(\dot{\epsilon}_{1j}\dot{\epsilon}_{1j})^{1+(1-n)/2n},$$

wobei

$$(13.19) \quad \dot{\epsilon}_{1j}\dot{\epsilon}_{1j} = (v_{1,1})^2 + (v_{2,2})^2 + (v_{3,3})^2 + v_{2,3}v_{3,2} + v_{1,3}v_{3,1} + v_{1,2}v_{2,1} + \frac{1}{2} [(v_{2,3})^2 + (v_{3,2})^2 + (v_{1,3})^2 + (v_{3,1})^2 + (v_{1,2})^2 + (v_{2,1})^2].$$

Die Kommaschreibweise bedeutet wie üblich  $v_{2,3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$  usw.

Nebenbetrachtung: Nimmt man vorübergehend einmal  $n = 3$  und ein einfaches Scherfließen an, wobei z. B. nur der Term  $v_{2,3}$  ungleich null ist, dann gilt  $\Phi = \psi(v_{2,3})^{1+1/3}$ , während für eine Newtonsche Flüssigkeit  $\Phi = \eta(v_{2,3})^2$  gälte. Im Falle eines Potenzgesetzes mit  $n = 3$  darf man also die Energiedissipation nicht so leicht vernachlässigen wie bei einer Newtonschen Flüssigkeit oder die Vernachlässigung brächte bei gleichem Geschwindigkeitsgradienten einen größeren Fehler mit sich. Aus (13.10) und (13.14) entsteht

$$(13.20) \quad \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\rho g e_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \psi(\dot{\epsilon}_{1j}\dot{\epsilon}_{1j})^{(1-n)/2n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} v_1 + \frac{1-n}{2n} (\dot{\epsilon}_{1j}\dot{\epsilon}_{1j})^{-1} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} (\dot{\epsilon}_{gh}\dot{\epsilon}_{gh}) \right],$$

wobei

$$(13.21) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\dot{\epsilon}_{1j}\dot{\epsilon}_{1j}) = 2v_{1,1}v_{1,1k} + 2v_{2,2}v_{2,2k} + 2v_{3,3}v_{3,3k} + (v_{1,2k} + v_{2,1k})(v_{1,2} + v_{2,1}) + (v_{1,3k} + v_{3,1k})(v_{1,3} + v_{3,1}) + (v_{2,3k} + v_{3,2k})(v_{2,3} + v_{3,2}).$$

Für  $c_v = \text{const}$  und  $\kappa = \text{const}$  folgt aus (13.11) und (13.18)

$$(13.22) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + \psi(\dot{\epsilon}_{1j}\dot{\epsilon}_{1j})^{1+(1-n)/2n},$$

wobei wir folgende Substitutionen verwenden:

$$(13.23) \quad \kappa = \frac{\kappa}{c_v \rho} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{2\psi}{c_v \rho}.$$

Die Gleichung (13.13), (13.17), (13.20) und (13.22) bilden ein System von sechs skalaren partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der sechs skalaren unbekannt Funktionen  $v_1$ ,  $p$ ,  $T$  und  $\rho$ .

### 13.4. Reduktion der Gleichungen

Im folgenden linearisieren wir die Grundgleichungen soweit wie möglich, d. h. die physikalisch wesentliche Nichtlinearität des neuen Stoffgesetzes muß erhalten bleiben. Weil für den Mantel langsame Konvektion wahrscheinlich ist, nehmen wir an, daß der mittlere Zustand nach Beginn der Konvektion derselbe ist wie der Gleichgewichtszustand. Die gesuchten Größen seien deshalb Superpositionen der statischen Größen mit kleinen Störungen. Die statischen Größen werden mit einem Querstrich bezeichnet und hängen nur von  $x_3$  ab, während die Störungsgrößen von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  abhängen.

Ansatz:

$$(13.24) \quad p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad v = v'.$$

Wir suchen jetzt die Lösungen für den statischen Fall. Dieser Fall ist definiert durch

$$(13.25) \quad v = 0.$$

Aus (13.20):

$$(13.26) \quad \bar{\rho} g e_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = 0.$$

Aus (13.22):

$$(13.27) \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k} = 0.$$

Aus (13.13):

$$(13.28) \quad \bar{\rho} = \rho_0 (1 - \alpha(\bar{T} - T_0)).$$

Aus (13.26) entsteht

$$(13.29) \quad \bar{p} = \bar{\rho} g (h - x_3) + p_1,$$

wobei  $p_1$  ein konstanter Druck auf die obere Fläche der Schicht ist. Aus (13.27):

$$(13.30) \quad \bar{T} = \frac{T_1 - T_0}{h} x_3 + T_0.$$

(13.25), (13.28), (13.29) und (13.30) sind die Gleichgewichtslösungen. Jetzt setzen wir die statischen Lösungen unter Verwendung von (13.24) in die dynamischen Gleichungen ein. Aus (13.20), (13.26) und

$$(13.31) \quad \rho' = -\rho_0 \alpha T'$$

erhalten wir

$$(13.32) \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = g \alpha T' e_1 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \frac{\psi}{\rho_0} (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{(1-n)/2n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} v_1 + \frac{1-n}{2n} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \ln (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) \right].$$

Gleichung (13.31) folgt aus (13.13) und (13.28). Aus (13.22), (13.27) und  $\bar{T} = \bar{T}(x_3)$  folgt unter Vernachlässigung von  $v_1 \frac{\partial T'}{\partial x_1}$ , d. h. von einem Produkt zweier kleiner Größen,

$$(13.33) \quad \frac{\partial T'}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k \partial x_k} = -v_3 \frac{d\bar{T}}{dx_3} + \psi (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1+(1-n)/2n}.$$

In dieser Gleichung eliminieren wir  $\bar{T}$  mit Hilfe von (13.30).

$$(13.34) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \right] T' = \frac{T_0 - T_1}{h} v_3 + \Psi (\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})^{1+(1-n)/2n}.$$

$p'$  wird eliminiert, indem wir  $(-\text{rot rot})$  von (13.32) bilden.

$$(13.35) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Psi}{\rho_0} (\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})^{(1-n)/2n} \nabla^2 \right] \nabla^2 v = \alpha g (-e_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} - e_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + e_3 \nabla_3^2) T' + \vec{\theta},$$

wobei

$$(13.36) \quad \nabla_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

und

$$(13.37) \quad \vec{\theta} = -\frac{\Psi}{\rho_0} \{ (\nabla^2 v \times \nabla) \times \nabla (\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})^{(1-n)/2n} + \frac{1-n}{2n} \text{rot rot} [(\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})^{(1-n)/2n} (\frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_k}) \frac{\partial}{\partial x_k} \ln (\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})] \}.$$

Die 3-Komponente von (13.35) lautet

$$(13.38) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Psi}{\rho_0} (\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})^{(1-n)/2n} \nabla^2 \right] \nabla^2 v_3 = \alpha g \nabla_3^2 T' + \vec{\theta} \cdot e_3.$$

Aus (13.34) und (13.38) folgt

$$(13.39) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Psi}{\rho_0} (\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})^{(1-n)/2n} \nabla^2 \right] \nabla^2 v_3 = \frac{\alpha g (T_0 - T_1)}{h} \nabla_3^2 v_3 + \Psi \alpha g \nabla_3^2 (\dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j})^{1+(1-n)/2n} + \left[ \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \right] \vec{\theta} \cdot e_3.$$

Bis hierher wurde ohne wesentliche Vernachlässigungen gerechnet. Der zweite Term der rechten Seite von Gleichung (13.39) beschreibt die Energiedissipation in der Potenzgesetz-Flüssigkeit. Durch numerische Abschätzungen zeigt man nun, daß erstens das Glied mit  $\vec{\theta}$  in (13.39) vernachlässigt werden kann und daß zweitens die ersten beiden Operatoren der linken Seite von (13.39) vertauschbar sind, d. h. daß das bei der Vertauschung entstehende Zusatzglied vernachlässigbar ist. Drittens wollen wir uns auf eine zweidimensionale Strömung beschränken, d. h.

$$(13.40) \quad v_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \dots = 0.$$

Aus (13.40) und  $\nabla \cdot v = 0$  folgt

$$(13.41) \quad v_{1,1} = -v_{3,3}.$$

Aus (13.19), (13.40) und (13.41):

$$(13.42) \quad \dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j} = 2(v_{3,3})^2 + \frac{1}{2} [(v_{3,1})^2 + (v_{1,3})^2].$$

Wie es in der Hydromechanik üblich ist, nehmen wir eine separable Lösung an:

$$(13.43) \quad v_3(x_1, x_3, t) = w(x_3) f(x_1) e^{\sigma t},$$

wobei

$$(13.44) \quad (v_3^2 + \frac{a^2}{h^2})f(x_1) = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{a^2}{h^2})f(x_1) = 0.$$

Indem wir die Substitutionen

$$(13.45) \quad \zeta = \frac{x_1}{h} \quad \text{und} \quad D = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

benutzen, erhalten wir

$$(13.46) \quad v_3^2 = \frac{1}{h^2} (D^2 - a^2)v_3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 = \frac{1}{h} Dv_3.$$

Wegen (13.42) gilt

$$(13.47) \quad v_3^2 (\xi_{1j} \xi_{1j})^{1+(1-n)/2n} = (1 + \frac{1-n}{2n}) \cdot \\ \cdot [ \frac{1-n}{2n} \{ 2(v_{3,3})^2 + \frac{1}{2} [(v_{3,1})^2 + (v_{1,3})^2] \}^{\frac{1-n}{2n} - 1} \cdot \\ \cdot [ 4v_{3,3}v_{3,31} + v_{3,1}v_{3,11} + v_{1,3}v_{1,31} ]^2 + \\ + \{ 2(v_{3,3})^2 + \frac{1}{2} [(v_{3,1})^2 + (v_{1,3})^2] \}^{\frac{1-n}{2n}} \cdot \\ \cdot [ 4(v_{3,31})^2 + 4v_{3,3}v_{3,311} + (v_{3,11})^2 + v_{3,1}v_{3,111} + (v_{1,31})^2 + v_{1,3}v_{1,311} ] ] .$$

Da man annehmen kann, daß die Konvektionsströmung unmittelbar nach Einsatz des Fließens stationär ist, gilt

$$(13.48) \quad \sigma = 0.$$

Aus (13.39), (13.42), (13.47) und (13.48) folgt

$$(13.49) \quad (D^2 - a^2)^3 v_3 = -R_1 a^2 \{ 2(v_{3,3})^2 + \frac{1}{2} \cdot \\ \cdot [(v_{3,1})^2 + (v_{1,3})^2] \}^{-(1-n)/2n} v_3 + \frac{2\alpha g h}{c_v} \cdot \frac{h^5}{k} (1 + \frac{1-n}{2n}) \cdot \\ \cdot \{ \frac{1-n}{n} \frac{[ 4v_{3,3}v_{3,31} + v_{3,1}v_{3,11} + v_{1,3}v_{1,31} ]^2}{4(v_{3,3})^2 + (v_{3,1})^2 + (v_{1,3})^2} + \\ + 4(v_{3,31})^2 + 4v_{3,3}v_{3,311} + (v_{3,11})^2 + v_{3,1}v_{3,111} + (v_{1,31})^2 + v_{1,3}v_{1,311} \} ,$$

wobei

$$(13.50) \quad R_1 = \frac{\alpha g h^3 (T_0 - T_1) \rho_0}{k \nu} .$$

$R_1$  ist ein Analogon der Rayleigh-Zahl. Es ist jedoch nicht dimensionslos. Dimensionslos ist dagegen  $R_1 (\xi_{1j} \xi_{1j})^{-(1-n)/2n}$  und auch der erste Faktor im zweiten Term der rechten Seite von (13.49). Wir müssen für (13.49) eine weitere Vernachlässigung einführen.

$$(13.51) \quad v_{1,3} = 0 .$$



Dadurch entfallen in (13.49) einige Glieder.

$$(13.52) \quad (D^2 - a^2)^3 v_3 = -R_1 a^2 [2(v_{3,3})^2 + \frac{1}{2}(v_{3,1})^2]^{-(1-n)/2n} v_3 + \\ + \frac{2\alpha gh}{c_v} \cdot \frac{h^5}{k} \left(1 + \frac{1-n}{2n}\right) \left\{ \frac{1-n}{n} \cdot \frac{(4v_{3,3}v_{3,31} + v_{3,1}v_{3,11})^2}{4(v_{3,3})^2 + (v_{3,1})^2} + \right. \\ \left. + 4(v_{3,31})^2 + 4v_{3,3}v_{3,311} + (v_{3,11})^2 + v_{3,1}v_{3,111} \right\}.$$

Wir wollen den Ansatz (13.43) dahingehend ergänzen, daß wir

$$(13.53) \quad f = \sin\left(\frac{a}{h} x_1 + c_1\right)$$

schreiben, wobei  $c_1$  eine Konstante ist. (13.44) wird durch (13.53) erfüllt. Aus (13.52) und (13.53):

$$(13.54) \quad (D^2 - a^2)^3 w_f = -R_1 a^2 \left[ 2 \frac{(Dw)^2}{h^2} f^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2 w^2}{h^2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos^2\left(\frac{a}{h} x_1 + c_1\right) \right]^{-(1-n)/2n} w_f + \frac{2\alpha gh}{c_v} \cdot \frac{h a^2}{k} \left(1 + \frac{1-n}{2n}\right) \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{1-n}{n} \cdot \frac{[4(Dw)^2 - a^2 w^2]^2}{\frac{4(Dw)^2}{\cos^2\left(\frac{a}{h} x_1 + c_1\right)} + \frac{a^2 w^2}{f^2}} + [4(Dw)^2 - a^2 w^2] \cos 2\left(\frac{a}{h} x_1 + c_1\right) \right\}.$$

(13.54) ist eine nichtlineare Differentialgleichung 6. Ordnung;  $x_1$  kann man als Parameter betrachten. Wir haben nur noch eine gesuchte Funktion (nämlich  $w$ ) und eine unabhängige Variable (nämlich  $\zeta$ ), so daß das eingangs gestellte Problem wesentlich vereinfacht wurde. An dieser Stelle könnte man mit numerischen Methoden die Lösung berechnen. Das soll in dieser Arbeit jedoch nicht getan werden, vielmehr sollen einzelne analytische Lösungen gesucht werden. Gleichung (13.54) ist analytisch offenbar nicht lösbar. Gleichwohl ist die Konvektion in dieser Form realitätsnäher beschrieben worden als in früheren Veröffentlichungen, wie aus den geophysikalischen Betrachtungen in 4.1. und 13.1. hervorging. Ersetzt man den ersten Term der rechten Seite von (13.54), der den Auftrieb beschreibt, durch den herkömmlichen Ausdruck ( $-Ra^2 w_f$ ), so ist

$$(13.55) \quad w = c_2 \exp\left(\pm \frac{a}{2} \zeta\right)$$

eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.  $R$  ist die herkömmliche Rayleigh-Zahl,  $c_2$  ist eine Konstante.

Dieser Abschnitt kann so zusammengefaßt werden: Eine Potenzgesetz-Flüssigkeit ist für Mantelkonvektion ein realistischerer Modellkörper als eine Newtonsche Flüssigkeit. Deshalb werden die entsprechenden dynamischen Grundgleichungen entwickelt, die auf ein System partieller Differentialgleichungen mit wesentlichen Nichtlinearitäten führt. Der Hauptteil des Abschnittes besteht darin zu zeigen, wie das Problem auf eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung reduziert werden kann, die als Ausgangspunkt für numerische Rechnungen geeignet ist.

## 14. Entmischungskonvektion

### 14.1. Die Differentiation des Erdkerns und ihre Beziehung zur Konvektion

Falls die Erde vor etwa 4,6 Milliarden Jahren nicht schon chemisch geschichtet entstand, muß sie einer Sonderung nach der Schwere unterworfen worden sein. Eine bereits anfangs geschichtete Erde ist aus kosmogonischen Gründen wenig wahrscheinlich (SAFRONOV, 1969; RINGWOOD, 1975). Es müssen also Kern, Mantel und kontinentale Lithosphäre entstanden sein. Wann das geschah, ist umstritten. Sicher ist nur, daß es nach radioaktiven Altersbestimmungen schon vor 4,0 Milliarden Jahren auf Grönland Krustengesteine und daß es vor 3,8 Milliarden Jahren schon ein magnetisches Dipolfeld der Erde in vergleichbarer Stärke gab. Daraus folgt bei Annahme einer hydromagnetischen Dynamotheorie die Existenz eines flüssigen Erdkerns mit metallischer elektrischer Leitfähigkeit für jene Zeit. Vermutlich war die Entmischung nach Entstehung der Erde der beherrschende Vorgang. Dabei dürfte auch Wärme nach außen getragen worden sein, der eigentliche Motor der Bewegung aber bestand nicht in thermisch, sondern in chemisch bedingten Dichtedifferenzen und den dadurch entstehenden Auftriebskräften. Wir wollen deshalb von Entmischungskonvektion sprechen. Dieser Abschnitt beschäftigt sich hauptsächlich mit folgendem hydromechanischem Stabilitätsproblem, welches bei der Schweresonderung der Erde, aber auch außerhalb der Geophysik seine Bedeutung hat:

Eine Schicht (oder ein Halbraum) mit einer viskosen Flüssigkeit größerer Dichte überlagert eine Schicht (oder einen Halbraum) mit einer viskosen Flüssigkeit geringerer Dichte. Senkrecht zur Grenzebene wirkt ein homogenes Schwerfeld. Wann beginnt die Strömung und wie lautet das Geschwindigkeitsfeld? Das umrissene Problem ist ein Spezialfall der Rayleigh-Taylor-Instabilität, bei der bisher der Einfluß der viskosen Dissipation nicht berücksichtigt wurde. Daß aber dieser Einfluß bei der Entmischungskonvektion in der frühen thermischen Geschichte der Erde eine Rolle gespielt haben kann, zeigt folgende Überlegung: Druckversuche an den Silikaten und Oxiden, aus denen sich der Erdmantel vermutlich zusammensetzt, ergaben zwar für die elektrische Leitfähigkeit einen Sprung von der richtigen Größenordnung, für die Dichte aber recht kleine Zuwächse. Deshalb neigt man heute dazu anzunehmen, daß die Kern-Mantel-Grenze kein Phasensprung ist, sondern daß der äußere Erdkern sich vom unteren Mantel in seiner chemischen Zusammensetzung wesentlich unterscheidet. Diese Erkenntnis wirft sofort die Frage nach der Entstehung dieses chemischen Unterschiedes auf. Zwei Antworten und ihre Mischformen sind denkbar: a) Der Erdkern war schon bei seiner Entstehung vom etwas später entstandenen Mantel chemisch verschieden (Eukens Annahme). b) Der Kern entstand nach Bildung einer Urerde durch Schweredifferentiation (O.J. Schmidts Annahme). Es scheint so, als würde das Eisen bei Drücken, die man in einem Solarnebel erwarten muß, nach oder etwa gleichzeitig mit den Silikaten kondensieren, wenn der Nebel sich abkühlt (ANDERS, 1968; BLANDER und ABDEL-GAWAD, 1969; BLANDER und KATZ, 1967; LARIMER und ANDERS, 1970). Auch die heutigen hohen Temperaturen im Erdinneren sind ohne die bei der Differentiation freiwerdende Gravitationsenergie schwer denkbar, zumal man aus verschiedenen Gründen eine im Vergleich zur Erdkruste geringe Konzentration radioaktiver Elemente im Erdinneren annehmen muß. Beide Argumente sprechen für eine Entstehung des Erdkerns durch Differentiation. Die Differenz zwischen der potentiellen Energie einer Erde, in der die chemischen Elemente homogen verteilt sind, und der der heutigen Erde heiße Gravitationsenergie. Sie beträgt nach LYUSTIKH (1948)  $\sim 1,5 \cdot 10^{38}$  erg. Das liegt in der gleichen Größenordnung

wie die radioaktive Energie ( $\sim 2,0 \cdot 10^{38}$  erg, vgl. LUBIMOVA, 1967). Die Kruste gibt es seit mindestens  $4 \cdot 10^9$  a. BLACK u. a. (1971) fanden Alter von  $(3980 \pm 170)$  Ma in West-Grönland. Untersuchungen an 3 bis  $4 \cdot 10^9$  a alten Gesteinen zeigen, daß das Magnetfeld in dieser Zeit größenordnungsmäßig dem heutigen gleich war. Daraus folgt aber, daß damals der Erdkern auch schon flüssig, elektrisch leitfähig wie ein Metall und relativ groß gewesen sein muß, wenn man voraussetzt, daß das magnetische Hauptfeld der Erde durch einen Dynamomechanismus erzeugt wird. Es liegt also nahe anzunehmen, daß die Differentiation des Kernes vor  $4 \cdot 10^9$  a im wesentlichen abgeschlossen war. Da das Alter der Erde bei  $\sim 4,6 \cdot 10^9$  a liegen dürfte, ist es klar, daß in den ersten  $0,6 \cdot 10^9$  a der Existenz der Erde die Gravitationsenergie von  $\sim 1,5 \cdot 10^{38}$  erg verbraucht worden, d. h. durch Dissipation in Wärme umgewandelt worden sein muß. Entsprechend dem bekannten radioaktiven Zerfallsgesetz verteilen sich die  $\sim 2,0 \cdot 10^{38}$  erg der radioaktiven Energie gleichmäßiger über die  $\sim 4,6 \cdot 10^9$  a der Existenz der Erde; sie dürften also während der Differentiation des Kernes von geringerer Bedeutung gewesen sein. Als dritte wesentliche Energiequelle muß man nach SAFRONOV (1969) mit der Einschlagenergie großer Körper rechnen. Dabei ergibt sich in den ersten Hunderten von Ma eine Temperaturverteilung mit einem Maximum in Tiefen des heutigen oberen Mantels. Für die ersten Massenumlagerungen nach dem Auftreffen der vorplanetaren Körper gibt es nun zwei Möglichkeiten. Möglichkeit (1) ist realisiert, falls die anfängliche Massenverteilung (über viele  $\text{km}^3$  gemittelt) homogen ist. Dann wird in einer dünnen Schicht um das Maximum der Temperaturkurve zunächst thermische Konvektion einsetzen, ohne daß die Schmelztemperatur  $T_m$  erreicht ist. Da aber dann kleine Eisenbrocken in der Matrix schon geschmolzen sind, werden sie sich bei Berührung mit der "festen" unteren Fläche der Konvektionsschicht absetzen. Die an Eisen verarmte Matrix über der so entstehenden dünnen Schicht flüssigen Eisens ist aber spezifisch leichter als die darüber befindliche Schicht mit ursprünglicher Zusammensetzung, so daß hier zusätzlich zur thermischen eine Rayleigh-Taylor-Instabilität entsteht. Die Gravitationsenergie, die bei der dann einsetzenden Entmischungskonvektion frei wird, wird größtenteils durch Dissipation in Wärme umgesetzt. Da die Viskosität stark von der Temperatur abhängt, wird der Konvektionsmechanismus dadurch beeinflusst. In diesem Abschnitt soll analytisch geprüft werden, ob und in welcher Weise sich auch die Lösung für das Anfangsstadium (marginal state) der Entmischungskonvektion dadurch ändert. Das Problem wird möglichst allgemein behandelt, so daß es von den erörterten Hypothesen zur Evolution der Erde weitgehend unabhängig ist.

Möglichkeit (2) ist verwirklicht, falls die Massenverteilung der Urerde von der Homogenität abweicht, auch wenn man über recht große Volumina mittelt. Dann sind die stofflich bedingten Dichteunterschiede so groß, daß die geringen Dichteunterschiede infolge der Wärmeausdehnung keine Rolle spielen können und damit initiale thermische Konvektion unmöglich ist. In diesem zweiten Falle fände bei der Einsatztemperatur des quasihomogenen Falles also noch keine Bewegung statt, sondern die Temperatur stiege infolge radioaktiver Aufheizung weiter langsam an. Sobald die Temperaturkurve die Kurve der Schmelztemperatur berühren würde, schmelze eine dünne Schicht um das Maximum der Temperaturkurve und die Stoffe sonderten sich entsprechend der Schwere in Fraktionen. Weitere Ausführungen zum Problem der Verquickung zwischen Schweresonderung und Konvektion in der frühen Geschichte der Erde findet man in Abschnitt 1.

## 14.2. Die Rayleigh-Taylor-Instabilität mit viskoser Dissipation

### 14.2.1. Grundgleichungen

Wir benutzen folgende hydrodynamische Grundgleichungen.

Impulserhaltung:

$$(14.1) \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} v_i + \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right\}.$$

Energieerhaltung:

$$(14.2) \quad c_v \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] T = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + Q.$$

Massenerhaltung:

$$(14.3) \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

Zustandsgleichungen:

$$(14.4) \quad \rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)),$$

$$(14.5) \quad \eta = \eta_0 e^{k^* T_m(p)/T},$$

wobei  $\rho$  = Dichte;  $v_i = v$  = Geschwindigkeit;  $p$  = Druck;  $t$  = Zeit;  $g_i = g$  = Schwerebeschleunigung;  $x_i = r$  = Ortsvektor;  $c_v$  = spezifische Wärme bei konstantem Volumen;  $T$  = absolute Temperatur;  $\kappa$  = Wärmeleitfähigkeit;  $Q$  = Wärmeproduktionsdichte;  $\eta$  = dynamische Scherviskosität;  $\alpha$  = isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient;  $T_m$  = Schmelztemperatur.  $c_v$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\rho_0$ ,  $\eta_0$  und  $k^*$  werden als konstant angesehen. Wegen der bereits erwähnten geringen Bedeutung der radioaktiven Wärmeproduktion wird  $Q = 0$  gesetzt.

(14.3) zeigt, daß die Flüssigkeit als inkompressibel vorausgesetzt wurde. Die Grundgleichungen (14.1) bis (14.5) stellen sieben skalare Gleichungen für folgende sieben Funktionen dar:  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\eta$ . Die sieben Funktionen hängen ab von dem Komponenten des Ortsvektors  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  und der Zeit  $t$ .  $x_3$  ist nach oben gerichtet. Es liegt nahe, den Nullpunkt in die Grenzfläche zwischen den beiden Schichten (oder Halbräumen) zu legen. Wenn wir darauf verzichten, die initiale thermische Konvektion zu behandeln, können wir  $\alpha = 0$  setzen. Die Rayleigh-Taylor-Instabilität mit viskoser Dissipation kann auch mit  $\alpha = 0$  behandelt werden, weil

$$(14.6) \quad |\rho_0^{(n)} \alpha (T - T_0)| \ll \rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)}.$$

Der obere Index (1) bezeichnet die obere Schicht, (2) die untere; (n) bedeutet (1) oder (2). Es wird also angenommen, daß der entscheidende Einfluß der viskosen Dissipation über die Temperaturabhängigkeit der Viskosität (14.5) wirksam wird. Nun leiten wir die Störungsgleichungen her, indem wir wie üblich das System als leicht gestört einführen und bestimmen, wie sich diese Störung entwickelt. Die Dichte sei  $\rho + \delta\rho$ , wobei  $\delta\rho$  eine kleine Störung bedeutet.  $\delta p$  ist eine kleine Druckstörung. Auch die Geschwindigkeiten werden jetzt als klein betrachtet, so daß der zweite Term der linken Seite von (14.1) vernachlässigt werden kann. Zur Ergänzung von (14.3) muß dann noch

$$(14.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta \varrho + v_1 \frac{\partial \delta \varrho}{\partial x_1} = 0$$

eingeführt werden, um die Konstanz der Dichte individueller Teilchen zu sichern. Ferner wollen wir annehmen, daß die Viskosität  $\eta$  zwar von  $x_3$ , nicht aber von  $x_1$  und  $x_2$  abhängt:

$$(14.8) \quad \eta = \eta(x_3) .$$

Der nach oben gerichtete Einheitsvektor heiße  $\lambda_1 = (0, 0, 1)$ . Aus (14.1) ergibt sich dann:

$$(14.9) \quad \varrho \frac{\partial}{\partial t} v_1 = - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta p + \eta \nabla^2 v_1 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \frac{d\eta}{dx_3} - g \delta \varrho \lambda_1 .$$

Für unsere Problemstellung folgt aus (14.7):

$$(14.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta \varrho = - v_3 \frac{d\varrho}{dx_3} .$$

Wir nehmen nun wie üblich an, daß die Lösungen sich aus der Multiplikation von Funktionen, die nur von  $x_3$  abhängen, mit

$$(14.11) \quad \exp(ik_1 x_1 + ik_2 x_2 + nt)$$

ergeben, wobei  $k_1$ ,  $k_2$  und  $n$  Konstanten sind. Ferner definieren wir

$$(14.12) \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad \text{und} \quad D = \frac{d}{dx_3} .$$

Nun formen wir die drei skalaren Gleichungen (14.9), die Gleichungen (14.3) und (14.10) unserem Ansatz entsprechend der Reihe nach um:

$$(14.13) \quad ik_1 \delta p = - n \varrho v_1 + \eta (D^2 - k^2) v_1 + (D\eta)(ik_1 v_3 + Dv_1) ,$$

$$(14.14) \quad ik_2 \delta p = - n \varrho v_2 + \eta (D^2 - k^2) v_2 + (D\eta)(ik_2 v_3 + Dv_2) ,$$

$$(14.15) \quad D \delta p = - n \varrho v_3 + \eta (D^2 - k^2) v_3 + 2(D\eta)(Dv_3) - g \delta \varrho ,$$

$$(14.16) \quad ik_1 v_1 + ik_2 v_2 = - Dv_3 ,$$

$$(14.17) \quad n \delta \varrho = - v_3 D \varrho .$$

Wir multiplizieren (14.13) mit  $-ik_1$ , (14.14) mit  $-ik_2$  und benutzen (14.16) und (14.12)<sub>1</sub>:

$$(14.18) \quad k^2 \delta p = [-n \varrho + \eta (D^2 - k^2)] Dv_3 + (D\eta)(D^2 + k^2)v_3 .$$

Aus (14.15) und (14.17)

$$(14.19) \quad D \delta p = - n \varrho v_3 + \eta (D^2 - k^2) v_3 + 2(D\eta)(Dv_3) + \frac{g}{n} (D \varrho) v_3 .$$

Mit  $Q = 0$  folgt aus (14.2):



$$(14.20) \quad \eta = \frac{2(c_v \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}) T}{\left( \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right)^2}$$

Wie RICE (1971, S. 1451) kann man die Energiebilanz in dimensionslosen Variablen schreiben:

$$(14.21) \quad \delta \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Ra} \nabla^2 \theta + \frac{\alpha g d}{c_v} \theta^*,$$

wobei  $d$  eine charakteristische Länge und  $Ra$  die Rayleigh-Zahl ist. Wenn man annimmt, daß die Größenordnung der Zahlenwerte für die Differentiationsschicht der frühen Erde mit der des heutigen oberen Mantels übereinstimmt, dann kann man folgende Annahmen machen:  $g \approx 1000 \text{ cm/s}^2$ ;  $d \approx 2 \cdot 10^7 \text{ cm}$  (geschätzte Schichtdicke). Mit ZHARKOV u. a. (1971) schätzen wir  $\alpha/c_p \approx \alpha/c_v \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ g/erg}$  und  $Ra \approx 10^6$ . Daraus ergibt sich:

$$(14.22) \quad \frac{\alpha g d}{c_v} \approx 10^{-1}; \quad \frac{1}{Ra} \approx 10^{-6}; \quad \alpha g d / c_v \gg 1/Ra.$$

Mit (14.22)<sub>3</sub> ergibt sich, daß man in (14.20) den Wärmeleitungsterm vernachlässigen darf. Setzt man weiterhin voraus, daß sich die Viskosität nur langsam ändert, so bekommt man aus (14.20):

$$(14.23) \quad \eta = \frac{2c_v \rho v_k \frac{\partial T}{\partial x_k}}{\left( \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Wir beschränken uns jetzt auf Strömungen in der  $x_1 x_3$ -Ebene, d. h.

$$(14.24) \quad v_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \dots = 0.$$

Aus (14.23) und (14.24):

$$(14.25) \quad \eta = \frac{c_v \rho (v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3})}{\left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2}$$

(14.25) vereinfacht sich mit (14.8) und (14.12)<sub>2</sub> auf:

$$(14.26) \quad \eta = \frac{c_v \rho v_3 D T}{(D v_1)^2}.$$

Aus (14.16) entsteht mit (14.24)<sub>1</sub>:

$$(14.27) \quad i k v_1 = - D v_3.$$

Daraus erhält man durch Differentiation:

$$(14.28) \quad D v_1 = i k^{-1} D^2 v_3,$$

$$(14.29) \quad (D v_1)^2 = -k^{-2} (D^2 v_3)^2.$$

Aus (14.26) und (14.29):

$$(14.30) \quad \eta = - \frac{k^2 c_v \varrho v_3 DT}{(D^2 v_3)^2}.$$

Da unsere Rechnungen ohnehin für den Anfangszustand (marginal state), d. h. für die Verhältnisse vor, während und kurz nach Beginn der Strömungen gelten, kann man näherungsweise

$$(14.31) \quad DT = c^* v_3$$

in Formel (14.30) einführen, wobei  $c^*$  eine negative reelle Konstante ist. Ferner definieren wir zwei Konstanten:

$$(14.32) \quad c = c_v c^* \quad \text{und} \quad K = k^2 c/n.$$

Daher:

$$(14.33) \quad \eta = - \frac{k^2 \varrho c v_3^2}{(D^2 v_3)^2} \quad \text{und} \quad - \frac{\eta}{\varrho n} = K \frac{v_3^2}{(D^2 v_3)^2}.$$

Innerhalb jeder der beiden Flüssigkeiten, als die wir kontinuumsmechanisch die nichtgeschmolzenen zwei Schichten (Matrix mit Eisen und Matrix ohne Eisen) behandeln können, ändert sich die Dichte nicht. Folglich verschwindet wegen  $D\rho = 0$  der letzte Term von (14.19). Nun differenzieren wir (14.18) nach  $x_3$  und multiplizieren (14.19) mit  $k^2$ . Beide Gleichungen dividieren wir durch  $-D\rho$  und kombinieren sie:

$$(14.34) \quad D\left\{ \left[ 1 - \frac{\eta}{\varrho n} (D^2 - k^2) \right] Dv_3 - \frac{1}{\varrho n} (D\eta)(D^2 + k^2)v_3 \right\} = \\ = k^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{\eta}{\varrho n} (D^2 - k^2) \right] v_3 - \frac{2}{\varrho n} (D\eta) Dv_3 \right\}.$$

Jetzt wird (14.33)<sub>2</sub> in (14.34) eingesetzt:

$$(14.35) \quad D\left\{ \left[ 1 + K \frac{v_3^2}{(D^2 v_3)^2} (D^2 - k^2) \right] Dv_3 + K \left[ D \frac{v_3^2}{(D^2 v_3)^2} \right] (D^2 + k^2)v_3 \right\} = \\ = k^2 \left\{ \left[ 1 + K \frac{v_3^2}{(D^2 v_3)^2} (D^2 - k^2) \right] v_3 + 2K \left[ D \frac{v_3^2}{(D^2 v_3)^2} \right] Dv_3 \right\}.$$

Daraus:

$$(14.36) \quad \left\{ 1 + K \left[ \frac{v_3}{D^2 v_3} \right]^2 (D^2 - k^2) \right\} (D^2 - k^2)v_3 = K \left[ D \left( \frac{v_3}{D^2 v_3} \right)^2 \right] \cdot \\ \cdot \left\{ -(D^2 - k^2) Dv_3 - (D^2 + k^2) Dv_3 + 2k^2 Dv_3 \right\} - K \left[ D^2 \left( \frac{v_3}{D^2 v_3} \right)^2 \right] (D^2 + k^2)v_3.$$

Falls man die Abkürzung  $D = '$  teilweise einführt, ergibt sich aus (14.36):

$$(14.37) \quad \left[ 1 + K \left( \frac{v_3}{\sqrt{n}} \right)^2 (D^2 - k^2) \right] (D^2 - k^2)v_3 + \\ + 2K \left[ D \left( \frac{v_3}{\sqrt{n}} \right)^2 \right] (D^2 - k^2) Dv_3 + K \left[ D^2 \left( \frac{v_3}{\sqrt{n}} \right)^2 \right] (D^2 + k^2)v_3 = 0.$$

### 14.2.2. Lösungen und Schlußfolgerungen

Der wesentliche Teil der Aufgabe wäre gelöst, wenn die allgemeine Lösung  $v_3(x_3)$  dieser nichtlinearen Differentialgleichung (14.37) bekannt wäre. Durch die kompakte Schreibweise von (14.37) wird die Schwierigkeit des Problems noch verschleiert. Man vergegenwärtige sich z. B., daß

$$(14.38) \quad D\left(\frac{v_3}{v_3'}\right)^2 = 2(v_3 v_3' v_3'' - v_3^2 v_3''') / v_3'^3$$

und

$$(14.39) \quad D^2\left(\frac{v_3}{v_3'}\right)^2 = 2(v_3'^2 v_3''^2 + v_3 v_3''^3 - v_3^2 v_3'' v_3''' - 4v_3 v_3' v_3'' v_3''' + 3v_3^2 v_3'''^2) / v_3'^4.$$

Um später (14.37) lösen zu können, lösen wir zunächst die Differentialgleichung, die aus (14.37) durch Weglassen des zweiten und des dritten Terms entsteht. Diese Gleichung multiplizieren wir mit  $v''^2$ :

$$(14.40) \quad v''^2(v'' - kv) + kv^2(v'''' - 2v''k^2 + vk^4) = 0.$$

Eine exakte partikuläre Lösung dieser ebenfalls nichtlinearen Differentialgleichung (14.40) ist

$$(14.41) \quad v_3 = A_1 e^{+kx_3} + A_2 e^{-kx_3},$$

wobei  $A_1$  und  $A_2$  Konstanten sind. Unter der Voraussetzung, daß

$$(14.42) \quad K^2 > 4k^4$$

gilt, finden wir als allgemeine Lösung von (14.40)

$$(14.43) \quad v_3 = A_1 e^{+kx_3} + A_2 e^{-kx_3} + B_1 e^{+\sqrt{-\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + Kk^2}} \cdot x_3} + B_2 e^{-\sqrt{-\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + Kk^2}} \cdot x_3},$$

wobei  $A_1, A_2, B_1$  und  $B_2$  Konstanten sind. Bedingung (14.42) ist äquivalent zu:

$$(14.44) \quad \frac{c_v^2 c^*{}^2}{4n^2} > 1.$$

Wir versuchen nun abzuschätzen, ob (14.44) erfüllt ist und benutzen dabei zur Abschätzung der Größenordnung Werte, die sich auf die heutige Erde beziehen.

$$c^* = \frac{DT}{v_3} \approx \frac{4000 \text{ K} \cdot a}{3000 \text{ km} \cdot 3 \text{ cm}},$$

$$c_v \approx 10^7 \text{ erg/g} \cdot K$$

(s. ZHARKOV u. a., 1971, S. 33). Aus diesen Werten und (14.44) folgt

$$(14.45) \quad n < 6 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

Sieht man  $t \approx 10 \text{ Ma}$  als eine vernünftige Größenordnung für die Dauer des Vorgangs an, dann läuft Bedingung (14.42) darauf hinaus, daß für den Faktor  $e^{nt}$  in unserem Ansatz

$$(14.46) \quad e^{nt} < e^{1,8 \cdot 10^{23}}$$

gilt. Man sieht also, daß (14.42) praktisch immer erfüllt ist. Der zweite und der dritte Term von (14.37) sind dann vernachlässigbar, wenn immer

$$(14.47) \quad \left| (B_1 e^{+\sqrt{-\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + Kk^2} \cdot x_3}} \pm B_2 e^{-\sqrt{-\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + Kk^2} \cdot x_3}}) \right| < 1$$

gilt, wobei  $\pm$  bedeutet, daß (14.47) sowohl für + als auch für - gelten muß. Da das für kleine Anfangsgeschwindigkeiten immer zu erfüllen ist, ist (14.43) auch als approximativ für (14.37) gültige allgemeine Lösung zu betrachten. Indem wir (14.32)<sub>2</sub> benutzen, entwickeln wir das Quadrat  $q^{*2}$  der Exponenten des 3. und 4. Terms von (14.43) in eine Reihe:

$$(14.48) \quad q^{*2} = k^2 \left( 1 - \frac{n}{c} + \frac{n^2}{c^2} - \dots \right).$$

CHANDRASEKHAR (1961, S. 441, Formel (98), fand für dasselbe Problem ohne viskose Dissipation eine Lösung mit

$$(14.49) \quad q^2 = k^2 \left( 1 + \frac{n}{k^2 \nu} \right),$$

wobei  $\nu (= \frac{\eta}{\rho})$  die kinematische Viskosität ist. Um (14.48) mit (14.49) formal vergleichen zu können, setzen wir formal (14.33)<sub>1</sub> in den zweiten Term von (14.49) ein:

$$(14.50) \quad \frac{n}{k^2 \nu} = - \frac{n}{c} \cdot \frac{(D^2 v_3)^2}{k^4 v_3^2}.$$

Setzt man hier die Lösung (14.43) und ihre zweite Ableitung ein, so erkennt man, daß sich die Größenordnung des zweiten Terms nicht ändert. Da der dritte und die weiteren Terme in (14.48) im Vergleich zum ersten und zweiten Term klein sind, werden sich die Lösungen des Rayleigh-Taylor-Problems mit Berücksichtigung der Umwandlung potentieller Energie in Wärme und deren Einfluß auf die Viskosität für den Beginn der konvektiven Strömungen nicht von den Lösungen des Problems ohne Berücksichtigung dieser Umwandlung unterscheiden. Zu Beginn der Strömung wird die ursprünglich waagrechte und ebene Trennfläche zwischen den beiden Medien leicht gewellt: An den Stellen, wo das weniger dichte Medium nach oben steigt, entsteht zunächst eine leichte Ausbeulung nach oben; an den Stellen, wo das dichtere Medium nach unten sinkt, entsteht zunächst eine leichte Ausbeulung nach unten. Insbesondere wird die vorherrschende mittlere "Wellenlänge" dieser leichten Beulungen am Anfang größenordnungsmäßig gleich sein der des Problems ohne Berücksichtigung der Umwandlung von potentieller Energie in Wärme und ohne temperaturabhängige Viskosität. Will man aber nicht nur die Größenordnung bestimmen, so muß man unsere Lösung (14.43) benutzen, deren Konstanten entsprechend den Randbedingungen bestimmen und mit unserer Lösung die Rechnungen von CHANDRASEKHAR (1961) ab S. 443 abwandeln, was verhältnismäßig einfach ist, so daß es hier nicht ausgeführt wird. TURCOTTE u. a. (1974) haben gezeigt, daß der Einfluß der viskosen Dissipation auf thermische Konvektion mit größerer Amplitude groß ist, so daß man vermuten kann, daß dieser

Einfluß auf Entmischungskonvektion mit größerer Amplitude ebenfalls beträchtlich ist. Wie wir gezeigt haben, ist dieser Einfluß im Anfang der Strömung jedoch gering.

Es ist zu vermuten, daß die behandelte Entmischungskonvektion für ein frühes Stadium der Erdentwicklung maßgeblich war, während die heute im Erdmantel herrschenden Massenverlagerungen hauptsächlich durch thermische Konvektion bewirkt werden.

### 14.3. Einige verwandte Probleme

Eine interessante Frage ist, ob bei der Entmischungskonvektion in der frühen Erde oszillierende Lösungen mit wachsenden Amplituden (overstability) möglich sind. Wir behandeln das Problem diesmal nach CHANDRASEKHAR (1961, S. 436-440), ohne viskose Dissipation. Falls  $n$  komplex ist, muß gelten:

$$(14.51) \quad 2 \operatorname{re}(n) \int_0^d \rho (|v_3|^2 + k^{-2} |Dv_3|^2) dx_3 = \\ = - \int_0^d (D^2\eta) |v_3|^2 dx_3 - \int_0^d \eta (k^2 |v_3|^2 + 2 |Dv_3|^2 + k^{-2} |D^2v_3|^2) dx_3 .$$

Falls für die frühe Erde wie für die jetzige (siehe z. B. WEERTMAN 1970) überall in der Tiefe des jetzigen oberen Mantels

$$(14.52) \quad D^2\eta > 0$$

gilt, dann müßte wegen (14.51) in dieser für Differentiation und Entmischungskonvektion in Frage kommenden Tiefe

$$(14.53) \quad \operatorname{re}(n) < 0$$

gelten. Damit aber wäre laut Ansatz (14.11) in der Amplitude anschwellende periodische Lösungen unmöglich.

Eine andere Frage, die nicht mit der frühen Geschichte der Erde zusammenhängt, ist die, ob die Kelvin-Helmholtz-Instabilität bei der gegenwärtigen Plattentektonik eine Rolle spielt. Es existiere in einem unteren Halbraum eine stationäre Strömung in  $x_1$ -Richtung mit einer Geschwindigkeit  $U$ , die eine Funktion der Tiefe ( $-x_3$ ) ist. Eine notwendige Bedingung für die Stabilität (CHANDRASEKHAR, 1961, S. 491) dieser Strömung ist, daß für die Richardson-Zahl  $J$

$$(14.54) \quad J > \frac{1}{4}$$

gilt, wobei

$$(14.55) \quad J = - \frac{g}{\rho} \frac{d\rho/dx_3}{(dU/dx_3)^2} .$$

Wir wollen eine Platte von 100 km Dicke annehmen, die sich mit 3,15 cm/a (=  $10^{-7}$  cm/s) bewegt. Ein Anhänger der Hypothese, daß sich die Platten nicht durch Konvektion bewegen, mag annehmen, daß die Geschwindigkeit  $U$  bis in 400 km Tiefe linear bis auf 0 abnehme. Ein Konvektionist mag annehmen, daß die Geschwindigkeit unterhalb der Platte



linear mit  $(-dU/dx_3)=3,3 \cdot 10^{-15} \text{ sec}^{-1}$  zunehme. Das läuft wegen des Quadrates im Nenner auf dasselbe hinaus. Für die Dichteverteilung benutzen wir Tab. 2 von HADDON und BULLEN (1969). So erhält man eine Richardson-Zahl von  $3,6 \cdot 10^{23}$ . Gleichung (14.54) ist also unbedingt erfüllt. Das Auftreten einer Kelvin-Helmholtz-Instabilität läßt sich also für die Plattentektonik nicht zeigen.

## 15. Schlussfolgerungen

- a) In der Arbeit werden die Mantelkonvektion, die Möglichkeit eines thermokonvektiven Antriebs des Geodynamos und die Druckabhängigkeit von Dichte und Schmelztemperatur behandelt. Es erweist sich, daß diese Themen eng miteinander verflochten sind.
- b) Wenn man in Übereinstimmung mit geochemischen Modellen annimmt, daß der untere Mantel an radioaktiven Quellen ärmer ist als der obere, daß die effektive Viskosität des Mantels mit steigender Temperatur sinkt und daß Gitter- und Strahlungs-Wärmeleitfähigkeit Messungen entsprechend gering sind, so ergibt sich ein Mechanismus episodischer Konvektion im unteren Mantel.
- c) Die numerische Auswertung der Theorie ergibt Konvektionsepisoden bei etwa 2820, 3633, 4128 und 4496 Millionen Jahren nach Entstehung der Erde, wobei ein Alter der Erde von 4600 Millionen Jahren angenommen wurde.
- d) Der Vergleich mit Gastils Kurve der globalen magmatischen Aktivität zeigt, daß die vier höchsten Maxima dieser Kurve mit den genannten theoretischen Zeiten der Untermantel-Konvektionsepisoden übereinstimmen.
- e) Im Phanerozoikum, d. h. insoweit Daten vorliegen, gibt es in Osteuropa und Nordamerika zu diesen Zeiten große Transgressionen. Es wird gezeigt, daß letztere zu den Zeiten auftreten, in denen sich das geomagnetische Dipolfeld nur selten umpolte.
- f) Gestützt auf diese Ergebnisse vermutet der Verfasser, daß die Untermantel-Konvektion episodisch die dauernd vorhandene Obermantel-Konvektion verstärkt und daß dadurch episodisch die magmatische und orogenetische Aktivität in der Lithosphäre erhöht wird.
- g) Andererseits bestimmt der untere Mantel weitgehend die Randbedingungen der hydromagnetischen Konvektion im äußeren Erdkern. Es ist deshalb zu vermuten, daß die Konvektionsepisoden im unteren Mantel die geomagnetische Umpolungshäufigkeit beeinflussen.
- h) Motiviert durch eine neue Untersuchung des Kernparadoxons wird für hohe Koordinationszahlen die Abhängigkeit der Schmelztemperatur vom Atomvolumen bestimmt. Die erste Herleitung geht von einem zwischenatomaren Potential und einem Versetzungsmodell aus, die zweite Herleitung ist hauptsächlich thermodynamischer Natur. Beide führen auf das gleiche Ergebnis. Dieses kann als eine Bestätigung des Lindemann-Gesetzes gedeutet werden.
- i) Aus der Schmelztemperatur, dem Formelgewicht und physikalischen Meßgrößen, die für den äußeren Erdkern als Funktion der Tiefe bekannt sind, wurden dimensionslose Größen gebildet. Diese Größen wurden als Funktion des Druckes für die chemischen Elemente und einfache Verbindungen untersucht, um nach einer künftigen genaueren Bestimmung der chemischen Zusammensetzung des Außenkerns das Phasendiagramm realistisch abschätzen zu können.
- j) Aus einem Ausdruck für die freie Enthalpie wurde eine neue Zustandsgleichung für Metalle hergeleitet. Dabei wurden nicht nur die Gitteranteile, sondern auch die Fermi-Energie, die Austausch- und die Korrelations-Energie der Elektronen berücksichtigt.

k) Die neue Zustandsgleichung wurde zusammen mit zwei anderen bewährten Gleichungen an 40 Stoffen erprobt. Es ergab sich nicht nur für Metalle, sondern auch für Halogenide und Oxide gute Übereinstimmung mit den Hochdruck-Meßwerten, wobei die neue Gleichung für die meisten Stoffe Verbesserungen brachte. Die benutzten Eingangsparameter sind in allen drei verglichenen Zustandsgleichungen dieselben, obwohl die Herleitungen sich grundsätzlich unterscheiden.

l) In einer auf heuristisch gefundenen Postulaten beruhenden, aber quantitativen Theorie werden Aussagen über die theoretische Topographie der Erde hergeleitet, die enge Übereinstimmung mit Beobachtungsergebnissen zeigen. In Verbindung mit hydrodynamischen Ergebnissen weist diese Theorie darauf hin, daß Tiefe und Breite einer Konvektionszelle des Mantels etwa gleich groß sein dürften, obwohl es gleichzeitig Zellen von recht verschiedener Größe geben kann.

m) Es wurden verschiedene hydrodynamische Stabilitätsprobleme gelöst, deren spezielle Bedingungen verschiedene Aspekte der Mantelkonvektion modellieren. Bemerkenswert erscheint die erstmalige Behandlung des Bénard-Problems von mikropolaren Flüssigkeiten.

n) Die Frage der Entmischungskonvektion der Erde in einem frühen Entwicklungsstadium wurde erörtert. Das Problem der Rayleigh-Taylor-Instabilität mit viskoser Dissipation wurde gelöst. Hinweise auf ungeklärte Fragen findet man in den einzelnen Abschnitten der Arbeit.

#### D a n k

Für ihr Interesse am Ausbau des in der Arbeit behandelten Forschungsgebietes sei Herrn AkM H. STILLER (Potsdam) und Herrn AkM V.A. MAGNITSKY (Moskau) an dieser Stelle herzlich gedankt. Dem Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde, Herrn Prof. Dr. habil. H. KAUTZLEBEN, und dem Leiter des Seismologischen Hauptobservatoriums Jena, Herrn Dr. habil. Ch. TEUPSER, möchte ich für ihr förderliches Interesse am Entstehen dieser Arbeit danken. Herrn Dr. habil. V.P. TRUBITSYN (Moskau) bin ich für interessante Diskussionen über die Möglichkeit der Konvektion im Erdmantel zu Dank verpflichtet. Für anregende Diskussionen und Förderung in einem frühen Stadium der Arbeiten danke ich Herrn Prof. Dr. habil. W. BUCHHEIM (Freiberg), Herrn Prof. Dr. habil. A. WATZNAUER (Karl-Marx-Stadt) und Herrn Dr. habil. F. FRÖLICH (Potsdam) auf das herzlichste. Für gute Zusammenarbeit, Ermutigung und Anregung bin ich Herrn Dr. sc. W. ULLMANN und Herrn Dr. R. MAAZ (beide Jena) sowie Herrn Dr. V.L. PAN'KOV und Herrn Dr. A.V. VITYAZEV (beide Moskau) sehr verbunden. Herrn Dr. S. PSHENAI-SEVERIN danke ich für die Übersetzung der Zusammenfassung ins Russische. Das Typoskript der Arbeit schrieb FrI. Ch.-M. DIETL. Die Figuren zeichnete Frau G. SCHAMBERGER. FrI. I. HAUSER und Frau J. TEUPSER führten die Fotoarbeiten aus. Den genannten Damen sei besonders herzlich gedankt.

## ANHANG

Tab. 6.1 Benutzte physikalische Stoffkonstanten der chemischen Elemente für  $P = 0$ . Schmelztemperatur  $T_m$  nach GSCHEIDNER (1964), Formelgewicht  $F$  nach EBERT (1976), Dichte  $\rho$  und Inkompressibilität  $\kappa$  für die seltenen Erden und Aktinide nach KITTEL (1973), Dichte, Inkompressibilität und ihre Ableitung nach dem Druck für die anderen Elemente nach ULLMANN und PAN'KOV (1976). Ein beträchtlicher Teil der Datensammlung in letztgenannter Arbeit stammt von O.L. ANDERSON (1966) und GUINAN und STEINBERG (1974).  $N_1$  ist die durch Gl. (6.32) definierte dimensionslose Größe für  $P = 0$ , wobei  $R_0 = 8,31441 \text{ J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ . Der mit a) bezeichnete Wert gilt eigentlich für bcc-Eisen, zieht man die hypothetische Schmelzpunktkurve von hcp-Eisen von LIU (1975) nach niedrigen Drücken, so kommt man auf denselben Wert.

Element	$T_m$ [K]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\kappa_0$ [kbar]	$F$ [kg/mol]	$N_1$	$\kappa_1$
Li	454	0,534	115	6,94	39,59	3,56
Be	1557	1,84	1100	9,01	41,61	4,6
B	2498	2,31	1785	10,81	40,22	3,26
Na	370,8	0,970	61,8	22,99	47,51	3,59
Mg	923	1,74	344,2	24,31	62,66	4,16
Al	933,2	2,697	729,1	26,98	94,00	4,7
Si	1685	2,33	970,8	28,09	83,54	4,16
P(r)	868	2,35	192	30,97	35,06	6,68
K	336,6	0,86	31,2	39,10	50,69	3,85
Ca	1112	1,53	163	40,08	46,18	2,7
Sc	1812	2,98	546	44,96	54,68	2,1
Ti	1941	4,50	1060	47,90	69,91	4,37
V	2178	6,09	1537	50,94	70,99	3,5
Cr	2148	7,194	1600	52,00	64,76	4,89
Mn	1517	7,47	597	54,94	34,81	5,0
Fe( $\epsilon$ )	1808 <sup>a)</sup>	8,36	2060	55,85	91,55	4,0
Co	1765	8,79	1860	58,93	84,98	4,26
Ni	1726	8,90	1790	58,71	82,28	6,20
Cu	1356	8,932	1330	63,55	83,93	5,65
Zn	692,655	7,14	647	65,37	102,86	6,40
Ga	302,8	5,91	568	69,72	266,15	3,6
Ge	1209	5,33	724,3	72,59	98,13	4,35
As	1090	5,77	631	74,92	90,40	5,2
Se	490	4,81	89,7	78,96	36,14	5,8

Tab. 6.1 (Fortsetzung)

Element	$T_m$ [K]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\kappa_0$ [kbar]	$F$ [kg/mol]	$N_1$	$n_1$
Rb	311,8	1,53	26,2	85,47	56,46	3,39
Sr	1045	2,58	116,1	87,62	45,38	2,1
Y	1775	4,47	410	88,91	55,26	2,1
Zr	2123	6,53	949	91,22	75,11	4,11
Nb	2741	8,63	1690	92,91	79,84	6,9
Mo	2888	10,218	2610	95,94	102,06	4,4
Tc	2443			98,91		
Ru	2553	12,44	3030	101,07	115,97	6,61
Rh	2233	12,42	2820	102,91	126,87	4,50
Pd	1825	12,04	1880	106,4	109,49	5,35
Ag	1234	10,50	1015	107,87	101,63	5,53
Cd	594,18	8,65	457,9	112,40	120,44	6,77
In	429,76	7,29	392	114,82	172,78	6,0
Sn	505,06	7,28	532	118,69	206,55	6,01
Sb	903,6	6,69	411	121,75	99,56	4,9
Te	722,8	6,27	233	127,60	78,90	8,3
Cs	301,8	1,83	17,9	132,91	51,81	3,17
Ba	998	3,61	94,3	137,34	43,24	2,43
La	1193	6,16	267	138,91	60,70	3,2
Ce	1070	6,77	239	140,12	55,60	
Pr	1208	6,78	306	140,10	62,95	
Nd	1297	7,00	327	144,24	62,48	
Pm	1308			141,91		
Sm	1345	7,54	294	150,4	52,44	
Eu	1099	5,25	147	151,96	46,57	
Gd	1585	7,89	383	157,25	57,92	
Tb	1629	8,27	399	158,93	56,61	
Dy	1680	8,53	384	162,50	52,37	
Ho	1734	8,80	397	164,93	51,61	
Er	1770	9,04	411	167,26	51,67	
Tm	1818	9,32	397	168,93	47,61	
Yb	1097	6,97	133	173,04	36,20	
Lu	1925	9,84	411	179,97	46,97	



Tab. 6.1 (Fortsetzung)

Element	$T_m$ [K]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\kappa_0$ [kbar]	F [kg/mol]	$N_1$	$\kappa_1$
Hf	2495	13,25	1080	178,49	70,13	3,95
Ta	3271	16,62	1910	180,95	76,46	3,15
W	3653	19,26	3060	183,85	96,17	3,95
Re	3433	21,03	3587	186,2	111,27	5,41
Os	3300	22,58	4200	190,2	128,94	3,4
Ir	2716	22,65	3580	192,22	134,53	4,83
Pt	2042	21,47	2770	195,09	148,25	5,18
Au	1336,2	19,30	1664	196,97	152,86	6,51
Hg	234,28	14,24	282	200,59	203,92	4,6
Tl	576	11,85	337	204,37	121,37	5,1
Pb	600,576	11,34	419	207,2	153,31	5,72
Bi	544,525	9,807	332	208,98	156,26	6,06
Th	2024	11,72	543	232,04	63,88	
U	1404	19,05	987	238,03	105,65	

Tab. 6.2 Physikalische Stoffkonstanten chemischer Verbindungen für  $P = 0$ . Schmelztemperatur  $T_m$  und Formelgewicht  $F$  nach JANZ (1967); Dichte, Inkompressibilität und ihre Ableitung nach dem Druck nach ULLMANN und PAN'KOV (1976), außer den mit a) bezeichneten Werten, die nach einer persönlichen Mitteilung von PAN'KOV (1978) Hochdruckphasen der zwei Stoffe kennzeichnen.  $N_1$  wurde nach Gl. (6.32) berechnet

Verbindung	$T_m$ [K]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\kappa_0$ [kbar]	$F$ [kg/mol]	$N_1$	$\kappa_1$
FeO	1642	5,91	1470	71,85	130,90	4,0
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	1867	6,4 a)	3600 a)	231,55	839,06	3,2 a)
FeS	1466	6,25	1690	87,91	195,02	4,96
FeS <sub>2</sub>	1444	5,02 a)	1480 a)	119,98	294,62	5,5 a)
BeO	2523	3,008	2186	25,01	86,64	5,50
MgO	3073	3,583	1599	40,31	70,41	4,25
CaO	2873	3,345	1049	56,08	73,62	5,26
SrO	2688	4,990	820	103,62	76,19	6,1
LiF	1121	2,638	665,7	25,94	70,23	5,24
LiCl	883	2,074	318,5	42,39	88,67	3,36
LiBr	823	3,464	242,7	86,85	88,93	3,50
LiI	742	4,115	168,3	133,84	88,73	4,32
NaF	1268	2,802	461,6	41,99	65,61	5,03
NaCl	1073	2,164	237,5	58,44	71,89	5,35
NaBr	1020	3,200	192,0	102,90	72,80	5,3
NaI	933	3,670	162,2	149,89	85,40	5,48
KCl	1043	1,986	173,3	74,56	75,03	5,39
CsCl	918	3,988	167,4	168,36	92,59	5,98
CsBr	909	4,456	143,4	212,81	90,61	5,95
CsI	899	4,525	118,9	259,81	91,33	5,93

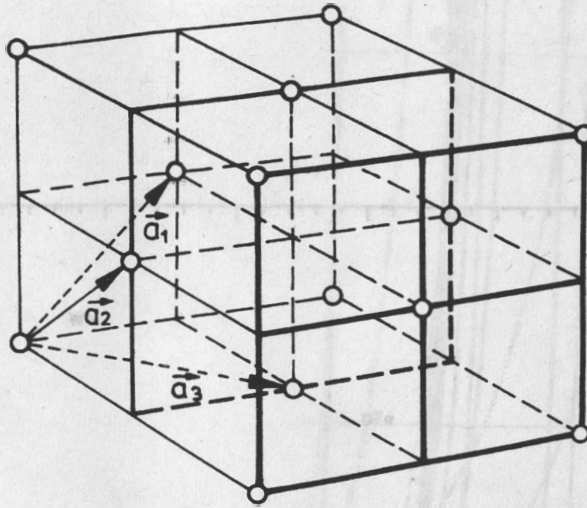


Abb. 6.1 Das kubisch-flächenzentrierte Gitter (fcc-Gitter)

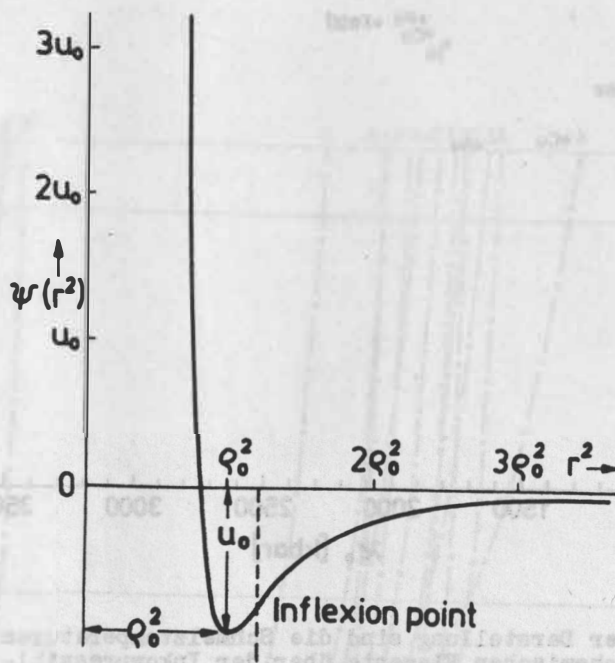


Abb. 6.2 Die Potentialfunktion  $\psi(r^2)$  nach BORN und HUANG (1954)

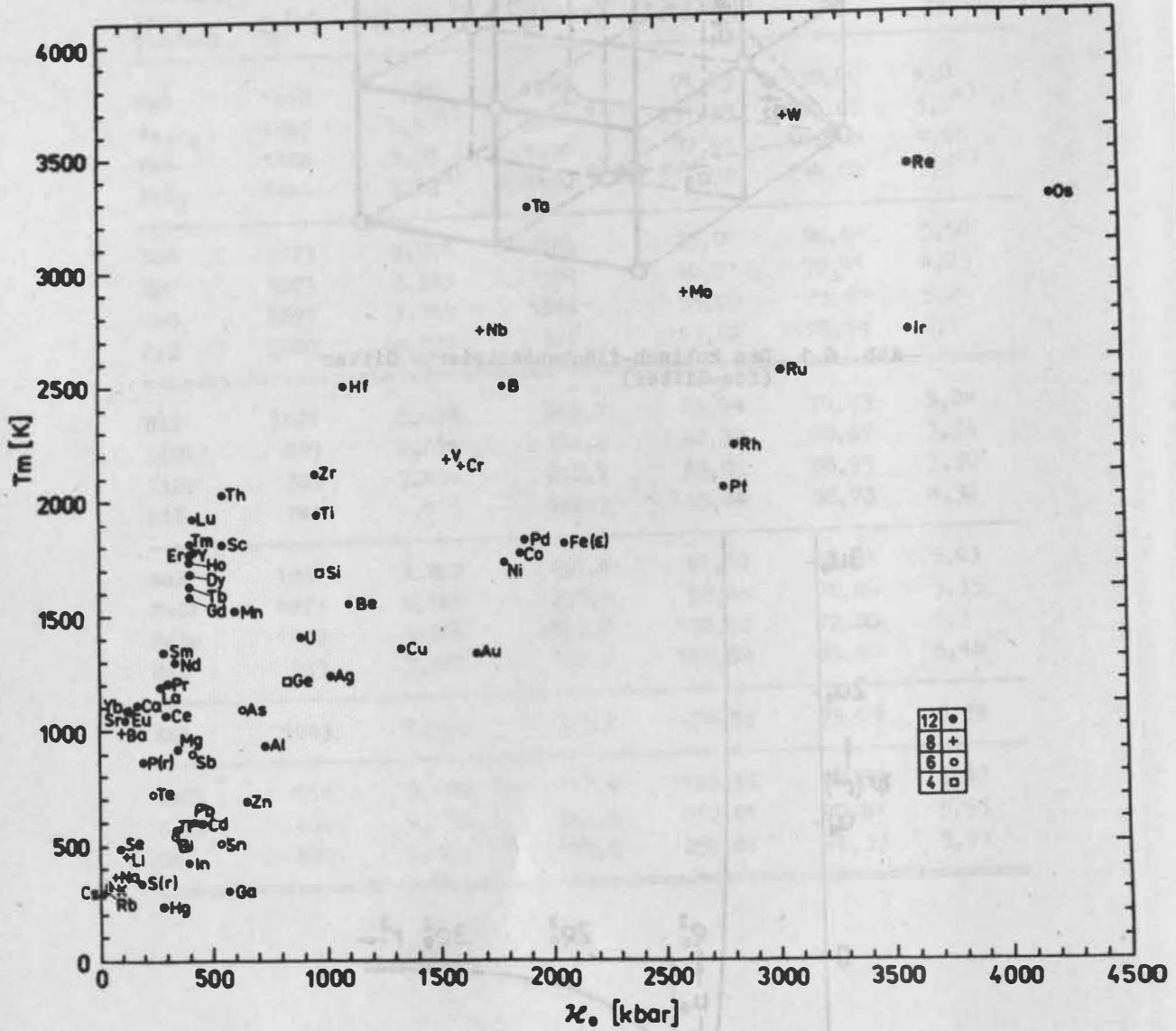


Abb. 6.3 In der Darstellung sind die Schmelztemperaturen der chemischen Elemente über der Inkompessibilität für  $P = 0$  aufgetragen. Die Symbole bezeichnen die Koordinationszahl. Die Zuordnung ist in der Legende rechts unten zu sehen.

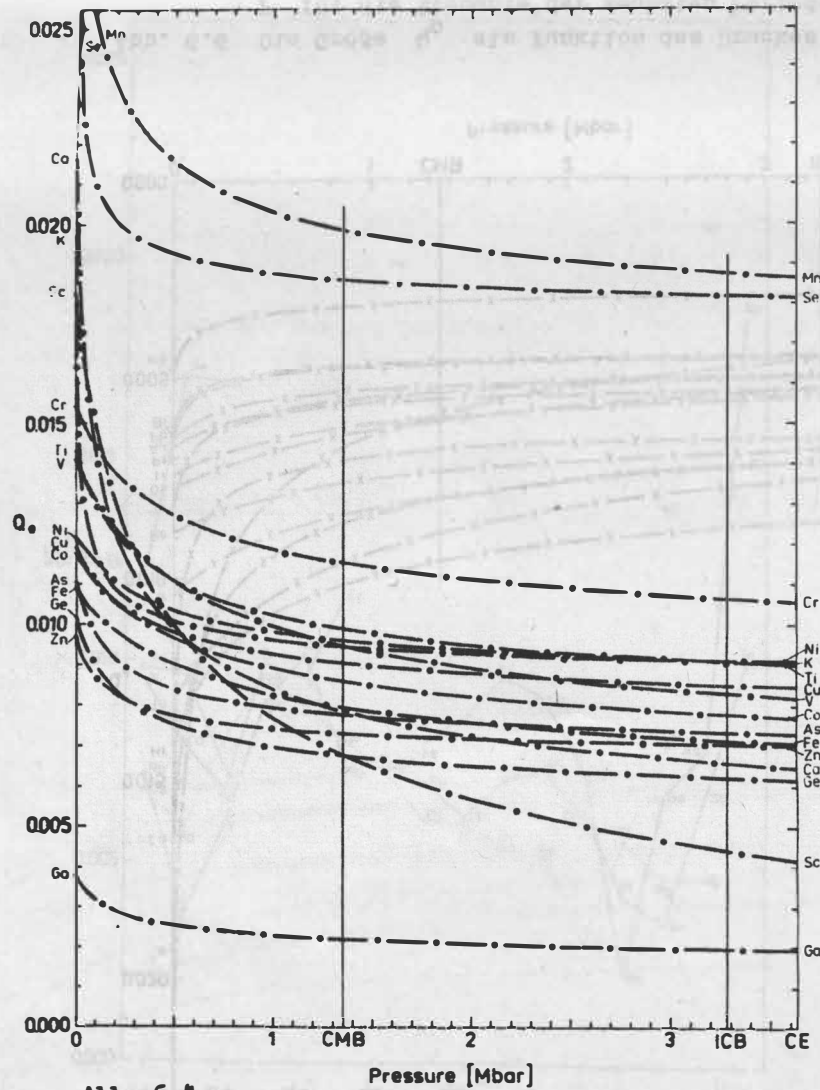


Abb. 6.4

Die Größe  $Q_0$  als Funktion des Druckes  $P$  für die Elemente der vierten Periode des Periodensystems. CMB bezeichnet den Druck an der Kern-Mantel-Grenze, ICB den Druck an der Innenkern-Grenze. CE den im Zentrum der Erde.  $1 \text{ Mbar} = 10^{11} \text{ Pa}$ .

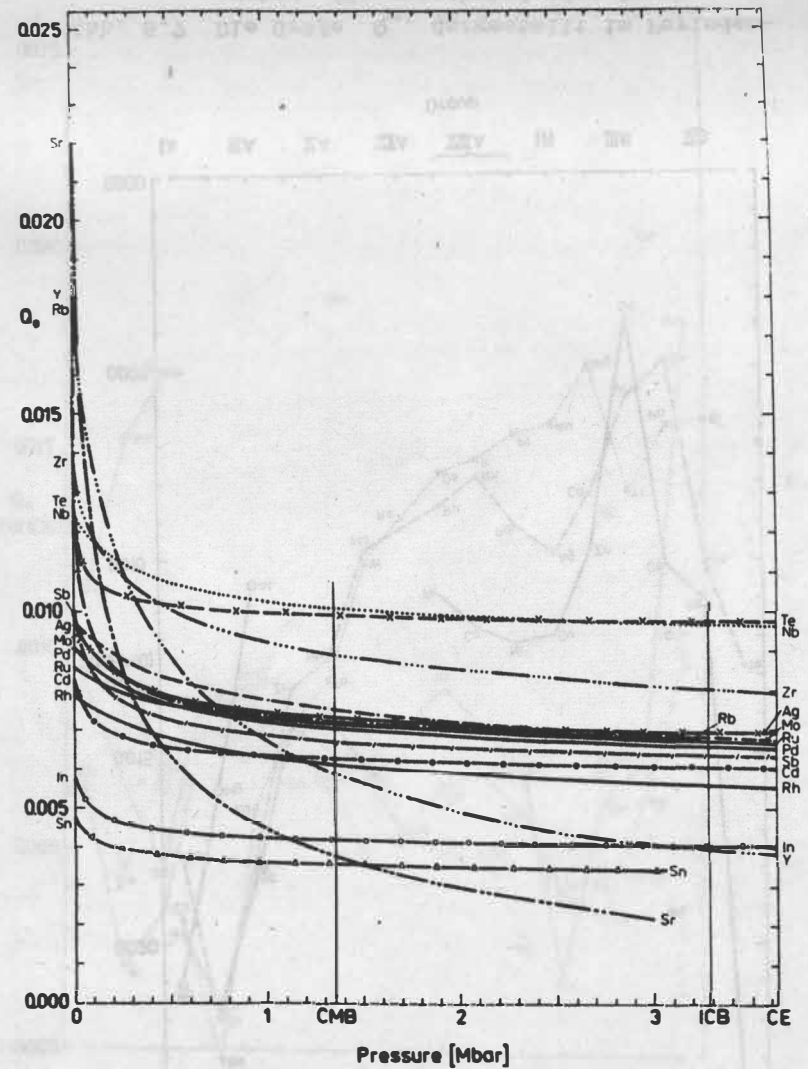


Abb. 6.5 Die Größe  $Q_0$  als Funktion des Druckes  $P$  für die Elemente der fünften Periode



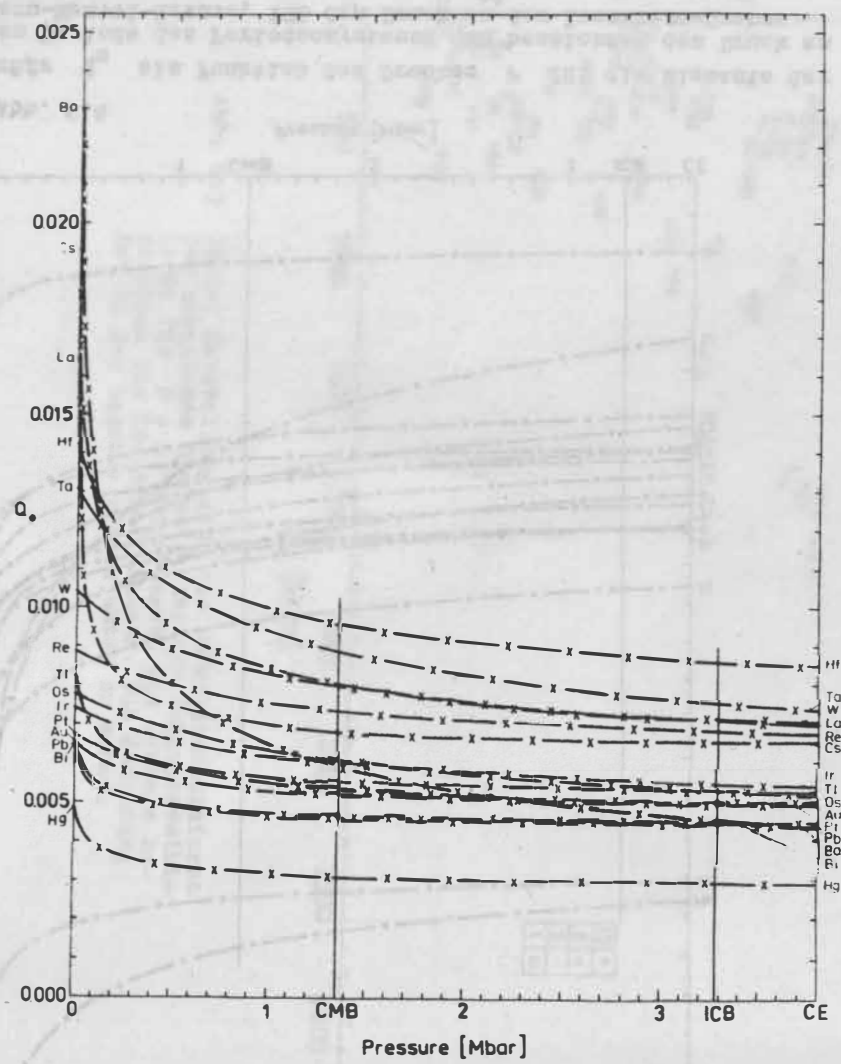


Abb. 6.6 Die Größe  $Q_0$  als Funktion des Druckes  $P$  für die Elemente der sechsten Periode

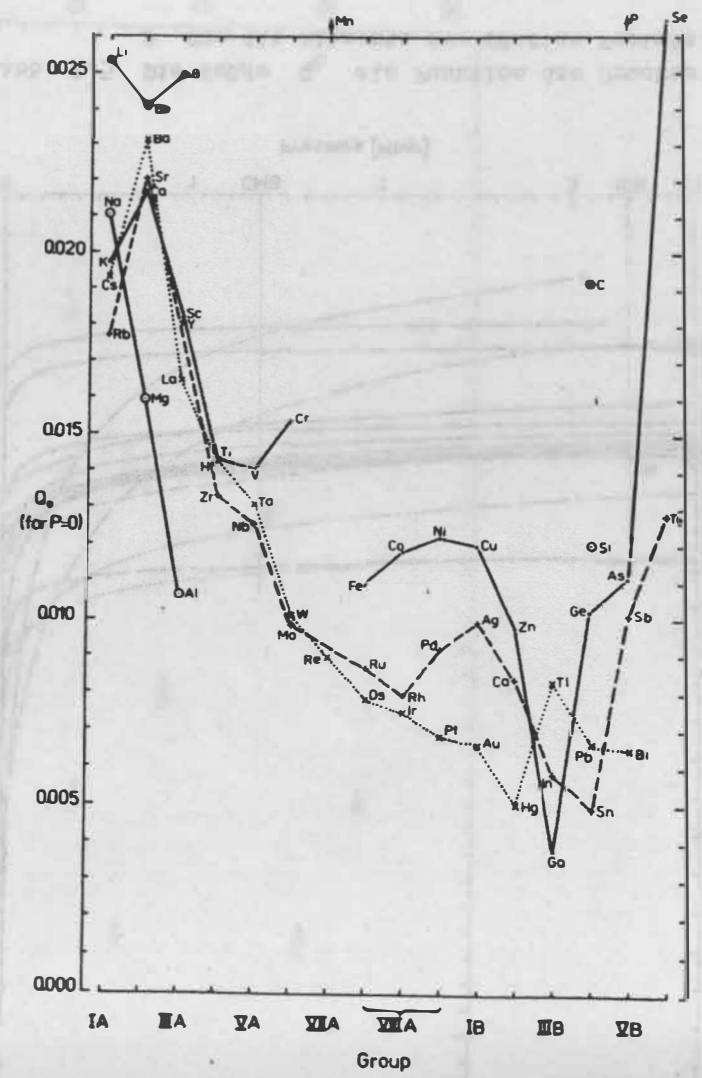


Abb. 6.7 Die Größe  $Q_0$ , dargestellt im Periodensystem, für verschwindenden Druck

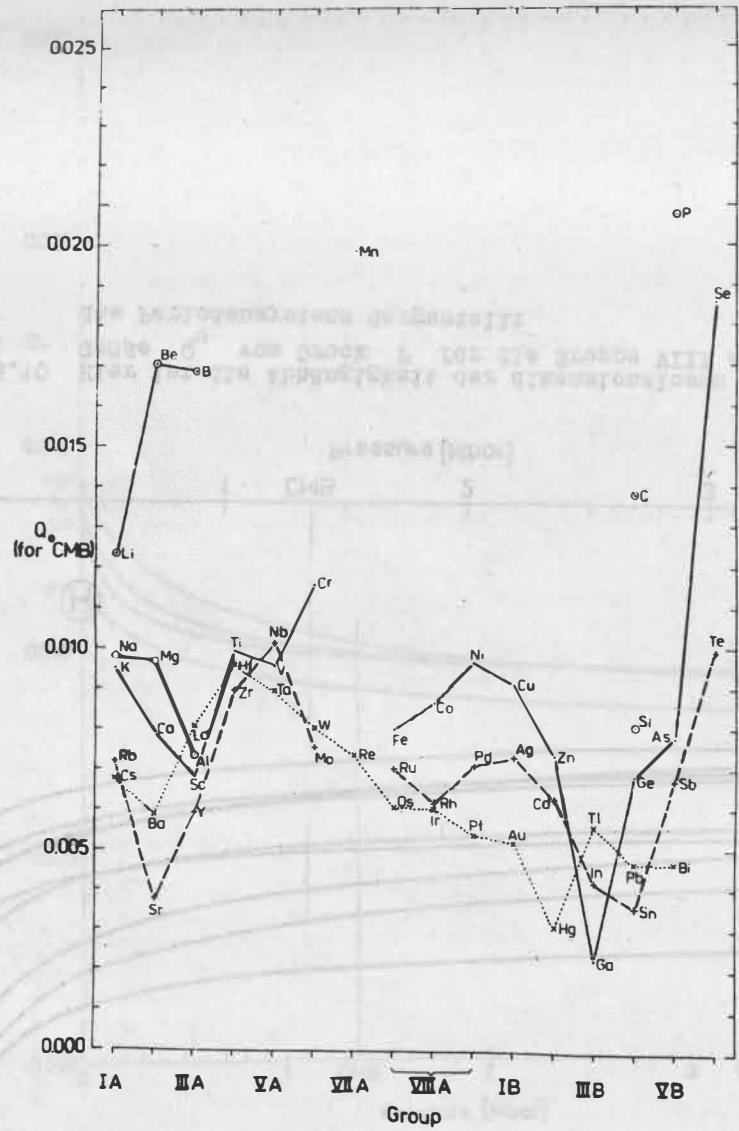


Abb. 6.8 Die Größe  $Q_0$ , dargestellt im Periodensystem, für den Druck an der Kern-Mantel-Grenze

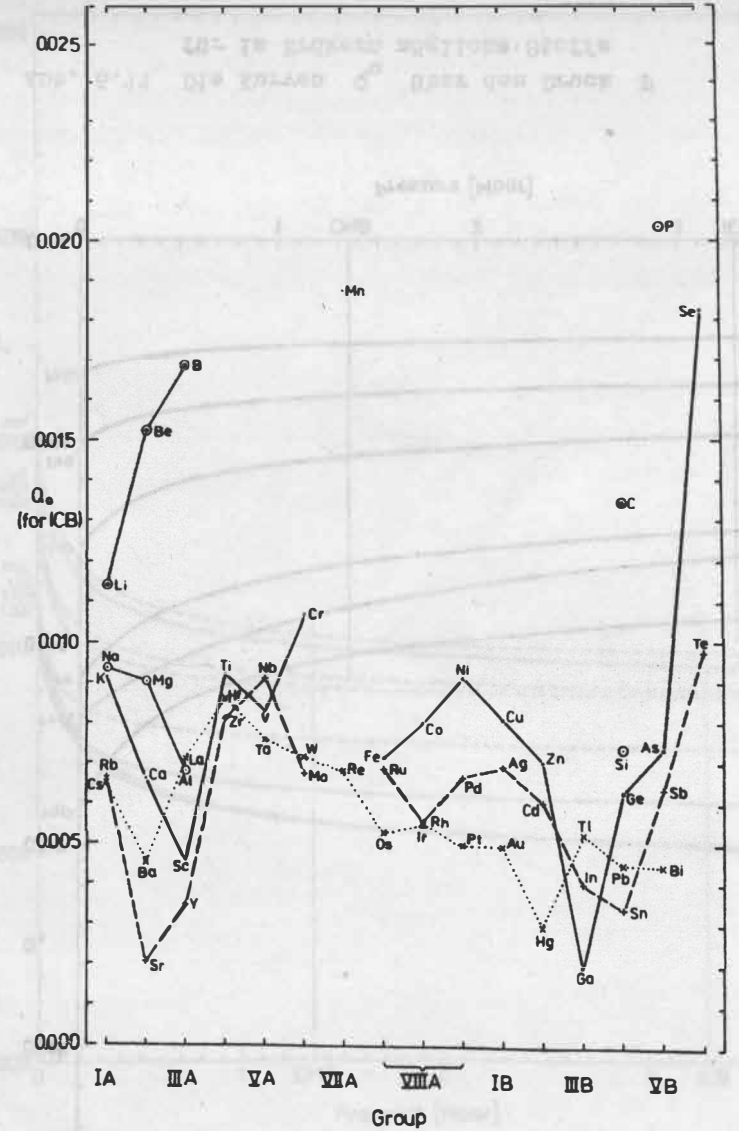


Abb. 6.9 Die Größe  $Q_0$ , dargestellt im Periodensystem, für den Druck an der Innenkern-Grenze

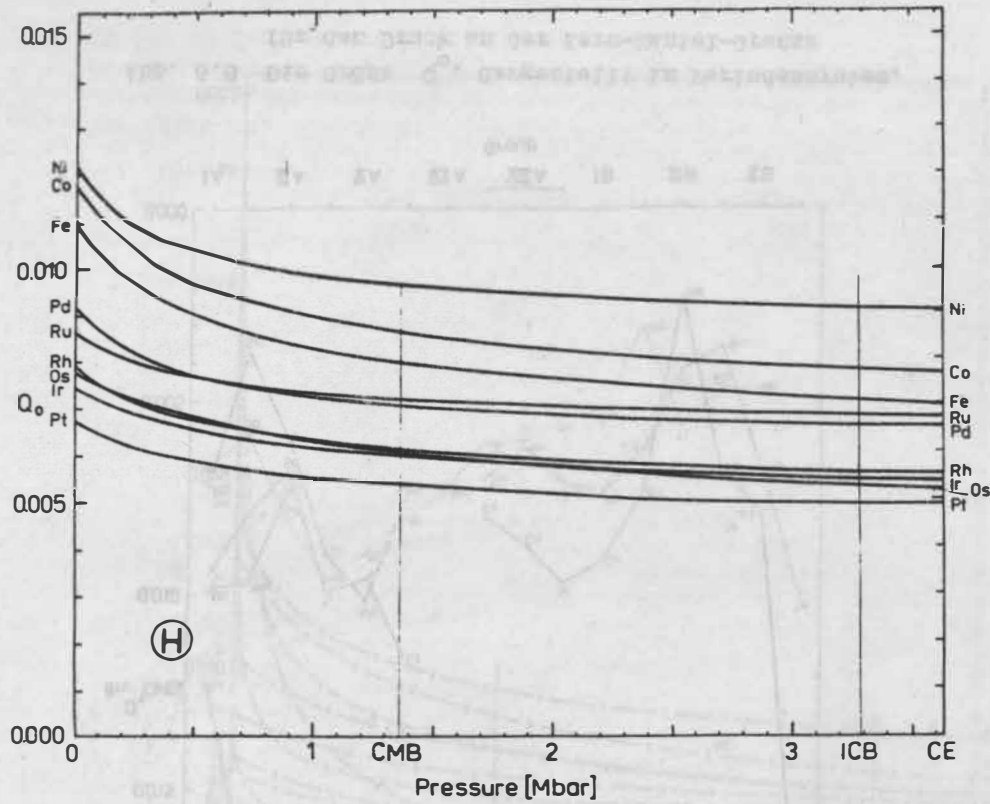


Abb. 6.10 Hier ist die Abhängigkeit der dimensionslosen Größe  $Q_0$  vom Druck  $P$  für die Gruppe VIII A des Periodensystems dargestellt

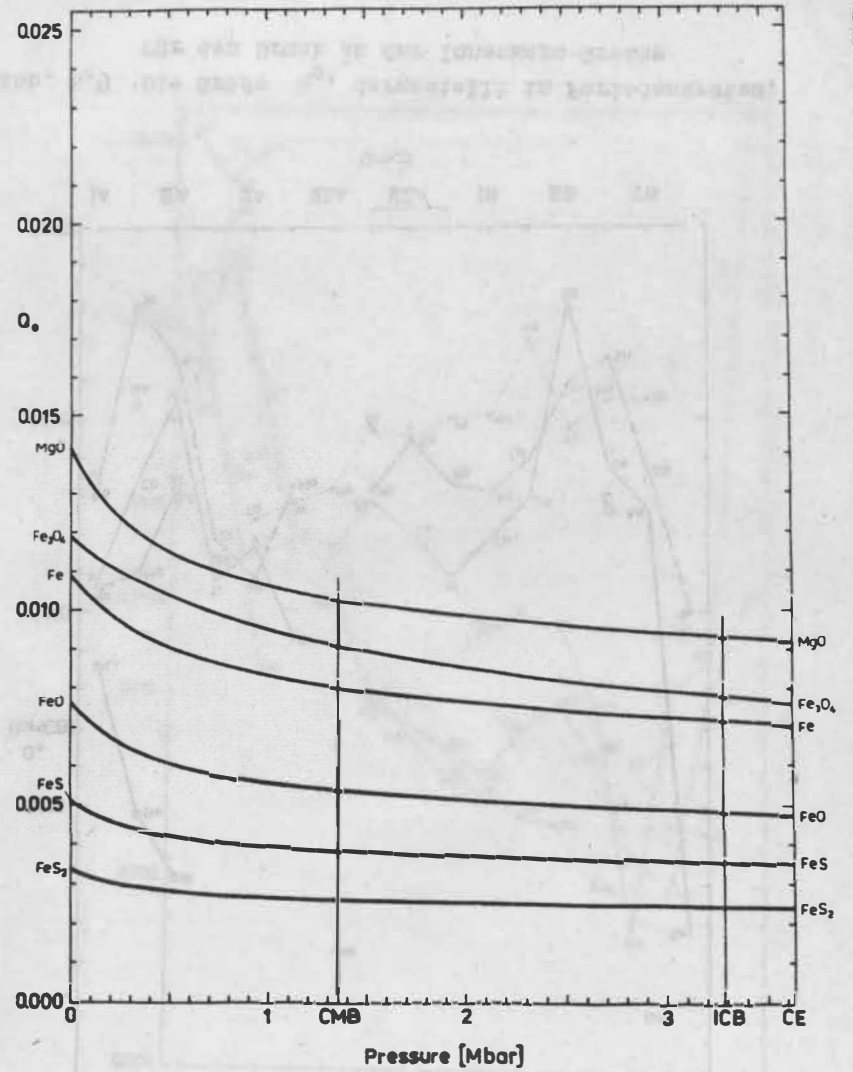


Abb. 6.11 Die Kurven  $Q_0$  über dem Druck  $P$  für im Erdkern mögliche Stoffe

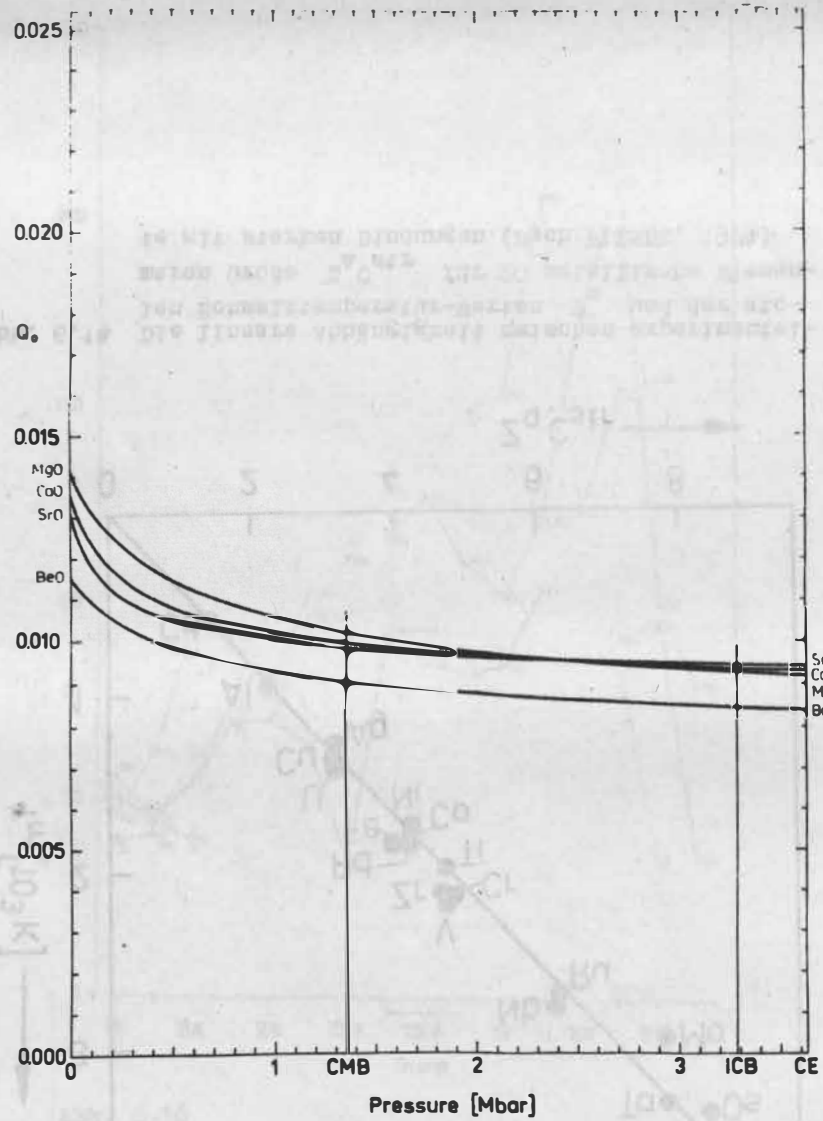


Abb. 6.12 Die Kurven  $Q_0$  über dem Druck  $P$  für zweiatomige Oxide der Erdalkalimetalle

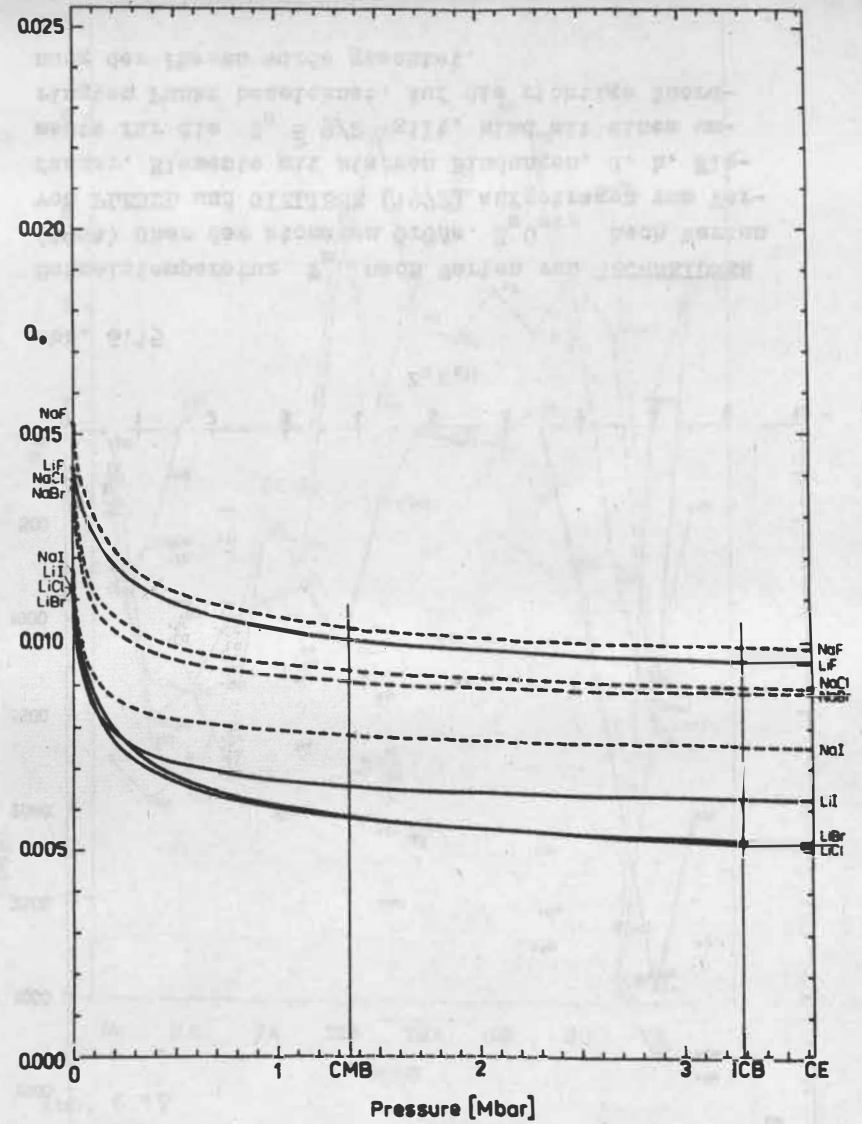


Abb. 6.13 Die Kurven  $Q_0$  über dem Druck  $P$  für Alkali-Halogenide

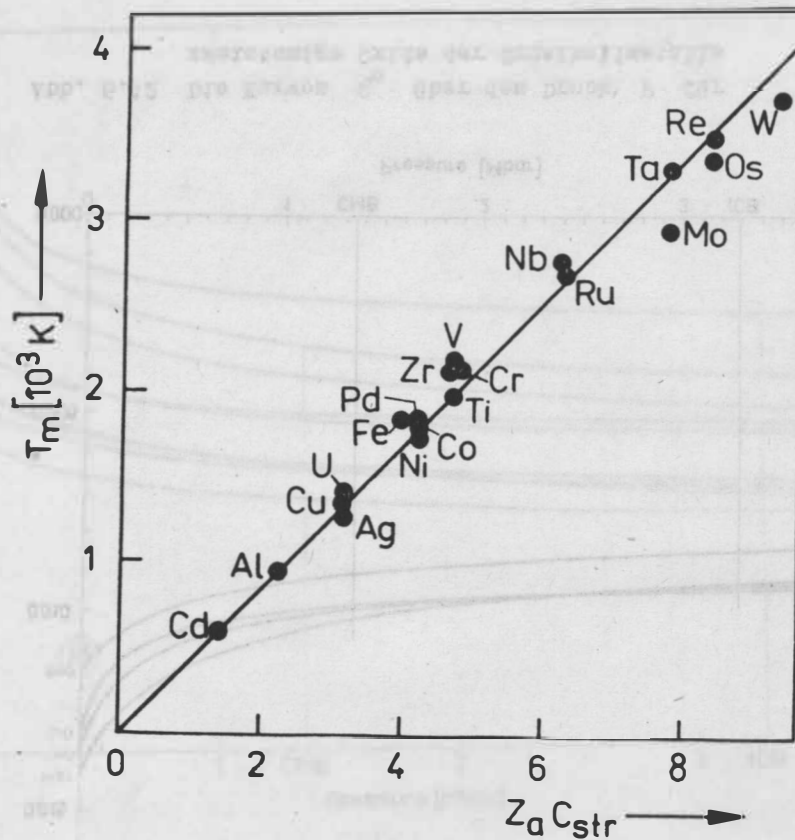


Abb. 6.14 Die lineare Abhängigkeit zwischen experimentellen Schmelztemperatur-Werten  $T_m$  und der atomaren Größe  $Z_a C_{str}$  für 20 metallische Elemente mit starken Bindungen. (Nach PLENDL, 1974)

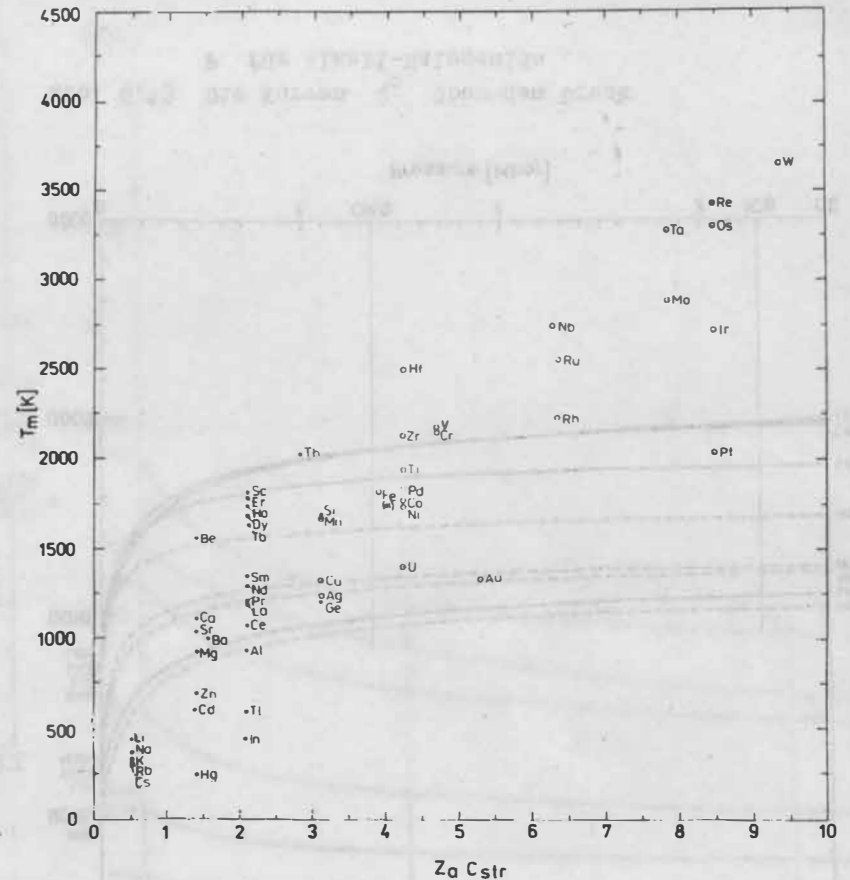


Abb. 6.15

Schmelztemperatur  $T_m$  nach Werten von GSCHNEIDNER (1964) über der atomaren Größe  $Z_a C_{str}$  nach Werten von PLENDL und GIELISSE (1972) aufgetragen vom Verfasser. Elemente mit starken Bindungen, d. h. Elemente für die  $Z_a \geq 9/2$  gilt, sind mit einem umringten Punkt bezeichnet. Auf die richtige Zuordnung der Phasen wurde geachtet.



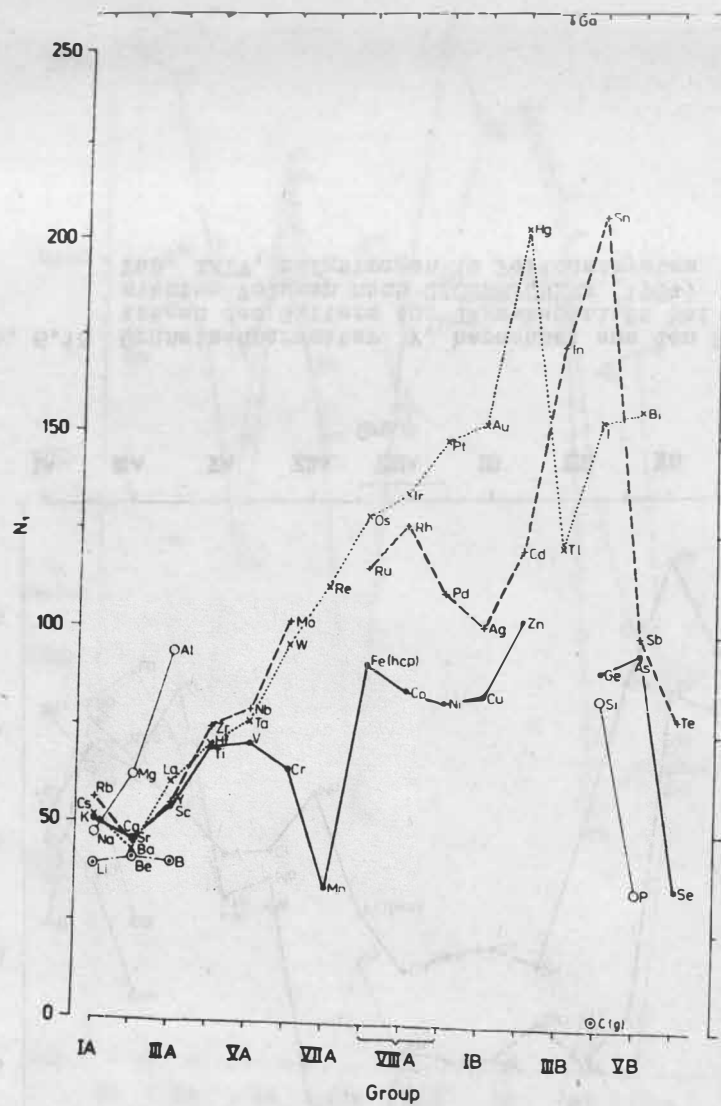


Abb. 6.16

Die durch Gl. (6.44) definierte dimensionslose Größe  $N_1$  für die Elemente der zweiten, dritten, vierten, fünften und sechsten Periode des Periodensystems

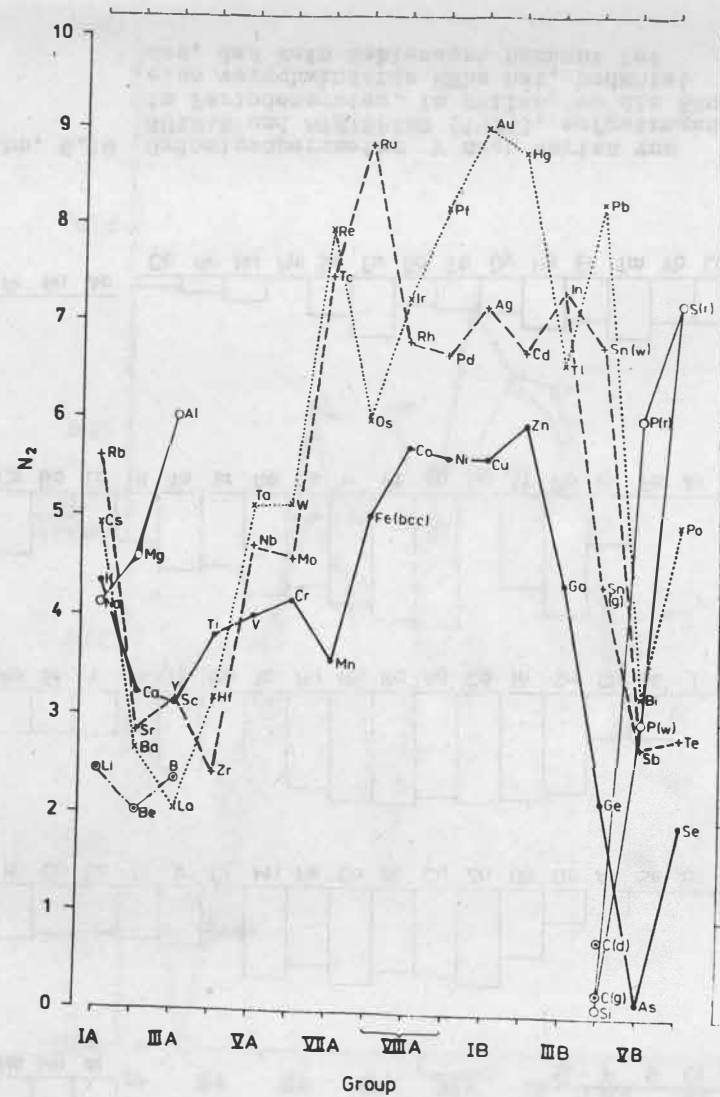


Abb. 6.17

Die durch Gl. (6.45) definierte dimensionslose Größe  $N_2$  für die chemischen Elemente der zweiten, dritten, vierten, fünften und sechsten Periode

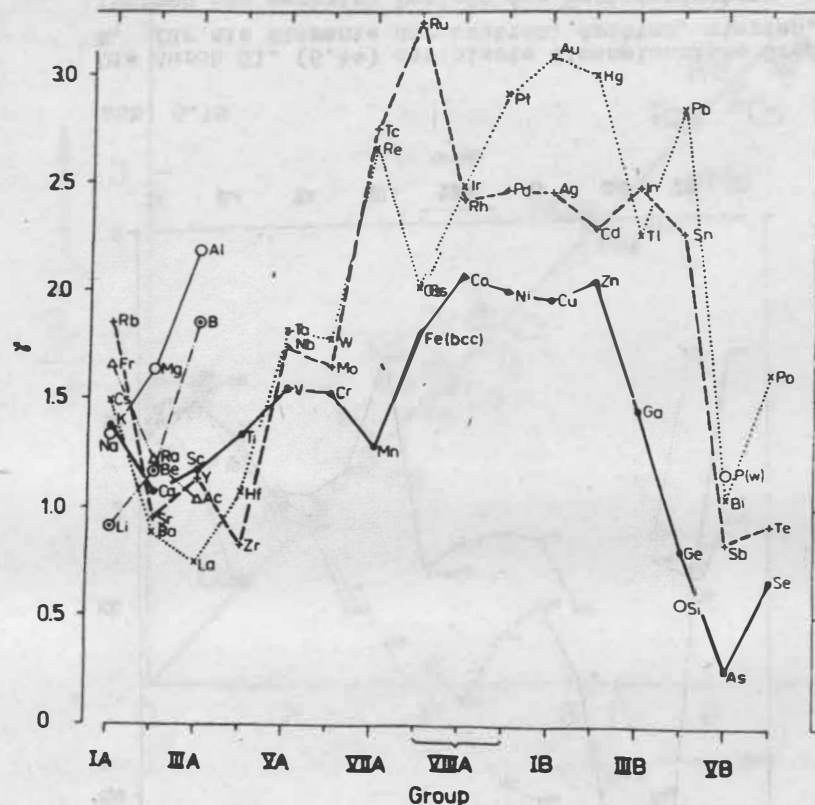


Abb. 6.18 Grüneisenparameter  $\gamma$ , berechnet aus den Beiträgen des Gitters zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen nach GSCHNEIDNERS (1964) Tab. XXIV, aufgetragen im Periodensystem

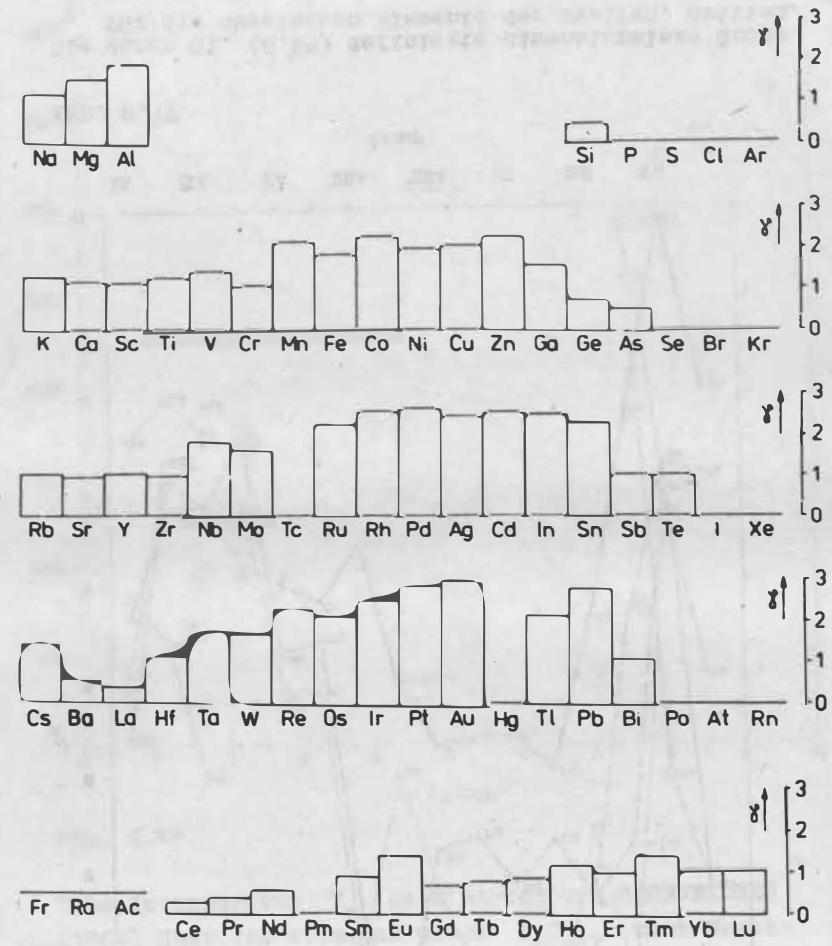


Abb. 6.19 Grüneisenparameter  $\gamma$  nach Werten von GUINAN und STEINBERG (1974), aufgetragen im Periodensystem. In Fällen, wo die Säule eine verschwindende Höhe hat, bedeutet das, daß kein Zahlenwert bekannt ist

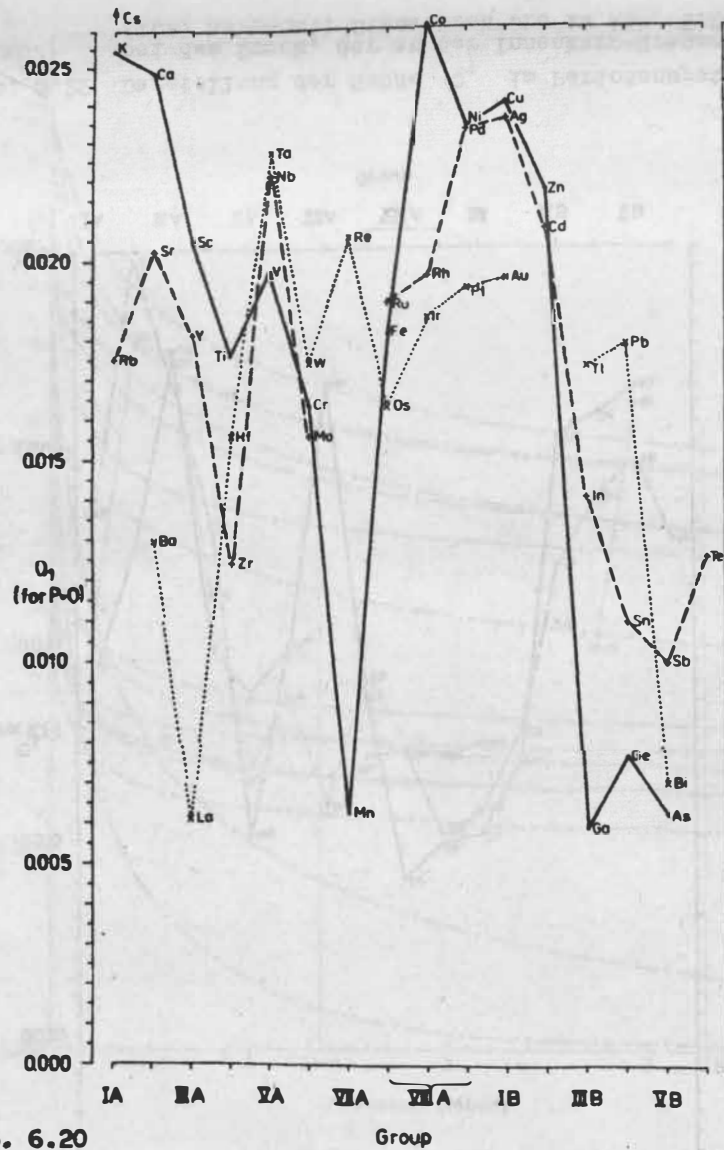


Abb. 6.20

Darstellung der dimensionslosen Größe  $Q_1$  im Periodensystem für die Elemente der 4. Periode (durchgezogene Linie), der 5. Periode (gestrichelte Linie) und der 6. Periode (punktier- te Linie) beim Druck  $P = 0$

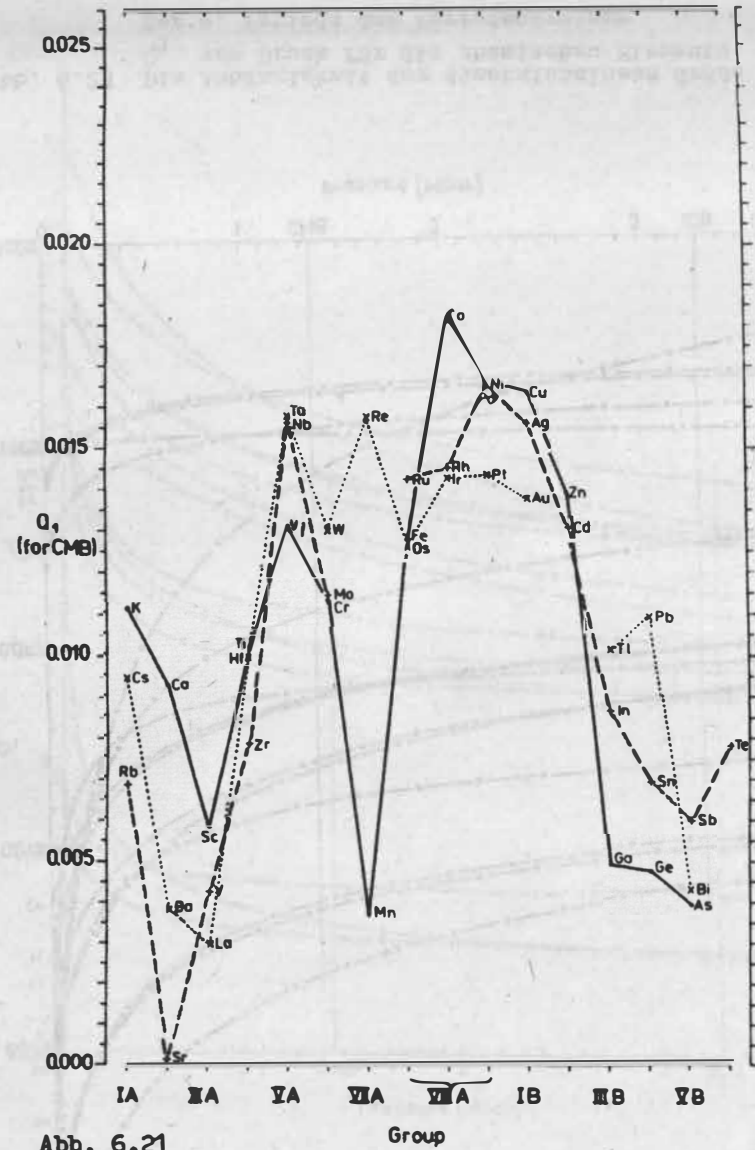


Abb. 6.21

Darstellung der Größe  $Q_1$  im Periodensystem bei dem Druck, der an der Kern-Mantel-Grenze (CMB) herrscht. Signaturen wie in Abb. 6.20

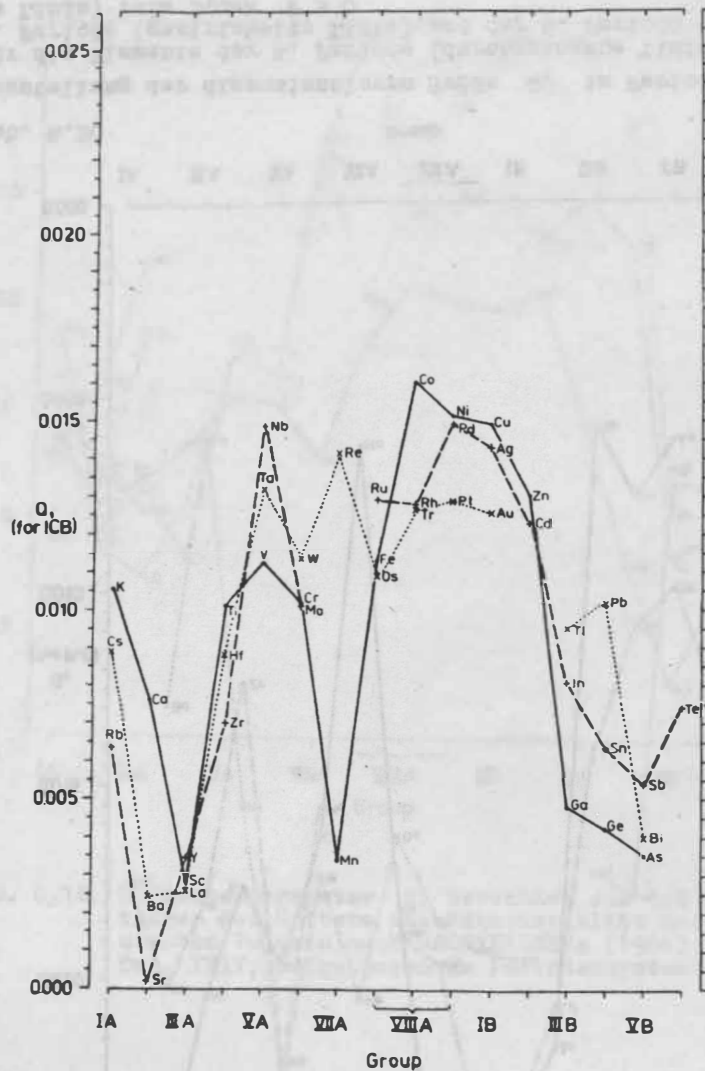


Abb. 6.22 Darstellung der Größe  $Q_1$  im Periodensystem bei dem Druck, der an der Innenkern-Grenze (ICB) herrscht. Signaturen wie in Abb. 6.20

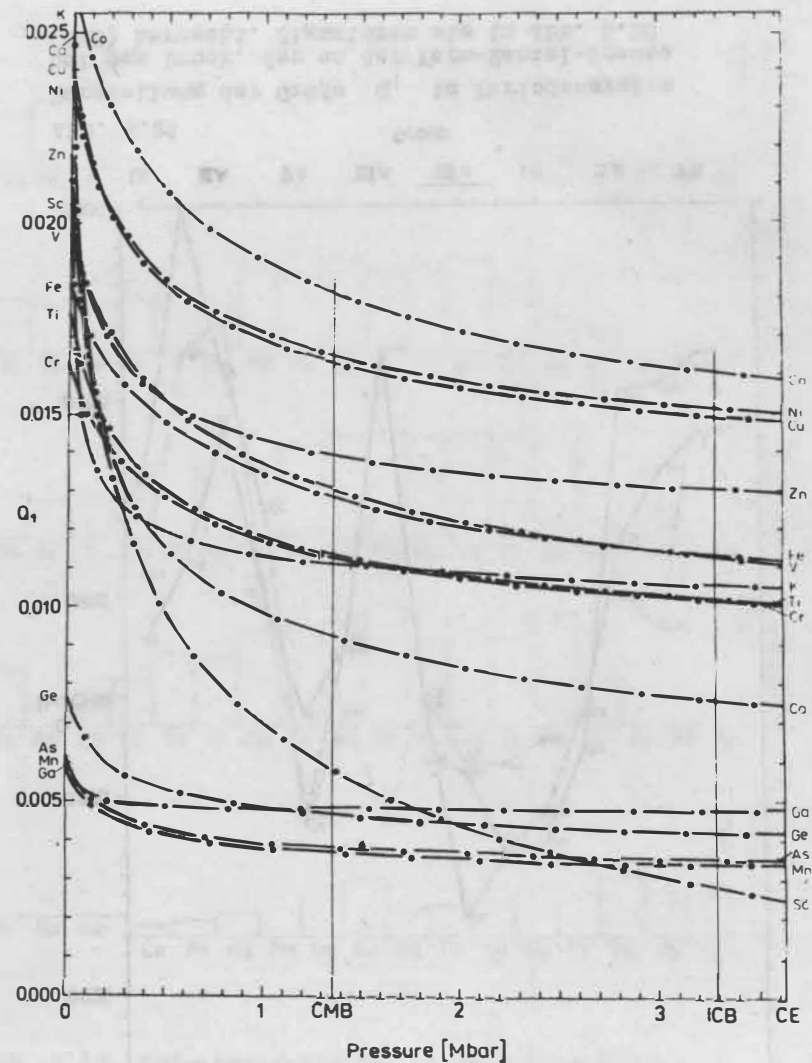


Abb. 6.23 Die Abhängigkeit der dimensionslosen Größe  $Q_1$  vom Druck für die chemischen Elemente der 4. Periode des Periodensystems

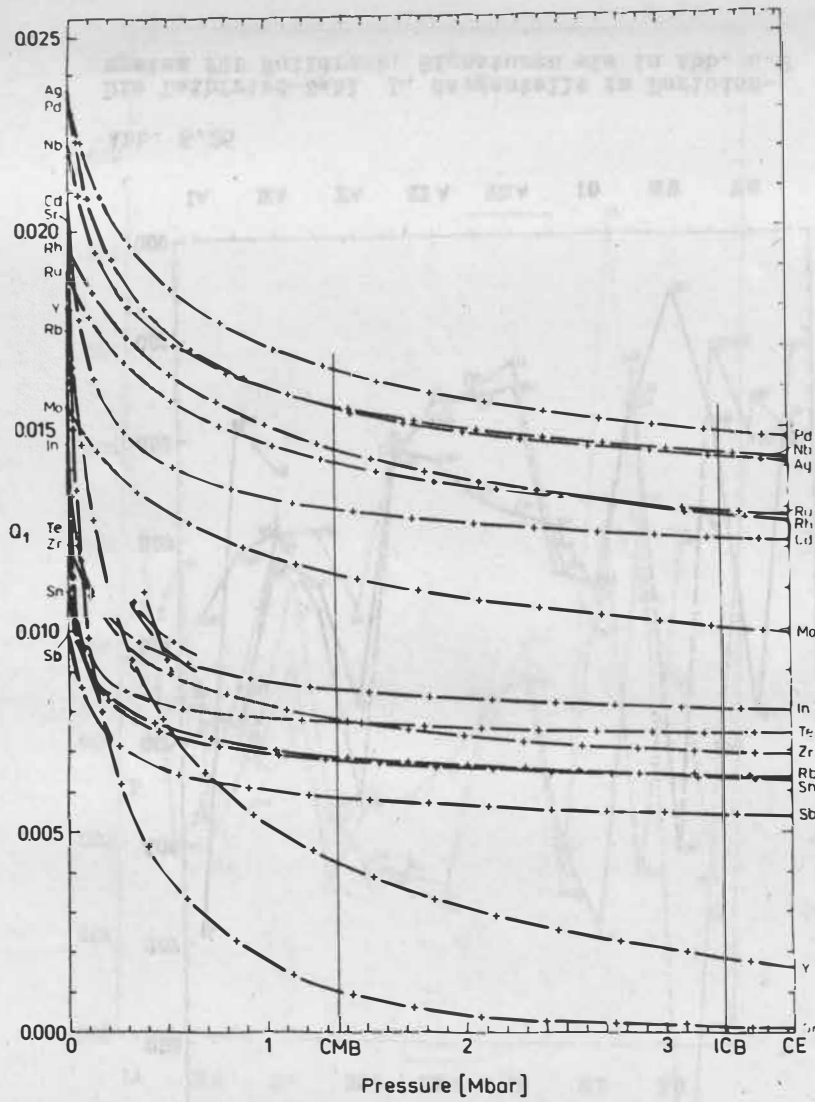


Abb. 6.24 Die Abhängigkeit der Größe  $Q_1$  vom Druck für die Elemente der 5. Periode

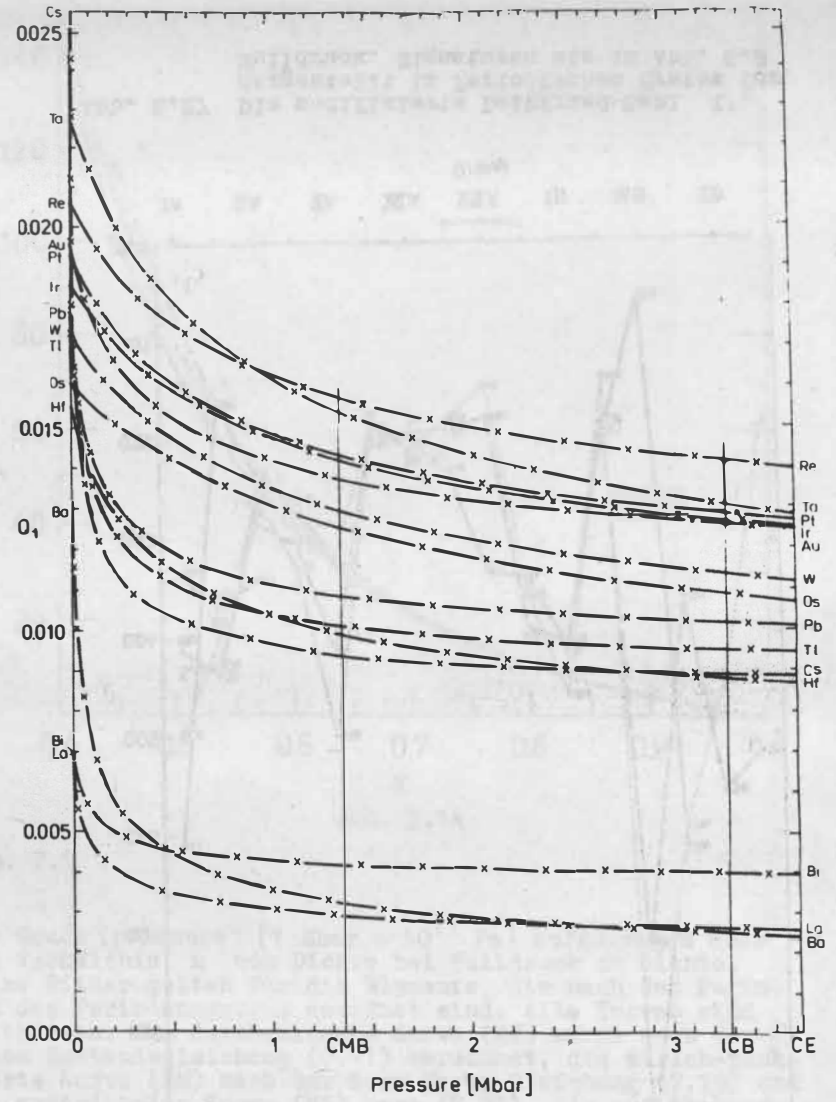


Abb. 6.25 Die Abhängigkeit der Größe  $Q_1$  vom Druck für die Elemente der 6. Periode



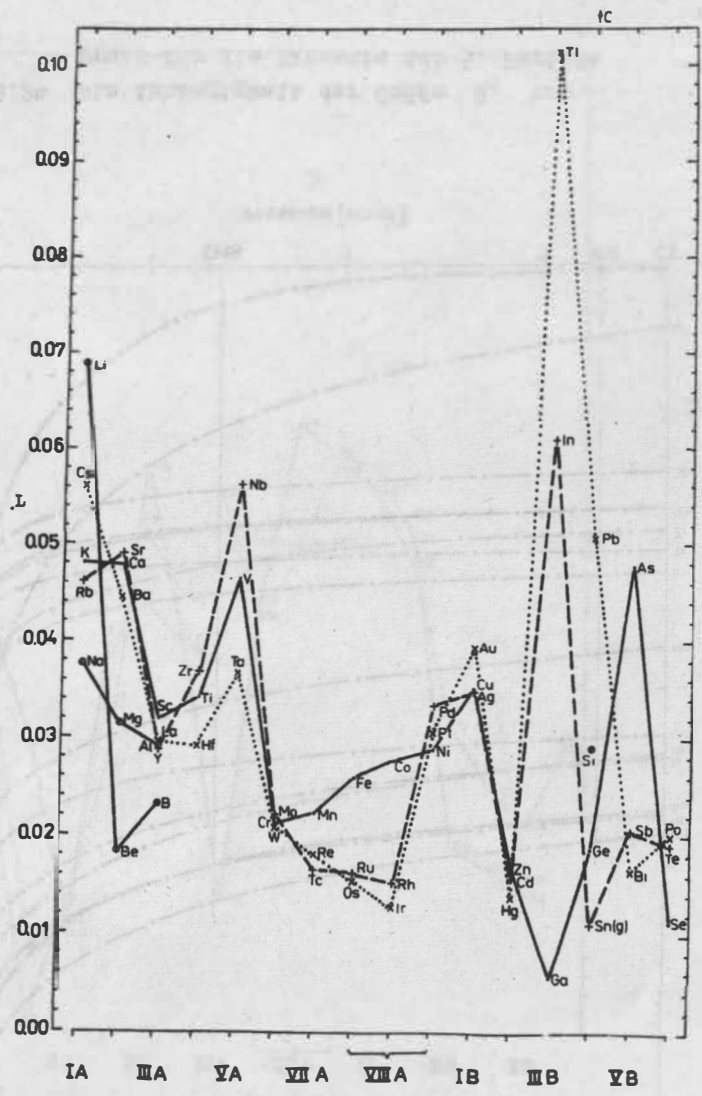


Abb. 6.26  
 Die Leibfried-Zahl  $L$ , dargestellt im Perioden-  
 system für Nulldruck. Signaturen wie in Abb. 6.8

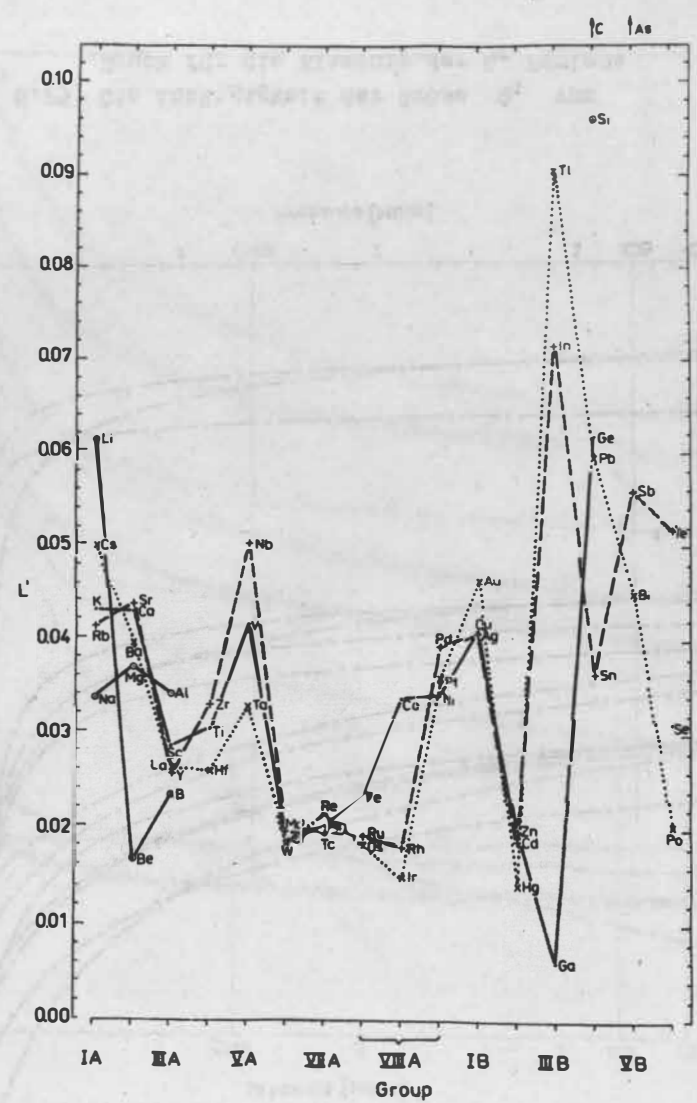


Abb. 6.27 Die modifizierte Leibfried-Zahl  $L'$ ,  
 dargestellt im Periodischen System für  
 Nulldruck. Signaturen wie in Abb. 6.8



Tab. 7.1 Benutzte Materialparameter. Diese Daten wurden von ULLMANN und PAN'KOV (1976) gesammelt. Die ursprüngliche Quelle ist in der vierten Spalte vermerkt

Material	$\kappa_0$ [kbar]	$\kappa_1$	Abb.	Literatur
<b>Elemente</b>				
<b>4. Periode</b>				
K	31,2	3,85	7.1A	Smith und Smith (1965)
Ca	183	2,78	7.1B	Anpassung nach Vaidyas und Kennedys (1970) Daten
V	1537	3,5	7.1C	Guinan und Steinberg (1974), Bolef (1961)
Fe( $\epsilon$ )	2060	4,0	7.1D	Takahashi u. a. (1968)
Ni	1790	6,2	7.1E	Guinan und Steinberg (1974)
Cu	1330	5,65	7.1F	Barsch und Chang (1967)
Zn	638	6,40	7.1G u. 7.1H	Ullmann und Pan'kov (1976), Fig. 18
Ge	724,3	4,35	7.1I	O.L. Anderson (1966)
<b>5. Periode</b>				
Rb	26,2	3,39	7.1J	Grover (1971)
Nb	1690	6,9	7.1K	Guinan und Steinberg (1974)
Ag	1015	5,53	7.1L	Daniels und Smith (1958), Vaidya und Kennedy (1970)
Cd	457,9	6,77	7.1M	O.L. Anderson (1966)
In	392	6,0	7.1N	Voronov und Goncharova (1972)
Sn(w)	532	6,01	7.1O	Guinan und Steinberg (1974)
Sn(w)	532	4,9	7.1P	Guinan und Steinberg (1974), Ullmann und Pan'kov (1976), Fig. 25
I	83,7	6,0	7.1Q	Vaidya und Kennedy (1972)
<b>6. Periode</b>				
Au	1664	6,51	7.1R	Barsch und Chang (1967)
Pb	419	5,72	7.1S u. 7.1T	Miller und Schuele (1969)
<b>2. Periode</b>				
Li	115	3,56	7.1U	Day und Ruoff (1974)

Tab. 7.1 (Fortsetzung)

Material	$\kappa_0$ [kbar]	$\kappa_1$	Abb.	Literatur
<b>3. Periode</b>				
Na	61,8	3,59	7.1V	O.L. Anderson (1966), Ho und Ruoff (1968)
Mg	344,2	4,16	7.1W	O.L. Anderson (1966)
Al	729,1	4,7	7.1X	Ahrens und Thomsen (1972), Thomas (1968)
Si	970,8	4,16	7.1Y	O.L. Anderson (1966)
S	88,4	6,55	7.1Z	Vaidya und Kennedy (1972)
-----				
<b>Halogenide</b>				
NH <sub>4</sub> Cl	176,7	8,21	7.2A	Garland (1966b)
NH <sub>4</sub> Br	158,6	7,66	7.2B	Garland (1966a)
AgCl	417,4	7,00	7.2C	Loje und Schuele (1970)
AgBr	377,7	7,49	7.2D	Loje und Schuele (1970)
LiF	665,7	5,24	7.2E	O.L. Anderson (1966)
NaCl	237,5	5,35	7.2F	Roberts und Smith (1970), Spetzler u. a. (1972)
NaBr	192,0	5,3	7.2G	Barsch und Chang (1967), Roberts und Smith (1970)
NaI	162,2	5,48	7.2H	Barsch und Schull (1971)
CsCl	167,4	5,98	7.2I	Barsch und Chang (1971)
CsBr	143,4	5,95	7.2J	Barsch und Chang (1971)
CsI	118,9	5,93	7.2K	Barsch und Chang (1971)
-----				
<b>Oxide</b>				
MgO	1599	4,25	7.3A	O.L. Anderson u. a. (1968)
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2505	3,99	7.3B	O.L. Anderson u. a. (1968)
FeO	1740	4,0	7.3C	Mao u. a. (1969), Ullmann und Pan'kov (1976), Fig. 49
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2027	4,5	7.3D	O.L. Anderson u. a. (1968)
CaO	1049	5,26	7.3E	O.L. Anderson u. a. (1968)
Sticho- vit	3460	3,5	7.3F	Chung (1974), Ullmann und Pan'kov (1976), Fig. 51

Tab. 7.2 Quellen der Beobachtungsergebnisse. Diese Quellen wurden von ULLMANN und PAN'KOV (1976) gesammelt

Material	Abb.	Symbol	Literatur
Alkali- metalle	7.1A,7.1J, 7.1U,7.1V	Volle Kreise	Isotherme bei Zimmertemperatur, berechnet aus Hugoniot-Daten (Grover u. a. 1969)
		Offene Kreise	Daten aus statischen Messungen (Vaidya u. a. 1971)
		Kreuze	Rice (1965), Bakanova u. a. (1965), Carter u. a. (1971), Grover u. a. (1969)
		Dreiecke	Bridgmans Daten (nach Birch, 1966)
Cu, Ag, Au, Mg, Ca	7.1F,7.1L, 7.1R,7.1W, 7.1B	Dreiecke	Bridgmans Daten (nach Birch, 1966)
		Volle Kreise	Isotherme bei Zimmertemperatur, be- rechnet aus Hugoniot-Daten (Carter u. a. 1971)
		Kreise mit Kreuzen	Isotherme bei 0 K (Al'tshuler u. a. 1962)
		Offene Kreise	Daten aus statischen Messungen (Vaidya und Kennedy, 1970)
		Kreuze	Hugoniot-Daten (Carter u. a. 1971)
Zn, Cd, Al, Si, Ge, Sn, Pb, V, Ni	7.1G,7.1H, 7.1M,7.1X, 7.1Y,7.1I, 7.1O,7.1P, 7.1S,7.1C, 7.1E	Dreiecke, Spitze nach unten	Bridgmans Daten (nach Vaidya und Kennedy, 1970, und Kennedy 1972)
		Dreiecke, Spitze nach oben	Bridgmans Daten (nach Birch, 1966)
		liegende Kreuze	Hugoniot-Daten (McQueen und Marsh, 1960; Al'tshuler u. a. 1960)
		Volle Kreise	Isotherme bei Zimmertemperatur (McQueen und Marsh, 1960)
		Offene Kreise	Daten aus statischen Messungen (Vaidya und Kennedy, 1970, 1972)
In, Nb, S	7.1N,7.1K, 7.1Z	Offene Kreise	Daten aus statischen Messungen (Vaidya und Kennedy, 1970, 1972)
		Kreuze	Hugoniot-Daten (Rice u. a., 1958)
		Volle Kreise	Isotherme bei Zimmertemperatur, be- rechnet aus obigen Hugoniot-Daten
		Dreiecke	Bridgmans Daten (nach Birch, 1966)
Pb	7.1S,7.1T	Stehende Kreuze	Hugoniot-Daten (Al'tshuler u. a. 1962)
		Kreise mit Kreuzen	Isotherme bei Zimmertemperatur, be- rechnet aus obigen Hugoniot-Werten



Tab. 7.2 (Fortsetzung)

Material	Abb.	Symbol	Literatur
I	7.1Q	Offene Kreise	Daten aus statischen Messungen (Vaidya und Kennedy, 1972)
		Kreuze	Hugoniot-Daten (Duvall und Fowles, 1963)
		Volle Kreise	Hugoniot-Daten (Keeler, 1972)
Fe	7.1D	Volle Kreise	Isothermen berechnet aus Hugoniot-Daten (Takeuchi und Kanamori, 1966)
		Volle Dreiecke	Isothermen (McQueen und Marsh, 1960; Pan'kov und Kalinin, 1974)
		Halbvolle Kreise	Isothermen (Zharkov u. a. 1975)
		Quadrate	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Takahashi u. a. 1968)
		Liegende Kreuze	Stoßwellen-Daten (Bancroft u. a. 1956)
		Stehende Kreuze	Hugoniot-Daten (Takeuchi und Kanamori, 1966)
NaCl, NaBr	7.2F, 7.2G	Offene Kreise	Daten aus statischen Messungen (Vaidya und Kennedy, 1971)
		Offene Dreiecke	Bridgmans Daten (Birch, 1966)
		Kreuze	Hugoniot-Daten (Fritz u. a. 1971; Weaver, 1971; Van Thiel, 1966)
		Volle Kreise	Isotherme bei Zimmertemperatur, berechnet aus obigen Hugoniot-Daten
		Offene Quadrate	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Perez-Albuerna und Drickamer, 1965)
NaI, LiF, AgCl, AgBr, NH <sub>4</sub> Cl, NH <sub>4</sub> Br, CsCl, CsBr, CsI	7.2H, 7.2E, 7.2C, 7.2D, 7.2A, 7.2B, 7.2I, 7.2J, 7.2K	Offene Kreise	Daten aus statischen Messungen (Vaidya und Kennedy, 1971)
		Offene Dreiecke, Ecke nach oben	Bridgmans Daten (Birch, 1966)
		Volle Kreise	Isotherme berechnet aus Hugoniot-Werten (Keeler, 1972)
		Liegende Kreuze	Hugoniot-Daten (Van Thiel, 1966)
		Stehende Kreuze	Hugoniot-Daten (Al'tshuler u. a. 1963; Kormer u. a. 1965)
		Offene Dreiecke, Ecke nach unten	Bridgmans Daten (Vaidya und Kennedy, 1971)

Tab. 7.2 (Fortsetzung)

Material	Abb.	Symbol	Literatur
NaI, LiF, AgCl, AgBr, NH <sub>4</sub> Cl NH <sub>4</sub> Br, CsCl, CsBr, CsI	7.2H, 7.2E, 7.2C, 7.2D, 7.2A, 7.2B, 7.2I, 7.2J, 7.2K	Offene Quadrate	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Perez-Albuerna und Drickamer, 1965; Hammonds Werte nach Mao, 1970)
		Halbvolle Kreise	Isotherme aus der Zustandsgleichung von Decker (1971)
MgO, Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	7.3A, 7.3B	Liegende Kreuze	Hugoniot-Daten (Carter u. a. 1971)
		Volle Kreise	Isotherme bei Zimmertemperatur aus Hugoniot-Daten (Carter u. a. 1971)
		Volle Dreiecke	Isotherme bei Zimmertemperatur aus Hugoniot-Daten (Pan'kov und Kalinin, 1974)
		Offene Quadrate	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Drickamer u. a. 1966)
		Stehende Kreuze	Hugoniot-Daten (Al'tshuler, 1965, und Hugoniot-Daten von keramischen Proben von McQueen und Marsh nach Birch, 1966)
		Halbvolle Kreise	Daten nach Zharkov u. a. (1975)
		Kreise mit Kreuzen	Hugoniot-Daten von McQueen und Marsh (Birch, 1966)
FeO, CaO	7.3C, 7.3E	Offene Quadrate	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Drickamer u. a. 1966)
		Kreise mit Kreuzen	Isotherme bei Zimmertemperatur, berechnet von Al'tshuler und Sharipdzhanov (1971)
		Volle Dreiecke	Isotherme bei Zimmertemperatur aus Hugoniot-Daten (Pan'kov und Kalinin, 1974)
		Offene Kreise	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Mao u. a. 1969)
		Halbvolle Kreise	Daten nach Zharkov u. a. (1975)
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	7.3D	Offene Quadrate	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Drickamer u. a. 1966)
		Kreuze	Hugoniot-Daten von McQueen und Marsh (Birch, 1966; D.L. Anderson und Kanamori, 1968)
		Kreise mit Kreuzen	Hugoniot-Daten (Syono u. a. 1974)
		Halbvolle Kreise	Daten nach Zharkov u. a. (1975)
Stischovit	7.3F	Offene Quadrate	Daten nach Röntgenstrahl-Untersuchungen (Liu u. a. 1974)

Tab. 7.3 Ein Vergleich der experimentellen und theoretischen Werte. 0 bedeutet, daß die entsprechende Zustandsgleichung die Meßdaten gut beschreibt, 1 besser, 2 am besten

Material	Abb.	M o d e l l		
		MX Gl.(7.11)	BM Gl.(7.19)	M1 Gl.(7.22)
K	1A	2	1	0
Ca	1B	1	1	1
V	1C	1	2	2
Fe	1D	1	1	1
Ni	1E	2	1	1
Cu	1F	2	1	1
Zn	1G	2	1	0
Zn	1H	1	0	0
Ge	1I	1	1	1
Rb	1J	2	2	0
Nb	1K	1	0	0
Ag	1L	0	2	2
Cd	1M	2	1	1
In	1N	1	2	2
Sn; $\kappa_1 = 6,01$	1O	2	1	1
Sn; $\kappa_1 = 4,9$	1P	2	2	2
I	1Q	1	1	1
Au	1R	2	1	1
Pb	1S	2	1	1
Pb	1T	2	1	1
Li	1U	2	1	1
Na	1V	0	1	2
Mg	1W	0	2	1
Al	1X	1	1	1
Si	1Y	0	0	0
S	1Z	1	2	2
NH <sub>4</sub> Cl	2A	2	1	1
NH <sub>4</sub> Br	2B	2	1	1
AgCl	2C	2	1	1
AgBr	2D	2	1	1
LiF	2E	2	2	2
NaCl	2F	2	1	1
NaBr	2G	1	2	2
NaI	2H	2	1	1
CsCl	2I	2	2	2
CsBr	2J	2	1	1
CsI	2K	2	1	1
MgO	3A	2	2	2
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3B	2	1	1
FeO	3C	1	1	2
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3D	2	1	1
CaO	3E	1	2	2
Stischovit	3F	2	2	2

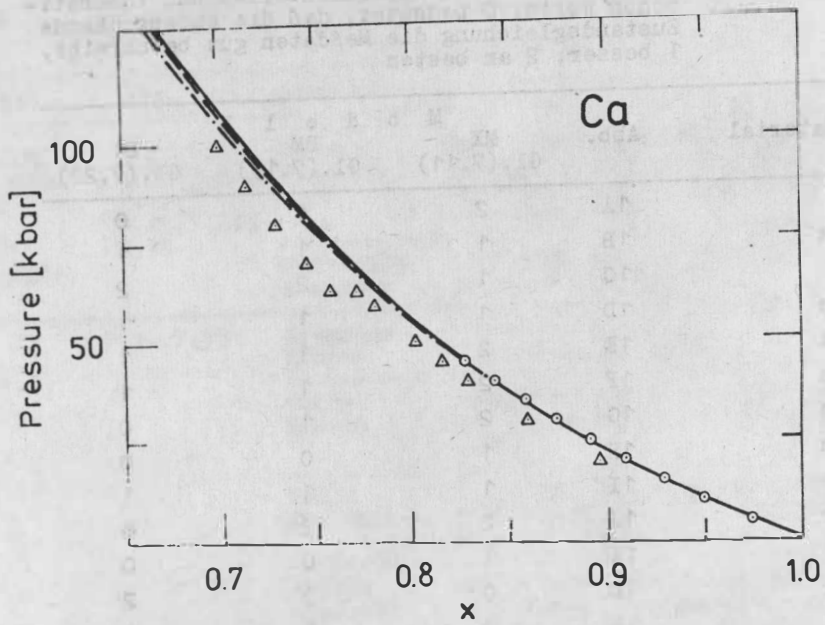


Abb. 7.1B

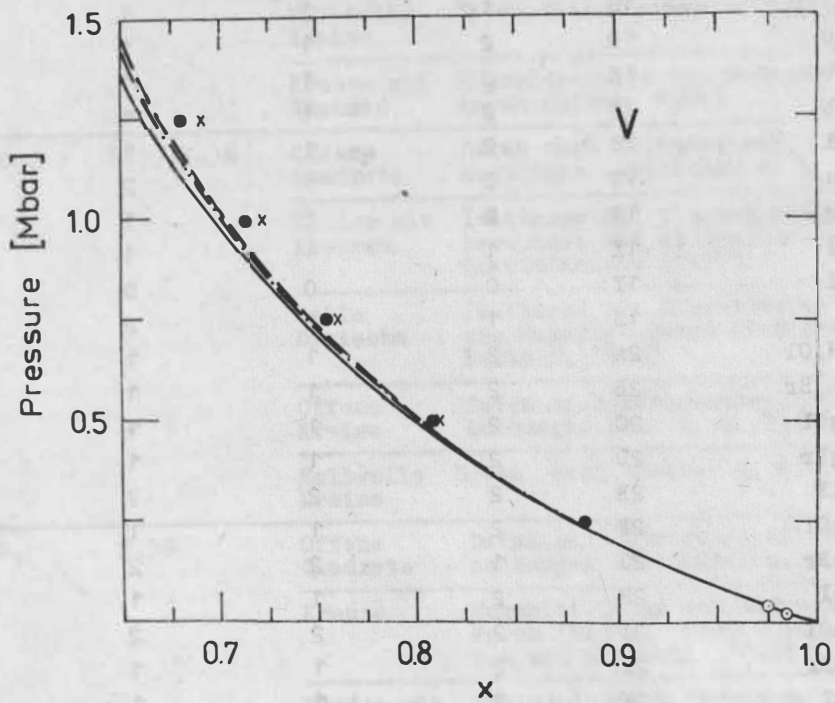


Abb. 7.1C

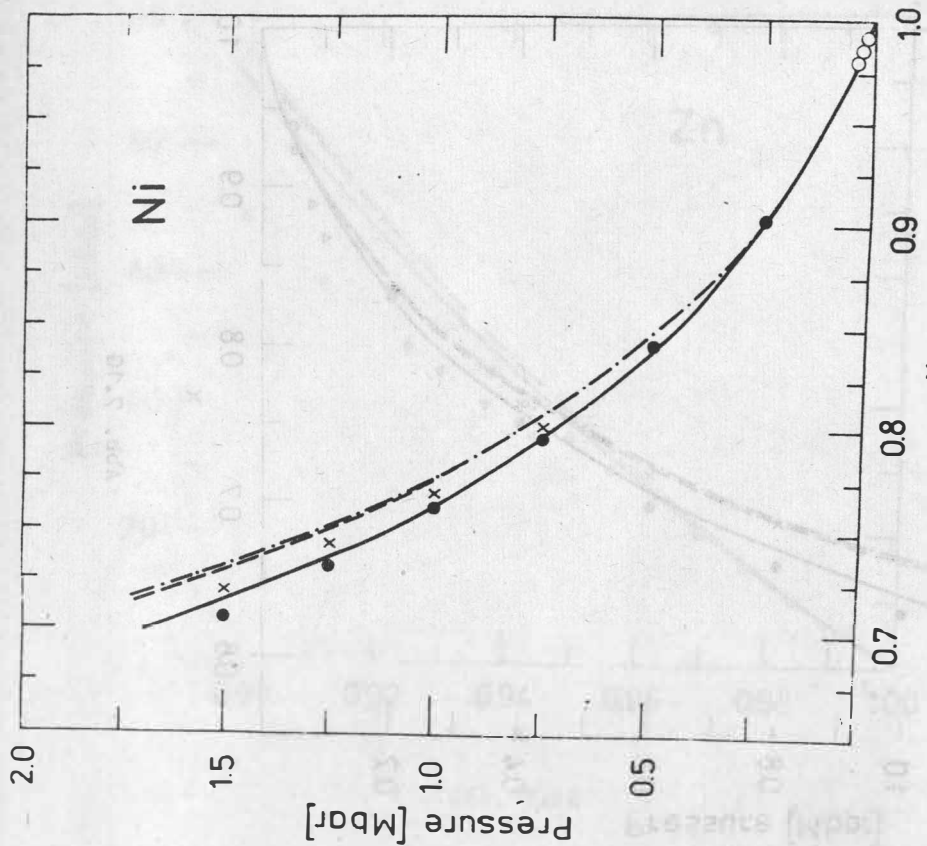


Abb. 7.1B

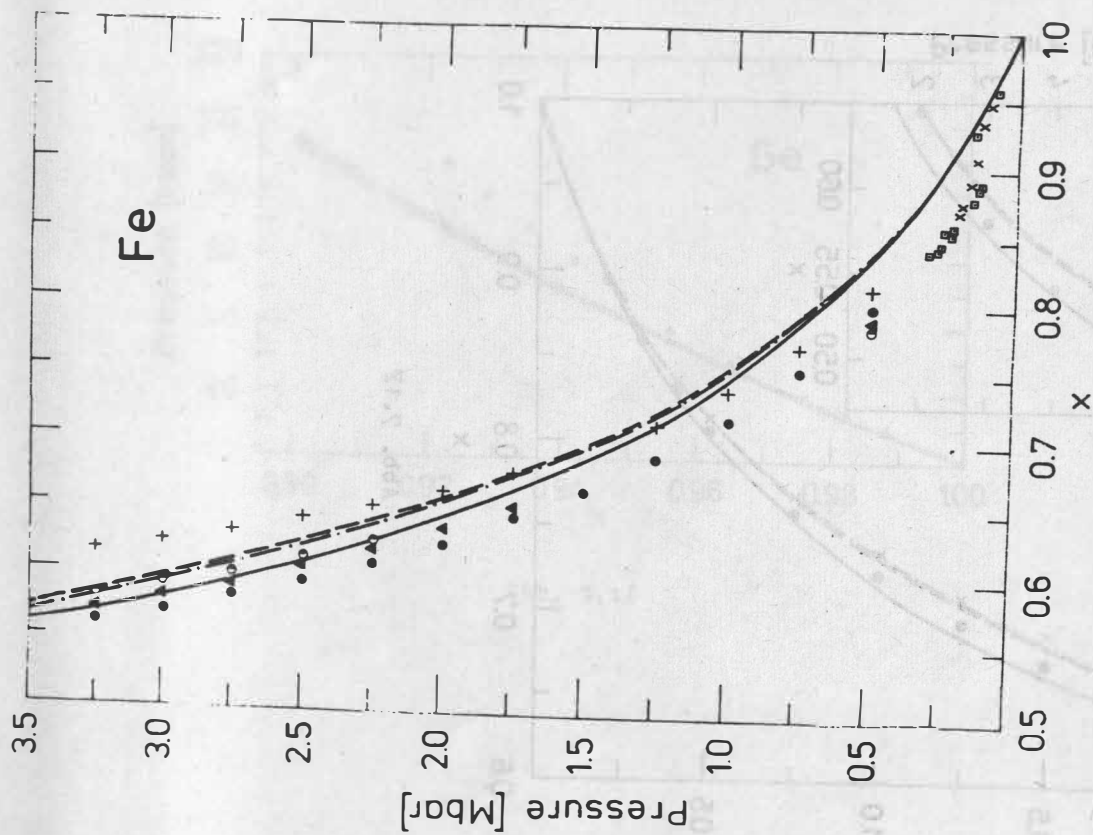


Abb. 7.1D



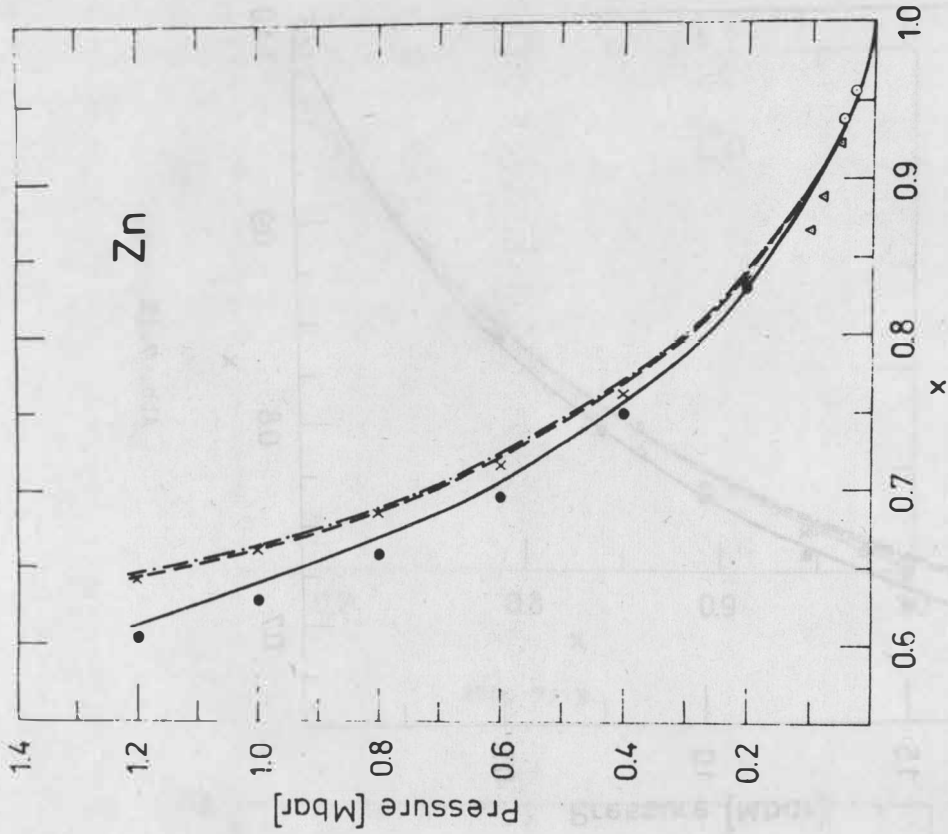


Abb. 7.1G

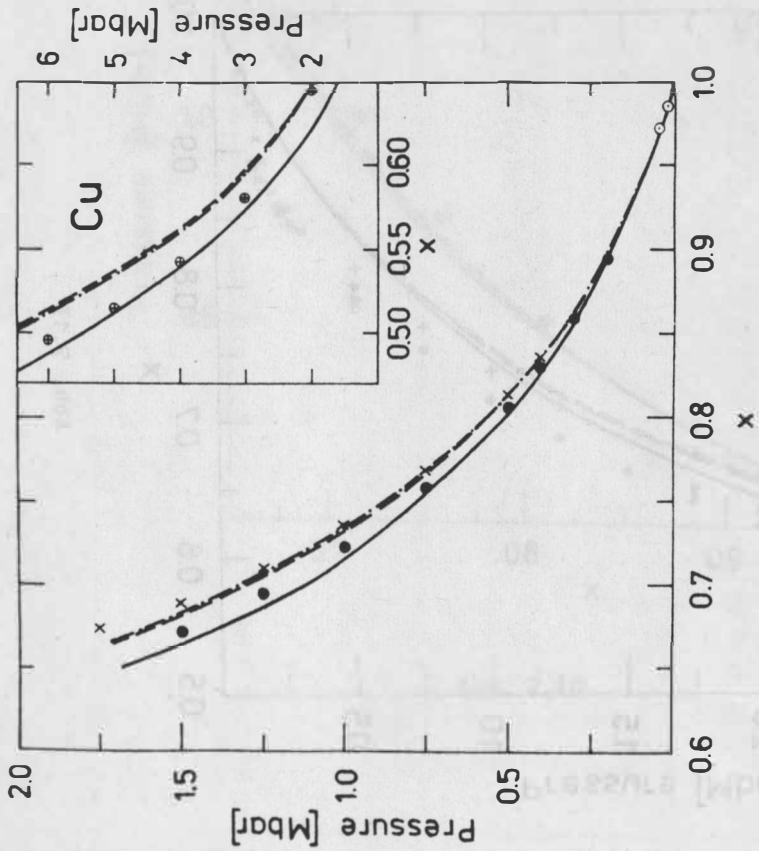


Abb. 7.1F

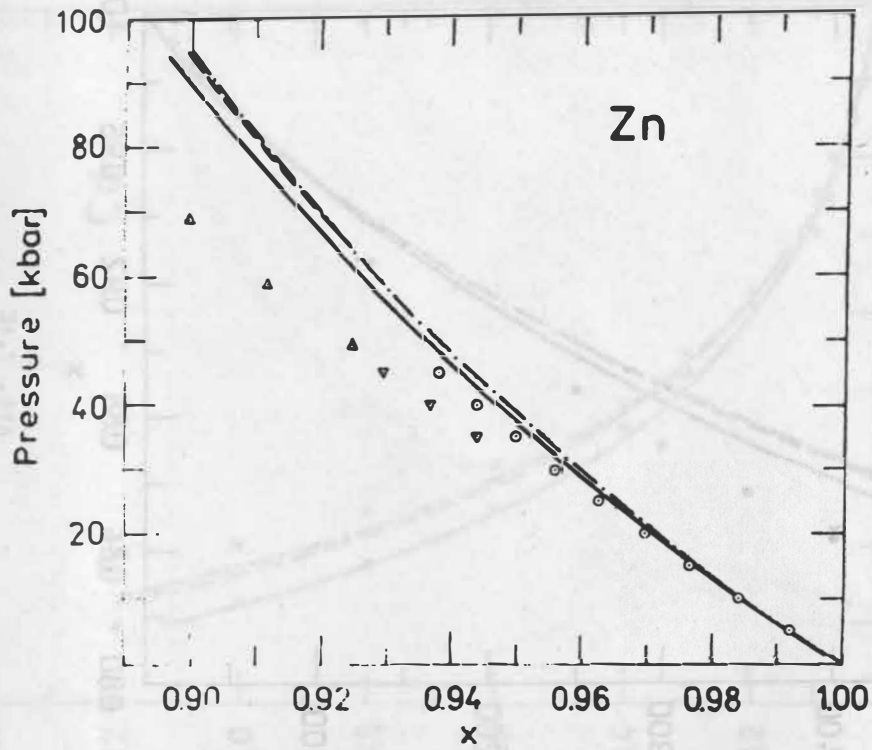


Abb. 7.1H

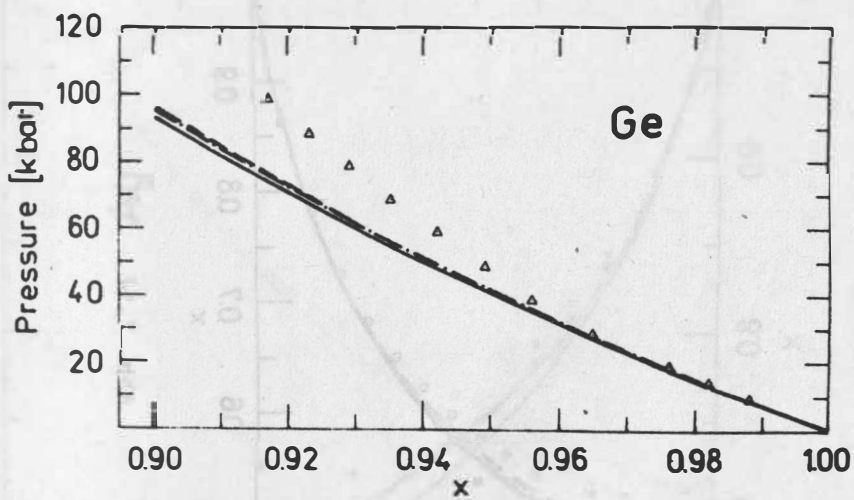


Abb. 7.1I

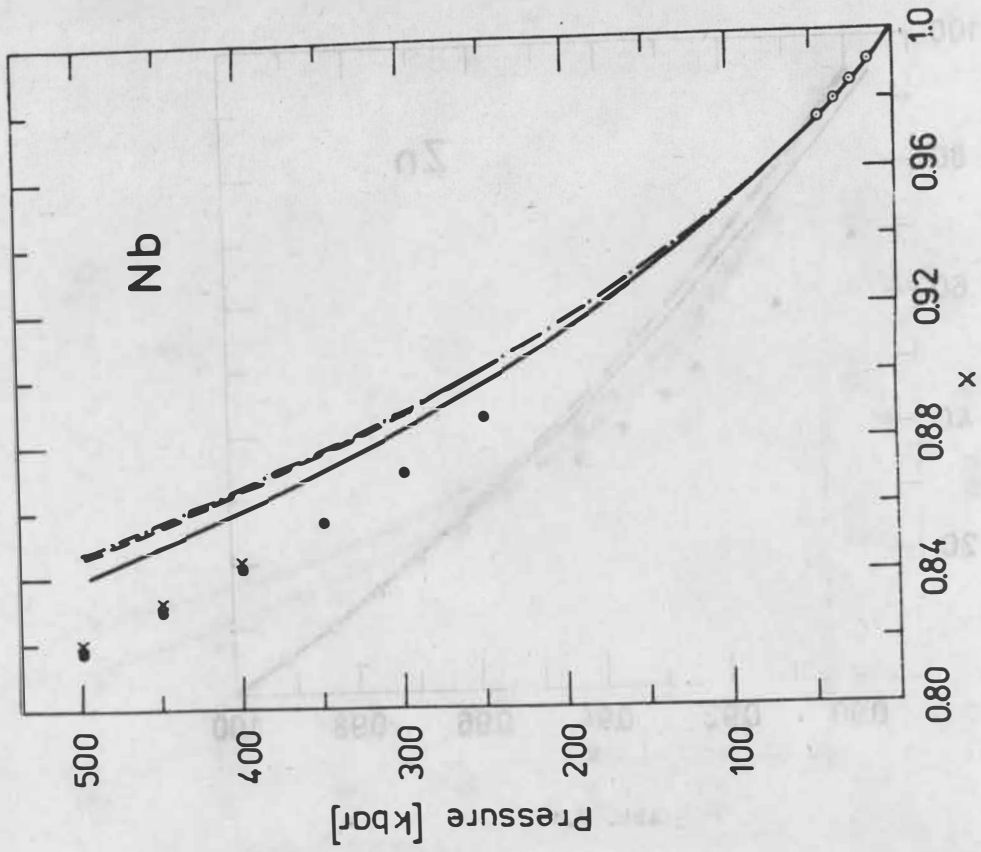


Abb. 7.1K

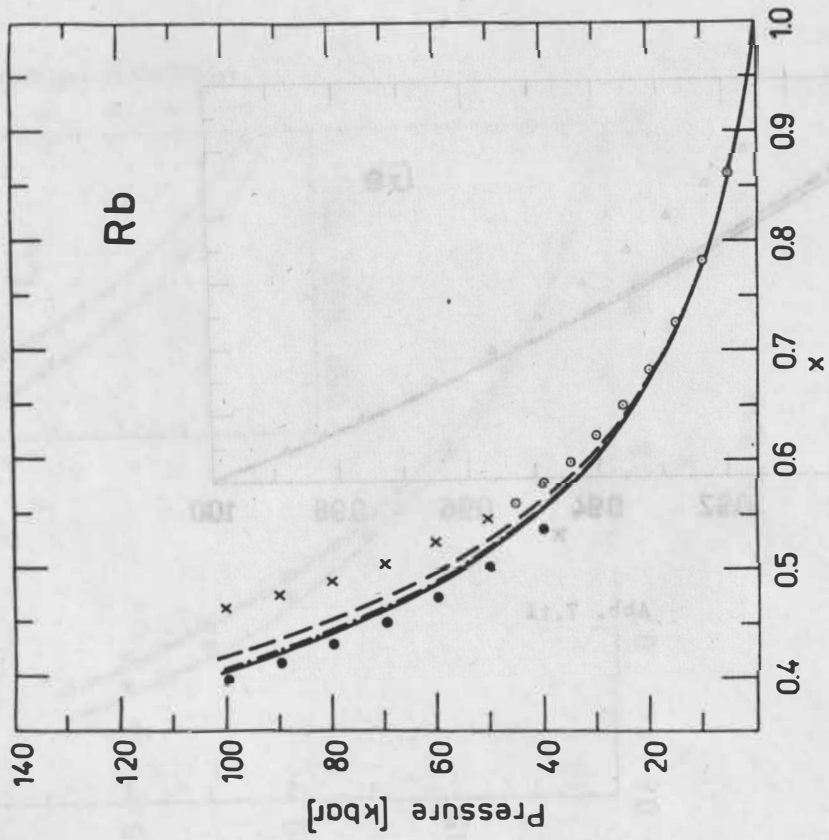


Abb. 7.1J

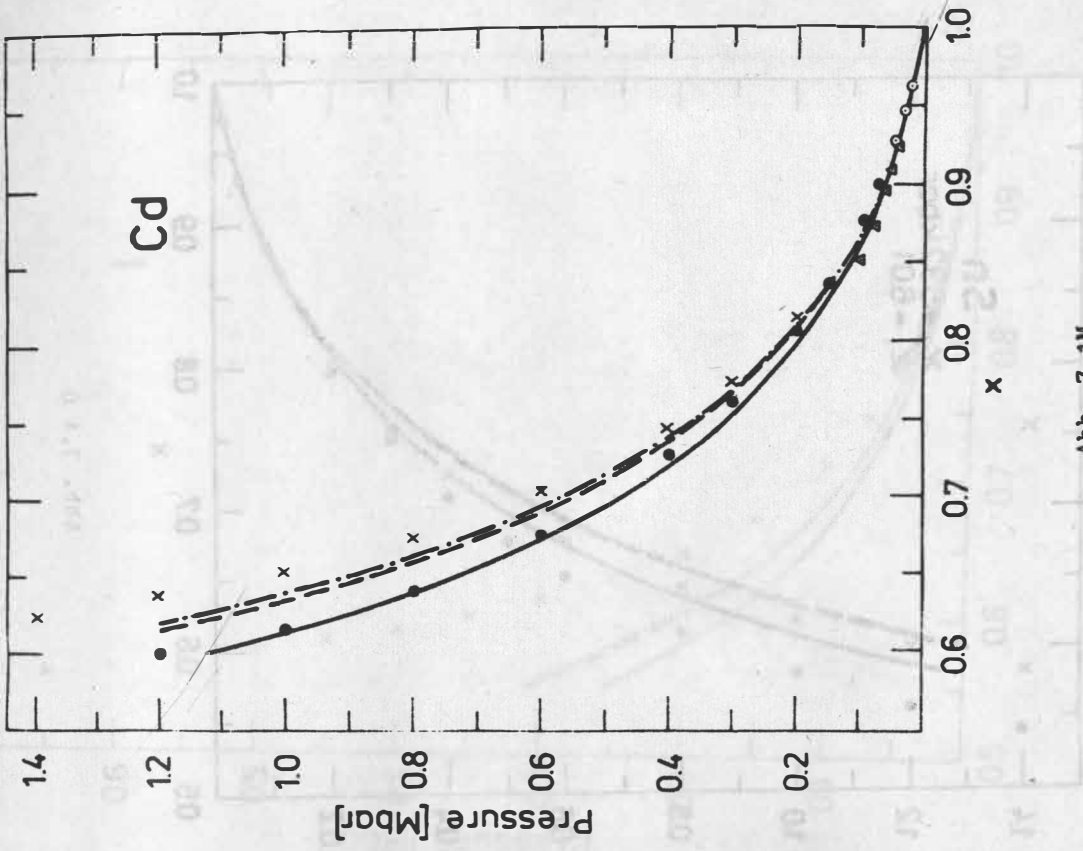


Abb. 7.1M

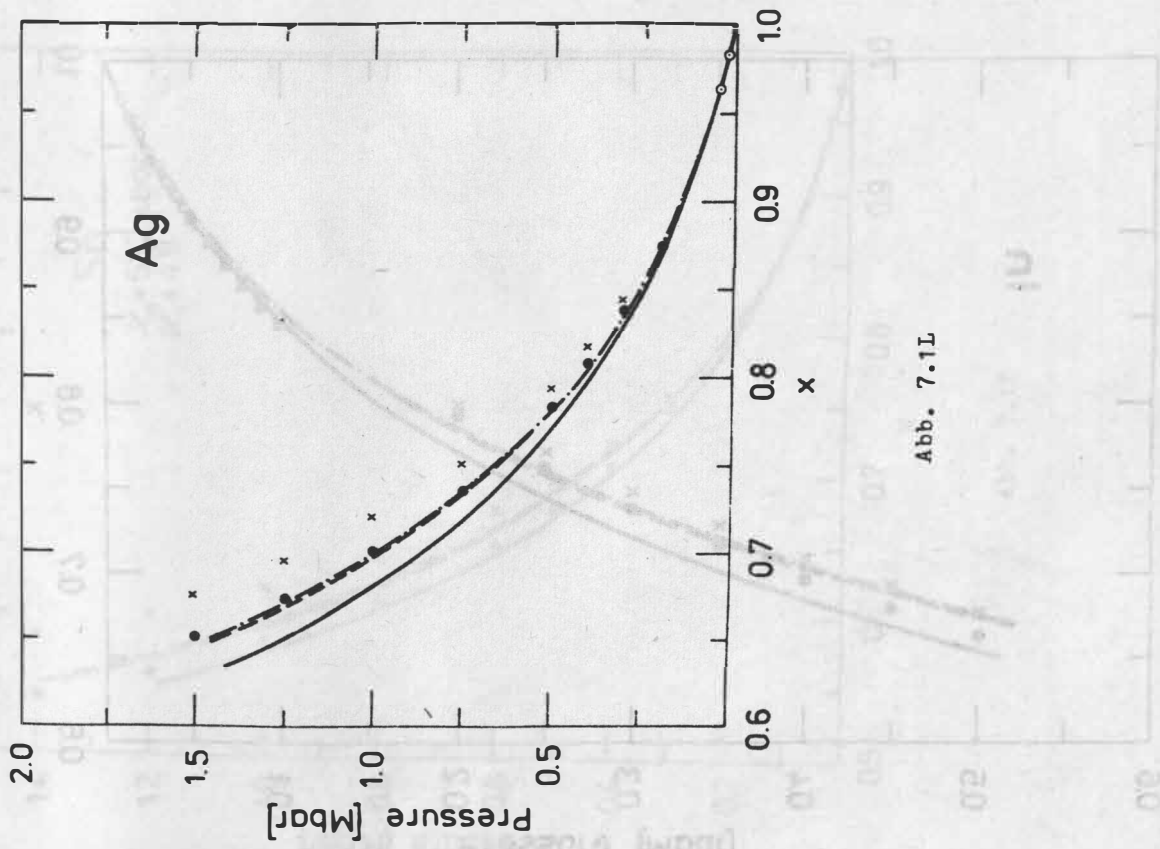


Abb. 7.1L

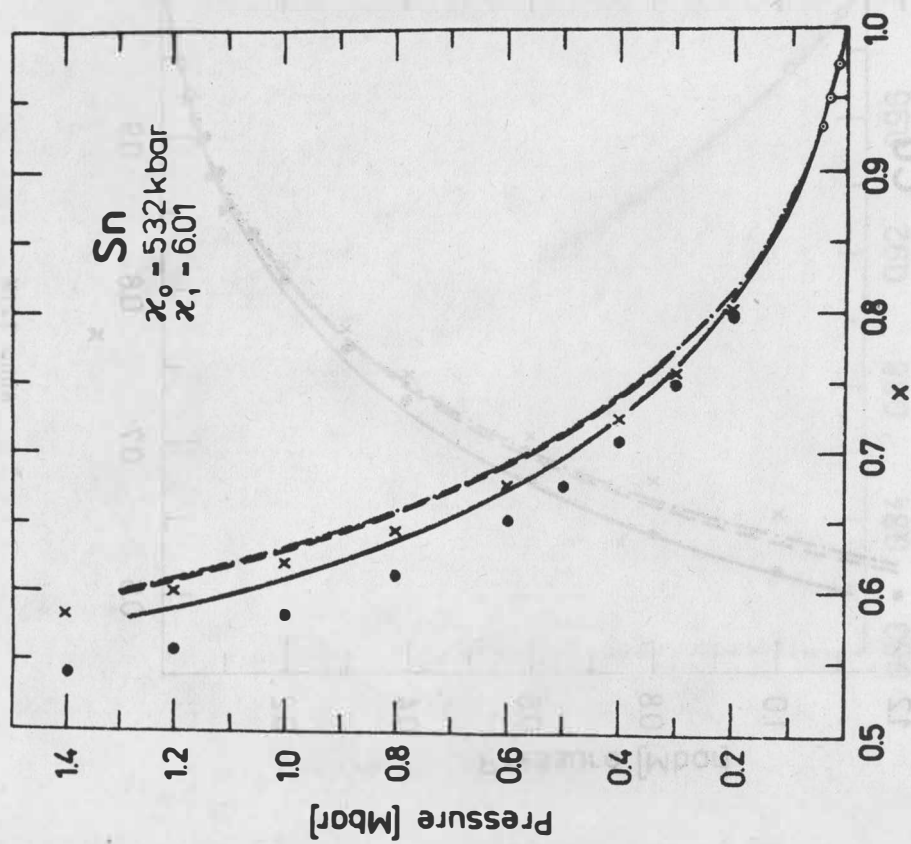


Abb. 7.10

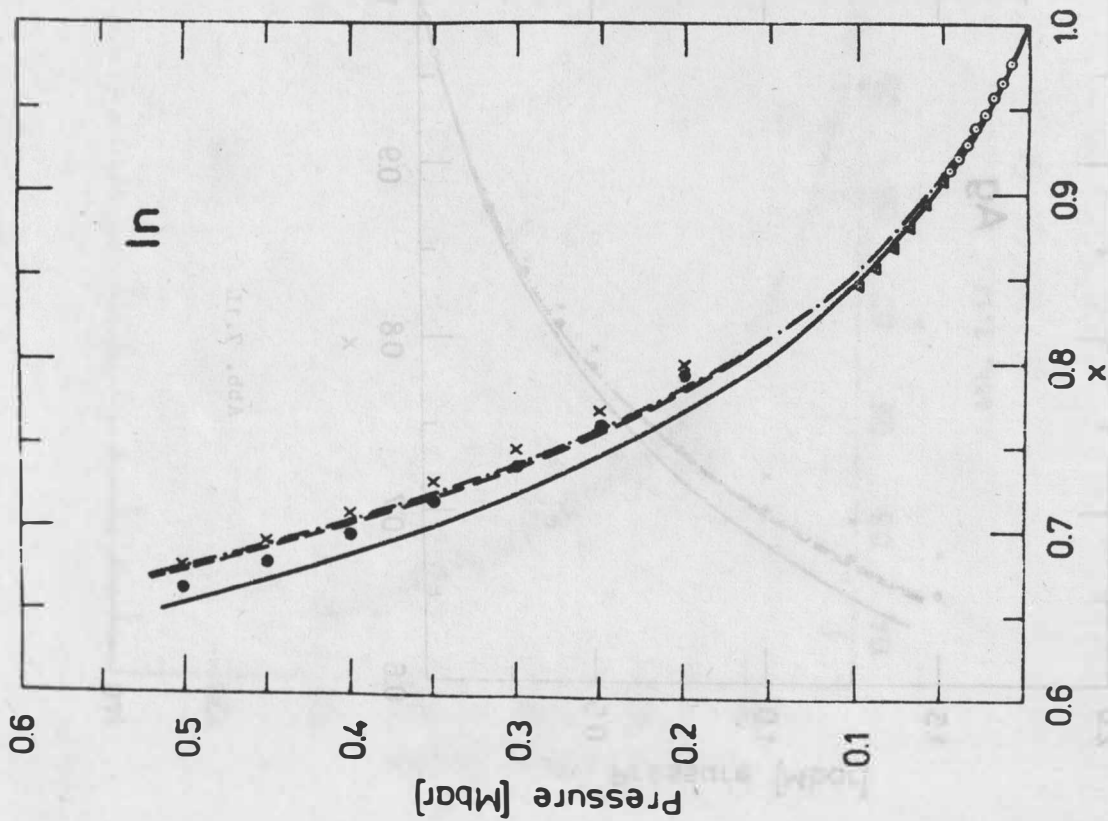


Abb. 7.11



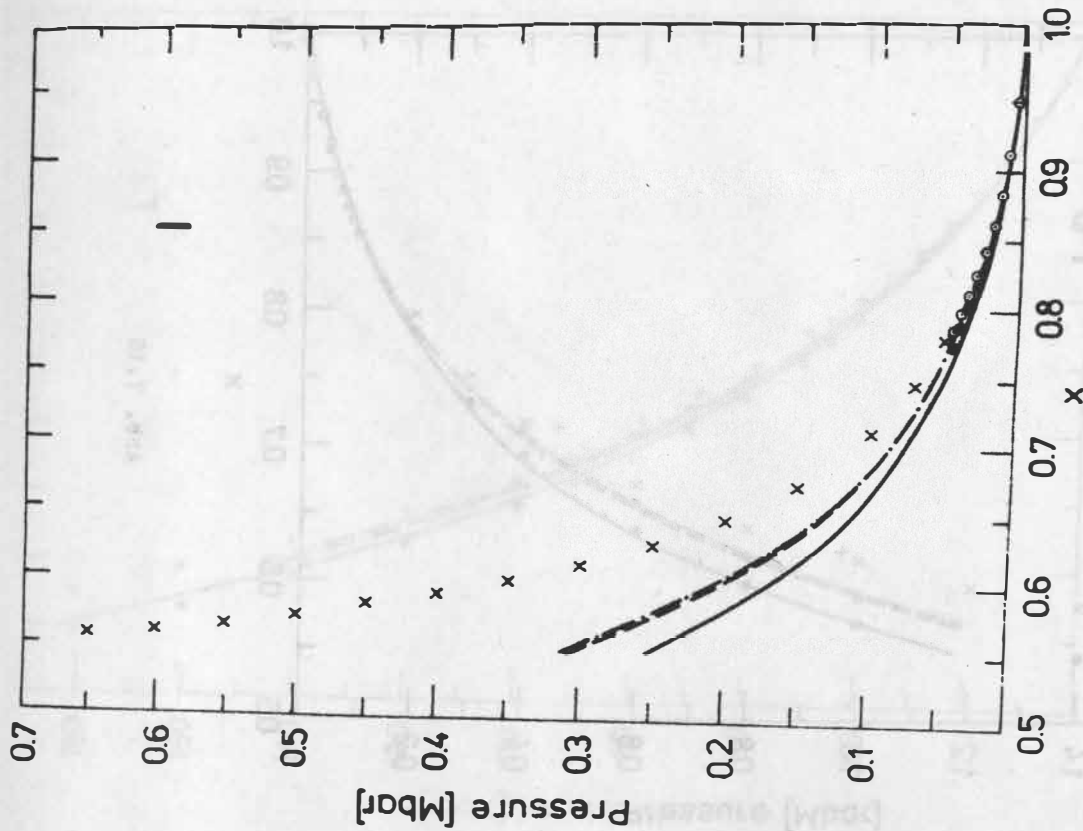


Abb. 7.1Q

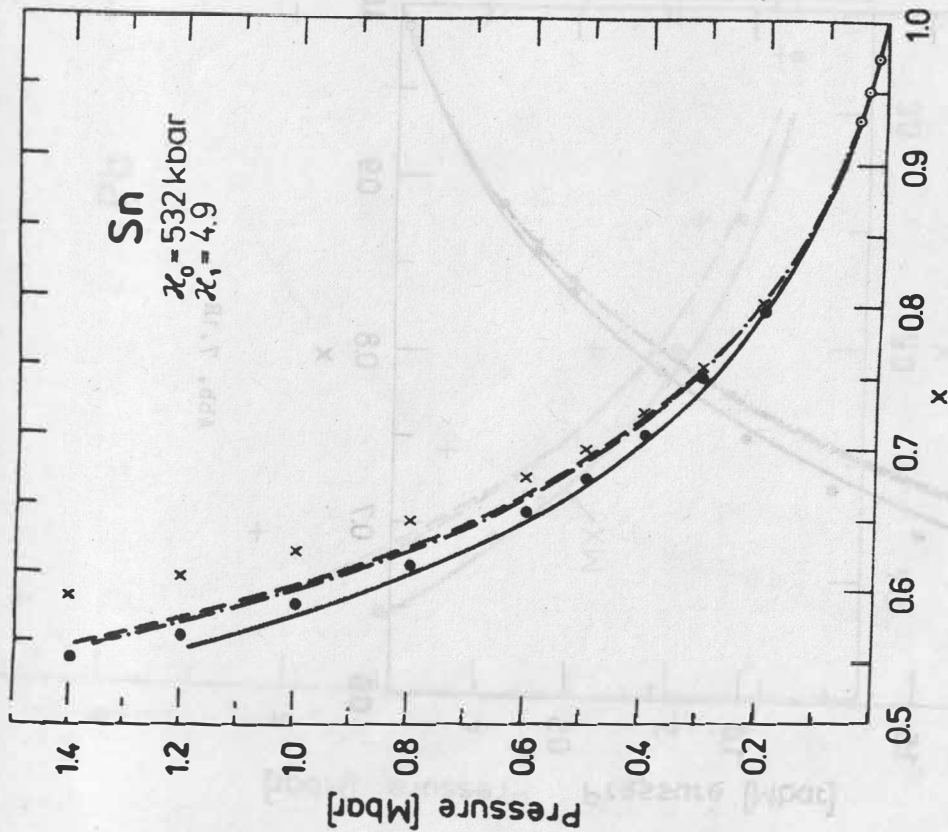


Abb. 7.1P

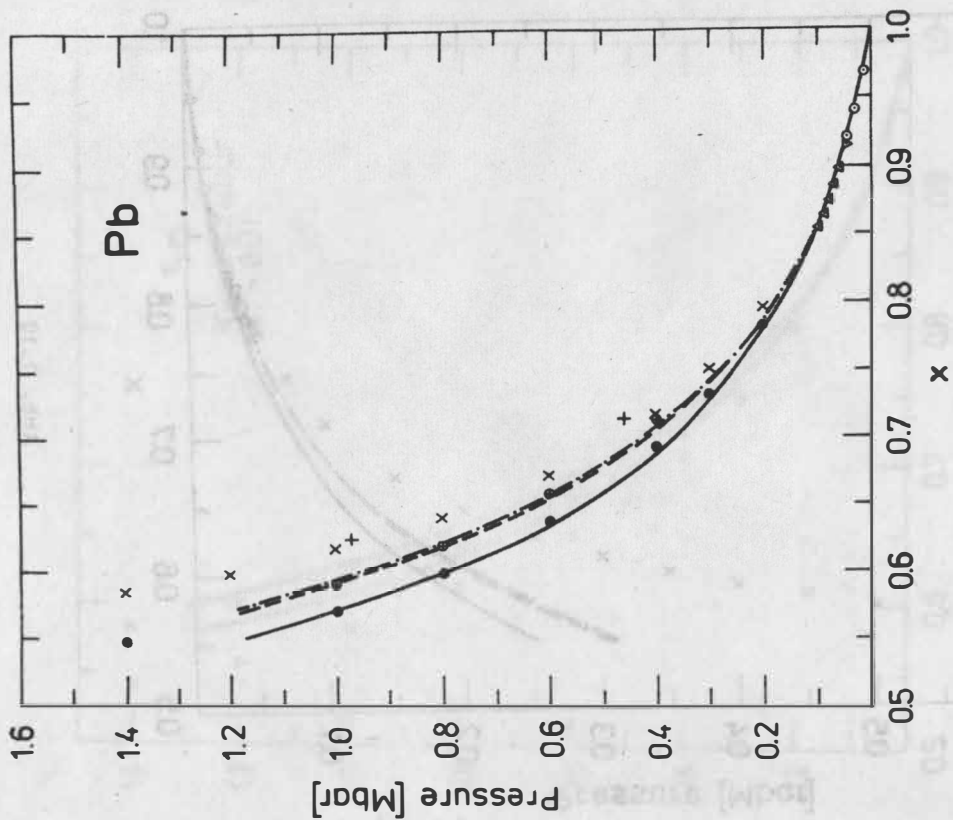


Abb. 7.1S

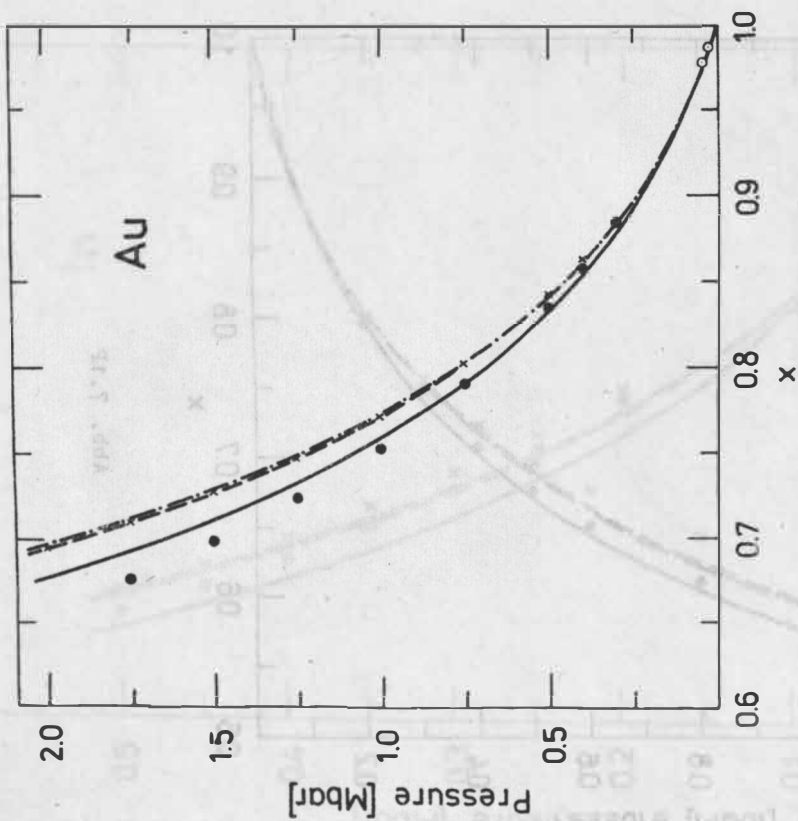


Abb. 7.1R

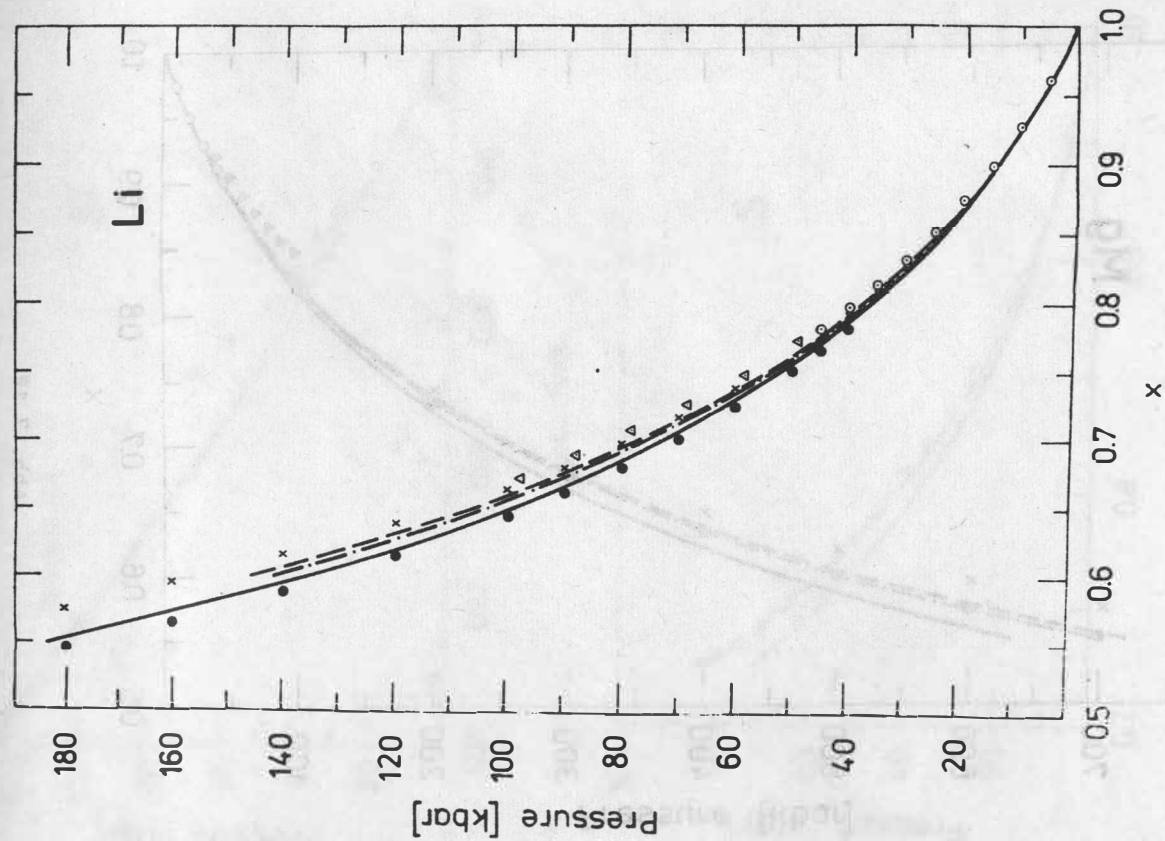


Abb. 7.1U

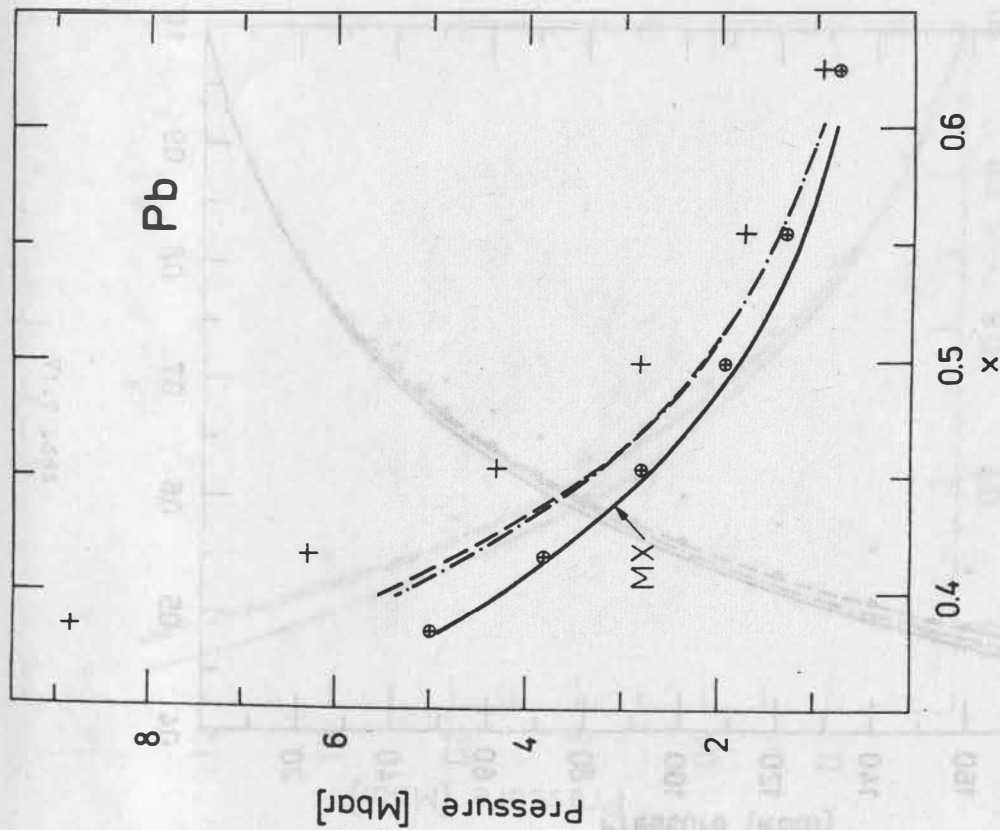


Abb. 7.1T

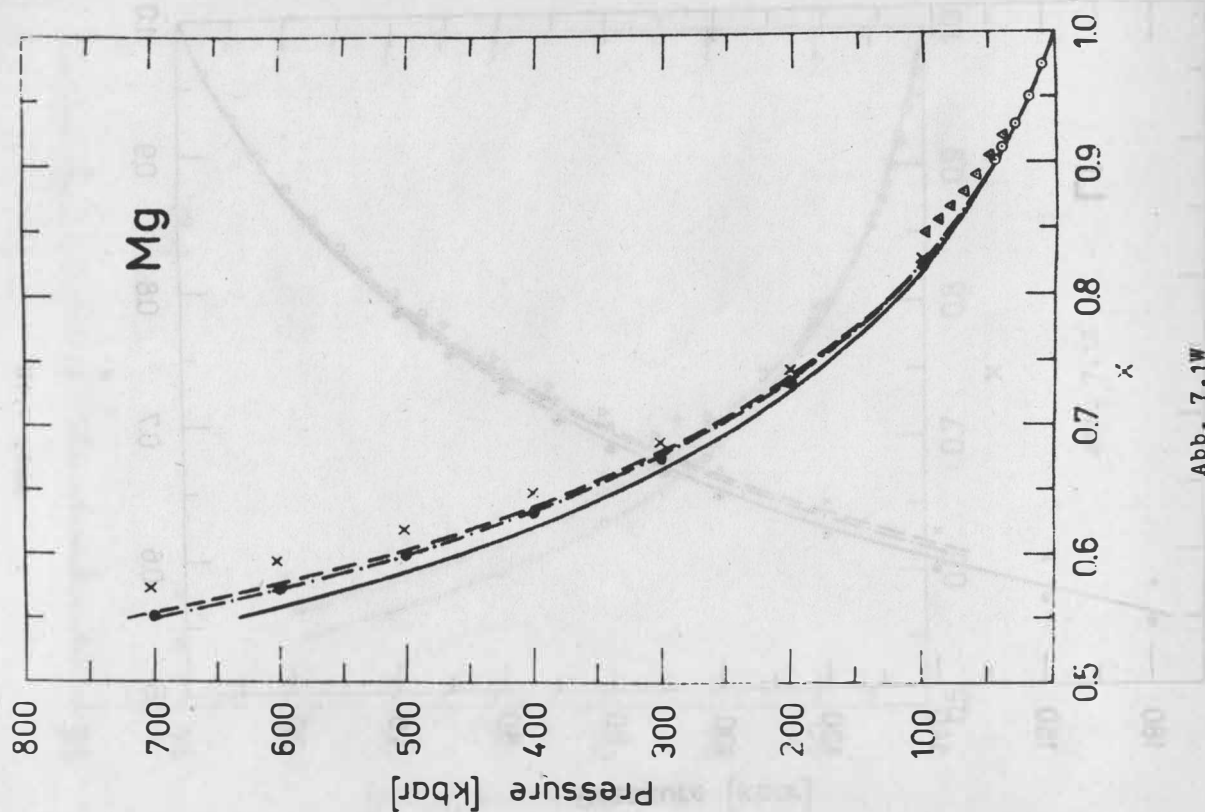


Abb. 7.1W

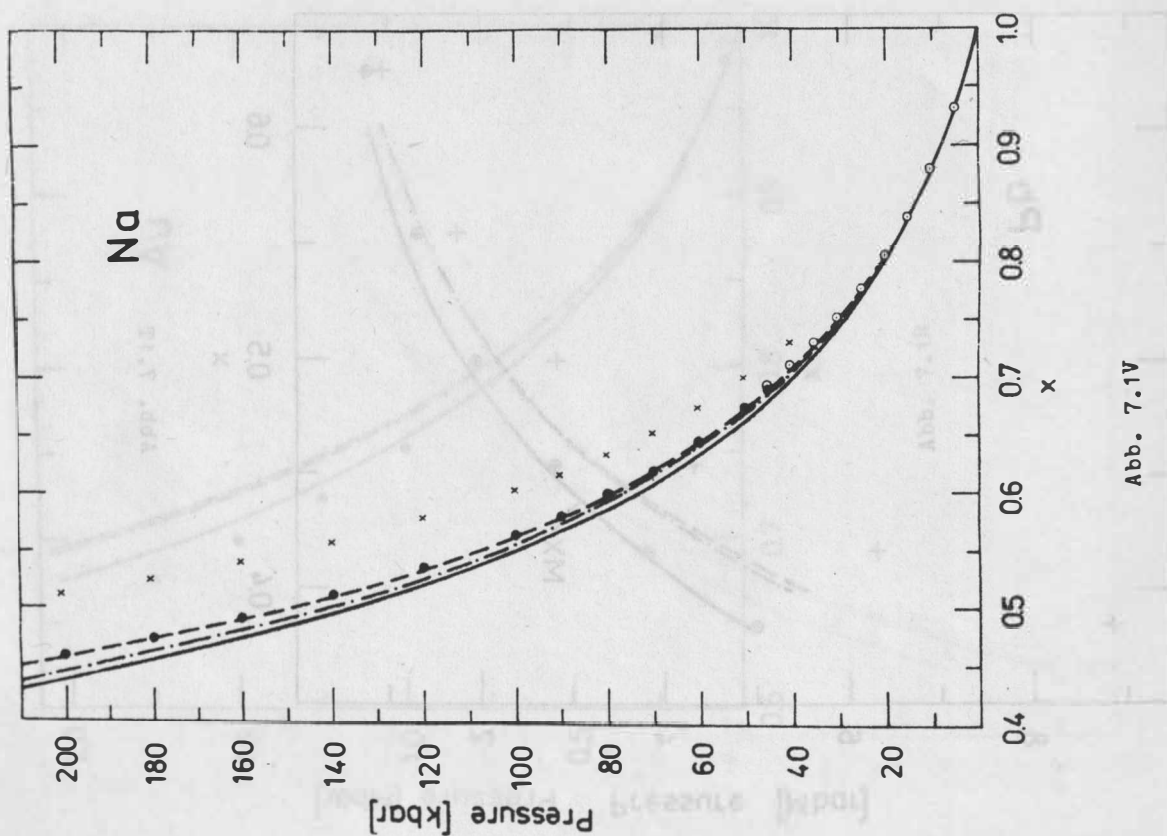


Abb. 7.1V

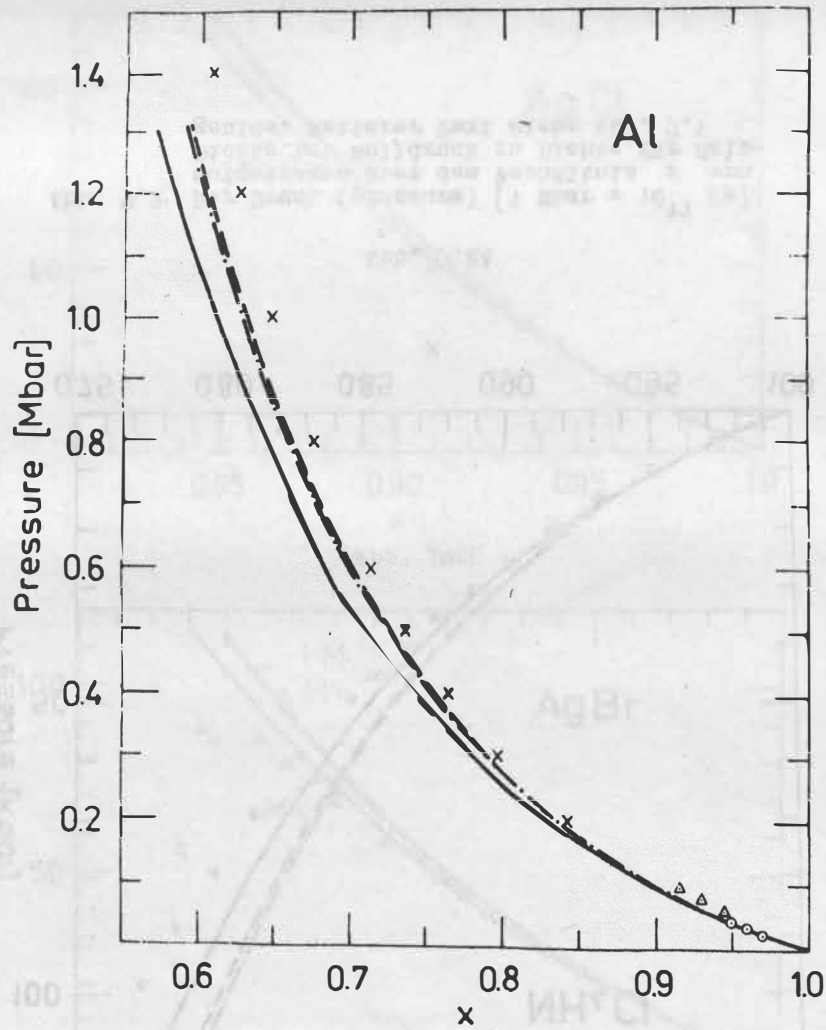


Abb. 7.1X

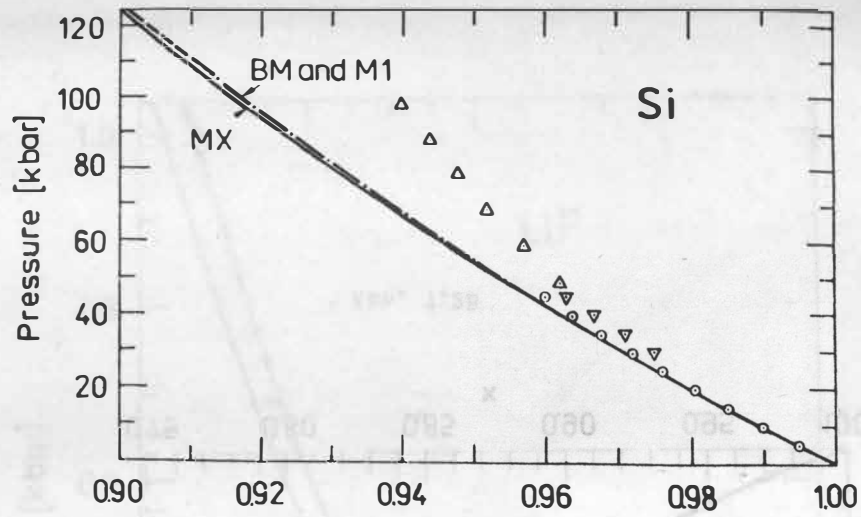


Abb. 7.1Y

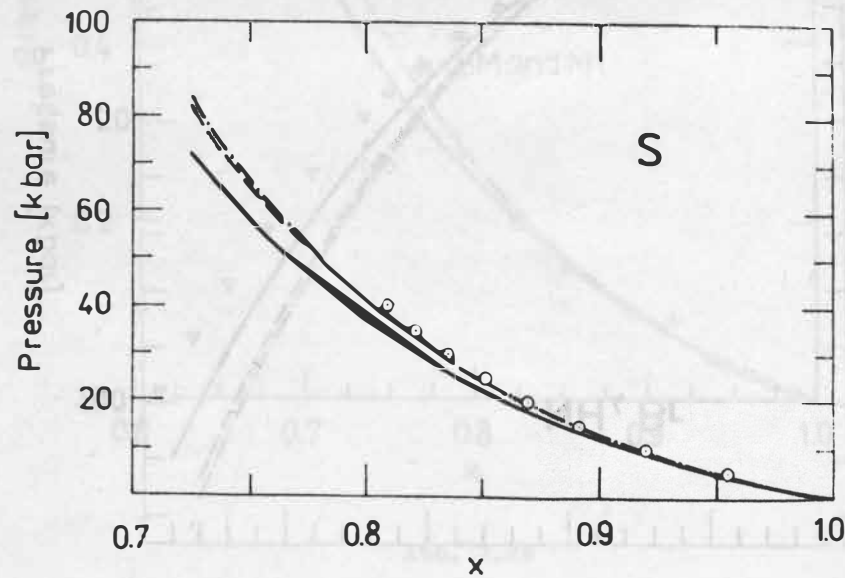


Abb. 7.1Z



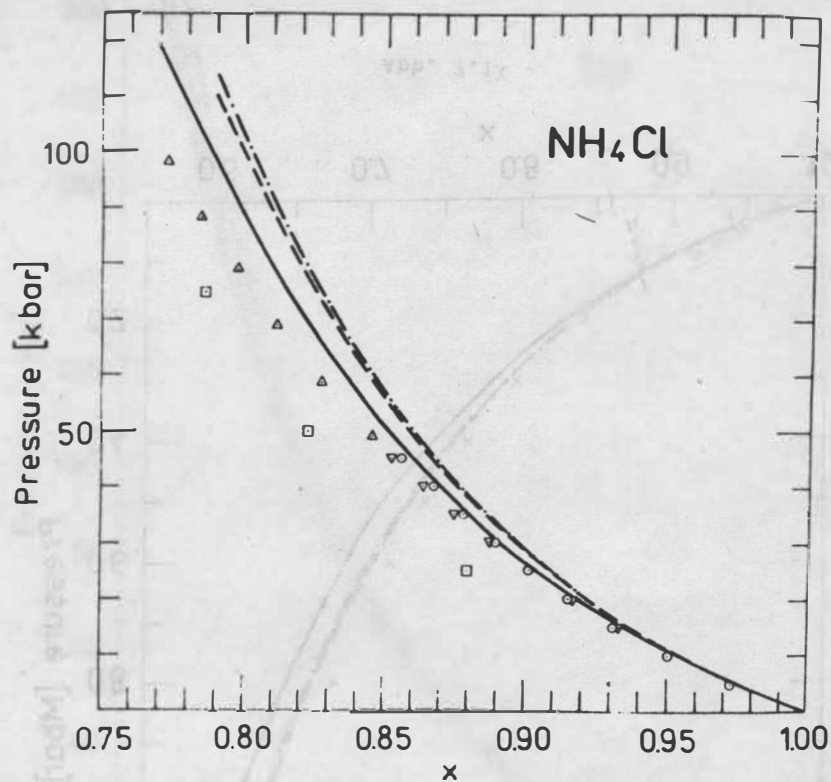


Abb. 7.2A

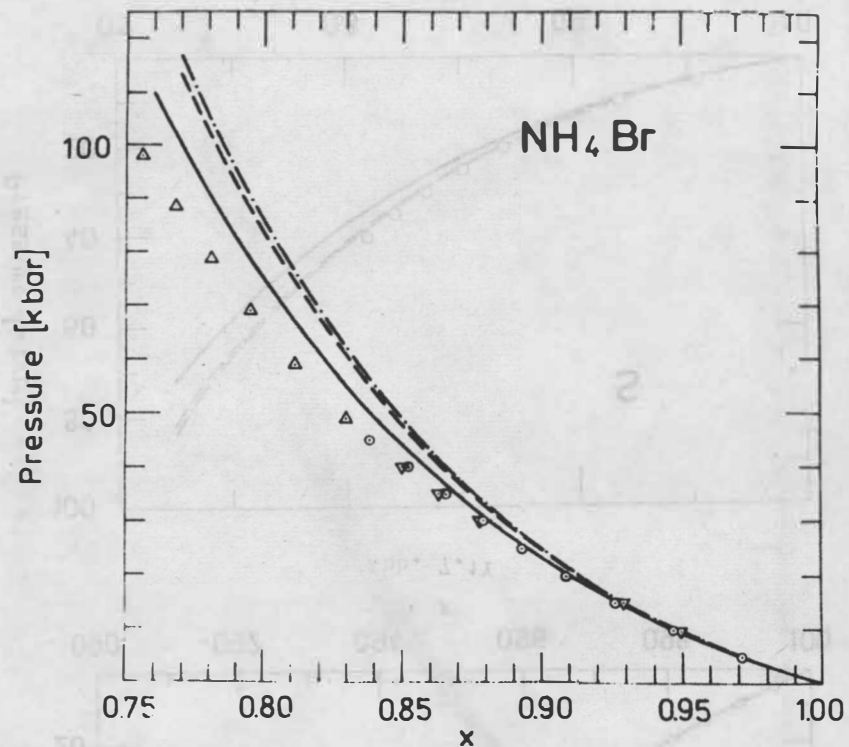


Abb. 7.2B

Abb. 7.2 Der Druck (pressure) [ $1 \text{ Mbar} = 10^{11} \text{ Pa}$ ] aufgetragen über dem Verhältnis  $x$  von Dichte bei Nulldruck zu Dichte für Halogenide. Weiterer Text siehe Abb. 7.1

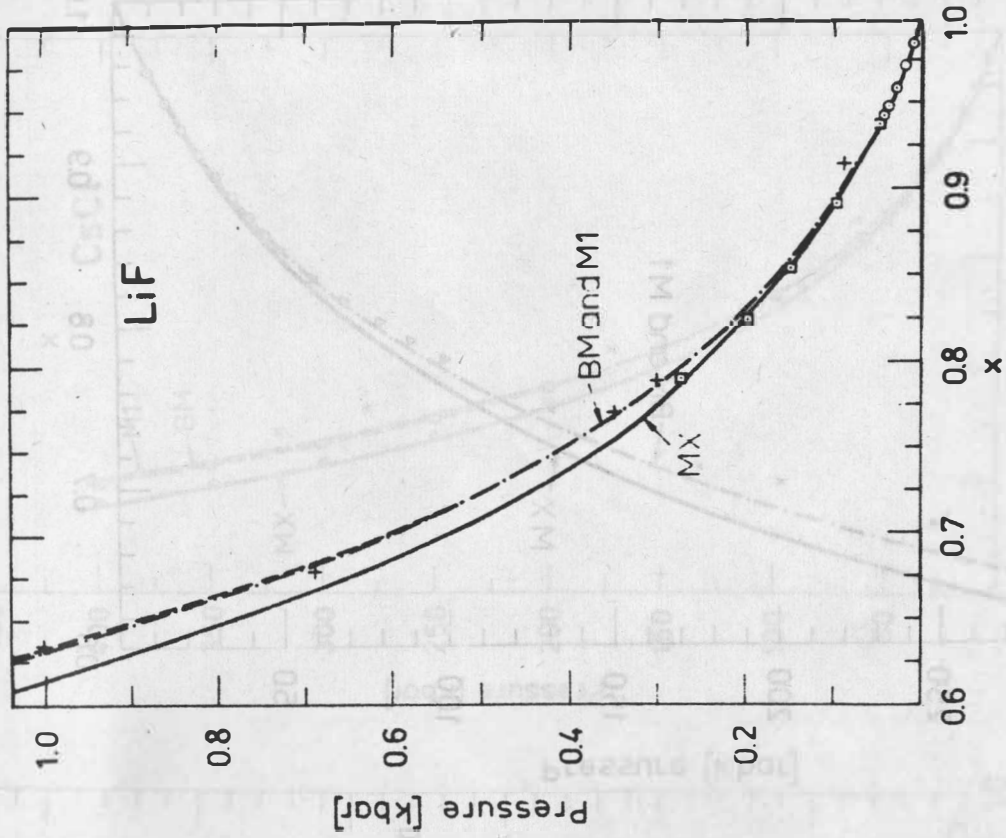


Abb. 7.2E

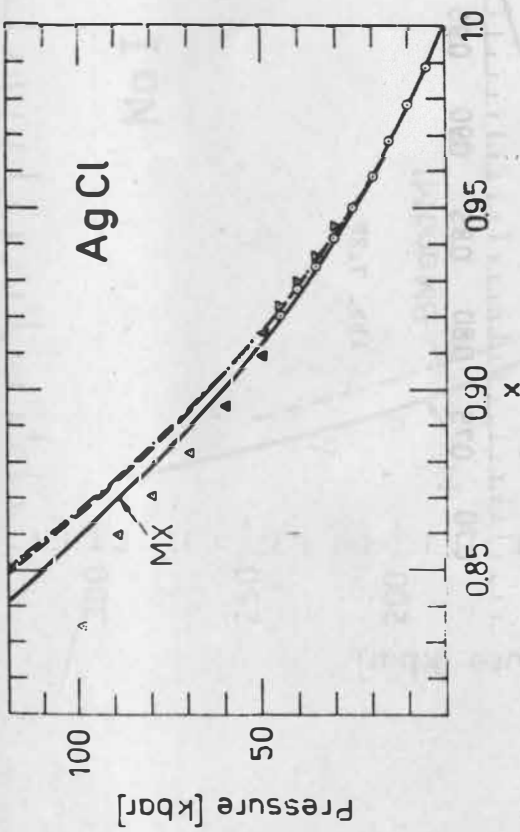


Abb. 7.2C

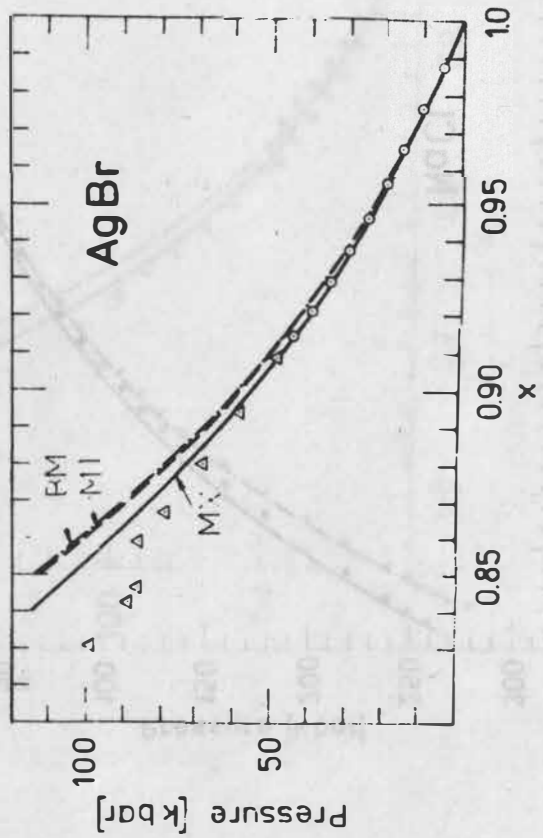


Abb. 7.2D

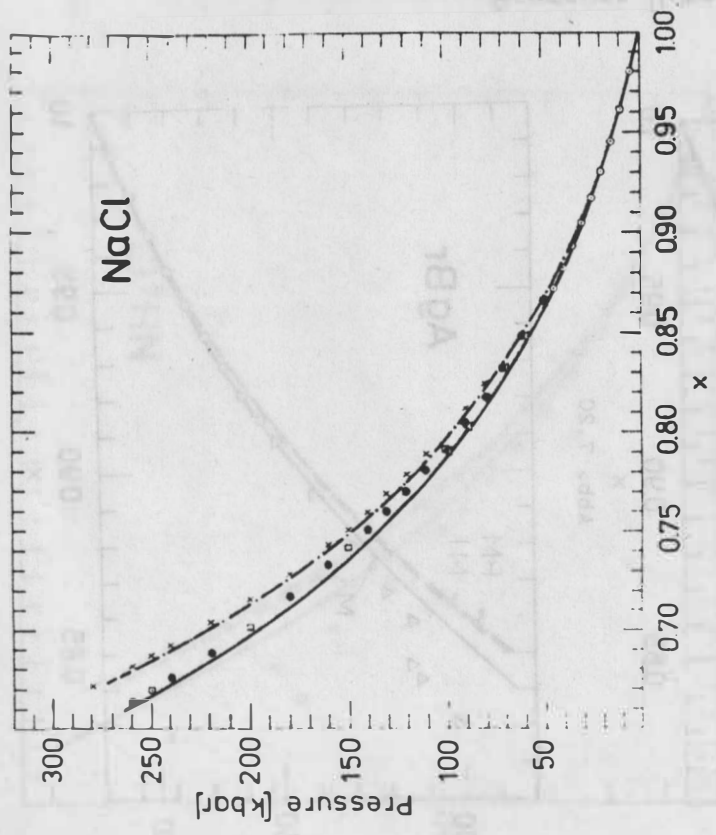
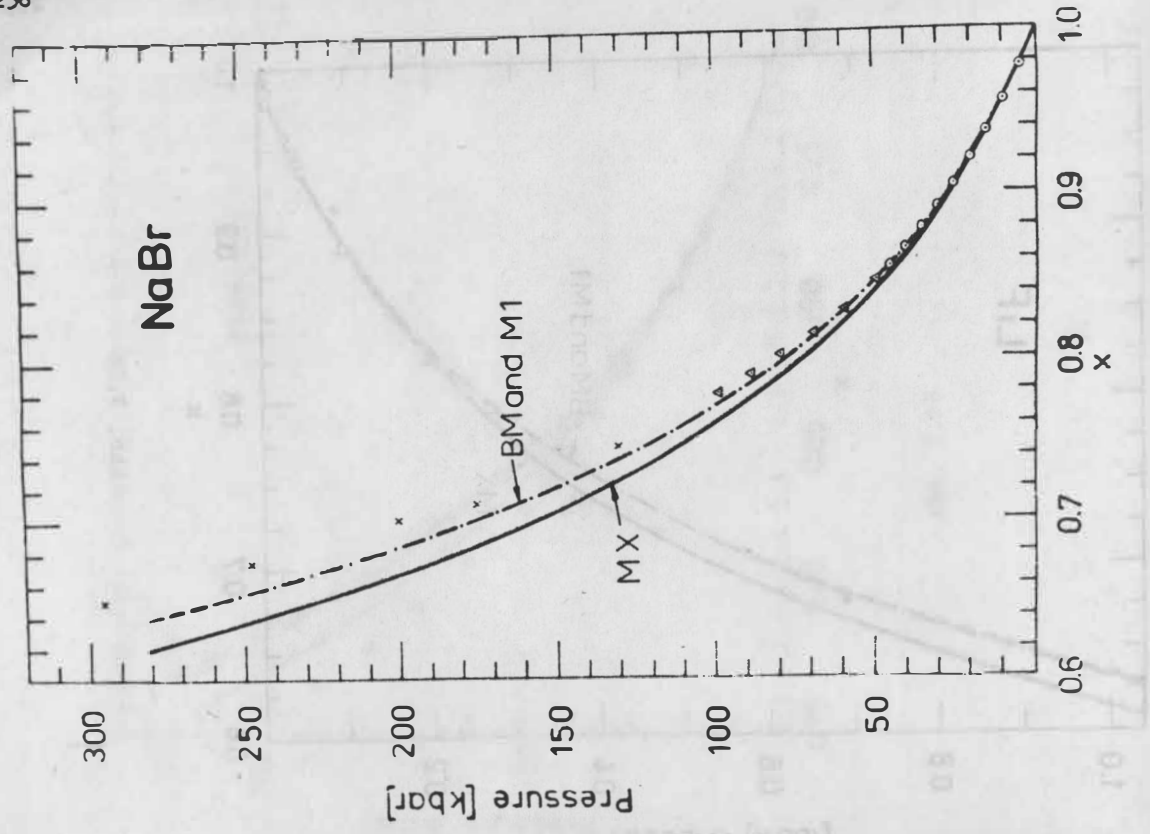


Abb. 7.2F

Abb. 7.2G

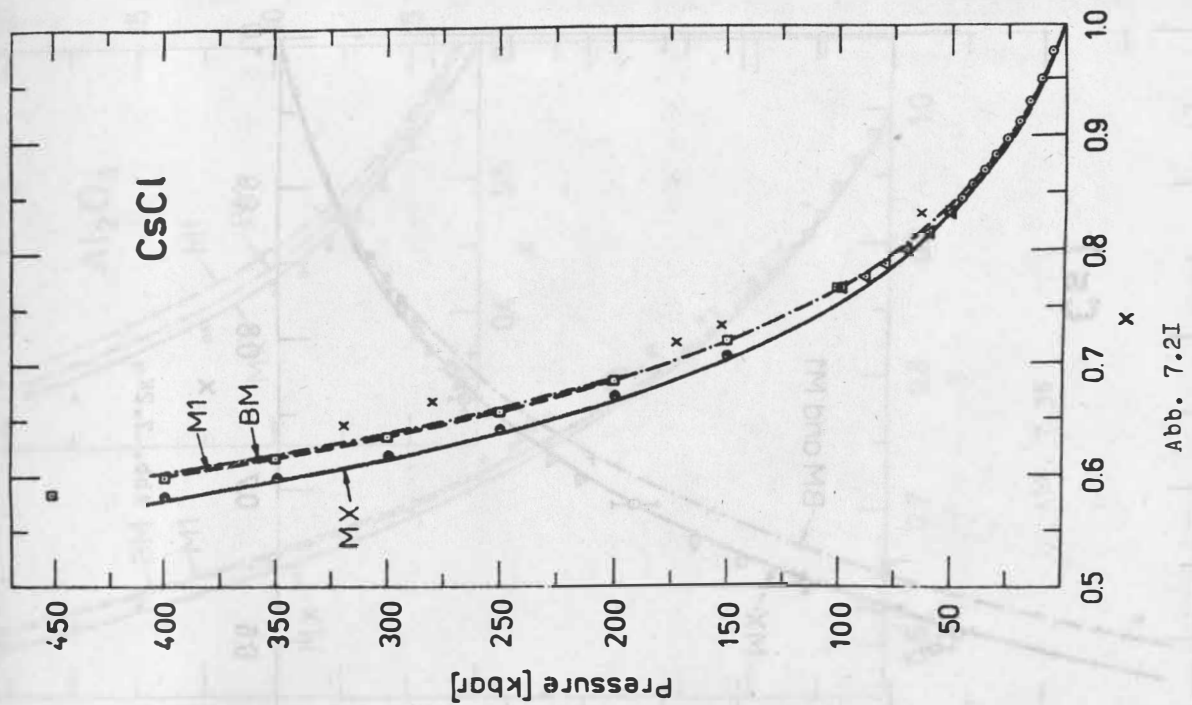


Abb. 7.2I

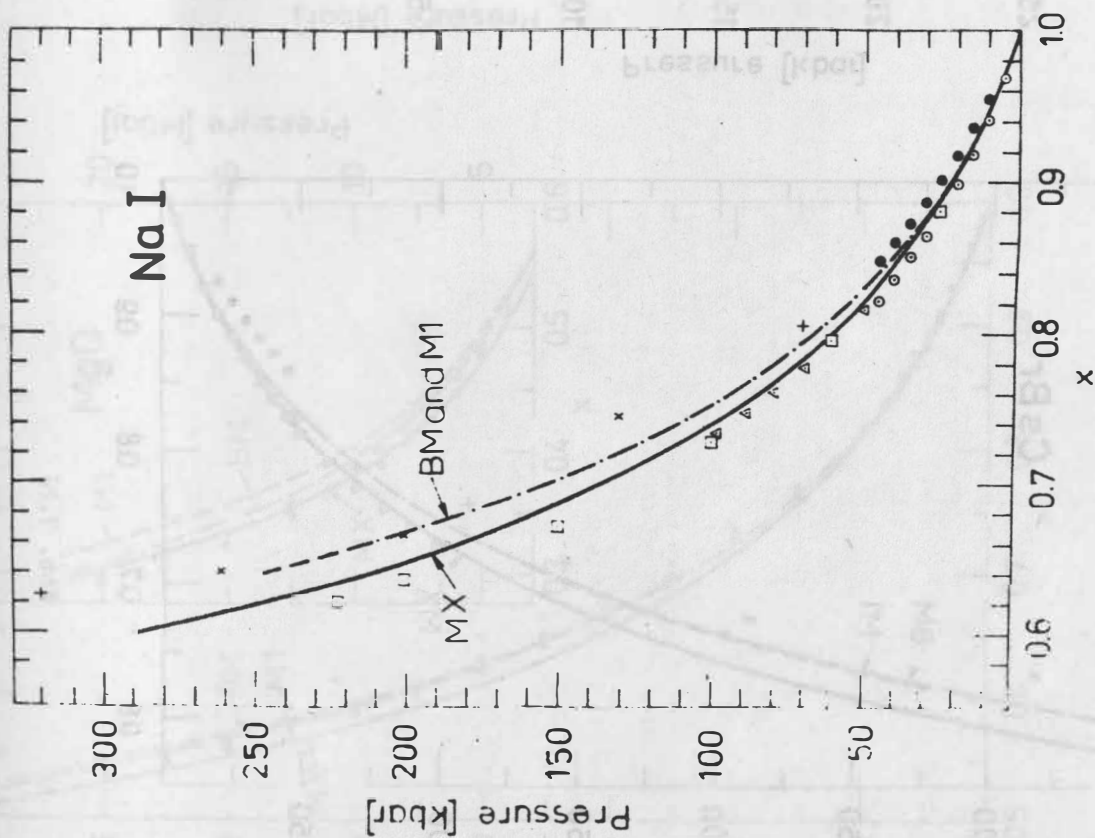


Abb. 7.2H

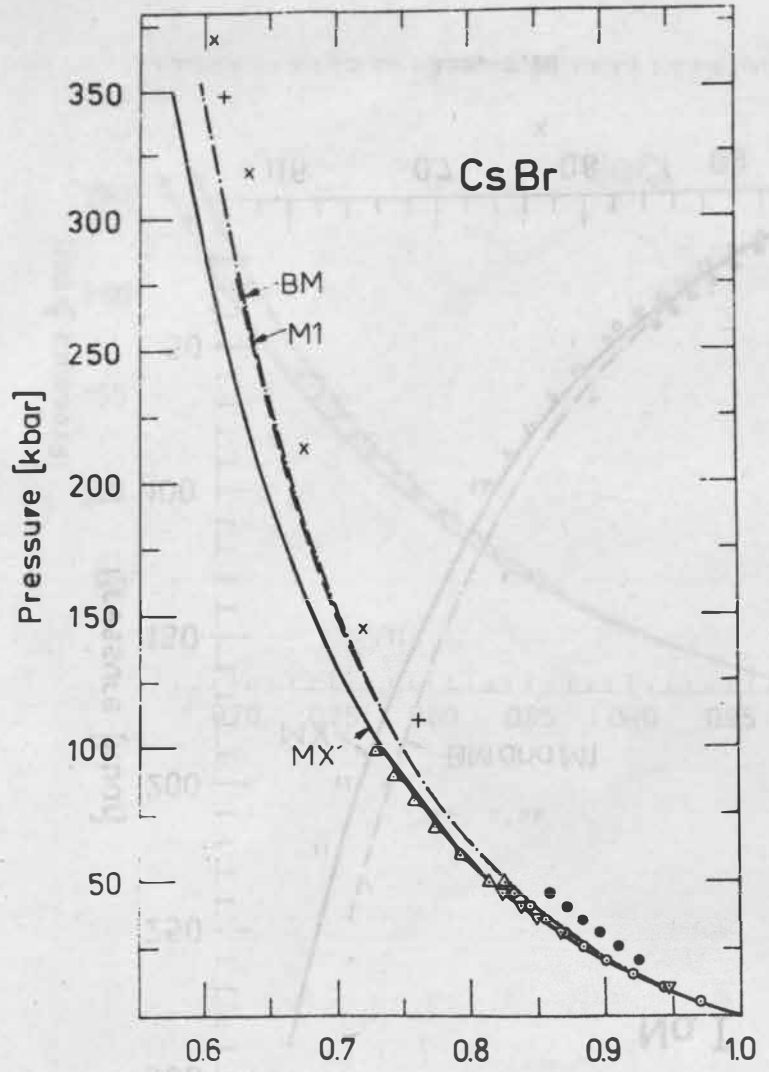


Abb. 7.2J

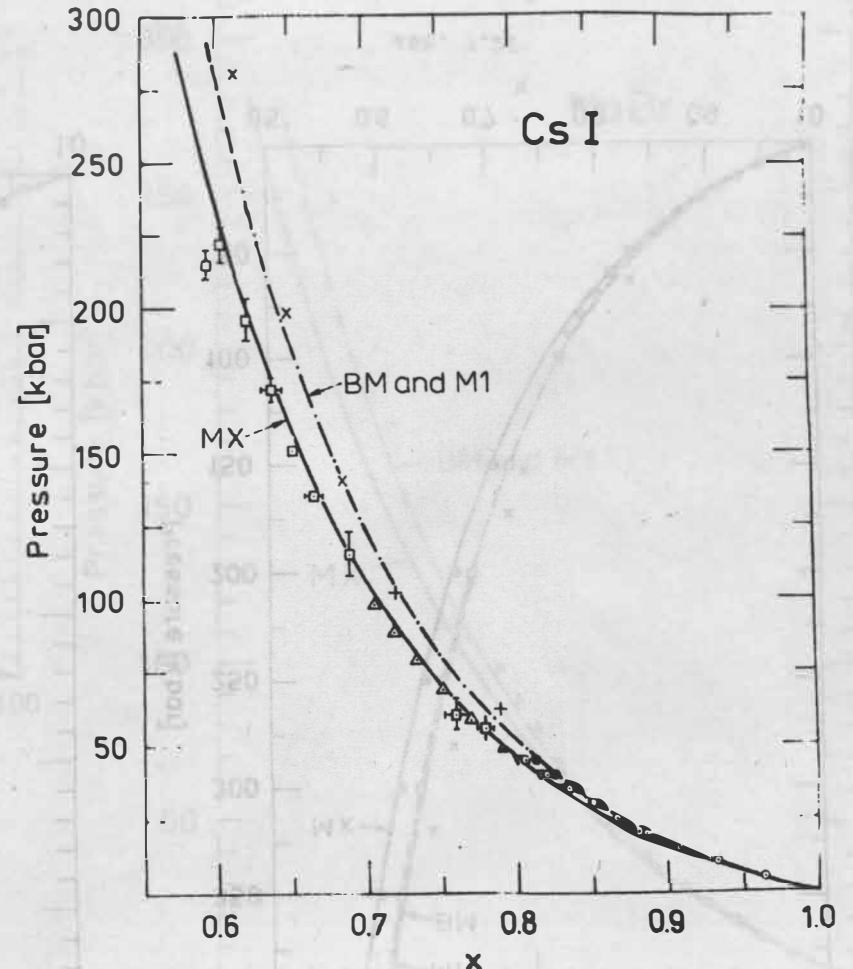


Abb. 7.2K



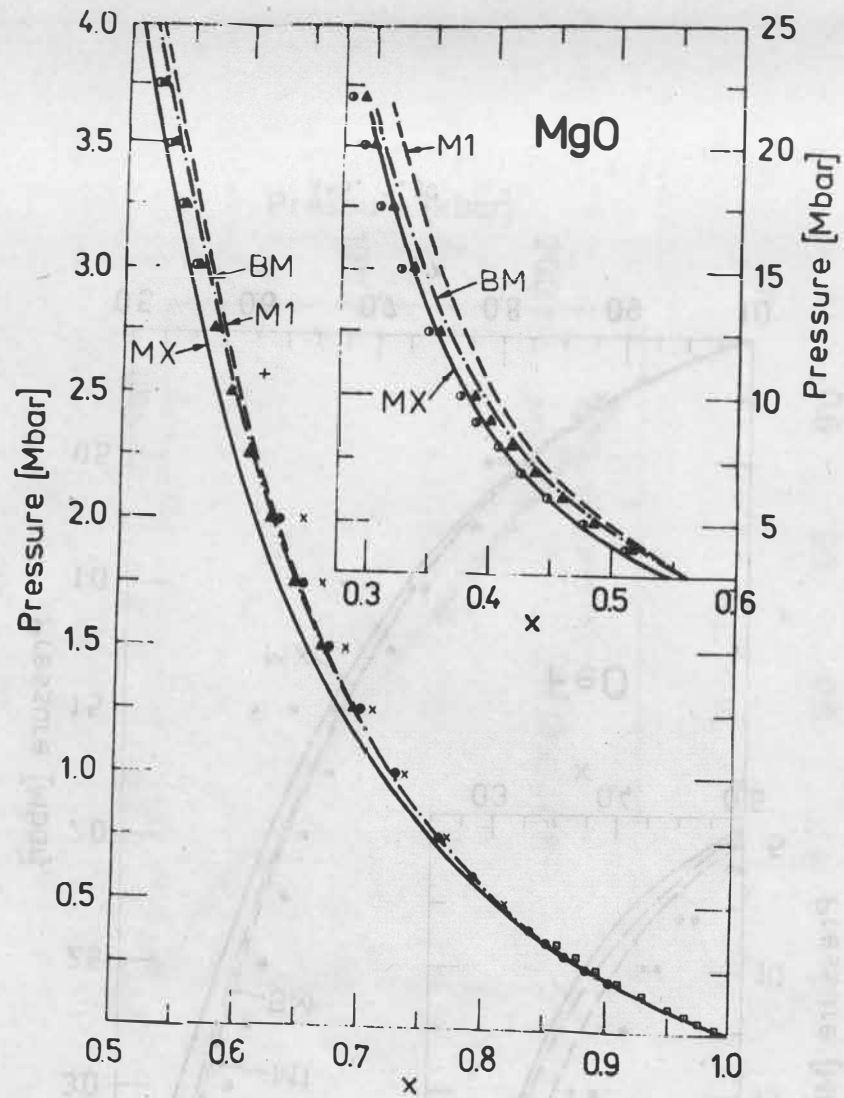


Abb. 7.3A

Abb. 7.3 Der Druck (pressure) [1 Mbar =  $10^{11}$  Pa] aufgetragen über dem Verhältnis  $x$  von Dichte bei Nulldruck zu Dichte für Oxide. Weiterer Text siehe Abb. 7.1

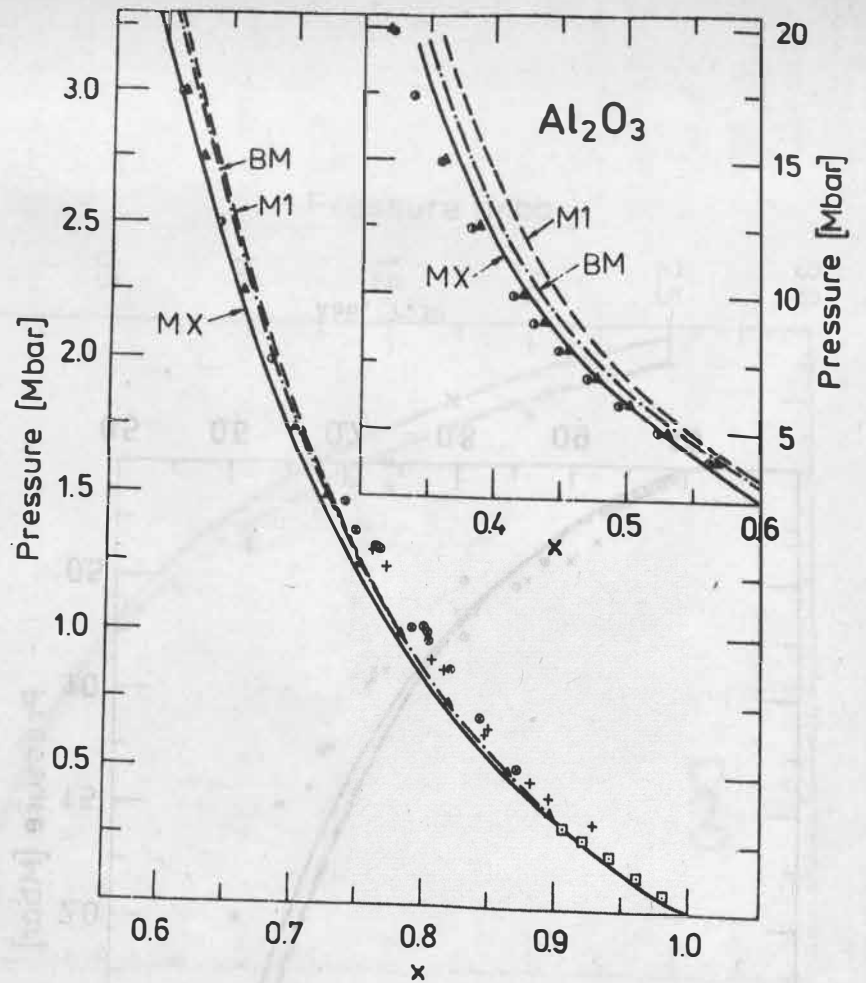


Abb. 7.3B

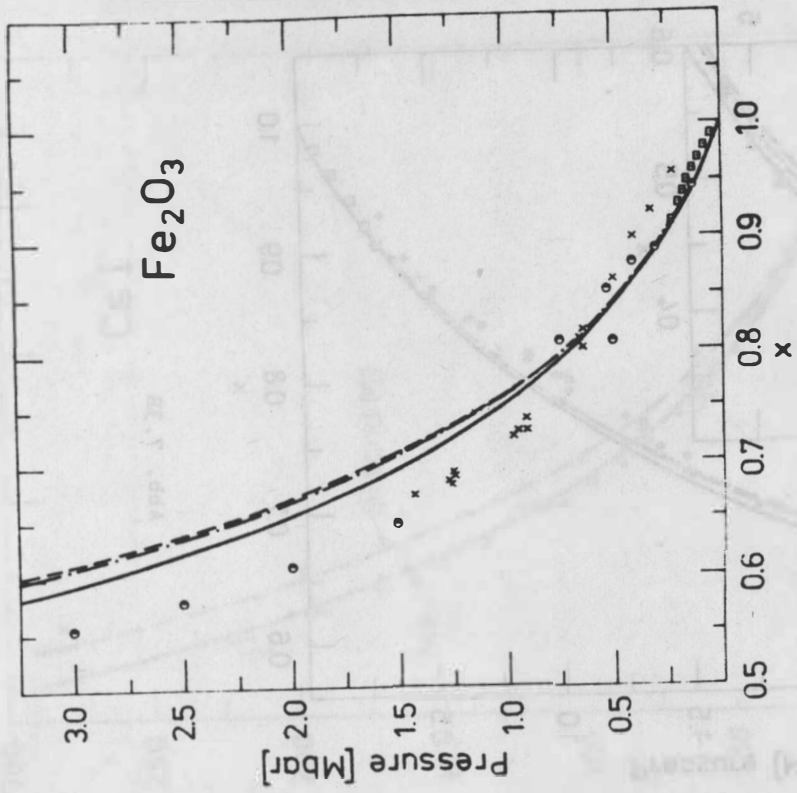


Abb. 7.3D

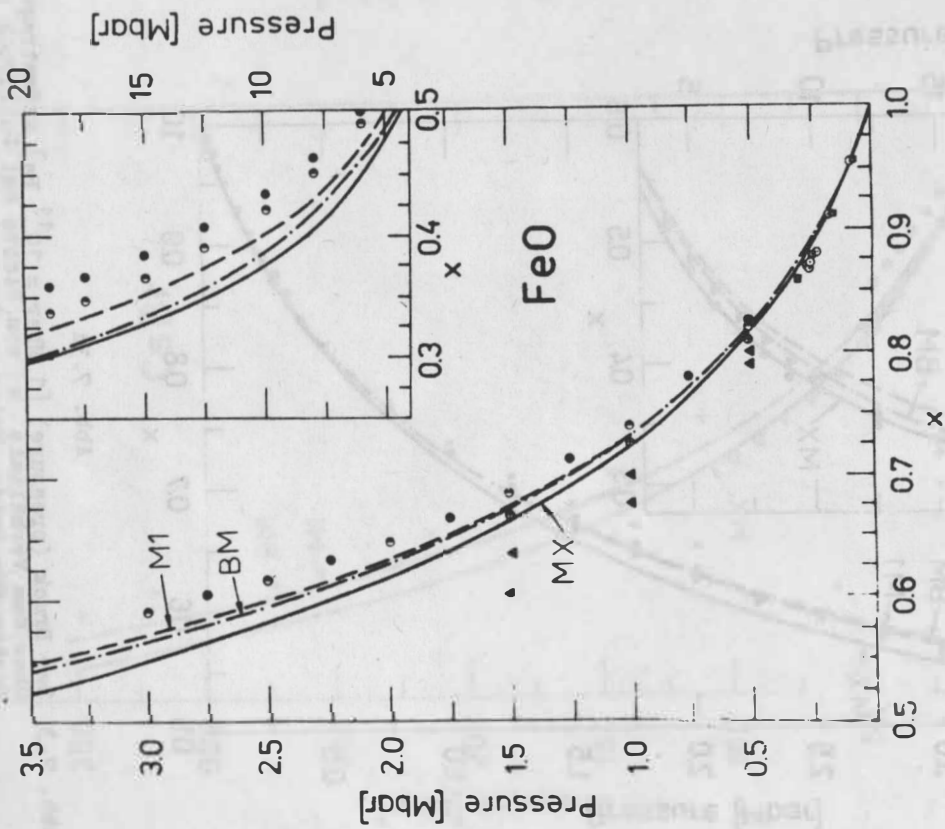


Abb. 7.3C

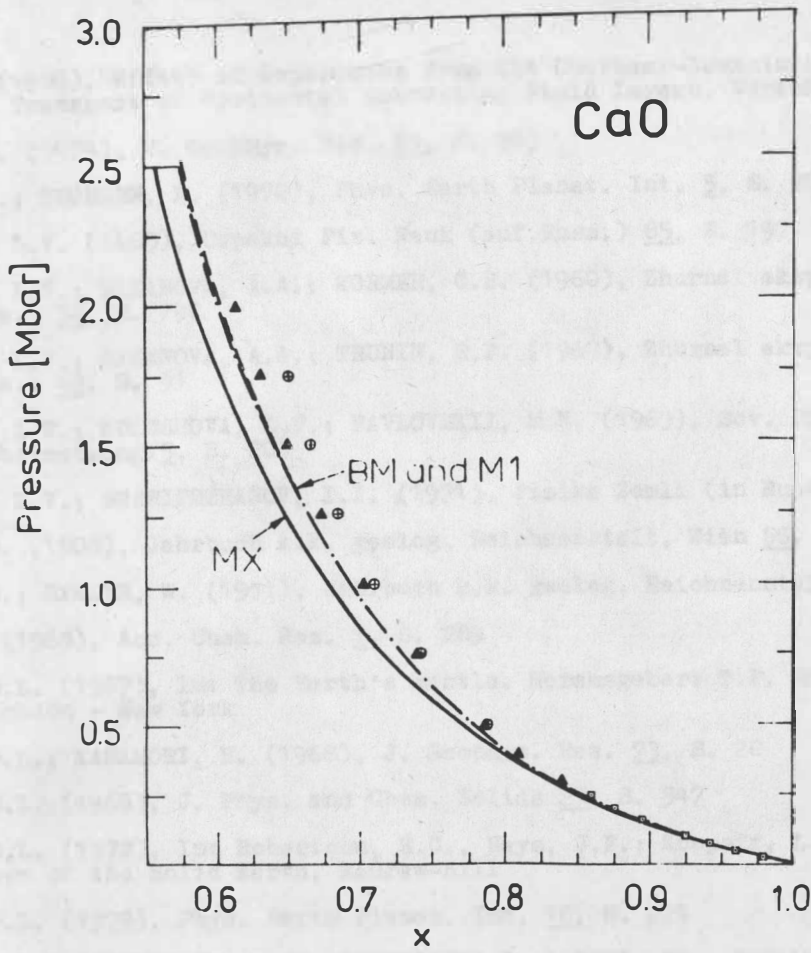


Abb. 7.3E

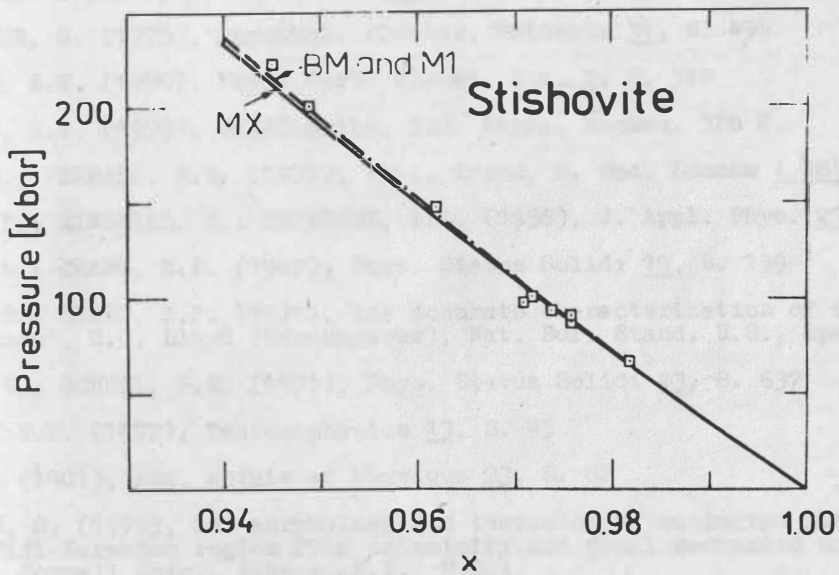
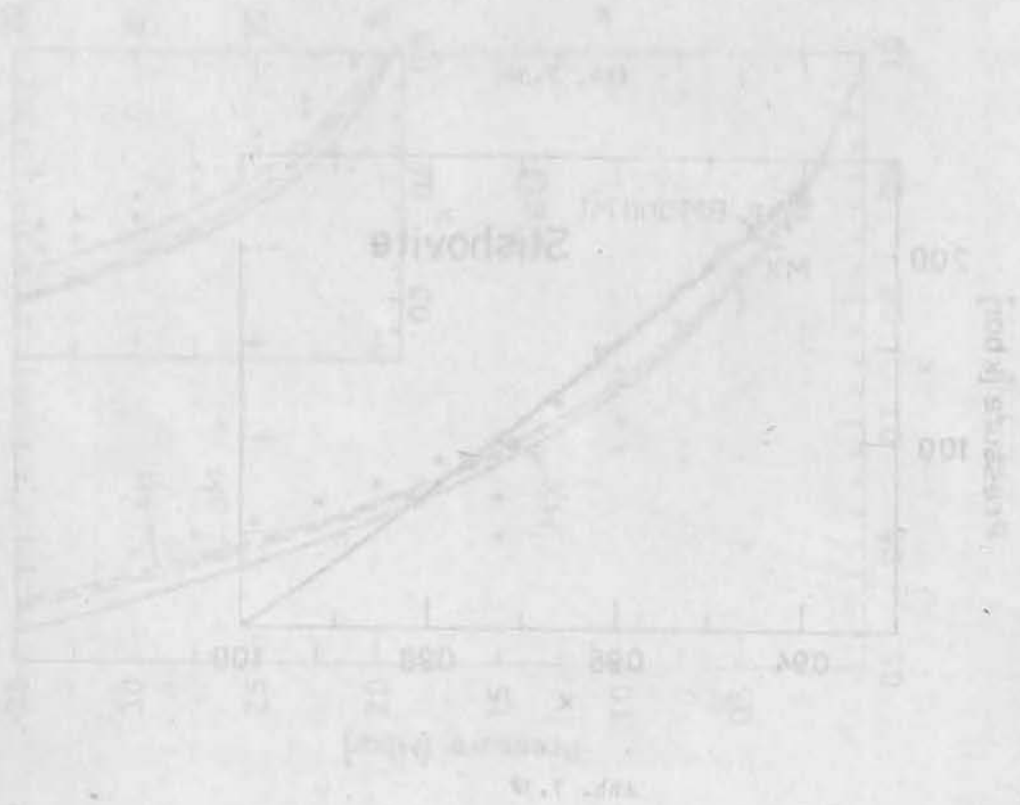
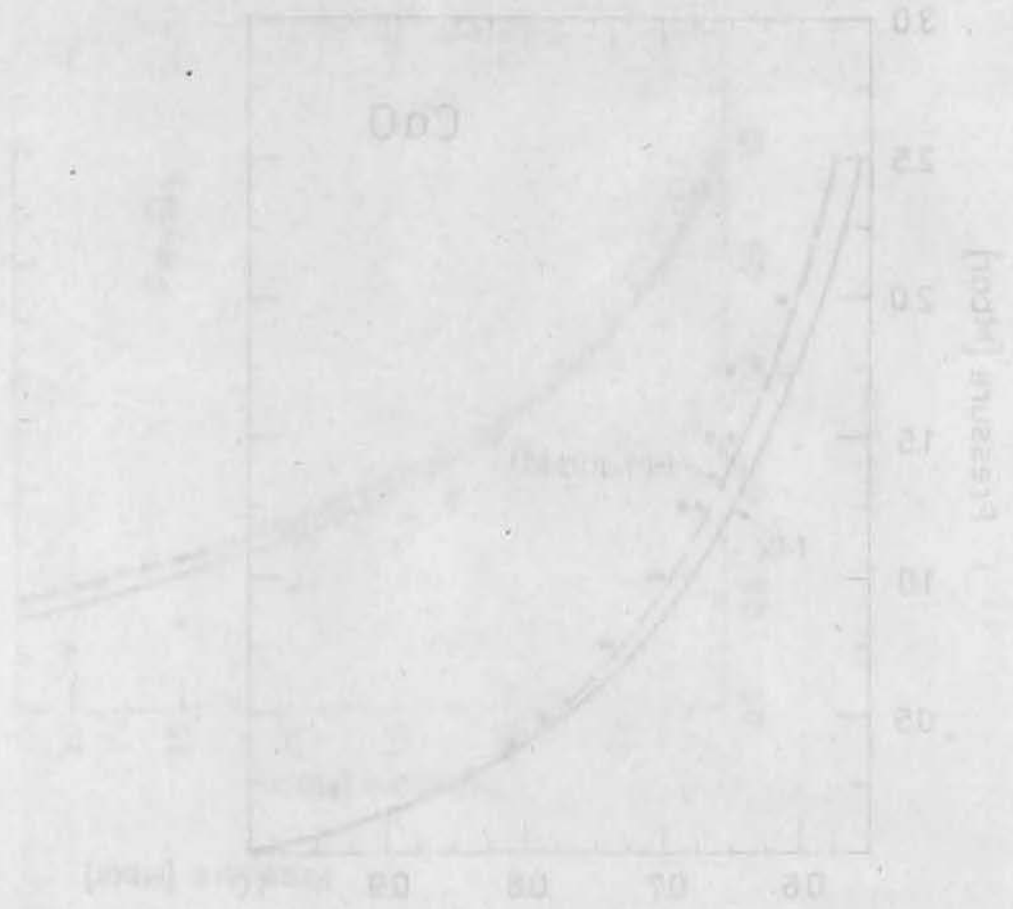


Abb. 7.3F



Literatur

- AHLERS, G. (1980), Effect of Departures from the Oberbeck-Boussinesq Approximation on the Heat Transport of Horizontal Convecting Fluid Layers, Vorabdruck.
- AHRENS, T.J. (1979), J. Geophys. Res. 84, S. 985
- AHRENS, T.J.; THOMSEN, L. (1972), Phys. Earth Planet. Int. 5, S. 282
- AL'TSHULER, L.V. (1965), Uspekhi Fiz. Nauk (auf Russ.) 85, S. 197
- AL'TSHULER, L.V.; BAKANOVA, A.A.; KORMER, C.B. (1960), Zhurnal eksper. teoret. fiz. (auf Russ.) 38, S. 790
- AL'TSHULER, L.V.; BAKANOVA, A.A.; TRUNIN, R.F. (1962), Zhurnal eksper. teoret. fiz. (auf Russ.) 42, S. 91
- AL'TSHULER, L.V.; KULESHOVA, L.V.; PAVLOVSKII, M.N. (1963), Sov. Phys.-Solid State (Engl. Übersetzung) 5, S. 203
- AL'TSHULER, L.V.; SHARIPDZHANOV, I.I. (1971), Fizika Zemli (in Russ.) 3, S. 11
- AMPFERER, O. (1906), Jahrbuch k.k. geolog. Reichsanstalt, Wien 56, S. 539
- AMPFERER, O.; HAMMER, W. (1911), Jahrbuch k.k. geolog. Reichsanstalt, Wien 61, S. 531
- ANDERS, E. (1968), Acc. Chem. Res. 1, S. 289
- ANDERSON, D.L. (1967), In: The Earth's Mantle. Herausgeber: T.F. Gaskell, Academic Press, London - New York
- ANDERSON, D.L.; KANAMORI, H. (1968), J. Geophys. Res. 73, S. 20
- ANDERSON, O.L. (1966), J. Phys. and Chem. Solids 27, S. 547
- ANDERSON, O.L. (1972), In: Robertson, E.C., Hays, J.F.; Knopoff, L. (Herausgeber), The Nature of the Solid Earth, McGraw-Hill
- ANDERSON, O.L. (1979), Phys. Earth Planet. Int. 18, S. 221
- ANDERSON, O.L.; LIEBERMANN, R.C.; SCHREIBER, E. (1968), Rev. Geophys. 6, S. 491
- ANDERSON, O.L.; PERKINS, P.C. (1975), Phys. Chem. Earth 9, S. 113
- ANDREWS, D.J. (1975), Tectonophysics 25, S. 177
- ANGENHEISTER, G. (1975), Physikal. Blätter, Weinheim 31, S. 496
- ARTYUSHKOV, E.V. (1970), Phys. Earth Planet. Int. 2, S. 318
- ARTYUSHKOV, E.V. (1979), Geodinamika, Izd. Nauka, Moskau, 326 S.
- ASHBY, M.F.; VERRALL, R.A. (1977), Phil. Trans. R. Soc. London A 288, S. 59
- BANCROFT, D.; MINSHALL, S.; PETERSON, E.L. (1956), J. Appl. Phys. 27, S. 291
- BARSCHE, G.R.; CHANG, Z.P. (1967), Phys. Status Solidi 19, S. 139
- BARSCHE, G.R.; CHANG, Z.P. (1971), In: Accurate characterization of the high pressure environment, E.C. Lloyd (Herausgeber), Nat. Bur. Stand. U.S., Spec. Publ.
- BARSCHE, G.R.; SCHULL, H.E. (1971), Phys. Status Solidi 43, S. 637
- BELOUSSOV, V.V. (1972), Tectonophysics 13, S. 95
- BÉNARD, H. (1901), Ann. chimie et physique 23, S. 62
- BILLINGTON, S. (1978), The morphology and tectonics of subducted lithosphere in the Tonga-Fiji-Kermadec region from seismicity and focal mechanism solutions, Ph. D. thesis, Cornell Univ., Ithaca, N.Y., U.S.A.
- BIRCH, F. (1952), J. Geophys. Res. 57, S. 227



- BIRCH, F. (1966), In: S.P. Clark (Herausgeber), Handbook of Physical Constants, Geol. Soc. Am., New York
- BIRD, J.M. (1980) (Herausgeber), Plate Tectonics, Am. Geophys. Un., Washington, 2. Auflage, 992 S.
- BLACK, L.P.; GALE, N.H.; MOORBATH, S.; PANKHURST, R.J.; MCGREGOR, V.R. (1971), *Earth Planet. Sci. Lett.* 12, S. 245
- BLANDER, M.; ABDEL-GAWAD, M. (1969), *Geochim. Cosmochim. Acta* 33, S. 701
- BLANDER, M.; KATZ, J.L. (1967), *Geochim. Cosmochim. Acta* 31, S. 1025
- BOEHLER, R.; KENNEDY, G.C. (1977), *J. Appl. Physics* 48, S. 4183
- BOLEF, D.I. (1961), *J. Appl. Phys.* 32, S. 100
- BORN, M.; HUANG, K. (1954), *Dynamical theory of crystal lattices*. Clarendon Press, Oxford, 420 S.
- BOOKER, J.R. (1976), *J. Fluid Mech.* 76, S. 741
- BOSCHI, E. (1975), *Riv. Nuovo Cimento* 5, ser. 2, S. 501
- BOSCHI, E.; CAPUTO, M. (1970), *Ann. Geofisica* 23, S. 159
- BOSTROM, R.C. (1978), *Modern Geology* 6, S. 171
- BOUSSINESQ, J. (1903), *Théorie analytique de la chaleur*, Bd. 2. Gauthier-Villars, Paris
- BRAGG, L. (1948), *Symposium on Internal Stresses*, Inst. Metals, London, S. 221
- BRAGINSKII, S.I. (1964), *Geomagn. Aeron.* 4, S. 732
- BRENNEN, C. (1974), *J. geophys. Res.* 79, S. 3993
- BRETT, R. (1976), *Rev. Geophys. Space Phys.* 14, S. 375
- BRINDEAU, E.; LEVANT, R.; HANSEN, J.-P. (1977), *Physics Lett.* 60A, S. 424
- BRINKMANN, R. (1977), *Abriss der Geologie*, Enke-Verlag Stuttgart, 10./11. Auflage, neu-  
bearb. von K. Krömmelbein
- BROOKFIELD, M. (1971), *Earth Planet. Sci. Letters* 12, S. 419
- BUCHHEIM, W. (1959), *Archiwum Górnicwa*, Warschau 4, S. 245
- BUCHHEIM, W. (1961), *Leopoldina, Halle/S.*, 7, S. 208
- BUERGER, M.J. (1965), *Elementary crystallography*. Wiley, New York, and Chapman & Hall, London
- BUKOWINSKI, M.S.T. (1976), *Phys. Earth Planet. Inter.* 13, S. 57
- BUNDY, F.P. (1959), *Phys. Rev.* 115, S. 274
- BURGMANN, W.; URBAIN, G.; FROHBERG, M.G. (1968), *Mem. Sci. Rev. Met.* 65, S. 567
- BURKLEN, O.T. (1898), *Mathematische Formelsammlung*. Sammlung Göschen. Leipzig
- BUSSE, F.H. (1967), *J. Math. and Phys.* 46, S. 140
- BUSSE, F.H. (1975a), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 42, S. 437
- BUSSE, F.H. (1975b), *J. Fluid Mech.* 72, S. 67
- BUSSE, F.H. (1976), *Phys. Earth Planet. Inter.* 12, S. 350
- BUSSE, F.H. (1978a), *Rep. Progress Phys.* 41, S. 1929
- BUSSE, F.H. (1978b), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 52, S. 1

- BUSSE, F.H. (1979), *Phys. Earth Planet. Int.* 19, S. 149
- BUSSE, F.H.; WHITEHEAD, J.A. (1971), *J. Fluid Mech.* 47, S. 305
- CARDER, D.S.; GORDON, D.W.; JORDAN, J.N. (1966). *Bull. Seis. Soc. Am.* 56, S. 815
- CAREY, S.W. (1976), *The expanding Earth, Developm. in Geotekt.* 10, Elsevier, Amsterdam - Oxford - New York
- CARTER, N.L. (1976), *Rev. Geophys. Space Phys.* 14, S. 301
- CARTER, W.J.; MARSH, S.P.; FRITZ, J.N. (1971), *Nat. Bur. Stand. U.S., Spec. Publ.* 326, S. 147
- CATHLES III, L.M. (1975), *The Viscosity of the Earth's Mantle*, Princeton Univ., Princeton und London, 388 S.
- ČERMAK, V. (1975), *Veröff. Zentralinst. Physik d. Erde* 31, S. 347 (Tagungsband 1.-6. April 1974 Jena)
- CHANDRASEKHAR, S. (1961), *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon, Oxford
- CHEN, T.; SPETZLER, H.A.; MEYER, M.D. (1976), *Tectonophysics* 35, S. 271
- CHRISTENSEN, U. (1981), *J. Geophys.* 49, S. 82
- CHUNG, D.H. (1974), *Phys. Earth Planet. Int.* 8, S. 113
- COTTERILL, R.M.J. (1978a), *Physica Scripta*, 18, S. 37
- COTTERILL, R.M.J. (1978b), *Nature*, 273, S. 371 (No. 5661)
- COWIN, S.C. (1968), *The Characteristic Length of a Polar Fluid. In: Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications.* Herausgeber E. Kröner. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- COWLING, T.G. (1933), *Monthly Not. R. astr. Soc.* 94, S. 39
- CREER, K.M. (1975), In: Rosenberg, G.D. und Runcorn, S.K. (Hrgr.), *Growth rhythms and the history of the Earth's rotation*, J. Wiley and Sons, London etc., S. 293
- CZECHOWSKI, L. (1979), *Acta Geophys. Polon.* 27, S. 161
- DANIELS, W.B.; SMITH, C.S. (1958), *Phys. Rev.* 111, S. 713
- DAVIES, G.F. (1977), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 49, S. 459
- DAVIES, G.F. (1980a), *J. Geophys. Res.* 85, S. 6304
- DAVIES, G.F. (1980b), *Rev. Geophys. Space Phys.* 18, S. 718
- DAY, J.P.; RUOFF, A.L. (1974), *Phys. Status Solidi (a)* 25, S. 205
- DECKER, D.L. (1971), *J. Appl. Phys.* 42, S. 3239
- De La CRUZ-REYNA, S. (1976), *Tectonophysics* 35, S. 149
- DEWEY, J.F.; BIRD, J.M. (1970), *Tectonophysics* 10, S. 625
- DICKE, R.J. (1969), *J. Geophys. Res.* 74, S. 5895
- DICKINSON, W.R.; LUTH, W.C. (1971), *Science* 174, S. 400
- DIRAC, P.A.M. (1930), *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 26, S. 376
- DREIZLER, R.M.; GROSS, E.K.U.; TOEPFER, A. (1979), *Physics Letters* 71A, S. 49
- DRICKAMER, H.G.; CLENDENEN, R.L.; LYNCH, R.W. (1966), In: *Solid State Physics*, F. Seits and D. Turnbull (Herausgeber), Bd. 19 Academic Press, New York - London
- DUBROVSKII, V.A. and PAN'KOV, V.L. (1972), *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 7, S.48

- DUGDALE, J.S.; MacDONALD, D.K.C. (1953), *Phys. Rev.* 89, S. 832
- DUVALL, G.E.; FOWLES, G.R. (1963), In: *High Pressure Physics and Chemistry*, R.S. Bradley (Herausgeber), Bd. 2. Academic Press, New York - London
- DZIEWONSKI, A.M., HALES, A.L., LAPWOOD, E.R. (1975), *Phys. Earth Planet. Inter.* 10, S.12
- EBERT, H. (Herausgeber), (1976), *Physikalisches Taschenbuch*, Vieweg, Braunschweig, 617 S.
- ELSASSER, W.M. (1946), *Phys. Rev.* 69, S. 106
- ELSASSER, W.M. (1963), In: *Earth Science and Meteoritics*, Herausgegeben von J. Geiss und E.D. Goldberg, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, S. 1
- ELSASSER, W.M.; OLSON, P.; MARSH, B.D. (1979), *J. Geophys. Res.* 84, S. 147
- ERDOGAN, M.E. (1972), *Acta Mechanica* 15, S. 233
- ERINGEN, A.C. (1966), *J. Math. and Mech.* 16, S. 1
- ERINGEN, A.C. (1969), *Int. J. Engng. Sci.* 7, S. 115
- FANSELAU, G.; KAUTZLEBEN, H.; LUCKE, O.; MAUERSBERGER, P.; SELLIEN, K. (1964), *Pure Appl. Geophysics* 57, S. 5
- FEJES TÓDT, L. (1965), *Reguläre Figuren*, B.G. Teubner Verlag, Leipzig
- FRITZ, J.N.; CARTER, W.J.; MARSH, S.P. (1971), *Nat. Bur. Stand. U.S., Spec. Publ.* 326, S. 201
- FROIDEVAUX, C.; SCHUBERT, G. (1975), *J. geophys. Res.* 80, S. 2553
- FRÖLICH, F. (1973), Kap. 3, In: *Complex Studies on Variations of the Secular Behaviour in the Earth's Mantle*. Von F. Frölich, U. Seipold, H. Vollstädt, und U. Walzer, Geest und Portig, Leipzig
- FROMM, J.E. (1965), *Phys. Fluids* 8, S. 1757
- FYFE, W.S. (1978), *Chemical Geology* 23, S. 89
- GAERTNER, H.R. v. (1969), *Beihefte zum geol. Jahrbuch, Hannover*, 80, S. 181
- GARLAND, C.W. (1966a), *J. Chem. Phys.* 44, S. 1112
- GARLAND, C.W. (1966b), *J. Chem. Phys.* 44, S. 1130
- GASTIL, G. (1960), *Amer. J. Sci.* 285, S. 1
- GEBRANDE, H., Ein Beitrag zur Theorie thermischer Konvektion im Erdmantel mit besonderer Berücksichtigung der Möglichkeit eines Nachweises mit Methoden der Seismologie, Dissertation, München 1975
- GILLULY, J. (1950), *Geolog. Rundschau* 38, S. 89 und S. 103
- GILLULY, J. (1973), *Geolog. Soc. Am. Bull.* 84, S. 499
- GILVARRY, J.J. (1956), *Phys. Rev.* 102, S. 308
- GILVARRY, J.J. (1966), *Phys. Rev. Letters* 16, S. 1089
- GILVARRY, J.J. (1969), In: *Runcorn, S.K. (Herausgeber), The Application of Modern Physics to the Earth and Planetary Interiors*, Wiley, London etc.
- GOETTEL, K.A. (1972), *Phys. Earth Planet. Inter.* 6, S. 161
- GOETZE, C. (1971), *J. Geophys. Res.* 76, S. 1223
- GOETZE, C. (1978), *Phil. Trans. R. Soc. London* A288, S. 99
- GOETZE, C.; KOHLSTEDT, D.L. (1973), *J. geophys. Res.* 78, S. 5961
- GOLDREICH, P.; TOOMRE, A. (1969), *J. Geophys. Res.* 74, S. 2555
- GORDON, R.B. (1965), *J. Geophys. Res.* 70, S. 2413

- GRABIŃSKA, T.; ZABIEROWSKI, M. (1980), Abstracts of Contributed Papers, 9-th Int. Conference on General Relativity and Gravitation, Jena, herausgegeben von E. Schmutzer
- GRASTY, R.L.; WILSON, J.T. (1967), *Trans. Am. Geophys. Union* **48**, S. 212
- GRAY, D.D.; GIORGINI, A. (1976), *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, S. 545
- GRIGGS, D.T.; POST, R.L., Jr. (1973), *Science*, **181**, S. 1242
- GROSS, E.K.U.; DREIZLER, R.M. (1979), *Phys. Rev.* **A20**, S. 1798
- GROSSMAN, L.; LARIMER, J. (1974), *Rev. Geophys. Space Phys.* **12**, S. 71
- GROVER, R.J. (1971), *J. Phys. Chem. Solids* **32**, S. 2539
- GROVER, R.; GETTING, I.C.; KENNEDY, G.C. (1973), *Phys. Rev.* **B7**, S. 567
- GSCHNEIDNER, K.A. Jr. (1964), *Solid State Physics* **16**, S. 275
- GUBBINS, D. (1974), *Rev. Geophys. Space Phys.* **12**, S. 137
- GUBBINS, D. (1976), *Geophys. J. R. astron. Soc.* **47**, S. 19
- GUBBINS, D. (1977), *J. Geophys.* **43**, S. 453
- GUINAN, M.W.; STEINBERG, D.J. (1974), *J. Phys. and Chem. Solids* **35**, S. 1501
- GUPTA, A.P.; SHANKER, J. (1979), *Phys. Status Solidi (b)* **95**, S. K103
- GUTENBERG, B. (1958), *Trans. Am. Geophys. Un.* **39**, S. 486
- HADDON, R.A.W.; BULLEN, K.E. (1969), *Phys. Earth Planet. Int.* **2**, S. 35
- HANUŠ, V.; VANĚK, J. (1979), *Časopis pro mineralogii a geologii, Prag*, **24**, S. 155
- HASKELL, N.A. (1935), *J. Appl. Phys.* **6**, S. 265
- HAYASHI, C.; NAKAZAWA, K.; MIZUNO, H. (1979), *Earth Planet. Sci. Lett.* **43**, S. 22
- HEARD, H.C.; BORG, I.Y.; CARTER, N.L.; RALEIGH, C.B. (1972) (Herausgeber), *Flow and Fracture of Rocks. Geophys. Monograph 16*, AGU, Washington
- HEIRTZLER, J.R.; DICKSON, G.O.; HERRON, E.M.; PITMAN III, W.C.; LePICHON, X. (1968), *J. Geophys. Res.* **73**, S. 2119
- HELSLEY, C.E. (1972), *Trans. Am. Geophys. Un.* **53**, S. 363
- HELSLEY, C.E.; STEINER, M.B. (1969), *Earth Planet. Sci. Letters* **5**, S. 325
- HIGGINS, G.; KENNEDY, G.C. (1971), *J. Geophys. Res.* **76**, S. 1870
- HIRSCHFELDER, J.O.; CURTIS, C.F.; BIRD, R.E. (1954), *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York
- HO, P.S.; RUOFF, A.L. (1968), *J. Phys. Chem. Solids* **29**, S. 2101
- HOHENBERG, P.; KOHN, W. (1964), *Phys. Rev.* **136**, S. B864
- HOUSTON, M.H. Jr.; de BREMAECKER, J.-Cl. (1975), *J. Geophys. Res.* **80**, S. 742
- IRVINE, R.D.; STACEY, F.D. (1975), *Phys. Earth Planet. Inter.* **11**, S. 157
- ISACKS, B.; MOLNAR, P. (1971), *Rev. Geophys. Space Phys.* **9**, S. 103
- ITO, K. (1976), *Geochem. J.* **10**, S. 59
- JACKSON, I. (1977), *Phys. Earth Planet. Inter.* **14**, S. 143
- JACOB, B.; GROSS, E.K.U.; DREIZLER, R.M. (1978), *J. Phys. B.* **11**, S. 3795
- JACOBS, J.A. (1975), *The Earth's core*, Academic Press London etc., 253 Seiten



- JACOBS, J.A. (1976), *Naturwissenschaften* 63, S. 307
- JACOBSEN, S.B.; WASSERBURG, G.J. (1979), *J. Geophys. Res.* 84, S. 7411
- JACOBY, W.R. (1976), *Tectonophysics* 35, S. 103
- JANZ, G.J. (1967), *Molten Salts Handbook*, Academic Press, New York, 588 S.
- JEANLOZ, R.; RICHTER, F.M. (1979), *J. Geophys. Res.* 84, S. 5497
- JOHNSON, A.M.; POLLARD, D.D. (1973), *Tectonophysics* 18, S. 261
- JOLY, I. (1930), *The surface history of the Earth*, Oxford Univ. Press
- JONES, G.M. (1977), *J. Geophys. Res.* 82, S. 1703
- JORDAN, T.H. (1973), *Details of Model B1*. Siehe Jacobs (1975) S. 40
- JORDAN, T.H. (1974), *J. Geophys. Res.* 79, S. 2141
- JORDAN, T.H. (1975), *Nature* 252, S. 745
- JOSEPH, D.D. (1976), *Stability of Fluid Motions II*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- KAHLIG, P. (1974), *Arch. Met. Geophys. Biokl. (Wien)*, Ser. A, 23, S. 161
- KAULA, W.M. (1979), *J. Geophys. Res.* 84, S. 999
- KAUTZLEBEN, H.; STILLER, H. (1975), In: *Physik des Planeten Erde*, herausgegeben von R. Lauterbach, Akademie-Verlag Berlin, S. 154
- KEELER, G.J.; BATCHELDER, D.N. (1970), *J. Phys. C* 3, S. 510
- KEELER, R.N. (1972), In: *American Institute of Physics Handbook*, M. Zamansky (Herausgeber), 3. Auflage, McGraw-Hill, New York
- KENNEDY, G.C. (1972), In: *American Institute of Physics Handbook*, M. Zamansky (Herausgeber), 3. Auflage, McGraw-Hill, New York
- KENNEDY, G.C.; HIGGINS, G.A. (1973), *The Moon* 7, S. 14
- KENNETT, R.G. (1976), *Studies in appl. Math.* 55, S. 65
- KEONDJAN, V.P.; MONIN, A.S. (1977), *Tectonophysics* 41, S. 227
- KERRIDGE, J.F. (1977), *Space Sci. Rev.* 20, S. 3
- KIRBY, S.H.; RALEIGH, C.B. (1973), *Tectonophysics* 19, S. 165
- KITTEL, C. (1973), *Einführung in die Festkörperphysik*, Oldenbourg, München, 877 S.
- KÖLBEL, H. (1971), *Ber. deutsch. Ges. geolog. Wiss.*, Berlin A16, S. 221
- KONO, Y.; AMANO, M. (1978), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 54, S. 405
- KONO, Y.; TSUZUKI, T.; YAMAMOTO, A. (1979), *J. Phys. Earth* 27, S. 315
- KOPAL, Z. (1963), *Icarus* 1, S. 391
- KORMER, S.B.; SINITSYN, M.W.; FUNTIKOV, A.I. (1965), *Zhurnal eksper. teoret. fiz. (auf Russ.)* 20, S. 811
- KOSCHMIEDER, E.L. (1966), *Beiträge Phys. Atmosphäre* 39, S. 1
- KRAICHNAN, R.H. (1962), *Phys. Fluids* 5, S. 1374
- KRAUSE, F.; RÄDLER, K.-H. (1971), *Elektrodynamik der mittleren Felder in turbulenten leitenden Medien und Dynamotheorie*. In: *Ergebnisse der Plasmaphysik und der Gas-elektronik*, Bd. II, Herausgeber: R. Rompe und M. Steenbeck, S. 3



- KRAUT, E.A.; KENNEDY, G.C. (1966), *Phys. Rev.* 151, S. 668
- KRISHNAMURTI, R. (1973), *J. Fluid Mech.* 60, S. 285
- KUHLMANN-WILSDORF, D. (1965), *Phys. Rev.* 140, S. A 1599
- LANDAU, L.D.; LIFSCHITZ, E.M. (1966), *Lehrbüch der theoretischen Physik, Bd. V*, Akademie-Verlag Berlin, 527 S.
- LARIMER, J.W.; ANDERS, E. (1970), *Geochim. Cosmochim. Acta* 34, S. 367
- LEDERSTEGER, K. (1969), *Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung)*, Handbuch d. Vermessungskunde, V, 4. Lfg., Herausgeber: Jordan, Eggert, Kneissl; Metzlersche Verlagsbuchh. Stuttgart, S. 848
- LEE, C.M.; THORSOS, E.I. (1978), *Phys. Rev.* A17, S. 2073
- LEIBFRIED, G. (1950), *Z. Physik* 127, S. 344
- LEIBFRIED, G.; BREUER, N. (1978), *Point Defects in Metals I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- LEIBFRIED, G.; LUDWIG, W. (1961), *Solid State Phys.* 12, S. 275
- LePICHON, X.; FRANCHETEAU, J.; BONNIN, J. (1973), *Plate Tectonics*, Elsevier, Amsterdam-London-New York, 300 S.
- LEPPALUOTO, D.A. (1972), *Phys. Earth Planet. Inter.* 6, S. 175
- LEWIS, J.S. (1971), *Earth Planet. Sci. Lett.* 11, S. 130
- LIDIARD, A.B. (1974), In: March, N.H. (Herausgeber), *Orbital Theories of Molecules and Solids*, Clarendon Press, Oxford
- LINCK, G. (1923), *Grundriß der Kristallographie*, Verlag Gustav Fischer, Jena
- LINDEMANN, F.A. (1910), *Z. Physik* 11, S. 609
- LIU, L.; BASSETT, W.A.; TAKAHASHI, T. (1974), *J. Geophys. Res.* 79, S. 1160
- LIU, L.-G. (1975), *Geophys. J.R. astr. Soc.* 43, S. 697
- LOJE, K.F.; SCHUELE, D.E. (1970), *J. Phys. Chem. Solids* 31, S. 2051
- LOPER, D.E. (1978a), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 54, S. 389
- LOPER, D.E. (1978b), *J. Geophys. Res.* 83, S. 5961
- LOPER, D.E.; ROBERTS, P.H. (1978), *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* 9, S. 289
- LORENZ, E.N. (1963), *J. Atmos. Sci.* 20, S. 130
- LORTZ, D. (1968), *Phys. Fluids* 11, S. 913
- LORTZ, D. (1972), *Z. Naturforschung*, 27a, S. 1350
- LUBIMOVA, E.A. (1967), In: *The Earth's Mantle*. Herausgeber: T.F. Gaskell, Academic Press, London-New York
- LYTTLETON, R.A. (1978), *Moon and Planets* 19, S. 425
- LYUSTIKH, E.N. (1948), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 59, S. 1417
- MacDONALD, G.J.F. (1963), *Rev. Geophys.* 1, S. 587
- MacDONALD, J.R. (1969), *Rev. mod. Phys.* 41, S. 316
- MACKENZIE, J.K.; MOTT, N.F. (1950), *Proc. Phys. Soc.* 63, S. 411
- MAGNITSKY, V.A. (1952), *Voprosy Kosmogonii, Moskau* 1, S. 1
- MAGNITSKY, V.A. (1969a), In: *Struktur und Formen der Materie*, Deut. Verlag der Wiss., Berlin, S. 272

- MAGNITSKY, V.A. (1969b), In: *The Earth's Crust and Upper Mantle*, Am. Geophys. Un., Washington, S. 676
- MALKUS, W.V.R. (1972), *Mem. Soc. Roy. Sci. Liège*, 6th ser., 4, S. 125
- MAKALKIN, A.B. (1980), *Phys. Earth Planet. Int.* 22, S. 302
- MAO, N. (1970), *J. Geophys. Res.* 75, S. 7508
- MAO, H.; BASSETT, W.A.; TAKAHASHI, T. (1969), *J. Geophys. Res.* 74, S. 1061
- MARCH, N.H. (1974), In: March, N.H. (Herausgeber), *Orbital Theories of Molecules and Solids*, Clarendon Press, Oxford
- MARTIN, C.J.; O'CONNOR, D.A. (1977), *J. Phys. C: Solid State Phys.* 10, S. 3521
- MATSUDA, H.; HIWATARI, Y. (1973), In: H. Haken; M. Wagner (Herausgeber), *Cooperative Phenomena*, Springer-Verlag, Berlin, S. 250
- MAUERSBERGER, P. (1959), *Mathematische Beschreibung und statistische Untersuchung des Hauptfeldes und der Säkularvariation*. In: Fenselau, G. (Herausgeber), *Geomagnetismus und Aeronomie*, Bd. III, Berlin
- MAUERSBERGER, P. (1975), *Acta Hydrophysica (Berlin)*, 20, S. 37
- McBIRNEY, A.R.; MURASE, T. (1970), *Bull. volcanol.*, 34, S. 372
- McCONNELL, R.K. (1965), *J. Geophys. Res.* 70, S. 5171
- McCONNELL, R.K. (1968), In: Phinney, R.A. (Herausgeber), *The History of the Earth's Crust*, Princeton Univ. Press, S. 45
- McELHINNY, M.W. (1971), *Science* 171, S. 157
- McKENZIE, D.P. (1967), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 14, S. 297
- McKENZIE, D.P. (1977), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 48, S. 211
- McKENZIE, D.P.; WEISS, N.O. (1975), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 42, S. 131
- McKENZIE, D.P.; RICHTER, F.M. (1976), *Sci. Am.* 235, S. 72
- McKENZIE, D.; JARVIS, G. (1980), *J. Geophys. Res.* 85, S. 6093
- McQUEEN, R.G.; MARSH, S.P. (1960), *J. Appl. Phys.* 31, S. 1253
- MEISSNER, R.O.; VETTER, U.R. (1976), *Tectonophysics* 35, S. 137
- MIDHA, Y.R.; NANDA, V.S. (1975), *J. Applied Phys.* 46, S. 3710
- MIHALJAN, J.M. (1962), *Astrophys. J.* 136, S. 1126
- MILLER, R.A.; SCHUELE, D.E. (1969), *J. Phys. Chem. Solids* 30, S. 589
- MOFFATT, H.K. (1976), *Advances Appl. Mech.* 16, S. 119
- MOHAMMADIOUN, M.B. (1967), *Ann. Géophys., Paris* 23, S. 61
- MORLAND, L.W. (1974), *J. Geophys. Res.* 79, S. 357
- MULARGIA, F.; BOSCHI, E. (1979), *Phys. Earth Planet. Int.* 18, S. 13
- MUNK, W.H.; MacDONALD, G.J.F. (1960), *The Rotation of the Earth*, Cambridge Univ. Press
- MURTHY, V.R.; HALL, H.T. (1969), *Phys. Earth Planet. Inter.* 2, S. 276
- MYASNIKOV, V.P.; FADEYEV, V.E. (1980), *Modeli evolyutsii zemli i planet zemnoi gruppy, Itogi nauki i tekhniki*, Moskau, 232 S.
- NABARRO, F.R.N. (1948), *Strength of Solids*, The Physical Society, London
- NAGATA, T. (1970), *Phys. Earth Planet. Int.* 2, S. 311

- NAIRN, A.E.M. (1975), *Geolog. Rundschau* 64, S. 716
- NAKAMURA, K.; UYEDA, S. (1980), *J. Geophys. Res.* 85, S. 6419
- NAIAZI, M.; ANDERSON, D.L. (1965), *J. Geophys. Res.* 70, S. 4633
- NINOMIYA, T. (1978a), *J. Phys. Soc. Japan* 44, S. 263
- NINOMIYA, T. (1978b), *J. Phys. Soc. Japan* 44, S. 269
- NUR, A.; MAVKO, G. (1973), *Science* 183, S. 204
- OBERBECK, A. (1879), *Annalen der Physik und Chemie* 2, S. 271
- O'CONNELL, R.J. (1977), *Tectonophysics* 38, S. 119
- OGURA, H.; MATSUDA, H.; OGAWA, T.; OGITA, N.; UEDA, A. (1977), *Progress Theor. Phys.* 58, S. 419
- OLSZAK, G. (1978) (Herausgeber), *Z. Geol. Wiss., Berlin* 6, S. 1291
- O'NIONS, R.K.; EVENSEN, N.M.; HAMILTON, P.J. (1979), *J. Geophys. Res.* 84, S. 6091
- OROWAN, E. (1965), *Convection in a Non-Newtonian Mantle, Continental Drift and Mountain Building*. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* A258, S. 284
- OROWAN, E. (1967), *Geophys. J. R. astron. Soc.* 14, S. 191
- PALM, E. (1975), *Annual Rev. Fluid Mech.* 2, S. 39
- PAN'KOV, V.L.; KALININ, V.A. (1974), *Fizika Zemli (auf Russ.)* No. 3, S. 3
- PAN'KOV, V.L.; ULLMANN, W. (1979), *Pure Appl. Geophysics* 117, S. 1001
- PARMENTIER, E.M. (1978), *J. Fluid Mech.* 84, S. 1
- PARMENTIER, E.M.; TURCOTTE, D.L.; TORRANCE, K.E. (1975), *J. Geophys. Res.* 80, S. 4417
- PARMENTIER, E.M.; TURCOTTE, D.L.; TORRANCE, K.E. (1976), *J. Geophys. Res.* 81, S. 1839
- PELTIER, W.R.; ANDREWS, J.T. (1976), *Geophys. J. R. astron. Soc.* 46, S. 605
- PEREZ-ALBUERNE, E.A.; DRICKAMER, H.G. (1965), *J. Chem. Phys.* 43, S. 1381
- PERROT, F. (1979a), *Phys. Rev.* A20, S. 586
- PERROT, F. (1979b), *Physica* 98A, S. 555
- PHILLIPS, J.C. (1969), *Phys. Rev. Letters* 22, S. 705
- PHILLIPS, R.J.; IVINS, E.R. (1979), *Phys. Earth Planet. Int.* 19, S. 107
- PITT, G.D.; TOZER, D.C. (1970), *Phys. Earth Planet. Int.* 2, S. 179
- PLENDL, J.N. (1974), *Phys. Stat. Sol. (b)*, 63, S. 519
- PLENDL, J.N.; GIELISSE, P.J.M. (1969), *Compressibility and Polymorphism of Solids*, AFCL-69-0429, *Phys. Sci. Res. Papers*, No. 395
- PLENDL, J.N.; GIELISSE, P.J.M. (1970), *Phys. Stat. Sol.* 42, S. 681
- PLENDL, J.N.; GIELISSE, P.J.M. (1972), *Phys. Stat. Sol. (b)*, 53, S. 457
- POST, R.L., Jr. (1973), *The flow laws of Mt. Burnett dunite*, Dissertation, Univ. California, Los Angeles
- POST, R.L., Jr.; GRIGGS, D.T. (1973), *Science* 181 (4106), S. 1242
- PRESS, F. (1970), *Phys. Earth Planet. Int.* 3, S. 3
- RAMAKRISHNAN, J.; BOEHLER, R.; HIGGINS, G.H.; KENNEDY, G.C. (1978), *J. Geophys. Res.* 83, S. 3535

- RAPP, R.H. (1968), *J. Geophys. Res.* 73, S. 6555
- RAU, H. (1976), *J. Phys. Chem. Solids* 37, S. 425
- RICE, A.R. (1971), *J. Geophys. Res.* 76, S. 1450
- RICE, A.; FAIRBRIDGE, R.W. (1975), *Tectonophysics* 29, S. 59
- RICE, M.H.; McQUEEN, R.G.; WALSH, J.M. (1958), In: *Solid State Physics*, F. Seitz, D. Turnbull (Herausgeber), Bd. 1, Academic Press, New York - London
- RICHTER, F.M. (1977), *Tectonophysics* 38, S. 61
- RICHTER, F.M. (1979), *J. Geophys. Res.* 84, S. 6783
- RICHTER, F.M.; DALY, S.F. (1978), *J. Geophys. Res.* 83, S. 4951
- RICHTER, F.M.; PARSONS, B. (1975), *J. Geophys. Res.* 80, S. 2529
- RICKARD, M.J.; BELBIN, L. (1980), *Tectonophysics* 63, S. 1
- RINGWOOD, A.E. (1971), *Phase transformations and mantle dynamics*. Dept. Geophys. Geochem., Austral. Nat. Univ., Publication 999, S. 1
- RINGWOOD, A.E. (1975), *Composition and Petrology of the Earth's Mantle*, McGraw-Hill, New York etc., 618 S.
- RINGWOOD, A.E. (1977), *Geochem. J.* 11, S. 111
- ROBERTS, P.H. (1971), *Dynamo theory*, Lect. in Appl. Math. 14, S. 129
- ROBERTS, R.W.; SMITH, C.S. (1970), *J. Phys. Chem. Solids* 31, S. 619
- RONOV, A.B. (1971), *Some general trends in the development of the oscillatory movements of continents*. In: *Problems of Geotectonics*. Gosgeoltekhizdat, Moscow, S. 118
- RONOV, A.B.; MIGDISOV, A.A.; BARSKAYA, N.V. (1969), *Some regularities in the development of sedimentary rocks and of the palaeogeographic conditions of sedimentation on the Russian platform*. *Litol. Polezn. Iskop.* 6, S. 3
- ROTTER, C.A.; SMITH, C.S. (1966), *J. Phys. Chem. Solids* 27, S. 267
- RUFF, L.; ANDERSON, D.L. (1980), *Phys. Earth Planet. Int.* 21, S. 181
- RUNCORN, S.K. (1962), In: *Continental Drift*, herausgegeben von S.K. Runcorn, Academic Press, New York
- RUNCORN, S.K. (1980), *Tectonophysics* 63, S. 297
- SAFRONOV, V.S. (1969), *Evoljutsiya doplanetnogo oblaka i obrazovaniye Zemli i planet*, Izd. Nauka, Moskau
- SAFRONOV, V.S. (1978), *Icarus* 33, S. 3
- SAGER, G. (1976), *Beiträge zur Meereskunde*, Berlin 37, S. 77
- SAMMIS, C.G. (1976), *Tectonophysics* 35, S. 169
- SAMMIS, C.G.; SMITH, J.C.; SCHUBERT, G.; YUEN, D.A. (1977), *J. Geophys. Res.* 82, S. 3747
- SCHATZ, J.F.; SIMMONS, G. (1972), *J. Geophys. Res.* 77, S. 6966
- SCHLOESSIN, H.H.; JACOBS, J.A. (1980), *Can. J. Earth Sci.* 17, S. 72
- SCHLÜTER, A.; LORTZ, D.; BUSSE, F. (1965), *J. Fluid Mech.* 23, S. 129
- SCHMIDT, P.W.; EMBLETON, B.J.J. (1981), *J. Geophysics* 49, S. 20
- SCHMIDT-THOMÉ, P. (1972), *Lehrbuch der Allgemeinen Geologie*, Bd. II, (Herausgeber: R. Brinkmann), Ferdinand Enke Verlag Stuttgart. 579 S.



- SCHMUTZER, E. (1974/5), *Exp. Techn. Physik*, 22, S. 485; 23, S. 1, 445
- SCHÖNENBERG, R. (1969), *Beihefte zum geolog. Jahrbuch, Hannover*, 80, S. 155
- SCHUBERT, G. (1979), *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* 7, S. 289
- SCHUBERT, G.; TURCOTTE, D.L. (1971), *J. Geophys. Res.* 76, S. 1424
- SCHUBERT, G.; YOUNG, R.E. (1976), *Tectonophysics* 35, S. 201
- SCHWAN, W. (1974), *Clausthaler Geolog. Abhandlungen* 17, S. 1
- SCHWINNER, R. (1919), *Z. f. Vulkanologie*, Berlin 5, S. 175
- SHARPE, H.N.; PELTIER, W.R. (1979), *Geophys. J. R. astr. Soc.* 59, S. 171
- SHAW, G.H. (1979), *Phys. Earth Planet. Int.* 20, S. 42
- SHIH, C.C. (1979), *Molecular Physics* 38, S. 1225
- SHOLPO, V.N. (1969), *Quantitative criteria of the regime of the vertical tectonic movements. Geotektonika* 2, S. 38
- SIRAG, S.-P. (1979), *Nature* 278, S. 535
- SLOSS, L.L. (1964), In: Merriam, D.F. (Herausgeber), *Symposium on cyclic sedimentation, State Geol. Surv. Kans. Bull.*, 169 (2), S. 449
- SMITH, P.A.; SMITH, C.A. (1965), *J. Phys. Chem. Solids* 26, S. 279
- SOLOMON, S.C. (1979), *Phys. Earth Planet. Int.* 19, S. 168
- SOMERSCALES, E.F.C.; DROPKIN, D. (1966), *Int. J. Heat Mass Transfer* 9, S. 1189
- SOROKHTIN, O.G. (1971), *Dokladi Akad. Nauk SSSR* 6, S. 198
- SPETZLER, H.; SAMMIS, C.G.; O'CONNELL, R.J. (1972), *J. Phys. Chem. Solids* 33, S. 1727
- SPIEGEL, E.A. (1972), *Annual Rev. Astron. Astrophys.* 10, S. 261
- SPIEGEL, E.A.; VERONIS, G. (1960), *Astrophys. J.* 131, S. 442
- SRNKA, L.J.; MERRILL, R.B. (Herausgeber) (1979), *Phys. Earth Planet. Int.* 20, No. 2-4
- STACEY, F.D. (1969), *Physics of the Earth*, Wiley, New York
- STACEY, F.D. (1972), *Geophysical Surveys* 1, S. 99
- STACEY, F.D. (1977a), *Phys. Earth Planet. Int.* 15, S. 341
- STACEY, F.D. (1977b), *Geophysical Surveys* 3, S. 175
- STACEY, F.D.; IRVINE, R.D. (1977a), *Aust. J. Phys.* 30, S. 631
- STACEY, F.D.; IRVINE, R.D. (1977b), *Aust. J. Phys.* 30, S. 641
- STILLE, H. (1924), *Grundfragen der vergleichenden Tektonik*, Borntraeger, Berlin, 443 S.
- STILLE, H. (1940), *Einführung in den Bau Amerikas*, Borntraeger, Berlin, 717 S.
- STILLE, H. (1950), *Geolog. Rundschau* 38, S. 91 und S. 108
- STILLER, H.; VOLAROVICH, M.P. (1979) (Herausgeber), *Theoretical and Experimental Investigations of Physical Properties of Rocks and Minerals under Extreme p, T-conditions*, Akademie-Verlag Berlin, 232 S.
- STISHOV, S.M. (1969), *Sov. Phys. Usp.* 11, S. 816
- STIX, M. (1977), *J. Geophys.* 43, S. 695
- STOCKER, R.L.; ASHBY, M.F. (1973), *Rev. Geophys. and Space Phys.* 11, S. 391



- STRAUS, J.M. (1972), *J. Fluid Mech.* 56, S. 353
- STRECKEISEN, A. (1970), *Schweiz. Mineral. Petr. Mitt.* 50, S. 551
- SYONO, Y.; GOTO, T.; NAKAI, J. (1974), Paper, 4th Int. Conference on High Pressure, Kyoto
- TAGGART, J.; ENGDahl, E.R. (1968), *Bull. Seis. Soc. Am.* 58, S. 1293
- TAKAHASHI, T.; BASSETT, W.A.; MAO, H. (1968), *J. Geophys. Res.* 73, S. 4717
- TAKEUCHI, H.; KANAMORI, H. (1966), *J. Geophys. Res.* 71, S. 3985
- TEISSEYRE, R. (1973), *Pure and appl. Geophys.* 102, S. 15
- TEISSEYRE, R. (1977), *Acta Geophys. Polonica* 25, S. 37
- TIKHOMIROVA, N.A.; STISHOV, S.M. (1962), *Zhurn. eksper. teoret. Fiz.* 43, S. 2321
- TIKHONOV, A.N.; LUBIMOVA, E.A.; VLASOV, V.K. (1970), *Phys. Earth Planet. Int.* 2, S. 326
- TIPPELSKIRCH, H.V. (1956), *Beiträge Phys. Atmosphäre* 29, S. 37
- THOMSEN, L. (1970), *J. Phys. and Chem. Solids* 31, S. 2003
- TOLLMANN, A. (1972), *Geolog. Rundschau* 61, S. 965
- TOZER, D.C. (1959), *Phys. Chem. Earth* 3, S. 414
- TOZER, D.C. (1967), In: *The Earth's Mantle*, herausgegeben von T.F. Gaskell, London, S. 325
- TOZER, D.C. (1974), *The Moon* 2, S. 167
- TRUBITSYN, V.P.; VASIL'EV, P.P.; KARASEV, A.A. (1979), *Fizika Zemli* 10, S. 3
- TRUESDELL, C. (1965), *Rational Mechanics of Deformation and Flow. Proc. 4th internat. Congr. on Rheology* S. 3
- TURCOTTE, D.L. (1979), *Rev. Geophys. Space Phys.* 17, S. 1090
- TURCOTTE, D.L.; HSUI, A.T.; TORRANCE, K.E.; SCHUBERT, G. (1974), *J. Fluid Mech.* 64, S. 369
- TURCOTTE, D.L.; OXBURGH, E.R. (1969), *J. Geophys. Res.* 74, S. 1458
- TURCOTTE, D.L.; TORRANCE, K.E.; HSUI, A.T. (1973), *Methods in Computational Physics* 13, S. 431
- TUREKIAN, K.; CLARK, S. (1969), *Earth Planet. Sci. Lett.* 6, S. 346
- TURNER, J.S. (1973), *Buoyancy effects in fluids*, Cambridge Univ. Press
- UPFEN, R.J. (1952), *Trans. Am. geophys. Un.* 33, S. 893
- ULLMANN, W.; PAN'KOV, V.L. (1976), *Veröff. Zentralinst. Physik d. Erde, Potsdam* 41, S.1
- ULLMANN, W.; WALZER, U. (1980a), *Phys. Earth Planet. Int.* 22, S. 204
- ULLMANN, W.; WALZER, U. (1980b), *Thermal Regime of the Earth's Outer Core, Pure Appl. Geophysics*, 119, S. 59
- UREY, H.C. (1952), *The Planets: Their Origin and Development*. Yale Univ. Press, New Haven, Conn., 285 S.
- USSELMAN, T.M. (1975), *Amer. J. Sci.* 267, S. 278 und 291
- VAIDYA, S.N.; KENNEDY, G.C. (1970), *J. Phys. Chem. Solids* 31, S. 2329
- VAIDYA, S.N.; KENNEDY, G.C. (1971), *J. Phys. Chem. Solids* 32, S. 951
- VAIDYA, S.N.; KENNEDY, G.C. (1972), *J. Phys. Chem. Solids* 33, S. 1377

- VANDERBORCK, G.; PLATTEN, J.K. (1974), *Int. J. Engng. Sci.* 12, S. 897
- VANĚK, J. (1966), *Stud. Geophys. Geod., Prag* 10, S. 350
- Van THIEL, M. (1966), *Compendium of Shock Wave Data. UCRL - 50108, Bd. 1, N.B.S., USA*
- VASHCHENKO, V.Ya.; ZUBAREV, V.N. (1963), *Sov. Phys. Solid State* 5, S. 653
- VELARDE, M.G.; PEREZ-CORDON, R. (1976), *J. Phys. (Paris)* 37, S. 177
- VENING MEINESZ, F.A. (1961), *Kon. Ned. Akad. Wet., Amsterdam* B64, S. 512
- VENING MEINESZ, F.A. (1962), In: *Continental Drift, Herausgeber: Runcorn, S.K., Academic Press, New York - London*, S. 145
- VERHOOGEN, J. (1965), *Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A*, 258, S. 276
- VERHOOGEN, J. (1973), *Phys. Earth Planet. Int.* 2, S. 47
- VESANEN, E.; TEISSEYRE, R. (1978), *Geophysica, Helsinki* 15, S. 147
- VETTER, U.R.; MEISSNER, R.O. (1977), *Tectonophysics* 42, S. 37
- VEZZOLI, G.C.; WALSH, P.J. (1977), *High Temp. High Press.* 2, S. 345
- VINE, F.J. (1968), In: *The History of the Earth's Crust. Herausgeber: Phinney, R.A., Princeton Univ. Press*
- VITJAZEV, A.V. (1980), *Phys. Earth Planet. Int.* 22, S. 289
- VITJAZEV, A.V.; MAJEVA, S.V. (1980), *Phys. Earth Planet. Int.* 22, S. 296
- VOGT, R.; EINWICH, A.; JOHNSON, G.L. (1972), *Trans. Am. Geophys. Un.* 52, S. 363
- VORONOV, F.F.; GONCHAROVA, V. (1972), *Sov. Phys.-Solid State* 13, S. 3146
- WALZER, U. (1970), *Vermessungstechnik (Berlin)* 18, S. 460
- WALZER, U. (1971), *Pure Appl. Geophysics* 87, S. 73
- WALZER, U. (1972), *Gerlands Beitr. Geophysik* 81, S. 471
- WALZER, U. (1973a), *Pure Appl. Geophysics* 105, S. 669
- WALZER, U. (1973b), *Pure Appl. Geophysics* 105, S. 696
- WALZER, U. (1973c), *Gerlands Beitr. Geophysik* 82, S. 267
- WALZER, U. (1974a), *Pure Appl. Geophysics* 112, S. 106
- WALZER, U. (1974b), *Pure Appl. Geophysics* 112, S. 96
- WALZER, U. (1974c), *Gerlands Beitr. Geophysik* 83, S. 319
- WALZER, U. (1975a), *Gerlands Beitr. Geophysik* 84, S. 43
- WALZER, U. (1975b), *Veröff. Zentralinst. Phys. Erde* 31, S. 107
- WALZER, U. (1976a), *Gerlands Beitr. Geophysik* 85, S. 43
- WALZER, U. (1976b), *Gerlands Beitr. Geophysik* 85, S. 137
- WALZER, U. (1976c), *Ann. Geof. (Rom)* 29, S. 181
- WALZER, U. (1977), *Gerlands Beitr. Geophysik* 86, S. 51
- WALZER, U. (1978a), *Gerlands Beitr. Geophysik* 87, S. 19
- WALZER, U. (1978b), *Z. Geol. Wiss. (Berlin)* 6, S. 1301
- WALZER, U. (1978c), *Proceedings of the Int. Conference on Core Dynamics, Budapest June 26 - July 1, 1978*

- WALZER, U. (1980a), Volume Dependence of Melting Temperature at High Pressure and its Relation to a New Dimensionless Quantity, *Exper. Technik Physik*, im Druck
- WALZER, U. (1980b), Patterns in New Dimensionless Quantities Containing Melting Temperature, and their Dependence on Pressure, *Ann. Geof. (Rom)*, im Druck
- WALZER, U. (1980c), A New Equation of State for High Compression, *Phys. Earth Planet. Int.*, im Druck
- WALZER, U.; MAAZ, R. (1981), On intermittent lower-mantle convection, *Tectonophysics*, im Druck
- WALZER, U.; ULLMANN, W.; PAN'KOV, V.L. (1979), *Phys. Earth Planet. Int.* 18, S. 1
- WALZER, U.; VITYAZEV, A.V. (1975), *Gerlands Beitr. Geophysik* 84, S. 406
- WANG, C.Y. (1972), *Geophys. J. R. astron. Soc.* 27, S. 29
- WASSERBURG, G.J.; MacDONALD, G.J.F.; HOYLE, F.; FOWLER, W.A. (1964), *Science* 143, S. 465
- WATSON, P. (1968), *J. Fluid Mech.* 32, S. 399
- WEAVER, J.C. (1971), *Nat. Bur. Stand. U.S., Spec. Publ.* 326
- WEERTMAN, J. (1970), *Rev. Geophys. Space Phys.* 8, S. 145
- WEERTMAN, J. (1978), *Phil. Trans. R. Soc. London* A288, S. 9
- WEERTMAN, J.; WEERTMAN, J.R. (1975), *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* 3, S. 293
- WEIZSÄCKER, C.F.v. (1935), *Z. Phys.* 96, S. 431
- WEGENER, A. (1920), *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane*. Vieweg, Braunschweig, 1. Aufl.
- WESSON, P.S. (1978), *Cosmology and Geophysics*, Adam Hilger, Bristol, 240 S.
- WHITEHEAD, J.A.; CHAN, G.L. (1976), *Dyn. Atmosph. and Oceans* 1, S. 33
- WHITEHEAD, J.A.; PARSONS, B. (1978), *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 9, S. 201
- WHYTE, M.A. (1977), *Nature* 267, S. 679
- WIGNER, E.P. (1934), *Phys. Rev.* 46, S. 1002
- WOLFERSDORF, L.v. (1975), *Z. Angew. Math. und Mechanik* 55, S. 353
- YOUNG, R.E. (1974), *J. Fluid Mech.* 63, S. 695
- ZEBIB, A.; SCHUBERT, G.; STRAUS, J.M. (1980), *J. Fluid Mech.* 97, S. 257
- ZHARKOV, V.N.; KALININ, V.A. (1971), Equation of state for solids at high pressures and temperatures (übersetzt aus dem Russ.), *Consultants Bureau*, New York
- ZHARKOV, V.N.; TRUBITSYN, V.P.; SAMSONENKO, L.V. (1971), *Fizika Zemli i Planet*, Nauka, Moskau
- ZHARKOV, V.N.; TRUBITSYN, V.P.; TSAREVSKII, I.A. (1975), *Veröff. Zentralinst. Physik d. Erde* 31, S. 19

#### Bemerkung

Wegen der Länge der Arbeit weicht die Numerierung der Abbildungen und Tabellen ausnahmsweise von der in den Veröffentlichungen des ZIPE geübten Praxis etwas ab: Beides wurde innerhalb jedes Kapitels numeriert. Z. B. Abb. 4.1 bedeutet die erste Abbildung im vierten Kapitel. Aus demselben Grunde wurde im Literaturverzeichnis bei in Zeitschriften erschienenen Arbeiten der Titel der Artikel weggelassen.

