

**AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR**  
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften  
**ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE**

---

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde  
Nr. 103

# **Bestimmung geodynamischer Parameter mit Hilfe satellitengeodätischer Verfahren**

von  
Gerd Gendt

(leicht veränderte Fassung der  
am 15. März 1988  
bei der Akademie der Wissenschaften der DDR  
verteidigten Dissertation B)

Herausgeber: Der Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde  
Potsdam

---

Als Manuskript gedruckt  
Potsdam 1989

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	5
Summary	5
Резюме	6
Vorwort	7
1. Einleitung	8
2. Die Aufgabenstellung der dynamischen Satellitengeodäsie	10
3. Verschiedene Formen der Bewegungsgleichung für die Anwendung in der Satellitengeodäsie	14
4. Numerische Integrationsverfahren in der Satellitengeodäsie	27
4.1. Allgemeine Betrachtungen	28
4.2. Mehrschrittverfahren	32
4.2.1. Mehrschrittverfahren auf der Basis der Quadraturformeln	34
4.2.1.1. ADAMS-Verfahren mit fester Schrittweite	35
4.2.1.2. Verfahren mit variabler Schrittweite	37
4.2.2. Mehrschrittverfahren auf der Basis von TAYLOR-reihenentwicklungen	40
4.2.2.1. COWELL-Verfahren	41
4.2.2.2. STÖRMER-COWELL-Verfahren	44
4.2.3. Startprozedur bei Mehrschrittverfahren	46
4.3. Einschrittverfahren	47
4.3.1. RUNGE-KUTTA-Verfahren	47
4.3.2. Verfahren von EVERHART	49
4.4. Interpolation	52
4.5. Vergleich numerischer Verfahren	53
5. Referenzsysteme und ihre Realisierung	65
5.1. Inertialsystem (CIS)	65
5.2. Terrestrisches Referenzsystem (CTS)	68
5.3. Transformation zwischen CTS und CIS	70
5.3.1. Allgemeine Betrachtungen zu den Transformationen	70
5.3.2. Durchführung der Transformationen	74
5.4. Fehlerbetrachtungen	81

6.	Bahnmodellierung künstlicher Erdsatelliten, differenzielle Bahnverbesserung und Parameterbestimmung (POTSDAM-5)	84
6.1.	Verwendete Konstanten und Parameter	84
6.2.	Referenzsysteme, Positionen von Mond und Sonne	85
6.3.	Reduktion der Laserentfernungsmessung	87
6.4.	Numerische Integration der Satellitenbewegungsgleichung und der Variationsgleichungen	88
6.5.	Berechnung der auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen	91
6.5.1.	Darstellung der Gravitation der Erde	92
6.5.2.	Gravitation von Mond und Sonne	94
6.5.3.	Gezeiten der festen Erde	95
6.5.3.	Meeresgezeiten	96
6.5.5.	Nichtgravitative Störungen	97
6.6.	Berechnung der partiellen Ableitungen	98
6.6.1.	Partielle Ableitungen für Bahnparameter	99
6.6.2.	Partielle Ableitungen für Stations- und Polkoordinaten sowie Zeit und Erdrotation	99
6.6.3.	Partielle Ableitungen für weitere geodynamische Parameter	101
6.7.	Parameterschätzung	101
6.8.	Methode der fiktiven Meßwerte	105
6.9.	Aspekte der rechentechnischen Realisierung	105
7.	Relativistische Effekte und Einfluß kleiner Störungen auf LAGEOS	109
7.1.	Relativistische Effekte bei der Satellitenbahnmodellierung und in der Reduktion von Laserentfernungsmessungen	109
7.2.	Kleine Störungen in der Bahn des Satelliten LAGEOS	125
7.2.1.	Gravitativer Einfluß der Planeten	125
7.2.2.	Nichtgravitative Störungen	127
8.	Bestimmung geodynamischer Parameter	131
8.1.	Beschreibung von verwendeten Daten und Bewertungsmethoden	131
8.2.	Zur Genauigkeit der Bahnmodellierung einschließlich Ephemeridenberechnung und der Stationskoordinatenbestimmung	140
8.2.1.	Bahnmodellierung und Ephemeridenberechnung für den Satelliten LAGEOS	140
8.2.2.	Zur Genauigkeit der Stationskoordinatenbestimmung	143

8.3.	Untersuchungen zur Bestimmung von Gezeitenparametern	145
8.3.1.	Allgemeines	145
8.3.2.	Modellierung der Gezeiteneffekte	146
8.3.2.1.	Deformation der Erdoberfläche	146
8.3.2.2.	Gravitativer Einfluß der Gezeiten auf Satelliten	147
8.3.2.3.	Auftretende Frequenzen und Amplituden	151
8.3.3.	Ergebnisse zur Bestimmung geometrischer Gezeiteneffekte mit kosmischen Verfahren	153
8.3.3.1.	Analyse des internationalen Standes	153
8.3.3.2.	Untersuchungen zur Bestimmung der LOVEschen Zahl $h_2$	156
8.3.4.	Ergebnisse zur Bestimmung gravitativer Gezeitenparameter mit Hilfe von Satellitendaten	165
8.3.4.1.	Analyse des internationalen Standes	165
8.3.4.2.	Untersuchungen zur Bestimmung der gravitativen Gezeitenparameter	167
8.4.	Untersuchungen zur Bestimmung von Erdorientierungsparametern	173
8.4.1.	Erdrotationsparameter	173
8.4.2.	Nutation	182
8.5.	Zur Bestimmung von Parametern des Geopotentials	187
8.5.1.	Allgemeine Bemerkungen	187
8.5.2.	Die geozentrische Gravitationskonstante GM	188
8.5.3.	Die niederen Harmonischen des Geopotentials	192
9.	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	194
10.	Literaturverzeichnis	197



## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Methoden und Technologien zur Auswertung von Laserentfernungsmessungen zu künstlichen Erdsatelliten für die Bestimmung geodätischer und geodynamischer Parameter beschrieben, wie sie im Programmsystem POTSDAM-5 realisiert sind.

Für die Modellierung der Bahn des hier betrachteten Satelliten LAGEOS ist es wichtig, das cm-Niveau anzustreben, um die erreichte Meßgenauigkeit von wenigen Zentimetern für die Bestimmung der gesuchten Parameter voll auszuschöpfen. Eine Reihe von durchgeführten Analysen zeigt die Leistungsfähigkeit von POTSDAM-5, sowohl hinsichtlich der erreichten Genauigkeiten als auch des Parameterumfangs. Neben kürzeren Betrachtungen zu Fragen der Bahnmodellierung, Ephemeridenberechnung und Stationskoordinatenbestimmung bilden Probleme der Bestimmung von Gezeitenparametern den Schwerpunkt. Unter Verwendung der LAGEOS-Daten von September 1983 bis Mai 1985 werden für die LOVEschen Zahlen die Resultate  $h_2 = 0,598 \pm 0,012$  und  $l_2 = 0,092 \pm 0,009$  erhalten. Eine erste Ausgleichung für Parameter der Meeresgezeiten ergab für die  $M_2$ -Tide  $\overset{+}{C}_{22} = 3,28 \pm 0,03$  cm,  $\overset{+}{\epsilon}_{22} = 319 \pm 0,39^\circ$ . Weiterhin wird auf Probleme bei der Bestimmung von Erdorientierungsparametern eingegangen, wobei eine etwas ausführlichere Untersuchung von UT1 erfolgt. Auch das Problem der Schwerefeldbestimmung wird angeschnitten. Für die geozentrische Gravitationskonstante wurde der Wert  $GM = 398600,441 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  erhalten.

## Summary

In this publication methods and technologies for the analysis of satellite laser ranging data are presented, which are implemented in the orbital program system POTSDAM-5 and can be used for the determination of geodetical and geodynamical parameters.

The cm-level in the orbital modelling of the satellite LAGEOS is an important prerequisite to get an accuracy for the adjusted parameters which corresponds to the high measurement-precision of a few centimeters. A number of analyses demonstrated the power of POTSDAM-5 both with respect to the reached accuracy and the set of parameters. There are some short considerations to the pro-

blems of orbital modelling, satellite ephemerides and determination of station coordinates. In more detail problems concerning the adjustment of tidal parameters are discussed. Using the LAGEOS data from September 1983 to May 1985 the following results for the LOVE numbers,  $h_2 = 0,598 \pm 0,012$  and  $l_2 = 0,092 \pm 0,009$ , were obtained. A first adjustment of ocean tidal parameters yielded for the tidal constituent  $M_2$  the values  $\hat{C}_{22}^+ = 3,28 \pm 0,03$  cm,  $\epsilon_{22}^+ = 319 \pm 0,39^\circ$ . Additionally problems connected with the determination of earth orientation parameters are discussed, where in more detail the determination of UT1 is investigated. Also some comments on the adjustment of geopotential parameters are given. For the geocentric gravitational constant the value  $GM = 398600.441 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  was derived.

### Резюме

В представленной работе описаны методы и технология обработки лазерных измерений расстояний до ИСЗ с целью определения геодезических и геодинамических параметров, а также их реализация в комплексе программ ПОТСДАМ-5.

При моделировании орбиты рассматриваемого в работе спутника ЛАГЕОС важным является стремление к уровню точности в пределах сантиметра, для того чтобы полностью использовать достигнутый уровень точности измерений (в пределах нескольких сантиметров) для определения искоемых параметров. Ряд проведенных исследований показал работоспособность программы ПОТСДАМ-5 как относительно достигнутой точности, так и объема параметров. Наряду с кратким рассмотрением вопросов моделирования орбиты, вычисления эфемерид и определения координат станций, в центре внимания стоят проблемы определения параметров приливов. С использованием данных ЛАГЕОСа с сентября 1983 г. до мая 1985г. получены результаты для чисел Лява  $h_2 = 0.598 \pm 0,012$  и  $l_2 = 0,092 \pm 0,009$ . Первое выравнивание параметров морских приливов дало для  $M_2$ :  $\hat{C}_{22}^+ = 3,28 \pm 0,03$  см,  $\epsilon_{22}^+ = 319 \pm 0,39^\circ$ . Далее рассматриваются проблемы определения параметров ориентирования Земли, при этом делается более детальное исследование UT1. Кроме того, затрагиваются вопросы определения поля силы тяжести. Для геоцентрической гравитационной константы получено значение  $GM = 398600,441 \text{ км}^3 \text{ с}^{-2}$

V O R W O R T

Die in dieser Arbeit dargelegten Ergebnisse sind während einer langjährigen Tätigkeit auf dem Gebiet der Satellitengeodäsie gewonnen worden.

Im Verlaufe der letzten zehn Jahre wurden vom Autor das Satellitenbahnprogrammsystem POTSDAM-4 für die Rechenanlage BESM-6 sowie davon ausgehend eine wesentlich verbesserte und erweiterte Version POTSDAM-5 für den Rechner ES 1040 geschaffen und damit die langjährige Potsdamer Tradition auf dem Gebiet der analytischen Satellitenbahnmodellierung unter der Nutzung numerischer Integrationsverfahren fortgesetzt.

Mein Dank gilt dem Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde, Prof. Dr. H. KAUTZLEBEN, für die Möglichkeit, die vorliegende Arbeit in diesem Institut anfertigen zu können.

Für die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit sei der staatlichen Leitung, insbesondere meinem Abteilungsleiter Prof. Dr. H. MONTAG, gedankt. Weiterhin gilt der Dank allen Mitarbeitern der Abteilung Satellitengeodäsie, die durch ihre Arbeit die Voraussetzung für das Entstehen dieser Dissertation geschaffen haben. Besonders hervorheben möchte ich Frau W. SOMMERFELD, die mit großer Einsatzbereitschaft und Umsicht einen großen Teil der EDV-Arbeiten durchgeführt hat.

Wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit hat die gegenseitig stimulierende Zusammenarbeit mit Dr. R. DIETRICH in den letzten Jahren beigetragen, aus der eine Vielzahl gemeinsamer Publikationen hervorgegangen ist.

## 1. Einleitung

Seit Beginn der kosmischen Ära nutzt die Geodäsie in ständig wachsendem Maße künstliche Erdsatelliten zur Lösung ihrer Aufgaben. Konnte die Satellitengeodäsie in den ersten zwei Jahrzehnten seit dem Start von Sputnik 1 wesentlich zum Fortschritt bei der Bestimmung von Figur und Schwerefeld der Erde beitragen, so wird durch die heutige Erschließung des Genauigkeitsbereiches von  $10^{-8}$  bis  $10^{-9}$  die Möglichkeit eröffnet, zeitlich variable Phänomene im regionalen und globalen Maßstab zu messen. Hierzu zählen tektonische Plattenbewegungen, Erdrotations- und Gezeitenparameter. Die neuen Potenzen konnten vor allem durch eine stürmische Entwicklung der Meßverfahren und Auswertemethoden erreicht werden. Gegenwärtig sind Laserradar-Verfahren im Einsatz, die Entfernungen zu künstlichen Erdsatelliten und zum Mond mit einer Genauigkeit von wenigen Zentimetern ermöglichen. Es besteht daher die Notwendigkeit, Auswertemodelle zu schaffen, die diese hohe Genauigkeit für die abzuleitenden Parameter voll ausschöpfen. Solche Modelle haben beim Übergang auf das cm-Niveau einen sehr komplexen Charakter. Sie umfassen Probleme der Satellitenbahnberechnung, Parameterbestimmung, Modellansätze und Auswertestrategien. Neben qualitativen Überlegungen und analytischen Betrachtungen sind auch praktische Tests und Untersuchungen mit simulierten und realen Daten erforderlich.

Das am Zentralinstitut für Physik der Erde geschaffene Satellitenbahnprogrammsystem POTSDAM-5 bildet die Grundlage aller satellitengeodätischen Arbeiten. Es ist in der Lage, die durch unterschiedlichste Meßverfahren gewonnenen Daten zur Bestimmung geodätischer und geodynamischer Parameter zu nutzen. Die Modellierungsgenauigkeit ist so angelegt, daß auch den zukünftigen Anforderungen Rechnung getragen werden kann. Die Software hat sich bei einer Reihe von nationalen und internationalen Projekten gut bewährt.

Alle grundlegenden Probleme im Zusammenhang mit der Schaffung dieses Programmsystems werden in der vorliegenden Arbeit behandelt. Auf Fragen der geodynamischen Parameterbestimmung wird ausführlicher eingegangen.

Die Basis für alle Arbeiten bildet ein präzises terrestrisches Referenzsystem. Daher stellt die Ableitung globaler Stationskoordinaten ein grundlegendes Problem dar, das umfassend behandelt

werden muß, einschließlich Fragen der zeitlichen Variationen der Stationskoordinaten durch Gezeiten und Tektonik. Darauf aufbauend sind die Effekte der Geodynamik zu erforschen. Zu diesem Thema hat der Autor gemeinsam mit Dr. R. DIETRICH einen umfassenden, die Arbeit mehrerer Jahre einbeziehenden Forschungsbericht mit dem Thema "Erweiterte Modellbildung und Parameterbestimmung bei dynamischen Satellitenmethoden" im September 1986 vorgelegt. Auf diesem Bericht basieren wesentliche Teile der vorliegenden Arbeit, vor allem die vorgestellten Datenanalysen. Schwerpunkte bilden die Bahnmodellierung und die Bestimmung geodynamischer Parameter, insbesondere Gezeitenparameter.

Ein zentrales Problem der Satellitengeodäsie stellt die Modellierung der Satellitenbewegung dar. Für ein wohldefiniertes Referenzsystem sind Bewegungsgleichungen aufzustellen und zu integrieren. Diesem Problemkreis sind die Kapitel 3., 4., 5. gewidmet. Darin werden verschiedene Formen der Bewegungsgleichung diskutiert, eine Reihe von für satellitengeodätische Probleme günstigen numerischen Integrationsverfahren vorgestellt und ein Vergleich ihrer Leistungsfähigkeit durchgeführt.

Im 6. Kapitel wird der theoretische Hintergrund des Satellitenbahnprogramms POTSDAM-5, insbesondere bezogen auf die die Satellitenbewegung beeinflussenden Kräfte, behandelt. Die Software hat sich bei einer Reihe von nationalen und internationalen Projekten gut bewährt.

Einige kleinere, heute noch nicht berücksichtigte Effekte (ausgenommen bei speziellen Untersuchungen), wie relativistische Störungen sowie schwache gravitative und nichtgravitative Kräfte, werden im 7. Kapitel behandelt und für die eventuelle Einbeziehung in das Satellitenbahnmodell aufbereitet.

Im 8. Kapitel werden Datenanalysen sowohl mit simulierten als auch realen Daten vorgestellt. Die realen Daten sind die dem Zentralinstitut für Physik der Erde (ZIPE) als Hauptanalysezentrum für die Methode der Laserentfernungsmessungen zu künstlichen Erdsatelliten im Rahmen der MERIT-Kampagne (Monitoring of Earth Rotation and Intercompare the Techniques of observation and analysis) zur Verfügung gestellten Daten. Neben der schwerpunktmäßig behandelten Gezeitenproblematik wird wegen der Aktualität im Zusammenhang mit den ab 1988 auf der Basis moderner kosmischer Verfahren neu zu organisierenden Erdrotationsdiensten die Bestimmung der erdgebundenen Zeit UT1 unter Nutzung des Satelliten LAGEOS untersucht.

Auf Grund der routinemäßigen Nutzung von POTSDAM-5 im Rahmen nationaler und internationaler Projekte und zu schaffender Dienste bilden alle ökonomisch-technologischen Aspekte der Datenauswertung ein wesentliches Problem. Das betrifft einerseits die Minimierung der Rechenzeit unter Sicherstellung der geforderten Genauigkeit, andererseits auch die Entwicklung einer Gesamttechnologie der Datenauswertung mit Optimierung aller notwendigen Einzelschritte.

## 2. Die Aufgabenstellung der dynamischen Satellitengeodäsie

Die Satellitengeodäsie nutzt künstliche, die Erde umkreisende Satelliten zur Bestimmung der Geometrie der Erdoberfläche und des Schwerfeldes sowie deren zeitlichen Variationen. Im Unterschied zu den geometrischen Methoden, bei denen der Satellit nur als simultan anzumessendes Hochziel eine Rolle spielt, verwenden die dynamischen Methoden (die dynamische Satellitengeodäsie) eine Modellierung der Satellitenbewegung. Eingesetzte Meßprinzipien sind Messungen von Stationen auf der Erde zum Satelliten, vom Satelliten zur Meeresoberfläche für eine Berechnung des Geoids sowie Messungen von Satellit zu Satellit. Zur Auswertung satellitengeodätischer Messungen wurde das Programmsystem POTSDAM-5 geschaffen. Es kann alle Meßverfahren, die von Stationen zu den Satelliten durchgeführt werden, auswerten. Hierzu zählen photographische Richtungsmessungen, Laserentfernungsmessungen, Messungen von Entfernungsdifferenzen nach dem DOPPLER-Prinzip und durch Interferenzmethoden. Gegenstand dieser Arbeit soll nur das Lasermeßverfahren sein, so daß auf die anderen Verfahren und Prinzipien im weiteren nicht eingegangen werden soll (hierzu s. GENDT, 1984; BARTHELMES u. a., 1983; BORZA u. a., 1987).

Die gemessene Entfernung wird von einer Vielzahl von Parametern beeinflusst. Das sind zum einen alle Parameter, die für die Berechnung einer Stationsposition berücksichtigt werden müssen. Hierzu zählen die Erdrotation sowie die Lage der Rotationsachse im Erdkörper (Polbewegung) und im Raum (Präzision, Nutation). Da aufgrund der hohen geforderten Genauigkeit die Erde nicht als starrer Körper angesehen werden kann, muß die Veränderung der Stationsposition durch Gezeiten und sogar durch tektonische Einflüsse berücksichtigt werden. Zum anderen wird die Meßgröße von allen Parametern beeinflusst, die bei der Modellierung der Satellitenbewegung eine Rolle spielen (dynamische Parameter). Hierzu

zählen die Schwerfelder von Erde, Mond, Sonne und Planeten, die Atmosphäre und der Strahlungsdruck. Weiterhin beinhaltet der Meßwert noch zufällige und systematische Fehler durch die Gerätetechnik (z.B. Kalibrierung) und die Meßwertreduktion aufgrund des Einflusses von Atmosphäre und Ionosphäre.

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß in der Satellitengeodäsie eine sehr komplexe Problembehandlung erforderlich ist. Die Meßgrößen werden durch eine Vielzahl von Parametern beeinflußt. Die Genauigkeit der abzuleitenden Parameter hängt von der Genauigkeit bei der Modellierung aller Phänomene ab. Im Prinzip sind die Parameter, die die Meßgrößen beeinflussen, auch bestimmbar. Hier seien als erstes die Stationskoordinaten genannt. Die Koordinaten haben durch die Willkür in der Koordinatenachsenwahl zwar entsprechende Freiheitsgrade, invariant sind aber die relative Lage der Stationen zueinander (innere Geometrie

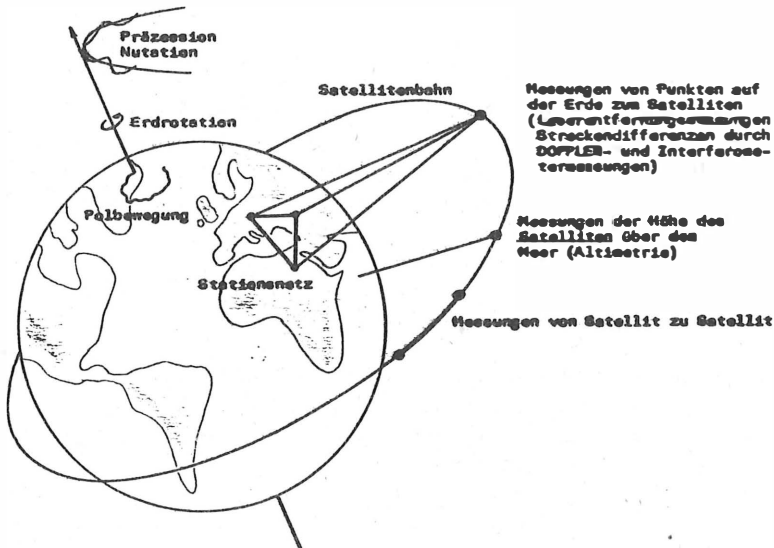


Abb. 2.1.: Überblick über satellitengeodätische Verfahren

von Stationsnetzen) und ihr Bezug auf die Rotationsachsenposition im Erdkörper und auf das Geozentrum. Weitere bestimmbare Parameter sind u. a. das Geopotential, die Gezeiten, die Polbewegung und die Erdrotation. Alle diese Parameter sind unter Anwendung verschiedener klassischer Meßverfahren schon immer Gegenstand der Geodäsie bzw. der geodätischen Astronomie. Durch die höhere Meßgenauigkeit der modernen satellitengeodätischen Verfahren, insbesondere der Laserentfernungsmessung auf wenige Zentimeter, ist hier eine Genauigkeitssteigerung um z.T. Größenordnungen zu verzeichnen. Es ist möglich und auch notwendig, weitere Parameter, wie rezente tektonische Bewegungen, im globalen Maßstab meßtechnisch zu erfassen und zu modellieren.

Das Programmsystem POTSDAM-5 ist in der Lage, neben den geodätischen und geodynamischen Parametern Bahnelemente der Satelliten, Uhrstände und Meßgeräteparameter zu berechnen.

Die Grundvoraussetzung aller Arbeiten in der dynamischen Satellitengeodäsie ist die Modellierung der Satellitenbewegung. Die Differentialgleichung zur Beschreibung der Satellitenbewegung wird im Inertialsystem aufgestellt und hat die Gestalt

$$(2.1) \quad \ddot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(t; \underline{x}, \dot{\underline{x}}, d_1, \dots, d_k)$$

mit den Anfangsbedingungen  $\underline{x}(t_0)$ ,  $\dot{\underline{x}}(t_0)$ . Hierbei sind die  $d_i$  die oben erwähnten Parameter, die die Satellitenbewegung beeinflussen. Diese Differentialgleichung wird mit Integrationsverfahren, an die höchsten Anforderungen hinsichtlich Genauigkeit und Effektivität gestellt werden müssen, gelöst. Die Entfernung von der Station zum Satelliten berechnet sich zu:

$$(2.2) \quad e = |\underline{x}(t, p_1, \dots, p_n) - \underline{X}(t, q_1, \dots, q_m)|,$$

wobei  $\underline{x}$  - geozentrischer Vektor zum Satelliten

$\underline{X}$  - geozentrischer Stationsvektor

$p_i$  - Parameter, die die Position des Satelliten beeinflussen

$p_i = d_i$  für  $i = 1, k$

$p_i$  für  $i = k+1, \dots, n$  sind die Komponenten von  $\underline{x}(t_0)$ ,  $\dot{\underline{x}}(t_0)$

$q_i$  - Parameter, die die Lage der Station beeinflussen

$t$  - Zeit



Die Differenz  $e_0 - e_C$  zwischen gemessener und berechneter Entfernung wird zur Parameterbestimmung herangezogen. Da ein kompliziertes Problem zu lösen ist, werden eine Linearisierung eingeführt und iterativ Zuschläge für vorgegebene Näherungswerte ermittelt:

$$(2.3) \quad \frac{\partial e_C}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_C}{\partial p_i} \Delta p_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial e_C}{\partial q_i} \Delta q_i = e_0 - e_C + v$$

(v - Verbesserungen (Residuen) aufgrund von Meß- und Modellverfahren).

Die partiellen Ableitungen für die Entfernung werden durch Projektion aus den Ableitungen für die Satelliten- und Stationsorte erhalten. Während  $\delta \underline{x} / \delta q_i$  einfache geometrische Beziehungen widerspiegeln, ist die Berechnung von  $\delta \underline{x} / \delta p_i$  i.a. komplizierter und basiert auf folgenden Überlegungen:

$$(2.4) \quad \frac{\partial \ddot{\underline{x}}}{\partial p_i} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial (\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{d})} \cdot \frac{\partial (\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{d})}{\partial p_i} ,$$

$$(2.5) \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \underline{x}}{\partial p_i} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial (\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{d})} \cdot \frac{\partial (\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{d})}{\partial p_i}$$

Durch zweifache Integration der Differentialgleichungen (2.5) (sogenannte Variationsgleichungen), die parallel mit der Bewegungsgleichung (2.1) gelöst werden, lassen sich die benötigten partiellen Ableitungen berechnen. Auf der Grundlage der Verbesserungsgleichung (2.3) werden Normalgleichungssysteme für die Bestimmung der Parameter aufgestellt. Dabei wird nach folgender Technologie verfahren: Für jede Station und jeden beobachteten Satellitendurchgang wird eine Normalgleichungsmatrix berechnet und in eine Datei gespeichert. Die Matrix umfaßt alle eventuell zu bestimmenden Parameter. In einem Nachverarbeitungsteil können verschiedene Auswertevarianten, basierend auf der erstellten Datei, abgearbeitet werden. So können Kriterien, wie zu berücksichtigende Stationen, Satellitendurchgänge, Parameter, Gewichte, Zeitintervalle u.a.m., an dieser Stelle variiert werden. Diese Technologie ermöglicht eine effektive Datenanalyse, da der rechenintensive Teil bis zur Ermittlung der Normalgleichungen nur einmal zu durchlaufen ist.

In den folgenden Kapiteln werden ausführliche Beschreibungen der einzelnen Problemkomplexe gegeben sowie eine Reihe von praktischen Anwendungen dargelegt.

### 3. Verschiedene Formen der Bewegungsgleichung für die Anwendung in der Satellitengeodäsie

Die Bewegung eines künstlichen Satelliten um die Erde wird als gestörtes Zweikörperproblem behandelt. Der Satellit übt dabei auf die Erde eine zu vernachlässigende Kraft aus. Zur Beschreibung der Bahn des Satelliten  $\underline{x}(t)$  ist das Anfangswertproblem

$$(3.1) \quad \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \ddot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}), \quad t \in [a, b]$$

$$\text{mit } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \quad t_0 = a, \\ \dot{\underline{x}}(t_0) = \dot{\underline{x}}_0$$

zu lösen. Die Funktion  $\underline{f}$  hat die Struktur

$$(3.2) \quad \underline{f}(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}) = \underline{g}(t, \underline{x}) + \underline{N}(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}),$$

$$(3.3) \quad \underline{g}(t, \underline{x}) = \underline{\text{grad}} U = - \frac{GM \underline{x}}{|\underline{x}|^3} + \underline{\text{grad}} V(t, \underline{x}),$$

$$\text{wobei } U = \frac{GM}{|\underline{x}|} + V(t, \underline{x}) \quad (\text{negatives Potential})$$

mit  $GM$  - Gravitationskonstante  $\cdot$  Erdmasse,  
 $V$  - Störpotential.

$\underline{g}(t, \underline{x})$  ist dabei der gravitative Anteil, der also nicht von  $\dot{\underline{x}}$  abhängt und durch ein Potential ausgedrückt werden kann.  $\underline{N}(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}})$  sind die nichtgravitativen Beschleunigungen, die beispielsweise durch Atmosphärenreibung, Strahlendruck etc. hervorgerufen werden. Sind  $V = 0$  und  $\underline{N} = 0$ , so liegt eine Bewegung um eine zentrale Punktmasse vor, die KEPLER-Bewegung (oder ungestörte Zweikörperbewegung) genannt wird. Bei Satellitenbewegungen um die Erde liegt die Zentralbeschleunigung etwa drei Größenordnungen über allen anderen Einflüssen auf den Satelliten. In diesem Sinne spricht man bei  $V$  bzw.  $\underline{N}$  vom Störpotential bzw. von der Störbe-

schleunigung.

Jede elliptische Lösung (d.h. Energie  $h < 0$ ) der NEWTONschen Bewegungsgleichung (3.1) ist instabil im Sinne von LJAPUNOW, d.h., es existiert für die Lösungen  $\underline{x}$ ,  $\tilde{x}$  kein  $\delta > 0$

$$\text{mit } |\underline{x}(t_0) - \tilde{x}(t_0)| < \delta$$

$$\text{für das } |\underline{x}(t) - \tilde{x}(t)| < \epsilon \text{ für alle } t \text{ ist.}$$

Das kann leicht folgendermaßen am Beispiel einer kreisförmigen KEPLER-Bewegung veranschaulicht werden. Der Abstand des Satelliten vom Zentralkörper bestimmt aufgrund des 3. KEPLERSchen Gesetzes die Umlaufzeit. Zwei nahe beieinanderliegende Satelliten haben i.a. eine unterschiedliche Umlauffrequenz  $\Delta n$ , sofern ihre Radien verschieden sind. Ist die Differenz  $\Delta n$  auch beliebig klein, so wird  $\Delta n \cdot t$  beliebig groß, wenn  $t$  nur hinreichend groß wird.

Die Instabilität wirft besondere Probleme bei der numerischen Integration der Differentialgleichung auf. Nicht nur Fehler in den Anfangsbedingungen, sondern auch Verfahrensfehler, die bei der Konstruktion der Lösung entstehen, führen zu Abweichungen in der Umlauffrequenz und damit zu großen Fehlern bei längeren Zeitintervallen. Darum sind sehr hohe Genauigkeitsanforderungen an die anzuwendenden numerischen Integrationsverfahren zu stellen.

Das ungestörte Zweikörperproblem kann auf einfache Art durch Bahnelemente beschrieben werden. Unter einem Element sei dabei ein Parameter verstanden, der konstant ist oder linear von der Zeit abhängt. Die gebräuchlichsten Parameter sind die von KEPLER:

- |  |   |                                   |
|--|---|-----------------------------------|
| a - große Halbachse                                | } | Ellipsenformparameter             |
| e - Exzentrizität                                  |   |                                   |
| i - Neigung  | } | Lageparameter der Ellipse im Raum |
| $\Omega$ - Rektaszension des aufsteigenden Knotens |   |                                   |
| $\omega$ - Perigäumswinkel                         | } | Position in der Bahn              |
| $M, \nu$ - mittlere und wahre Anomalie             |   |                                   |

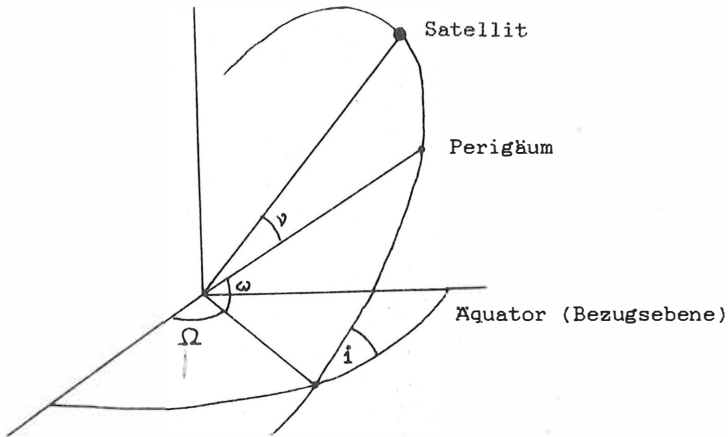


Abb. 3.1: KEPLERSche Bahnelemente

Die Darstellung der Satellitenbahn durch oskulierende KEPLERSche Bahnelemente wird in den klassischen LANGRANGESchen Störungsgleichungen verwendet. Sie haben folgenden Aufbau (ARNOLD 1970):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial M}, \\ \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial V}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial i}{\partial t} &= \gamma \cdot \cos i \frac{\partial V}{\partial \omega} - \gamma \frac{\partial V}{\partial \Omega}, \\ (3.4) \quad \dot{\Omega} &= \gamma \frac{\partial V}{\partial I}, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial V}{\partial e} - \gamma \cos i \frac{\partial V}{\partial I}, \\ \dot{M} &= n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial V}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial a}, \\ \text{wobei } \gamma &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i}, \quad n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \end{aligned}$$

Das Störpotential  $V$  umfaßt gravitative Störungen von Mond, Sonne und Planeten. Hierzu wurde eine Theorie entwickelt (KAULA, KOZAI), die es erlaubt, die Potentiale von Erde, Mond und Sonne als Funktion der Bahnelemente darzustellen. Für die nichtgravitativen Störungen, die nicht in Form eines Potentials ausgedrückt werden können, werden dann gesonderte Algorithmen angewandt. Dieser Formelapparat ist Grundlage einer umfassenden Theorie zur analytischen Berechnung der Satellitenbewegung.

Für die Verwendung in numerischen Integrationsverfahren ist die Darstellung der LAGRANGESchen Störungsgleichungen in der GAUSSschen Form besser geeignet. Sie basieren auf der Zerlegung der Störbeschleunigung in drei orthogonale Komponenten  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  (senkrecht zur Bahnebene, tangential und radial zur oskulierenden Bahn im Satellitenort). Dabei kann die Störbeschleunigung alle Beschleunigungskomponenten aufnehmen, gleich ob gravitative oder nichtgravitative Anteile. Weiterhin ist es nicht notwendig, die Beschleunigung als Funktion der Bahnelemente darzustellen. Da in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten gerechnet und das Ergebnis projiziert werden kann, sind die GAUSSschen Störungsgleichungen sehr anwendungsfreundlich und ermöglichen erst die Berücksichtigung kleinerer Effekte, wie beispielsweise Nutation und Präzession. Letztere Effekte erfordern zu komplizierte Formalismen in den LAGRANGESchen Gleichungen.

Bei Verwendung KEPLERScher Bahnelemente treten Singularitäten in den Störungsgleichungen für  $e = 0$  und  $i = 0$  auf. Darum wurde eine Reihe von Bahnelementen vorgeschlagen, die einige oder alle Singularitäten beseitigen (DELAUNEY, HILL). Da insbesondere bei den hier interessierenden geodätischen Satelliten nur die Singularität  $e = 0$  von Bedeutung ist, sind die einfach aufgebauten HILLSchen Variablen besonders interessant (s. LELGEMANN, 1979). Die Probleme mit Singularitäten für Werte spezieller Bahnelemente können umgangen werden, wenn die Rechnungen direkt in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten durchgeführt werden. Das hat weiterhin den Vorteil, daß die Verarbeitung verschiedener Meßwerte und Störbeschleunigungen ohne komplizierte Transformation in bestimmte Elemente erfolgen kann. Mit der zur Zeit vollzogenen Ablösung der analytischen durch die numerischen Integrationsverfahren, zumindest für hochpräzise Modellierungen, werden kartesische Koordinatensysteme am häufigsten verwendet.

Bei der numerischen Integration ist es oft günstig, konstante Schrittweiten  $\Delta t$  zu verwenden. Bei stärker exzentrischen Bahnen

führt das jedoch dazu, daß die entsprechenden Satellitenpositionen im Apogäum relativ dicht aufeinanderfolgen und im Perigäum größere Abstände auftreten, da die Satellitengeschwindigkeit dort am größten ist. Günstiger wäre es, wenn die Satellitenabstände überall annähernd gleich wären oder sogar im Perigäum etwas dichter, denn dort wird die Bahn am stärksten gestört. Dieser Forderung kann durch Transformation der Differentialgleichung (3.1) Genüge getan werden. Eine solche Transformation wird Zeitregularisierung oder analytische Schrittweitenregularisierung genannt. Sie ermöglicht es, zu konstanten Schrittweiten überzugehen, was vor allem bei Mehrschrittverfahren wichtig ist, aber sich auch bei Einschnittverfahren positiv auswirken kann. Durch die Substitution:

$$(3.5) \quad dt = r^\alpha ds, \text{ wobei } r = |\underline{x}|,$$

wird die Gleichung (3.1.) überführt in das System

$$(3.6) \quad \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} = \underline{x}''(s) = \underline{F}(s, \underline{x}, \underline{x}'),$$
$$t' = r^\alpha,$$

deren Lösung die Funktionen  $\underline{x}(s)$ ,  $\underline{x}'(s)$ ,  $t(s)$  liefern. Die verwendeten Werte von  $\alpha$  liegen zwischen 1 und 2, wobei im Falle von  $\alpha=1$  die Variable  $s$  der exzentrischen Anomalie und im Falle  $\alpha=2$  der wahren Anomalie entspricht. Je größer der Wert von  $\alpha$  ist, desto dichter liegen die Schritte im Perigäum. Günstige Werte von  $\alpha$  sind 1, 1,5 und 2 (NACOZY 1976; VELEZ 1975). Die zusätzliche Integration für die Zeit  $t(s)$  muß mit hoher Genauigkeit erfolgen. In der Regel hat der Meßwert, der mit der Bahnmodellierung in Beziehung gebracht werden soll, eine Genauigkeit in  $t$  von etwa  $1 \mu s$ . Bei Zeitintervallen von einigen Wochen entspricht das einer relativen Genauigkeit von  $10^{-12}$ , die die Integrationsmethode sichern sollte.

Die Regularisierung  $\alpha = 1$  soll etwas genauer betrachtet werden. Sie ist Ausgangspunkt für die LEVI-CIVITA-Transformation und deren 3-dimensionaler Verallgemeinerung, der KUSTANHEIMO-STIEFEL-Transformation (kurz KS-Transformation), die die nicht-lineare Differentialgleichung (3.1) für die KEPLER-Bewegung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

überführt (s. STIEFEL und SCHEIFELE, 1971). Mit der Substitution

$$(3.7) \quad dt = r \, ds$$

wird (3.1) zu

$$(3.8) \quad r \ddot{\underline{x}} - r' \dot{\underline{x}}' + GM \cdot \underline{x} = r^3 \cdot (\text{grad } V + \underline{N}),$$

$$t' = r .$$

Im weiteren werden noch Ausdrücke für die KEPLER-Energie  $h_K$  und die Gesamtenergie  $h$  benötigt:

$$(3.9) \quad h_K = \frac{|\dot{\underline{x}}|^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{|\dot{\underline{x}}'|^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} ,$$

$$(3.10) \quad h = h_K - V ,$$

$$(3.11) \quad \dot{h}_K = \dot{\underline{x}}^T \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} + \dot{\underline{x}}^T \underline{N} ,$$

$$(3.12) \quad \dot{h} = \dot{h}_K - \frac{dV}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{\underline{x}}^T \underline{N} .$$

Die KS-Transformation überführt den 3-dimensionalen Vektor  $\underline{x}$  in den 4-dimensionalen Vektor  $\underline{u}$ :

$$(3.13) \quad \begin{pmatrix} \underline{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{L}(\underline{u}) \underline{u}$$

mit

$$(3.14) \quad \underline{L}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} .$$

Es gelten nun folgende wichtige Eigenschaften:

$$(3.15) \quad \underline{L}^T(\underline{u}) \underline{L}(\underline{u}) = (\underline{u}^T \underline{u}) \underline{I}, \quad (\underline{I} \text{ Einheitsmatrix}),$$

$$(3.16) \quad r^2 = \underline{x}^T \underline{x} = (\underline{u}^T \underline{u})^2 ,$$

$$(3.17) \quad \underline{L}^{-1}(\underline{u}) = \underline{L}^T(\underline{u})/r ,$$

$$(3.18) \quad \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 0 \end{pmatrix} = 2\underline{L}(\underline{u}) \underline{u}' ,$$

$$(3.19) \quad |\underline{x}'|^2 = 4 r |\underline{u}'|^2 ,$$

$$(3.20) \quad \underline{L}(\underline{u})' = \underline{L}(\underline{u}') ,$$

$$(3.21) \quad \frac{\partial V}{\partial \underline{u}} = 2 \underline{L}^T(\underline{u}) \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Der Einfachheit halber wird das Argument  $\underline{u}$  der Matrix  $\underline{L}$  im folgenden weggelassen. Unter Anwendung obiger Relationen lassen sich die Ausdrücke für die Energie mit Hilfe des  $\underline{u}$ -Vektors darstellen:

$$(3.22) \quad h_K = \frac{2 |\underline{u}'|^2 - GM}{|\underline{u}|^2} ,$$

$$(3.23) \quad h_K' = \underline{u}'^T \frac{\partial V}{\partial \underline{u}} + 2 \underline{u}'^T \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$(3.24) \quad h' = -|\underline{u}|^2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2 \underline{u}'^T \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Anfangswerte für die transformierte Differentialgleichung (3.8) sind nicht eindeutig bestimmt, da die Transformation von  $\underline{x}$  nach  $\underline{u}$  einen Freiheitsgrad hat. Der Wert von  $\underline{u}(0)$  wird so bestimmt, daß

$$(3.25) \quad \begin{pmatrix} \underline{x}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{L}(\underline{u}(0)) \cdot \underline{u}(0)$$

gilt. Dann ist

$$(3.26) \quad \underline{u}'(0) = \frac{1}{2|\underline{u}(0)|^2} \underline{L}^T(\underline{u}(0)) \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}'(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$



eindeutig festgelegt. Mit diesen Anfangswerten wird das Differentialgleichungssystem

$$(3.27) \quad \underline{u}'' - \frac{h_K}{2} \underline{u} = \frac{|\underline{u}|^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \underline{u}} + \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{N} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{|\underline{u}|^2}{2} \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} + \underline{N} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_K' = 2 \underline{u}'^T \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} + \underline{N} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$t' = |\underline{u}|^2$$

gelöst, das sich aus (3.8) ergibt. Bei der praktischen Realisierung ist die Verwendung von  $\delta V / \delta \underline{x}$  günstig. Im Fall  $V = 0$  und  $\underline{N} = 0$ , d.h., beim ungestörten Zweikörperproblem stellt (3.27) ein stabiles Differentialgleichungssystem dar. Es ergibt sich der harmonische Oszillator mit der Frequenz  $-h_K/2$ .

Unter Verwendung der Gesamtenergie  $h$  erhält man sogar in allgemeineren Fällen ein stabiles System, nämlich in solchen Fällen, in denen  $V$  konservativ ist, d.h.  $\delta V / \delta t = 0$ . Es muß dann neben dem Gradienten zusätzlich das Potential selber ausgewertet werden. Die Differentialgleichungen (3.27) erhalten dann folgende Gestalt:

$$(3.28a) \quad \underline{u}'' - \frac{h}{2} \underline{u} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \underline{u}} (|\underline{u}|^2 V) + \frac{|\underline{u}|^2}{2} \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{N} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{V}{2} \underline{u} + \frac{|\underline{u}|^2}{2} \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} + \underline{N} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(3.28b) \quad h' = -|\underline{u}|^2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2 \underline{u}'^T \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{N} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(3.28c) \quad t' = |\underline{u}|^2.$$

Auch wenn  $h$  nicht konstant ist, so hat die Mitnahme von  $h$  eine stabilisierende Wirkung. Allgemein kann festgestellt werden, daß die Einführung von Elementen in die Differentialgleichungen eine Stabilisierung mit sich bringt. So übernimmt bei den KEPLERschen Bahnelementen die große Halbachse  $a$  die Rolle von  $h$ . Viele Formen von Bahnelementen haben die eine oder andere Singularität. Auf der Basis des  $u$ -Formalismus können sogenannte reguläre Elemente

eingeführt werden, die analog zu den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten für elliptische Bahnen keine Singularitäten aufweisen.

Die regulären Elemente (s. STIEFEL und SCHEIFELE, 1971) bestehen aus den 4-dimensionalen Vektoren  $\underline{\alpha}$ ,  $\underline{\beta}$ , einem Zeitelement  $\tau$  und einer Frequenz  $\omega$ . Unter Verwendung einer verallgemeinerten exzentrischen Anomalie  $E$  wird (3.28) in zehn Differentialgleichungen erster Ordnung überführt:

$$\frac{d\omega}{dE} = + \frac{r}{8\omega^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2\omega} \underline{u}^* \underline{L}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{N} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(3.29) \quad \frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3} (GM + rV + 2 \underline{u}^T \underline{R}) - \frac{2}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \underline{u}^T \underline{u}^*,$$

$$\frac{d\alpha}{dE} = - \left( \frac{1}{2\omega^2} \underline{R} - \frac{2}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \underline{u}^* \right) \sin \frac{E}{2},$$

$$\frac{d\beta}{dE} = \left( \frac{1}{2\omega^2} \underline{R} - \frac{2}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \underline{u}^* \right) \cos \frac{E}{2}.$$

Dabei sind  $\underline{R}$  die rechte Seite der Differentialgleichung (3.28a) und

$$(3.30) \quad \underline{u} = \underline{\alpha} \cos \frac{E}{2} + \underline{\beta} \sin \frac{E}{2},$$

$$(3.31) \quad \underline{u}^* = \frac{d\underline{u}}{dE} = -\frac{1}{2} \underline{\alpha} \sin \frac{E}{2} + \frac{1}{2} \underline{\beta} \cos \frac{E}{2},$$

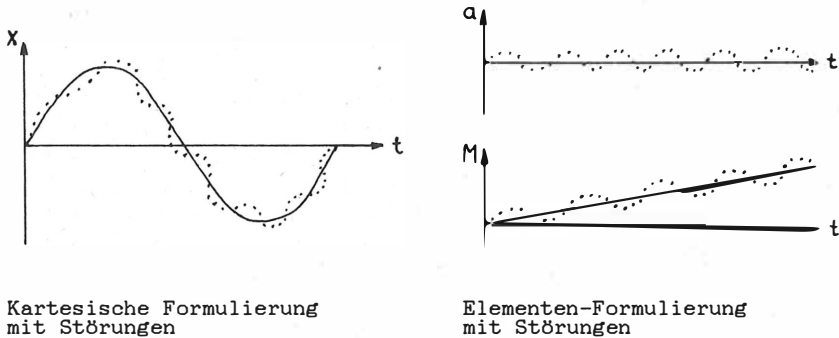
$$(3.32) \quad t = \tau - \frac{1}{\omega} \underline{u}^T \underline{u}^*.$$

Bei den bisherigen Abhandlungen ist stets vorausgesetzt worden, daß das Bewegungsproblem in einem Inertialsystem betrachtet wird. Es ist aber auch möglich, sich auf ein rotierendes z.B. terrestrisches Koordinatensystem  $\underline{x}_E$ , dessen Bewegung relativ zum Inertialsystem durch den Rotationsvektor  $\underline{\omega}$  beschrieben wird, zu beziehen. Die Bewegungsgleichung (3.1) geht dann über in (URMAEV, 1981):

$$(3.33) \quad \frac{d^2 \underline{x}_E}{dt^2} = \underline{f}_E(t, \underline{x}_E, \dot{\underline{x}}_E) - 2 \underline{\omega} \times \underline{x}_E - (\underline{\omega} \cdot \underline{x}_E) \underline{\omega} + |\underline{\omega}|^2 \cdot \underline{x}_E,$$

in der zusätzlich CORIOLIS- und Zentrifugalbeschleunigung auftreten. Auch die LAGRANGESchen Störungsgleichungen können auf ein solches System transformiert werden (REIGBER, 1974). Die Effektivität der Anwendung verschiedener Darstellungsformen der Bewegungsgleichung wurde von einigen Autoren untersucht (VELEZ, 1975; VELEZ u. a., 1974; BORDOVICZYNA und SARKOVSKIJ, 1983; TARADIJ und CESIS, 1985). Dabei zeigte sich, daß die KS-Formulierung aufgrund der stabilisierenden Wirkung von h eine Genauigkeitssteigernde Wirkung hat (s. Abb. 3.3). Insbesondere bei niedrigfliegenden Satelliten war die KS( $\underline{\alpha}$ ,  $\underline{\beta}$ )-Formulierung weitaus am genauesten (s. Tab. 3.1).

Für eine effektive Integration ist es wichtig, nach Möglichkeit große Schrittweiten wählen zu können. Bei der kartesischen Formulierung treten die wesentlichen Fehler schon bei der Berechnung der ungestörten KEPLER-Bewegung auf, und hierdurch werden bereits die Schrittweiten bestimmt. Die Elementen-Formulierung gestattet die Beschreibung der KEPLER-Bewegung durch fünf Kon-



Kartesische Formulierung mit Störungen

Elementen-Formulierung mit Störungen

Abb. 3.2.: Zur Festlegung der Schrittweite für verschiedene Darstellungen der Bewegungsgleichung

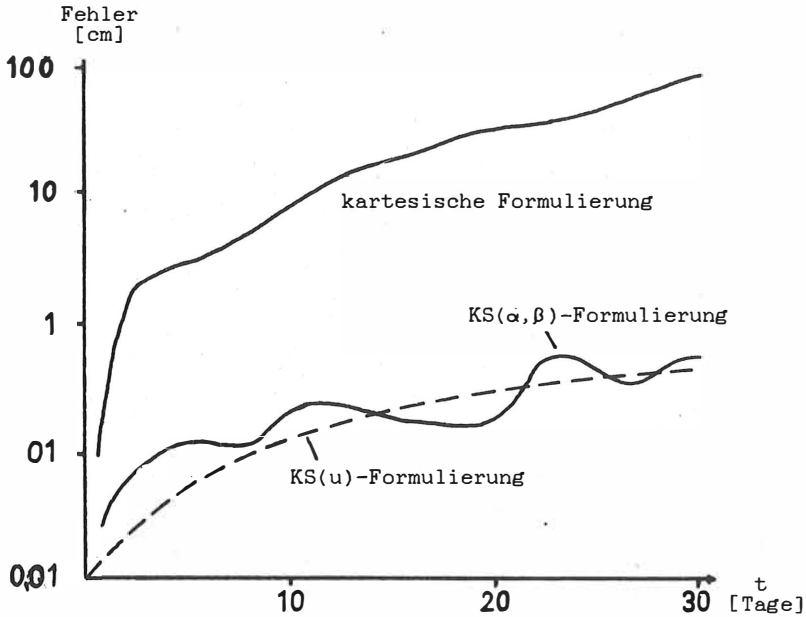


Abb. 3.3.: Vergleich der Integrationsgenauigkeiten für eine LAGEOS-Bahn ( $a=12200$  km,  $e=0,004$ ) von 30 Tagen für verschiedene Darstellungen der Bewegungsgleichung (nach BORDOVICZYNA und SARKOVSKIJ 1983) (Fehler nach Vor- und Rückwärtsintegration, EVERHART 11. Ordnung, s. Kap. 4.)

stanten und eine sich linear ändernde Variable. Haben die Störungen eine niedrige Frequenz, so kann bei dieser Formulierung zu großen Schrittweiten übergegangen werden. Wird die Störfrequenz jedoch höher, so bestimmt sie in jedem Fall die Größe der Schrittweite (s. Abb. 3.2.). Das heißt, daß die Elementen-Formulierung insbesondere bei hochfliegenden, wenig gestörten Satelliten wesentlich größere Schrittweiten ermöglicht (VELEZ, 1984).

Jedoch werden in jedem Schritt Transformationen von und nach rechtwinkligen kartesischen Koordinaten erforderlich, so daß durch diese zusätzlichen Berechnungen der Schrittweitevorteil z.T. wieder kompensiert wird. Die Elementen-Formulierung erfor-

Tabelle 3.1.: Vergleich der Integrationsgenauigkeiten für verschiedene Darstellungen der Bewegungsgleichung (nach TARADIJ und CESIS 1985) ( $a = 7600$  km,  $e=0,02$ , 2 Tage, Fehler nach Vor- und Rückwärtsintegration, Verfahren vgl. Kap. 4.)

Darstellung der Bewegungsgleichung	EVERHART	VASOMI	VASOMI
	15. Ord.	$\epsilon=10^{-12}$	$\epsilon=10^{-14}$
Fehler in $10^{-4}$ cm			
kartesische Koordinaten	50	202	64
KS(u)-Formulierung mit $h_K$	25	101	32
mit h	32	80	25
KS( $\alpha, \beta$ )-Formulierung	0,5	1	0,6

dert den Übergang zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung, und es ist bekannt, daß Integrationsverfahren für die direkte Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung (3.1) effektiver sind, so daß auch hier eine Kompensation des Schrittweitenvorteils z.T. aufgefangen wird. TARADIJ und CESIS (1985) erhielten bei niedrigfliegenden Satelliten durch die KS( $\alpha, \beta$ )-Formulierung eine Effektivitätssteigerung von 10-20 %.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei der interessierenden Bahnmodellierung für Zeiträume von wenigen Tagen bis Wochen die kartesische Formulierung keine entscheidenden Nachteile hat und sie deshalb im Bahnmodell POTSDAM-5 zum Einsatz kommt. Für größere Intervalle (Monate bis Jahre), wie sie für spezielle Untersuchungen angewendet werden, ist der Übergang zur Elementen-Formulierung zu empfehlen.

Nicht zuletzt sollte auch berücksichtigt werden, daß die Verwendung komplizierter Darstellungen der Bewegungsgleichung zu erheblich höherem Aufwand bei der Softwareerstellung und Testung führt.

Bevor im nächsten Kapitel etwas ausführlicher auf einige numerische Integrationsverfahren eingegangen wird, soll an dieser Stelle ein kurzer Vergleich zwischen analytischen und numerischen Verfahren zur Berechnung der Satellitenbewegung angestellt werden. Numerische Verfahren haben prinzipielle Probleme in der Langzeitstabilität der Lösung und sind sehr rechenintensiv. Durch den Einsatz leistungsfähiger Rechner sind diese Probleme seit Ende der 70er Jahre immer weiter in den Hintergrund getreten. Hinzu kommt, daß durch die Steigerung der Meßgenauigkeit in das cm-Niveau eine entsprechend genaue Bahnmodellierung die Berücksichtigung einer Vielzahl von Störeinflüssen mit höchster Genauigkeit erfordert. Da die analytischen Theorien auf Reihenentwicklungen für diese Einflüsse beruhen, entstehen sehr aufwendige Formelapparate, die fast nur unter Einsatz moderner Methoden der Computeralgebra entwickelt werden können. Die notwendigen trigonometrischen Reihen haben für das Erdschwerefeld ca. 6000 Glieder und für den Einfluß von Mond und Sonne ca. 3000 Glieder (EMELJANOV, 1984; NESTEROV, 1982; NASONOVA, 1984). Diese umfangreichen Ausdrücke führen dazu, daß die analytischen Methoden keine Rechenzeitvorteile mehr haben, im Gegenteil. Ein zusätzliches Problem bei analytischen Verfahren besteht in der Realisierung genauer Referenzsysteme (vgl. Kap. 5), d.h. der Berücksichtigung aller Bewegungen des Erdkörpers in einem definierten Inertialsystem. Ein weiterer Effekt der analytischen Integration entsteht dadurch, daß die Störungen als Summe über einzelne Störanteile berechnet werden müssen. Die sich aus einem Störanteil ergebende Änderung der Satellitenbahn muß für alle Störungsberechnungen berücksichtigt werden. Es treten also sogenannte Effekte höherer Ordnung und Kopplungseffekte auf. So ist für die größte Störung, den  $C_{20}$ -Term der Abplattung, eine zweifache Iteration notwendig, um eine Genauigkeit im cm-Niveau zu erhalten. Selbst Störungen höherer Harmonischer des Erdschwerefeldes erfordern eine sich anschließende neue Berechnung der Störungen z.B. von  $C_{20}$ . Es muß also eine Vielzahl von Kopplungseffekten Berücksichtigung finden (BERGER, 1984; EMELJANOV, 1984). Solche Kopplungsprobleme ergeben sich bei numerischer Behandlung des Problems nicht. Die numerische Satellitenbahnintegration zeichnet sich also durch einen klaren, überschaubaren und damit auch wesentlich einfacher realisierbaren und testbaren Formelapparat aus. Dies führte dazu, daß sich die numerischen Verfahren für Anwendungen mit hohen Genauigkeitsansprüchen durchgesetzt haben.

#### 4. Numerische Integrationsverfahren in der Satellitengeodäsie

In der dynamischen Satellitengeodäsie hat man es meist, wie im vorigen Abschnitt gesehen, mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung (Gl.(2.1)) zu tun. Als besonders effektiv erwiesen sich Verfahren, die auf direktem Wege die Lösung bestimmen. So konnte bei Testrechnungen gezeigt werden, daß die direkte Lösung eine Genauigkeitssteigerung bis zum Faktor  $10^6$  gegenüber der Lösung des Problems 1. Ordnung bei gleicher Anzahl von Funktionsauswertungen (Schritten) liefert (MOORE, 1984; EVERHART, 1974a). Von besonderem Interesse ist eine hohe Genauigkeit in der Position  $\underline{x}$  des Satelliten, denn nur diese wird für den Vergleich mit den Meßwerten benötigt. Eine Genauigkeit von wenigen cm für Intervalle von einem Monat erfordert für jeden Integrationsschritt relative Fehler in der Größenordnung von  $10^{-13}$ . Hieraus sind die ungewöhnlich hohen Anforderungen an die Verfahren abzulesen. Wird die Geschwindigkeit  $\dot{\underline{x}}$  nicht unmittelbar bei der Konstruktion von  $\underline{x}$  im Verfahren benötigt, so tritt  $\dot{\underline{x}}$  nur indirekt bei der Berechnung von  $\underline{f}$  auf, insbesondere in  $\underline{N}$  (Gl.(3.2)). Die nichtgravitative Kraft  $\underline{N}$  hat einen relativen Anteil am Wert von  $\underline{f}$  in der Größenordnung von  $10^{-8}$ , so daß ein relativer Fehler von  $10^{-6}$  für  $\dot{\underline{x}}$  ausreichend ist. In diesem Abschnitt sollen die Verfahren beschrieben werden, die in international bekannten Satellitenbahnprogrammen eingesetzt werden (EVERHART in POTSDAM-5 (Zentralinstitut für Physik der Erde, DDR) und PROGNOZ (Astrosowjet, UdSSR); VASOMI im Bahnprogramm des Astronomischen Hauptobservatoriums der Ukrainischen SSR (Kiew); COWELL in ORBIT (VR Polen) und MGM (Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, BRD); STÖRMER-COWELL, ADAMS in GEODYN (NASA, USA)). Es handelt sich dabei ausschließlich um Verfahren für direkte Lösungen der Differentialgleichung 2. Ordnung. Nach einigen allgemeinen Betrachtungen werden die Verfahren in ihrem Prinzip vorgestellt. Hinsichtlich Genauigkeit und Effektivität werden Vergleiche auf der Basis eigener bzw. auf unsere Rechenanlage übertragener Implementierungen vorgenommen. Bei den weiteren Ausführungen in diesem Kapitel wird aus Gründen der Übersichtlichkeit nur der eindimensionale Fall betrachtet. Eine Erweiterung auf beliebige Dimensionen ist unmittelbar möglich.

#### 4.1. Allgemeine Betrachtungen

Es ist folgende Anfangswertaufgabe 2. Ordnung für die Bestimmung im Intervall  $[a, b]$  zu lösen:

$$(4.1) \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t, x, \dot{x})$$

mit  $x(a) = x_0$ ,  $\dot{x}(a) = \dot{x}_0$ . Dabei sollen Verfahren eingesetzt werden, die die Berechnung von  $x(t)$  direkt als Problem 2. Ordnung behandeln. Viele dieser Algorithmen liefern dabei gleichzeitig  $x(t)$ . Ist das nicht der Fall, so wird  $\dot{x}(t)$  durch ein anderes Verfahren 1. Ordnung berechnet.

Zu Beginn werden einige allgemeine Betrachtungen angestellt, bei denen jedoch auf Anfangswertaufgaben 1. Ordnung, die aus Gleichung (4.1) gewonnen werden können, Bezug genommen wird. Hierfür existieren gut ausgearbeitete Theorien. Die Definitionen und Sätze sind dann entsprechend auf Differentialgleichungen 2. Ordnung zu übertragen.

Liegt das Anfangsproblem

$$(4.2) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

im Intervall  $[a, b]$  mit  $x(a) = x_a$  vor, und ist die Funktion  $f$  im Gebiet  $G := \{ (t, x) \mid a \leq t \leq b, -\infty < x < \infty \}$  stetig und gilt die Lipschitzbedingung

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad L = \text{const.},$$

dann hat bekanntlich das Anfangswertproblem eine eindeutige, einmal stetig differenzierbare Lösung  $x(t)$  in  $G$ .

Nun ist ein Diskretisierungsverfahren gesucht, das die Lösung  $x(t)$  in einer gewissen Menge  $H$  von Gitterpunkten

$$H := \{ t \in [a, b] : t_0 = a, t_n > t_{n-1}, n = 1, \dots, m \}$$

approximiert. Mit

$$h_n = t_n - t_{n-1}, \quad n = 1, \dots, m$$

bezeichnet man die Schrittweiten zwischen den Gitterpunkten und mit



$$h_{\max} = \max_n h_n$$

die maximale Schrittweite. Die Näherungslösung sei  $\hat{x}(t_n) = \hat{x}_n$ . Werden für die Berechnung des Wertes  $\hat{x}_n$  die vorhergehenden Werte  $\hat{x}_{n-1}, \dots, \hat{x}_{n-k}$  benötigt, so wird das Verfahren als ein k-Schrittverfahren bezeichnet; insbesondere werden Verfahren mit k=1 Einschrittverfahren und mit k>1 Mehrschrittverfahren genannt. Einschrittverfahren haben den Vorteil, daß sie, beginnend bei den Anfangswerten, unmittelbar die Lösung berechnen können. Sie haben darum eine Sonderstellung. Bei Mehrschrittverfahren ist die Lösung an den ersten k Gitterpunkten vorzugeben,  $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-1}$ . Dies kann mit Hilfe eines Einschrittverfahrens erfolgen.

Die meisten bekannten Verfahren lassen sich in eine Form (s. ALBRECHT 1979)

$$(4.3) \quad V[\hat{x}](t_n) := \frac{\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}}{h_n} - \Phi(\hat{f}_n, \dots, \hat{f}_{n-k}, h_n, \dots, h_{n-k+1}) = 0$$

bringen, wobei  $\hat{f}_n = f(t_n, \hat{x}_n)$

und  $\hat{x}_0 = \eta_0; \hat{x}_j = \eta_j(h_1, \dots, h_j), \quad j=1, \dots, k-1$

die Startwerte sind.

Je nachdem, ob die Funktion  $\Phi$  von  $\hat{f}_n$  abhängt oder nicht, spricht man von impliziten bzw. expliziten Verfahren. Bei impliziten Verfahren ist zur Berechnung von  $\hat{x}_n$  eine Iteration erforderlich, wobei der Näherungswert für  $\hat{x}_n$  durch eine explizite Formel verschafft werden kann.

Konsistenz

Ein Verfahren V heißt konsistent, wenn gilt

$$|V[\hat{x}](t_n)| < \tau(h_{\max}) \quad \text{mit} \quad \lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \tau(h_{\max}) = 0, \quad \forall n \geq k,$$

$$|\eta_n - \hat{x}(t_n)| < \delta(h_{\max}) \quad \text{mit} \quad \lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \delta(h_{\max}) = 0, \quad \forall n < k.$$

Mit

$$d_n = \begin{cases} \eta_n - \hat{x}(t_n), & n = 0, \dots, k-1, \\ V[\hat{x}](t_n), & n = k, \dots, m, \end{cases}$$

bezeichnen wir den lokalen Ersetzungsfehler des Verfahrens. Ein Verfahren hat die Konsistenzordnung  $q$ , wenn für die lokalen Ersetzungsfehler

$$|d_n| \leq C h_{\max}^q, \quad n = 0, \dots, m : C \text{ konst.}, \text{ unabhängig von } n,$$

gilt.

Die Konsistenz gewährleistet, daß die Differenzengleichung (4.3) für kleine Schrittweiten in die Differentialgleichung (4.2) übergeht. Sie ist aber nicht hinreichend dafür, daß für sehr kleine Schrittweiten die Lösungen  $\tilde{x}_n$  des Diskretisierungsverfahrens gegen die Lösung der Differentialgleichung  $x(t_n)$  konvergieren. Bei der Approximation der Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung können Nebenlösungen auftreten, die nichts mit der Lösung der Differentialgleichung zu tun haben. Dieser Effekt ist typisch für instabile Verfahren.

Außerdem ist es praktisch nicht möglich, die Schrittweiten beliebig klein zu wählen, da aufgrund der endlichen Stellenzahl im Rechner stets Rundungsfehler auftreten, die sich dann akkumulieren. Praktikabel sind deshalb nur Verfahren, bei denen für endliche Schrittweiten (die größer als eine sinnvolle Konstante sind) der Einfluß von Fehlern (z.B. Rundungsfehlern) auf das Ergebnis beschränkt bleibt. Solche Verfahren heißen "stabil". Die Stabilität eines Verfahrens sichert also, daß sich Fehler in den Startwerten und Rundungsfehler während der Berechnung der Lösung des diskretisierten Problems nicht wesentlich auswirken, und liefert die Konvergenz konsistenter Verfahren. Die Konvergenzordnung ist wenigstens gleich der Konsistenzordnung. Umfassende Untersuchungen über die Stabilität von Verfahren existieren in der Literatur. Hierbei werden das Verhalten der Verfahren für die einfache Differentialgleichung  $dx/dt = \lambda \cdot x(t)$  untersucht, und hierfür Stabilitätsbereiche angegeben. Von besonderer Bedeutung sind die sogenannten A-stabilen Verfahren, die für alle Schrittweiten mit  $h \cdot \lambda < 0$  stabil sind. Insbesondere existiert eine Vielzahl von Ergebnissen zu speziellen Mehrschrittverfahren erster Ordnung mit fester Schrittweite (sogenannte  $M(\rho, \sigma)$ -Verfahren), die mit dem Namen von DAHLQUIST verbunden sind (ALBRECHT, 1979). Es soll weiter nicht auf diese Ergebnisse eingegangen werden, da direkt Anfangswertprobleme zweiter Ordnung bearbeitet werden sollen. Die Aussagen für Differentialgleichungen erster Ordnung können z.T. nur als Anhaltspunkte verwendet werden.

Ein Problem bei einem allgemeinen Einsatz der Verfahren ist die automatische Steuerung der Schrittweite. Unter anderem kann aus der Berechnung ein und desselben Schrittes mit verschiedenen Schrittweiten bzw. verschiedenen Verfahren eine optimale Schrittweite abgeleitet werden (Extrapolationsverfahren, Schrittweitensteuerung durch eingebettete Verfahren). In den Anwendungen der Satellitengeodäsie ist eine solche automatische Schrittweitensteuerung nicht notwendig. Die zu berechnenden Satellitenbahnen haben eine sehr kleine Exzentrizität (sollte dies einmal nicht der Fall sein, so kann durch Zeitregularisierung eine analoge Situation geschaffen werden) und ermöglichen somit eine feste Schrittweite. Für jeden Typ von geodätischen Satelliten, von denen es nur wenige gibt, kann einmalig ein optimaler Wert für diese Schrittweite bestimmt werden. Im folgenden soll darum das Schrittweitensteuerungsproblem nicht behandelt werden.

Nun noch einige Betrachtungen zu Prädiktor-Korrektor-Verfahren: Hierbei handelt es sich um eine Kombination von expliziten und impliziten Mehrschrittformeln. Mit einer expliziten Formel (Prädiktor) wird ein Startwert  $\hat{x}_n$  berechnet, der durch eine implizite Formel (Korrektor) iterativ verbessert wird. Allgemein gilt für die Stabilität derartiger Verfahren, daß sie dann stabil sind, wenn der Korrektor stabil ist. Unter Verwendung der Symbole

- P - Prädiktion des Wertes  $\hat{x}_n$ ,
- E - Berechnung der Funktion  $f(t_n, \hat{x}_n)$ ,
- C - Korrektur des Wertes  $\hat{x}_n$

haben P-C-Verfahren die allgemeine Form:

$$PE(CE)^s \quad \text{bzw.} \quad P(EC)^s .$$

Wenn  $q_1, q_2$  die Konsistenzordnungen für Prädiktor und Korrektor sind, dann ist

$$q_s = \min (q_2, q_1+s)$$

die Konsistenzordnung des P-C-Verfahrens. Da in den meisten Fällen die Konsistenzordnung des Prädiktors fast gleich der des Korrektors ist, ist in der Praxis eine ein- oder höchstens zweimalige Iteration ( $s \leq 2$ ) völlig ausreichend, d.h. PECE- bzw. PEC-Verfahren. Beide Verfahren haben gleiche Konsistenzordnung, wobei PECE-Verfahren die doppelte Anzahl von f-Berechnungen benötigen. Dies ist bei Problemen mit komplizierter Funktion f, deren Be-

rechnung nahezu allein die Rechenzeit bestimmt, ein wichtiger Gesichtspunkt. In solchen Fällen sind PEC-Verfahren mit Schrittweiten  $h/2$  i. a. genauer als PECE-Verfahren mit Schrittweiten  $h$  und benötigen beide gleiche Rechenzeit (MOORE, 1974). Die hohe Stabilität der PECE-Verfahren kann mit der Effektivität der PEC-Verfahren zu den PECE\*-Verfahren in der Satellitengeodäsie gekoppelt werden. Hierbei bedeutet  $E^*$  eine Pseudoauswertung der Funktion  $f$ , die folgendermaßen abläuft: Bei  $E^*$  werden nur die Anteile von  $f$  erneut ausgewertet, die sich durch Verwendung des korrigierten Wertes  $\hat{x}_n$  signifikant ändern. Die anderen Anteile von  $f$  werden von  $E$  übernommen. Beim Gravitationspotential der Erde betrifft das, wie Untersuchungen mit POTSDAM-5 ergaben, nur die ersten beiden Glieder der Kugelfunktionsentwicklung. Somit benötigt  $E^*$  nur etwa 1% der Rechenzeit gegenüber  $E$ , was nicht ins Gewicht fällt. Ein PECE\*-Verfahren benötigt nur die Hälfte der Rechenzeit eines PECE-Verfahrens, wobei nahezu dieselbe Genauigkeit erreicht wird.

#### 4.2. Mehrschrittverfahren

Für satellitengeodätische bzw. himmelsmechanische Probleme werden fast ausschließlich Mehrschrittverfahren verwendet. Dabei gibt es eine kaum zu überschauende Vielzahl von Algorithmen. Hier sollen vier der wichtigsten Verfahren, die gute Ergebnisse für Bahnberechnungen geodätischer Satelliten (kreisnahe Bahnen) liefern und international am verbreitetsten sind, vorgestellt werden.

#### Grundlegende Formeln

Bei Mehrschrittverfahren unterscheidet man solche mit variabler und fester Schrittweite. In den folgenden Abhandlungen wird auf die NEWTONsche Interpolationsformel und speziell für Algorithmen mit fester Schrittweite auf Differenzenschemata zurückgegriffen. Die benötigten Symbole und Formeln sollen hier erklärt werden. Es gelten für äquidistante Stützstellen mit Schrittweite  $h$  die Abkürzungen:

$$f(t_n \pm i \cdot h) =: f_{n \pm i}, \quad t_n \pm i \cdot h =: t_{n \pm i}.$$

Benötigt werden rückwärtige und zentrale Differenzen:

Summierte	Werte	zentrale Differenzen	rückwärtige Differenzen
$\delta^{-1}f_{-3/2}$	$f_{-2}$	$\delta f_{-3/2}$	$\nabla f_{-1}$
$\delta^{-1}f_{-1/2}$	$f_{-1}$	$\delta^2 f_{-1}$	$\nabla^2 f_0$
$\delta^{-1}f_{1/2}$	$f_0$	$\delta f_{-1/2}$ $\delta^3 f_{-1/2}$	$\nabla f_0$ $\nabla^3 f_1$
$\delta^{-1}f_{3/2}$	$f_1$	$\delta^2 f_0$ $\delta^4 f_0$	$\nabla^2 f_1$ $\nabla^4 f_2$
	$f_2$	$\delta f_{1/2}$ $\delta^3 f_{+1/2}$	$\nabla f_1$ $\nabla^3 f_2$
		$\delta^2 f_1$	$\nabla^2 f_2$
		$\delta f_{3/2}$	$\nabla f_2$

(4.4)  $\nabla^0 f_n := f_n$  ,  
 $\nabla^i f_n = \nabla^{i-1} f_n - \nabla^{i-1} f_{n-1} = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} f_{n-j}$  ,  $i \geq 1$  ,

(4.5)  $\delta^{2i} f_n = \nabla^{2i} f_{n+i} = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j \binom{2i}{j} f_{n+i-j}$  ,  $i \geq 1$  ,  
 $\delta^{2i-1} f_{n+1/2} = \nabla^{2i-1} f_{n+i} = \sum_{j=0}^{2i-1} (-1)^j \binom{2i-1}{j} f_{n+i-j}$  ,  $i \geq 1$  .

Für spezielle Anwendungen werden noch die 1. und 2. Summierte benötigt:

(4.6)  $\delta^{-1} f_{n+1/2} = \delta^{-1} f_{n-1/2} + f_n$  (1. Summierte),  
 $\delta^{-2} f_n = \delta^{-2} f_{n-1} + \delta^{-1} f_{n-1/2}$  (2. Summierte) .

Liegen die Funktionswerte an den Stützstellen

$$t_{n-k}, t_{n-k+1}, \dots, t_{n-1}, t_n$$

vor, so lautet des NEWTONsche Interpolationspolynom

$$(4.7) \quad P_k(t) = \sum_{i=0}^k \pi_i(t) [t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-i}] + R_{k+1}$$

mit  $\pi_i(t) = (t-t_n) \dots (t-t_{n-i+1}), \quad \pi_0(t) = 1,$

$$[t_n] = f_n,$$

$$[t_n, \dots, t_{n-i}] = ([t_n, \dots, t_{n-i+1}] - [t_{n-1}, \dots, t_{n-i}]) / (t_n - t_{n-i}),$$

$$R_{k+1} = \pi_{k+1}(t) f^{(k+1)}(\tau) / (k+1)!, \quad t_{n-k} \leq \tau \leq t_n.$$

Für äquidistante Stützstellen im Abstand  $h$  vereinfacht sich

(4.7) zu

$$(4.8) \quad P_k(t) = P(t_n + uh) = \sum_{i=0}^k \binom{u+i-1}{i} \nabla^i f_n + R_{k+1},$$

$$R_{k+1} = \binom{u+k}{k+1} h^{k+1} f^{(k+1)}(\tau), \quad t_{n-k} \leq \tau \leq t_n.$$

#### 4.2.1. Mehrschrittverfahren auf der Basis von Quadraturformeln

Eine Klasse von Mehrschrittverfahren beruht auf der Integration von Polynomen. Für ein  $k$ -Schrittverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen (4.1) wird vorausgesetzt, daß  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  und somit  $f$  für die Stützstellen  $t_{n-k+1}, \dots, t_{n-1}, t_n$  bekannt sind. Der Verlauf der Funktion  $f$  wird durch ein Interpolationspolynom  $P_{k-1}(t)$  in diesem Gebiet dargestellt.  $P(t)$  kann zur Extrapolation verwendet werden und zur Berechnung der gesuchten Werte im Stützpunkt  $t_{n+1}$  dienen (explizite Mehrschrittformel):

$$(4.9a) \quad \dot{x}(t_{n+1}) = \dot{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(\tau) d\tau ,$$

$$(4.9b) \quad x(t_{n+1}) = x(t_n) + \dot{x}(t_n) (t_{n+1} - t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{\tau_1} P(\tau) d\tau d\tau_1 .$$

Die so erhaltenen Werte können zur Konstruktion eines neuen Interpolationspolynoms genutzt werden, dessen Integration eine Korrektur der gesuchten Werte liefert (implizite Mehrschrittformel).

#### 4.2.1.1. ADAMS-Verfahren mit fester Schrittweite

Eine Reihe von k-Schrittverfahren mit fester Schrittweite h sind mit dem Namen von ADAMS verbunden. Sie basieren auf der Anwendung der NEWTONschen Interpolationsformel (4.8) (ALBRECHT, 1979; STIEFEL und SCHEIFELE, 1971).

##### Explizite Formel (Prädiktor)

Für ein k-Schrittverfahren gilt:

$$(4.10a) \quad \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h \sum_{i=0}^{k-1} a_i^1 \nabla^i f_n ,$$

$$(4.10b) \quad x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n h + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} a_i^2 \nabla^i f_n .$$

Die Koeffizienten  $a_i^1$  ergeben sich aus (s. Gl.(4.8))

$$(4.11) \quad a_i^1 = \int_0^1 \dots \int_0^u \frac{1}{i!} u(u+1)\dots(u+i-1) \underbrace{du \dots du}_{1\text{-mal}} .$$

Unter Verwendung der Formel (4.4) können (4.10a,b) so umgestellt werden, daß die ständige Berechnung des Differenzenschemas entfallen kann:

$$(4.12a) \quad \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h \sum_{i=0}^{k-1} \bar{a}_i^1(k) f_{n-1} ,$$

$$(4.12b) \quad x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n h + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \bar{a}_i^2(k) f_{n-1} .$$

Wird bei einer Implementierung des Verfahrens größerer Wert auf Verwendung einer variablen Ordnung  $k$  gelegt, so sind die Formeln (4.10) günstiger, da ihre Koeffizienten nicht von  $k$  abhängen.

Dieses Verfahren hat die Konvergenzordnung  $k$  bzw.  $k+1$  je nach Ordnung des Anfangswertproblems.

Implizite Formel (Korrektor)

Unter Verwendung des Funktionswertes  $f_{n+1}$ , der mit Hilfe der prädizierten Werte berechnet wird, ergeben sich in Analogie zu (4.10) die impliziten Formeln:

$$(4.13a) \quad \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h \sum_{i=0}^k b_i^1 \nabla^i f_{n+1} ,$$

$$(4.13b) \quad x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n h + h^2 \sum_{i=0}^k b_i^2 \nabla^i f_{n+1} .$$

Die Koeffizienten  $b_i^1$  berechnen sich aus

$$(4.14) \quad b_i^1 = \int_0^1 \dots \int_0^u \frac{1}{i!} (u-1) u (u+1) \dots (u+i-2) \underbrace{du \dots du}_{1\text{-mal}} .$$

Die impliziten Formeln haben die Konvergenzordnung  $(k+1)$  bzw.  $(k+2)$ .

Die Koeffizienten des ADAMS-Verfahrens sind der Zusammenstellung zu entnehmen. Die Spalte  $a_i^1$  entspricht dem ADAMS-BASHFORTH- und die Spalte  $b_i^1$  dem ADAMS-MOULTON-Verfahren.



i	$a_i^1$	$a_i^2$	$b_i^1$	$b_i^2$
0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{19}{180}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{7}{360}$
4	$\frac{251}{720}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{17}{1440}$
5	$\frac{95}{288}$	$\frac{863}{10080}$	$-\frac{27}{1440}$	$-\frac{41}{5040}$
6	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{275}{3456}$	$-\frac{863}{60480}$	$-\frac{731}{120960}$
7	$\frac{36799}{120960}$	$\frac{33953}{453600}$	$-\frac{1375}{120960}$	$-\frac{8563}{1814400}$
8	$\frac{1070017}{3628800}$	$\frac{400967}{5644800}$	$-\frac{33953}{3628800}$	$-\frac{27719}{7257600}$
9	$\frac{2082753}{7257600}$	$\frac{325043}{47900160}$	$-\frac{57281}{7257600}$	$-\frac{190073}{59875200}$
10	$\frac{134211265}{479001600}$	$\frac{359667}{5519360}$	$-\frac{3250433}{479001600}$	$-\frac{516149}{191600640}$
11	$\frac{262747265}{958003200}$	$\frac{13695779093}{217945728000}$	$-\frac{5675265}{958003200}$	$-\frac{1013143139}{435891456000}$
12	$\frac{703604254357}{2615348736000}$	$\frac{28915048019}{47551795200}$	$-\frac{13695779093}{2615348736000}$	$-\frac{1519024289}{74724249600}$

(Bem.: Koeffizienten  $a_i^1$ ,  $b_i^1$  aus STIEFEL und SCHEIFELE, 1971)

#### 4.2.1.2. Verfahren mit variabler Schrittweite

Mehrschrittverfahren mit variabler Schrittweite können ebenfalls auf der Basis des NEWTONschen Interpolationspolynoms konstruiert werden. Hierzu zählen die Verfahren von KROGH (1973) und TARADIJ und CESIS (1984).

Explizite Formel (Prädiktor)

Für ein k-Schrittverfahren ergeben sich durch Integration von (4.7) folgende Formeln

$$(4.15a) \quad \tilde{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \sum_{i=0}^{k-1} c_i^1 [t_n, \dots, t_{n-1}] ,$$

$$(4.15b) \quad \tilde{x}_{n+1} = x_n + \dot{x}_n (t_{n+1} - t_n) + \sum_{i=0}^{k-1} c_i^2 [t_n, \dots, t_{n-1}] .$$

Die Koeffizienten  $c_i^1$  ergeben sich als l-faches Integral über das Polynom  $\pi_i(t)$ . Hierfür kann folgende rekursive Darstellung für das unbestimmte Integral genutzt werden (TARADIJ, CESIS, 1984):

$$(4.16) \quad c_i^1(t) = (t - t_{n-i+1}) c_{i-1}^1(t) - l \cdot c_{i-1}^{l+1}(t) ,$$

wobei

$$c_0^1(t) = \frac{1}{l!} (t - t_n)^l , \quad c_i^0 = \pi_i(t) .$$

Die Integration über das Intervall  $(t_n, t_{n+1})$  ergibt  $c_i^1 = c_i^1(t_{n+1})$ . Aufgrund der Rekursionsformel sind für ein k-Schrittverfahren die Berechnung von  $(k+3)(k+4)/2$  Koeffizienten in jedem Schritt nötig.

Das Verfahren hat die Konvergenzordnung k bzw. k+1.

Implizite Formel (Korrektor)

Unter Verwendung der prädierten Werte  $\tilde{x}_{n+1}$ ,  $\tilde{x}_{n+1}$  läßt sich  $\tilde{f}_{n+1}$  berechnen. Mit Hilfe dieses neuen Funktionswertes wird das Interpolationspolynom über k+1 Stützstellen wie folgt ausgedehnt:

$$(4.17) \quad P_k(t) = P_{k-1}(t) - Q_{k-1}(t) P_{k-1}(t_{n+1}) + Q_{k-1}(t) \cdot \tilde{f}_{n+1} ,$$

wobei

$$Q_{k-1}(t) = \frac{(t - t_n) \cdot \dots \cdot (t - t_{n-k+1})}{(t_{n+1} - t_n) \cdot \dots \cdot (t_{n+1} - t_{n-k+1})} .$$

Die Funktion liefert:

$$P_k(t) = \begin{cases} P_{k-1}(t) = f_i & \text{für } t = t_i , \quad n-k+1 \leq i \leq n, \\ \tilde{f}_{n+1} & \text{für } t = t_{n+1}. \end{cases}$$

Durch die besondere Konstruktion von  $P_k(t)$  kann auf die Ergebnisse des Prädiktors zurückgegriffen und somit eine sehr einfache Korrektorformel erhalten werden. Die Integration von  $P_k(t)$  im Intervall  $(t_n, t_{n+1})$  ergibt

$$(4.18a) \quad \dot{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} + \frac{c_k^1}{c_k^0} (\tilde{f}_{n+1} - P_k(t_{n+1}))$$

$$(4.18a) \quad x_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} + \frac{c_k^2}{c_k^0} (\tilde{f}_{n+1} - P_k(t_{n+1}))$$

wobei die Quotiententerme sich aus Integration von  $Q_{k-1}(t)$  ergeben.

Das Verfahren hat die Konvergenzordnung  $(k+1)$  bzw.  $(k+2)$ .

#### Wahl der Ordnung und der Schrittweite, Start des Algorithmus

Die grundlegende Idee zur Steuerung der Verfahrensordnung geht auf GEAR (1971) zurück. Der Fehler für das Verfahren  $k$ -ter Ordnung ergibt sich für  $x_{n+1}$  zu:

$$(4.19) \quad \sigma_k = -2 \frac{c_{k-1}^3}{c_k^0} (\tilde{f}_{n+1} - P_k(t_{n+1}))$$

Dann werden die Fehler für die benachbarten Ordnungen  $(k-1)$  und  $(k+1)$  ermittelt:

$$\sigma_{k-1} = \frac{c_{k-2}^3}{c_{k+1}^0} \frac{c_k^0}{c_{k-1}^3} \sigma_k - 2 c_{k-2}^3 [t_n, \dots, t_{n-k+1}]$$

$$\sigma_{k+1} = \frac{c_k^3}{c_{k+1}^0} \frac{c_k^0}{c_{k-1}^3} \sigma_k + 2 c_k^3 [t_n, \dots, t_{n-k}]$$

Die Ordnung  $k$ , die den kleinsten Fehler liefert, wird im nächsten Schritt verwendet. Der Fehler  $\sigma_k$  wird mit der erreichbaren Genauigkeit  $\sigma_r$ , die sich aus der empirischen Formel

$$(4.20) \quad \sigma_r = \frac{\epsilon \cdot x_{n+1}}{6 \cdot (k+1)}, \quad \epsilon \text{ vorgegebene Genauigkeit,}$$

berechnet, verglichen. Ist  $|\sigma_k| > |\sigma_r|$ , so ist der letzte Schritt mit halbiertem Schrittweite zu wiederholen, anderenfalls wird die Rechnung mit größerer Schrittweite fortgesetzt. Bleibt die Schrittweite über eine Reihe von Schritten konstant, so brauchen die Koeffizienten  $c_i^1$  nicht berechnet zu werden, wodurch Rechenzeit eingespart werden kann.

Das Verfahren kann mit einem EULER-Schritt bei sehr kleiner Schrittweite gestartet werden ( $k=1$ ). Danach wird schrittweise die Ordnung erhöht. In der Praxis gibt man eine maximale Ordnung vor (etwa 12 bis 18).

Die von TARADIJ und CESIS (1984, 1985) erarbeitete Implementation VASOMI ist sehr universell einsetzbar. Sie ermöglicht, eine große Anzahl von Differentialgleichungen verschiedener Ordnung gleichzeitig zu integrieren, wobei die optimale Verfahrensordnung  $k$  für jede Differentialgleichung getrennt ermittelt wird. Diese Implementation wurde für die in 4.5. durchgeführten Vergleiche übernommen.

#### 4.2.2. Mehrschrittverfahren auf der Basis von TAYLORreihenentwicklungen

---

Auf der Basis der TAYLORreihenentwicklung der gesuchten Funktion lassen sich Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen konstruieren. Hierbei können Differenzenschemata, die eine Approximation der benötigten höheren Ableitungen liefern, eingesetzt werden. Solche Verfahren wurden am Anfang unseres Jahrhunderts entwickelt und zur Kometenbahnberechnung eingesetzt. Das Verfahren von COWELL hat sich als sehr effektiv herausgestellt und wird auch heute noch verwendet.

#### 4.2.2.1. Das COWELL-Verfahren

Das COWELL-Verfahren (KULIKOV, 1960, 1963) ist ein Verfahren, das die Differentialgleichung 2. Ordnung direkt löst. Beim klassischen Verfahren spielt die Geschwindigkeit für die Kraftberechnung keine Rolle. Sie wird nur für den Start des Verfahrens benötigt. Die hierzu entwickelte Formel kann aber leicht verwendet werden, um auch den Geschwindigkeitsverlauf  $\dot{x}(t)$  zu ermitteln. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der Operator  $D := d/dt$  verwendet. Die Reihenentwicklung für  $x(t)$  liefert

$$(4.21) \quad x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} (D^i x)_n,$$

und somit gilt

$$(4.22) \quad \ddot{x}_n \approx \delta^2 x_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{2i}}{(2i)!} (D^{2i} x)_n$$

Wird nun die Funktion  $f$  eingesetzt, so ergibt sich

$$(4.23) \quad \delta^2 x_n = 2 h^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^{2i}}{(2i+2)!} (D^{2i} f)_n.$$

Die benötigten Ableitungen der Funktion  $f$  könnten als Näherungen direkt einem Differenzenschema entnommen werden. Eine höhere Genauigkeit wird jedoch erreicht, wenn über die Differentiation der STIRLINGSchen Interpolationsformel die Ableitung von  $f$  berechnet wird. Die Interpolationsformel lautet (BRONSTEIN und SEMENDJAJEW, 1985):

$$(4.24) \quad f(t_n + zh) = f_n + \binom{z}{1} (\delta f_n + \delta^2 f_n) + \binom{z+1}{3} (\delta^3 f_n + \frac{z}{4} \delta^4 f_n) + \\ \binom{z+2}{5} (\delta^5 f_n + \frac{z}{6} \delta^6 f_n) + \dots,$$

$$\text{mit } \delta^{2i-1} f_n := (\delta^{2i-1} f_{n-1/2} + \delta^{2i-1} f_{n+1/2})/2.$$

Es gilt

$$dt = h dz, \quad h^i D^i f(t) \Big|_{t_n} = \frac{d^i (t_n + zh)}{dz^i} \Big|_{z=0}.$$

Nachdem die Ableitungen gebildet und die entsprechenden Koeffizienten sortiert wurden, ergibt sich unter Verwendung der ersten  $m$  Summanden:

$$(4.25) \quad \delta^2 x_n = h^2 \left( f_n + \sum_{i=0}^m a_{2i} \delta^{2i+2} f_n \right).$$

Die Integration führt zu:

$$(4.26a) \quad \dot{x}_n = h \left( \delta^{-1} f_{n-1/2} - \frac{1}{2} f_n + \sum_{i=0}^m a_{2i+1} \delta^{2i+1} f_n \right),$$

$$(4.26b) \quad x_n = h^2 \left( \delta^{-2} f_n + \sum_{i=0}^m a_{2i} \delta^{2i} f_n \right).$$

Die Formeln (4.26) sind die zentralen Gleichungen des COWELL-Verfahrens, wobei die Koeffizienten (KULIKOV, 1960) lauten:

$a_0 = \frac{1}{12}$	$a_1 = -\frac{1}{12}$
$a_2 = -\frac{1}{240}$	$a_3 = \frac{11}{720}$
$a_4 = \frac{31}{60480}$	$a_5 = -\frac{191}{60480}$
$a_6 = -\frac{289}{3628800}$	$a_7 = \frac{2497}{3628800}$
$a_8 = \frac{317}{22809600}$	$a_9 = -\frac{14797}{95800320}$
$a_{10} = -\frac{6803477}{2615348736000}$	$a_{11} = \frac{92427157}{2615348736000}$

Mit ihnen kann nun folgendes Verfahren entwickelt werden. Es wird vorausgesetzt, daß  $x(t)$  und  $\dot{x}(t)$  an  $(2m+1)$  aufeinanderfolgenden Stützstellen bekannt sind. Die Stützstellen sind (o.B.d.A.):

$$t_{-m}, t_{-m+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m.$$

Für die Stützstellen bis  $t_0$  seien die endgültigen Werte bereits berechnet und für  $t_1$  bis  $t_m$  existieren sehr gute Näherungen. Das Verfahren soll alle Ableitungen bis zur Ordnung  $2m$  berücksichtigen. Es wird die Verfahrensweise bei  $x(t)$  beschrieben, die auf  $\dot{x}(t)$  übertragen werden kann.

Die Formel (4.26b) für  $n=0$  wird verwendet, um die noch unbekannte Größe  $\delta^{-2}f_0$  so zu bestimmen, daß sich  $x_0$  ergibt. Nun werden die Positionen  $x_n$  für  $n=1, \dots, m+1$  ermittelt, wobei

$$(4.27) \quad \delta^{-2}f_n = \delta^{-2}f_{n-1} + \delta^{-1}f_{n-3/2} + f_{n-1}$$

Die in (4.26b) benötigten Werte  $\delta^{2i}f_n$  sind nur für  $i+n \leq m$  aus den Stützstellen berechenbar. Die anderen Differenzen werden unter der Voraussetzung berechnet, daß  $\delta^{2m+1}f_n = 0$  ist. Die Formel (4.26b) läßt sich unter Verwendung von (4.5) in die Form

$$(4.28) \quad x_n = h^2 (\delta^{-2}f_n + \sum_{i=0}^m b_{2i}^{n,m} f_i)$$

bringen. Die Berechnung der zugehörigen Koeffizienten ist recht mühselig. Für  $m=2,3,4$  findet man sie für die  $x_n$ -Berechnung bei KULIKOV (1960) und für  $m=3$  für die  $\dot{x}_n$ -Berechnung bei COLOMBO (1984). Da sie von  $n$  abhängig sind, ist eine Implementation mit variabler Ordnung sehr aufwendig. Mit dem prädiizierten Wert  $x_{m+1}$  wird  $f_{m+1}$  berechnet. Auf dieser Basis werden dann  $x_1, \dots, x_{m+1}$  korrigiert. Die Korrektur kann iterativ erfolgen. Ist  $x_1$  hinreichend genau ermittelt, so wird der beschriebene Algorithmus um die Schrittweite  $h$  versetzt durchgeführt. Der Algorithmus erfordert eine mindestens  $(m+2)$ -malige Berechnung der Funktion  $f$  an einer Stützstelle. Für satellitengeodätische Probleme ist dieses Verfahren nur dann sinnvoll anwendbar, wenn die Methode der Pseudoauswertungen genutzt wird (s. 4.1.), (s. Abb. 4.1.). Das Verfahren kann selbststartend implementiert werden, indem (4.28) für eine iterative Berechnung von  $x_{-m}, \dots, x_m$  herangezogen wird. Als Startwerte können  $x_n = x_0$  für  $n=-m, \dots, m$  eingesetzt werden.

Für die durchgeführten Vergleiche ist die Implementation von COLOMBO (1984) übernommen worden (Abschnitt 4.5.). Dabei erwies es sich als günstig, eine Veränderung vorzunehmen. So wurde  $\delta^{-2}f_0$  nicht in jedem Schritt erneut aus Gleichung (4.26) mit  $n=0$  ermittelt, sondern hierfür  $\delta^{-2}f_1$  des vorhergehenden Schrittes mit dem neuesten Wert von  $x_1$  verwendet. Die Standardversion wird mit COWELL und die geänderte mit COWELL/V bezeichnet.

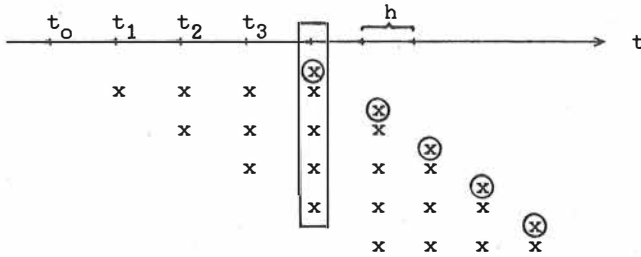


Abb. 4.1.: Auswerteschema für Funktionswerte  $f$  beim COWELL-Verfahren mit  $m=3$

- (X) vollständige Auswertung von  $f$  bei der Prädiktion
- x Pseudoauswertung von  $f$  bei der Korrektur

4.2.2.2. STÖRMER-COWELL-Verfahren

Beim COWELL-Verfahren stellt sich heraus, daß die Prädiktion für  $x_{n+1}$  sehr gute Näherungswerte liefert. Anstatt diesen Wert mehrfach (mindestens  $(m+1)$ -fach) während des Verfahrens zu korrigieren, kann man die Ordnung des Verfahrens erhöhen und dafür nur eine einfache Korrektur durchführen. Man kommt dann mit zwei Funktionsauswertungen je Schritt aus. Das auf diesem Wege erhaltene Verfahren ist dasjenige von STÖRMER. Es ermöglicht ebenfalls die unmittelbare Berechnung von  $x(t)$ , ohne  $\dot{x}(t)$  direkt zu verwenden. Hängt die Funktion  $f$  jedoch von  $\dot{x}(t)$  ab, so kann  $\dot{x}$  parallel mit dem ADAMS-Verfahren (4.2.1.1.) berechnet werden. An  $\dot{x}$  wird, wie schon erwähnt, dann keine hohe Genauigkeitsanforderung gestellt.

Die Gleichung (4.25) kann in folgende Form gebracht werden:

$$(4.29) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2(f_n + \sum_{i=0}^m a_{2i} \delta^{2i+2} f_n)$$

und unter Verwendung von (4.5) durch rückwärtige Differenzen dargestellt werden:

$$(4.30) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2(f_n + \sum_{i=0}^m a_{2i} \nabla^{2i+2} f_{n+i+1})$$



Explizite Formel (Prädiktor)

Es wird vorausgesetzt, daß  $x_n$ ,  $\dot{x}_n$  und damit  $f_i$  für  $i \leq n$  bekannt sind. Dann sind alle  $\nabla^i f_n$  berechenbar. Aus (4.4) folgt unmittelbar

$$\nabla^i f_{n+1} = \nabla^i f_n + \nabla^{i+1} f_{n+1}$$

und daraus durch sukzessive Anwendung

$$(4.31a) \quad \nabla^i f_{n+1} = \sum_{j=i}^{\infty} \nabla^j f_n, \quad i > 0$$

und

$$(4.31b) \quad \nabla^{2i} f_{n+1} = \nabla^{2i} f_n + \sum_{j=0}^{\infty} (i+j) \nabla^{2i+1+j} f_n, \quad i > 1.$$

Durch Einsetzen der Koeffizienten hat (4.30) die Gestalt

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & 2x_n - x_{n-1} + h^2 [f_n + \frac{1}{12} (\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n + \nabla^4 f_n + \dots) \\ & - \frac{1}{240} (\nabla^4 f_n + 2\nabla^5 f_n + 3\nabla^6 f_n + \dots) \\ & + \frac{31}{60480} (\nabla^6 f_n + 3\nabla^7 f_n + 4\nabla^8 f_n + \dots) \\ & \vdots \end{aligned} \quad ].$$

Nach Zusammenfassung entsprechender Glieder erhält man ( $k-1=2m$ ):

$$(4.32) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} c_i \nabla^i f_n.$$

Implizite Formel (Korrektor)

Bei der impliziten Formel wird wiederum von (4.30) ausgegangen, jedoch vorausgesetzt, daß  $f_{n+1}$  bekannt ist. Entsprechende Anwendung von (4.31) liefert auf analoge Weise

$$(4.33) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2 \sum_{i=0}^k d^i \nabla^i f_{n+1}$$

Die Koeffizienten des Verfahrens sind:

$i$	$c_i$	$d_i$
0	1	1
1	0	- 1
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{19}{240}$	- $\frac{1}{240}$
5	$\frac{3}{40}$	- $\frac{1}{240}$
6	$\frac{863}{12096}$	- $\frac{221}{60480}$
7	$\frac{275}{4032}$	- $\frac{19}{6048}$
8	$\frac{33953}{518400}$	- $\frac{9829}{3628800}$
9	$\frac{8183}{129600}$	- $\frac{407}{172800}$
10	$\frac{3250433}{53222400}$	- $\frac{330157}{159667200}$
11	$\frac{4671}{78848}$	- $\frac{24377}{13305600}$
12	$\frac{13695779093}{237758976000}$	- $\frac{4281164477}{2615348736000}$

(Bem.: Koeffizienten s. STIEFEL und SCHEIFELE, 1971)

#### 4.2.3. Startprozedur bei Mehrschrittverfahren

Beim  $k$ -Schrittverfahren ist es notwendig, die Funktionswerte von  $f$  an  $k$  aufeinanderfolgenden Stützstellen zu kennen. Ausgangspunkt jedes Anfangswertproblems sind jedoch nur die Werte von  $x_0$ ,  $x_1$  und  $f_0$  für die erste Stützstelle. Hieraus ergeben sich nun folgende Möglichkeiten für den Start eines Mehrschrittverfahrens:

- a) Ein Einschrittverfahren wird verwendet, um die erforderlichen Funktionswerte an den ersten  $k$  Stützstellen zu berechnen.
- b) Das Verfahren wird mit einem einfachen ersten Schritt gestartet und mit Übergang zu den weiteren Stützstellen automatisch die Ordnung erhöht ("bootstrap"-Verfahren). Ein Beispiel für eine solche Vorgehensweise wurde in 4.2.1.2. gegeben.
- c) Das Verfahren wird iterativ gestartet. Dabei können als Ausgangswerte der Iteration alle Stützstellen mit den Anfangswerten  $x_0, \dot{x}_0$  belegt werden. Das COWELL -Verfahren (4.2.2.1.) ist ein Verfahren, das auf solche Weise gestartet wird.

Mehrschrittverfahren, die mit Methoden wie b) bzw. c) gestartet werden, nennt man selbststartend. Sie haben den großen Vorteil, daß nur ein Verfahren für die Problemlösung eingesetzt zu werden braucht.

#### 4.3. Einschrittverfahren

Von der Vielfalt der existierenden Einschrittverfahren sind nur wenige für Probleme der Satellitengeodäsie verwendet worden. Hierzu zählen einige RUNGE-KUTTA-Verfahren (FEHLBERG, SHANKS, NYSTRÖM), das Extrapolationsverfahren von BULIRSCH-STOER und das Verfahren von EVERHART. Die meisten der Einschrittverfahren sind für die Differentialgleichungen 1. Ordnung ausgelegt, so daß sie aus diesem Grunde für Probleme 2. Ordnung nicht effektiv sind (vgl. MOORE, 1974). Aus der Literatur über Satellitenbahnrechnungen geht hervor, daß zur Zeit nur das Verfahren von EVERHART mit seiner Variante für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit den besten Mehrschrittverfahren konkurrieren kann. Darum soll an dieser Stelle nur ein Überblick über die RUNGE-KUTTA-Verfahren gegeben und eine Beschreibung des Verfahrens von EVERHART vorgenommen werden.

##### 4.3.1. RUNGE-KUTTA-Verfahren

Ausgangspunkt für die Konstruktion der klassischen RUNGE-KUTTA-Verfahren (kurz R-K-Verfahren) waren Quadraturformeln. Die Differentialgleichung erster Ordnung (4.2) wird im Intervall  $[t_n, t_{n+1}]$  integriert, wobei für die Quadraturformeln nur Stützstellen  $\tau_i$  innerhalb des Intervalls verwendet werden:

$$t_n \leq \tau_1 < \dots < \tau_k \leq t_{n+1} .$$

Die Lösungen an den Stützstellen werden herangezogen, um  $x(t_{n+1})$  zu erhalten:

$$(4.34) \quad x(t_{n+1}) = x(t_n) + h \sum_{i=1}^k a_i f(\tau_i, \eta_i) ,$$

mit

$$\eta_i = x(t_n) + h \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} f(\tau_j, \eta_j) .$$

Die Parameter  $\tau_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_{ij}$  werden so bestimmt, daß eine möglichst hohe Konsistenzordnung erreicht wird. Dazu existiert eine Reihe von Bedingungen in Form eines Gleichungssystems, dessen Lösung die gesuchten Parameter liefert. Die Konsistenzordnung kann im Rahmen gewisser Grenzen vorgegeben werden (ISAACSON und KELLER, 1979; ALBRECHT, 1979). Jedes Verfahren wird durch einen fest gegebenen Satz von Parametern gekennzeichnet, wobei für ein vorgegebenes  $k$  mehrere Verfahren existieren.

Für explizite R-K-Verfahren gilt

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{für } j \geq i .$$

In diesem Fall erhält man einfache Verfahren, die sukzessive die Berechnung der  $\eta_i$  ermöglichen. Sie haben die Konsistenzordnung  $q \leq k$ . Verfahren höherer Ordnung dieser Art, auch für Differentialgleichungen 2. Ordnung, sind die Verfahren von FEHLBERG (s. FEHLBERG, 1981, 1983).

Bei impliziten R-K-Verfahren werden alle Parameter  $\alpha_{ij}$  verwendet, wobei allerdings oft

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{für } j > i$$

gesetzt wird. Diese Verfahren erfordern einen hohen Rechenaufwand, da für die Bestimmung der  $\eta_i$  nichtlineare Gleichungssysteme iterativ gelöst werden müssen. Sie ermöglichen aber Konsistenzordnungen, die bis  $q=2k$  gehen können. Besonders erwähnt werden müssen in diesem Zusammenhang die Verfahren von BUTCHER (1964), die aus GAUSS-Quadraturformeln gewonnen wurden (d.h.  $\tau_i$  sind Nullstellen LEGENDREScher Polynome) und die die Konsistenzordnung  $q=2k$  haben.

BUTCHER hat auch R-K-Formeln für Differentialgleichungen 2. Ordnung der speziellen Form

$$(4.35) \quad \ddot{x}(t) = f(t, x)$$

entwickelt (s. EVERHART, 1974a), die die Gestalt

$$(4.36a) \quad \dot{x}(t_{n+1}) = x(t_n) + h \sum_{i=1}^k a_i f(\tau_i, \eta_i),$$

$$\eta_i = x(t_n) + \dot{x}(t_n)(\tau_i - t_n) + h^2 \sum_{j=1}^k \beta_{ij} f(\tau_j, \eta_j),$$

$$(4.36b) \quad x(t_{n+1}) = x(t_n) + \dot{x}(t_n) h + h^2 \sum_{i=1}^k b_i f(\tau_i, \eta_i)$$

haben. Hierbei verwendete er GAUSS-LOBATTO- bzw. GAUSS-RADAU-Quadraturformeln (dies sind GAUSS-Quadraturformeln mit vorgegebenen Stützstellen am Intervallanfang bzw. -ende). Es ist auch möglich, die Verfahren für Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung zu kombinieren und die allgemeine Differentialgleichung 2. Ordnung (4.1) zu lösen. Dies bedarf jedoch aufwendiger iterativer Verfahren für die Bestimmung der benötigten  $\eta_i$ ,  $\dot{\eta}_i$ , wodurch diese Verfahren kaum praktisch interessant werden. Desweiteren ist bei R-K-Verfahren eine Implementation mit beliebiger Ordnung des Verfahrens nur schwer möglich, da für jedes  $k$  ein neuer Satz von Koeffizienten erforderlich ist. Ein entsprechend genaues Verfahren, das diese Nachteile nicht hat, wurde von EVERHART entwickelt.

#### 4.3.2. Verfahren von EVERHART

Ein Verfahren, das auf der Zeitreihendarstellung der Funktion  $f$  basiert und im Prinzip den impliziten R-K-Verfahren entspricht, wurde von EVERHART (1974a,b) entwickelt. Es ermöglicht die Implementation für variable Konsistenzordnung für Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung und ist somit universell einsetzbar. Die Lösung des auftretenden impliziten Systems konvergiert sehr schnell (2 Schritte meist ausreichend), da gute Startwerte durch die vorhergehenden Integrationsintervalle prädictiert werden können. Es liegt eine Implementation der Methode für Konsistenzordnungen bis  $q=31$  vor (EVERHART, 1974b).

Im Intervall  $[t_n, t_{n+1}]$  wird  $f$  durch eine Zeitreihe der Form

$$(4.37) \quad f(t, x, \dot{x}) = f_n + \sum_{i=1}^{k-1} a_i (t-t_n)^i$$

dargestellt. Hieraus gewinnt man auf einfache Weise:

$$(4.38a) \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_n + f_n \cdot (t-t_n) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{i+1} (t-t_n)^{i+1}$$

$$(4.38b) \quad x(t) = x_n + \dot{x}_n \cdot (t-t_n) + \frac{1}{2} f_n \cdot (t-t_n)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{(i+1)(i+2)} (t-t_n)^{i+2}$$

Nun wird auf den dimensionslosen Parameter  $\tau$  übergangen:

$$\tau = (t-t_n)/h, \quad h = t_{n+1} - t_n, \quad b_i = a_i h^i.$$

Damit ergeben sich folgende Umformungen von (4.37) und (4.38), wobei die Funktionsbezeichnungen der Einfachheit halber beibehalten werden sollen:

$$(4.39) \quad f(\tau) = f_n + \sum_{i=1}^{k-1} b_i \tau^i,$$

$$(4.40a) \quad \dot{x}(\tau) = \dot{x}_n + h \cdot \tau \cdot (f_n + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_i}{(i+1)} \tau^i),$$

$$(4.40b) \quad x(\tau) = x_n + \dot{x}_n \cdot h \cdot \tau + h^2 \tau^2 (\frac{1}{2} f_n + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_i}{(i+1)(i+2)} \tau^i).$$

Die einzigen Unbekannten sind die  $b_i$ . Analog zu den R-K-Verfahren werden  $k$  Stützstellen innerhalb des Intervalls gewählt, um die Koeffizienten  $b_i$  zu bestimmen. Die Stützstellen sind

$$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k, \quad \tau_1 = 0.$$

Durch die Wahl des dimensionslosen Parameters  $\tau$  ist der Algorithmus zur Bestimmung der  $b_i$  von der Schrittweite  $h$  unabhängig. Mit  $F_i = f(\tau_i)$  werden die Funktionswerte an den Stützstellen bezeichnet. Sie werden zur Berechnung der  $b_i$  verwendet. Hierzu wird auf das NEWTONsche Interpolationspolynom (4.7) zurückgegriffen

$$(4.41) \quad f(\tau) = F_1 + \beta_1 \tau + \dots + \beta_{k-1} \tau \cdot (\tau - \tau_2) \cdot \dots \cdot (\tau - \tau_{k-1}).$$

Die  $\beta_i$  sind die dividierten Differenzen  $[\tau_1, \dots, \tau_{i+1}]$ , d.h.

$$\beta_1 = (F_2 - F_1) / \tau_2$$

$$\beta_2 = (F_3 - F_1) / \tau_3 - \beta_1 / (\tau_3 - \tau_2)$$

usw.

Es ist möglich, die Koeffizienten  $\beta_i$  in die Koeffizienten  $b_i$  umzurechnen und umgekehrt.

Der Algorithmus läuft folgendermaßen ab (am Beispiel von  $x, k=3$ ):

$$x(\tau_2) = x_n + \dot{x}_n h \tau_2 + h^2 \tau_2^2 \left( \frac{1}{2} f_n + [b_1 \tau_2 / 6 + b_2 \tau_2^2 / 12] \right)$$

$$x(\tau_3) = x_n + \dot{x}_n h \tau_3 + h^2 \tau_3^2 \left( \frac{1}{2} f_n + b_1 \tau_3 / 6 + [b_2 \tau_3^2 / 12] \right)$$

$$x(t_{n+1}) = x_n + \dot{x}_n h + h^2 \left( \frac{1}{2} f_n + b_1 / 6 + b_2 / 12 \right)$$

Ausgehend von den bekannten Werten an der Stelle  $\tau_1$  werden sukzessive die Werte an den Stellen  $\tau_i$  berechnet. Dabei sind zunächst aufgrund der impliziten Struktur des Verfahrens die Terme in den eckigen Klammern nicht bekannt. Über die Funktionswerte  $F_i$  werden die  $\beta_i$  und damit die  $b_i$  schrittweise berechnet bzw. verbessert. Bei den folgenden Iterationen werden von Anfang an die Terme in den eckigen Klammern berücksichtigt. Der Iterationsprozeß ist beendet, wenn sich der Wert von  $b_{k-1}$  nicht mehr wesentlich ändert. Mit den so erhaltenen Koeffizienten  $b_i$  werden dann  $x(t_{n+1})$ ,  $\dot{x}(t_{n+1})$  berechnet.

Ist der erste Integrationsschritt durchgeführt, so kann der Iterationsprozeß zur Bestimmung der  $b_i$  durch Prädiktion von Startwerten für alle  $b_i$  wesentlich beschleunigt werden. Die Prädiktion ist i. a. so gut, daß eine zweifache Iteration ausreichend ist. Sie wird durch analytische Fortsetzung der Funktion für  $f(\tau)$  mit Verschiebung des Ursprungs und Veränderung des Maßstabs, sofern sich die Schrittweite ändert, erhalten.

Die Schrittweitensteuerung erfolgt mit Hilfe einer empirischen Formel durch das letzte Glied der Zeitreihe (4.39) für  $f$ :

$$(4.42) \quad h_{n+1} = \left( 10^{-L} \frac{k(k+1) h^{k-1}}{b_{k-1}} \right)^{\frac{1}{6}}$$

Optimale Werte für den freien Parameter  $L$  müssen experimentell bestimmt werden.

Die Stützstellen  $\tau_i$  sind frei wählbar. Wie bei der Quadratur kann durch ihre geeignete Wahl eine hohe Genauigkeit erzielt werden. Es stellt sich heraus, daß mit  $k$  Stützstellen eine Konsistenzordnung von  $q=2k-1$  erreicht wird, wenn die Stützstellen gemäß der GAUSS-RADAU-Integration (ABRAMOWITZ und STEGUN, 1984) verteilt werden, d.h., hierbei ist die erste Stützstelle bei  $t_n$  ( $\tau_1=0$ ). Auch Unterteilungen gemäß GAUSS-LEGENDRE und GAUSS-LOBATTO ( $t_n$  und  $t_{n+1}$  sind Stützstellen) sind anwendbar, aber nicht so effektiv.

#### 4.4 Interpolation

Die Positionen eines Satelliten werden zu bestimmten Zeitpunkten, an denen Messungen zum Satelliten durchgeführt wurden (z.B. Laserentfernungsmessungen), benötigt. Diese Zeitpunkte fallen i.a. natürlich nicht mit den bei den Integrationsverfahren benötigten Stützstellen zusammen. Selbst wenn bei Verfahren mit variabler Schrittweite es im Prinzip möglich ist, die Schrittweite entsprechend zu wählen, ist eine solche Methode nicht zu empfehlen. Die numerische Integration sollte unabhängig von Messungen mit optimaler Schrittweite die Bahn des Satelliten ermitteln. Innerhalb eines Intervalls benötigte Positionen werden durch Interpolation gewonnen. Hierzu werden LAGRANGESche oder NEWTONSche Interpolationsformeln eingesetzt. Beim Verfahren von EVERHART können z.B. die Verfahrenspolynome (4.40) die Position für jeden gewünschten Zeitpunkt unmittelbar liefern. Obwohl die Genauigkeit innerhalb des Intervalls nur von der Ordnung  $O(h^k)$  ist, ist das für die Interpolation ausreichend.



#### 4.5. Vergleiche numerischer Verfahren

Es gibt kein bestes numerisches Integrationsverfahren. Die Einschätzung hängt von der Aufgabenstellung und dem geforderten Optimalitätskriterium ab. Speziell eingegrenzt können die Verfahren für Satellitenbahnberechnungen dadurch werden, daß aufgrund der komplizierten Berechnung der auf einen Satelliten wirkenden Kräfte nur solche Algorithmen in Frage kommen, die eine minimale Anzahl von Auswertungen der Funktion  $f$  benötigen. Für die Anwendung in der Satellitengeodäsie sind dabei wiederum nur solche Verfahren interessant, die eine hohe Genauigkeit realisieren können. Die Anforderungen liegen für Intervalle von 5 bis 30 Tagen bei 1 bis 10 cm, was relativen Fehlern (bzgl. der Halbachse des Satelliten) von  $10^{-9}$  bzw.  $10^{-8}$  für 30 bis 200 Satellitenumläufe von LAGEOS ( $a=12200$  km,  $e=0,004$ ) entspricht. Bei den Vergleichen wurde der Satellit LAGEOS deshalb verwendet, da er der fast ausschließlich genutzte Satellit für die in dieser Arbeit angeschnittenen Probleme ist. Eine Übertragung der Aussagen ist im wesentlichen auf beliebige Satelliten möglich, wenn als Bezug die Anzahl der Umläufe verwendet wird. Bei durchgeführten Testen mit niedriger fliegenden Satelliten stellte sich nur eine kleine Fehlervergrößerung, gemessen an der Anzahl der Umläufe, ein. In der Literatur gibt es eine Vielzahl von Vergleichen zwischen den unterschiedlichsten Verfahren (MOORE, 1974; EVERHART, 1974b; PÖTSCHKE und SEIFERT, 1978; LIPPOLD und REIHER, 1980; KELLER, 1984; CESIS, 1984). Sie sind nicht in jedem Fall für den hier benötigten Genauigkeitsbereich durchgeführt worden und beziehen sich oft nur auf wenige Satellitenumläufe. Insbesondere sind Vergleiche zu dem in POTSDAM-5 realisierten Verfahren von EVERHART von Interesse. Solche Vergleiche mit Mehrschrittverfahren variabler Schrittweite (KROGH, VASOMI) sind aus der Literatur zu entnehmen (EVERHART, 1974b; Cesis, 1984). Dabei schneidet das Verfahren von EVERHART sehr gut ab. Andererseits zeigen Ergebnisse von MOORE (1974), daß die Mehrschrittverfahren mit fester Schrittweite für Satellitenbahnberechnungen am günstigsten sind, wobei jedoch das Verfahren von EVERHART nicht einbezogen war. Indirekte Vergleiche sind nur bedingt nutzbar, denn Vergleiche sollten mit identischen Zahlendarstellungen im Rechner, sowohl für die Mantissenlänge als auch für die Rechenoperationen (dual, hexadezimal), durchgeführt werden. Alle diese Gründe führten zu den hier erarbeiteten Untersuchungen. Es wurden der Rechner ESER 1040 mit einer 16-stelligen Mantisse benutzt und die Bewegungsgleichung in der kartesischen

Darstellung (3.1) verwendet. Der Differenzvektor  $\Delta x$  zwischen Soll- und Istposition wird zur Beurteilung der Integrationsverfahren herangezogen. Spezielle Untersuchungen der Genauigkeiten bei verschiedenen Bahnkomponenten ergaben nach 15 Tagen typische Fehler von

Querkomponente (durch Bahnelemente $\Omega, i$ )	$<10^{-13}$
Radialkomponente (durch Halbachse $a$ , Exzentrizität $e$ )	$<10^{-12}$
Längskomponente (durch Bahnelemente $\omega, M$ )	$<10^{-9}$

Diese Werte zeigen deutlich die sehr hohe Genauigkeit der Modellierung von Quer- und Radialkomponente. Sie liegt weit unterhalb der Meßgenauigkeit ( $10^{-9}$  entspricht etwa 1 cm). Die Genauigkeit der Längskomponente ergibt sich zwangsläufig aus derjenigen der Radialkomponente, denn ein Halbachsenfehler von  $10^{-12}$  erzeugt nach 15 Tagen Positionsfehler von 1 cm. Die in den folgenden Ausführungen angegebenen Fehler  $\Delta x$  sind somit praktisch den Fehlern in der Längskomponente gleichzusetzen. Diese Komponente ist auch die am meisten gestörte und am ungenauesten modellierbare. Bei praktischen Anwendungen werden empirische Parameter für Kraftkomponenten ausgeglichen, die die Fehler in der Satellitenbewegung kompensieren sollen. Diese Parameter erfassen dann automatisch die wesentlich kleineren Integrationsfehler mit.

Bei allen Algorithmen wird grundsätzlich das PECE\*-Prinzip (vgl. 4.1), bei dem der Korrektor nur eine erneute Berechnung von Kugel- und  $C_{20}$ -Term des Geopotentials durchführt, angewandt. Im Fall des PECE-Prinzips sowie einer mehrfachen Korrektur ergaben sich keine signifikant anderen Ergebnisse. In den Abbildungen werden sowohl die jeweilige Schrittweite - bei variabler Schrittweite deren Mittelwert - als auch die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen pro Tag angegeben. Hierbei werden zwei Auswertungen pro Stützstelle zugrunde gelegt. Das gilt auch für das COWELL-Verfahren (s. 4.2.2.1.), um hier reale Vergleichswerte zu erhalten (durch die Anwendung von  $E^*$  ist dies zu vertreten).

Eine Berechnung des Fehlers der numerischen Integration ist exakt nur für die KEPLER-Bewegung möglich, da sie analytisch berechnet werden kann. Bei einem komplizierten Kraftmodell besteht die Möglichkeit, die Integration am Intervallende umzukehren und nach Erreichen der Ausgangszeit die Differenz von er-

reicher Position und Ausgangsposition zu betrachten. Hierbei erhält man nicht in jedem Falle realistische Fehlerangaben, da sich bei der Rückwärtsintegration einige Fehler wieder kompensieren können. Es bestand nicht die Möglichkeit, mit einer erweiterten Arithmetik zu rechnen, deren Lösung für den hier interessierenden Genauigkeitsbereich als fehlerfrei angesehen werden kann.

Für alle betrachteten Verfahren sind die Fehler bei der Integration einer KEPLER-Bahn den Abbildungen 4.2.a und b zu entnehmen. Es wurden Intervalle von 15 und 30 Tagen ausgewählt. Die erreichbaren Genauigkeiten liegen im Bereich von 1 cm bzw. 10 cm. Wie sich der Integrationsfehler mit der Länge des Intervalls verändert, zeigt Abbildung 4.6. Ersichtlich ist, daß eine extrem hohe Genauigkeit im Millimeterbereich, in einigen Fällen sogar weit darunter, über wenige Tage bis eine Woche erzielt werden kann. Im einzelnen soll ein Vergleich der Verfahren am Ende dieses Abschnittes erfolgen. Zunächst einige andere Betrachtungen, die auf alle Verfahren gemeinsam angewandt werden können.

Die eigentlich interessierende Genauigkeit ist nicht diejenige für eine KEPLER-Bahn, sondern für die Berechnung der gestörten Bewegung. Hierzu wurde das Geopotential bis 8. Grades in die Kraftfunktion eingeführt. Nun wäre zu erwarten gewesen, daß eine Vor- und Rückwärtsintegration über ein 15-Tage-Intervall vergleichbare oder größere Fehler als eine KEPLER-Bahn-Integration über 30 Tage hat. Die aus Abbildung 4.3.a und b zu entnehmenden Ergebnisse zeigen jedoch, daß die Fehler für die gestörte Bewegung fast immer kleiner sind, z.T. um eine Größenordnung. Das ist nicht realistisch. Der Fehler scheint innerhalb gewisser Grenzen zufällig zu schwanken (COWELL-, STÖRMER-COWELL-Verfahren). Demnach treten Effekte auf, die dafür sorgen, daß sich Fehler bei der Rückwärtsintegration wieder kompensieren, was nicht überraschend ist. Aus diesem Grunde wurde versucht, eine nahezu fehlerfreie Referenzbahn als Bezugsgröße zu nehmen. Hierfür bot sich das am besten abschneidende Verfahren (in Abb. 4.3), EVERHART 19. Ordnung ( $L=10$ ), an. In Abb. 4.4. sind alle Differenzen in Bezug auf diese Referenzbahn nach einer Integration über 15 Tage zu sehen. Selbst wenn die Referenzbahn noch Fehler bis 0,5 cm aufwies, so würde sich nahezu dasselbe Bild ergeben. Die Fehler unterhalb und in der Nähe von 1 mm sollten nicht als wahre Fehler

betrachtet werden. Hier spiegelt sich nur wider, daß eine Variation der Parameter in gewissen Grenzen keinen signifikanten Einfluß mehr hat. Wie sich der Integrationsfehler mit der Zeit verändert, ist in Abb. 4.5. aufgetragen (ausgewählte Parameter). Hier ist noch deutlicher als in Abb. 4.6. zu sehen, daß in bestimmten Fällen sich Fehler über gewisse Zeiträume kompensieren können, bevor sie dann ständig wachsen. Bei der Einschätzung sind solche, sich zufällig ergebende Effekte zu berücksichtigen. Deshalb ist es zu empfehlen, größere Zeiträume zu betrachten. Die wesentliche Aussage, die durch Abb. 4.4. erzielt wurde, ergibt sich aus dem Vergleich zu Abb. 4.2.a, nämlich daß das Verhalten der Verfahren bereits aus einer KEPLER-Bahn-Berechnung abzuleiten ist. Aus diesem Grunde soll der Vergleich der Verfahren anhand von Abb. 4.2. durchgeführt werden.

Das Verfahren von EVERHART liefert absolut die höchsten Genauigkeiten (0,5 cm nach 30 Tagen). Während zwischen der 11. und 15. Ordnung ein großer Fortschritt zu verzeichnen ist, bringt die 19. Ordnung kaum noch eine Verbesserung, da sie bereits außerhalb der Zahlendarstellung im Rechner liegt. Alle anderen Verfahren liefern Genauigkeiten, die etwa eine Größenordnung schlechter sind, wobei COWELL und ADAMS die größten Fehler haben. (Es sei jedoch bemerkt, daß alle diese Verfahren schon zu den besten gehören!) Sie liegen bei etwa 10 cm. Die Fehler der Verfahren STÖRMER-COWELL, VASOMI und COWELL/V (verbesserte Implementation, vgl. 4.2.2.1.) betragen im Mittel etwa 2 bis 5 cm. Günstig ist, die Ordnung der Verfahren zwischen 10 und 12 zu wählen.

Kurz einige Bemerkungen zur Rechenzeit. Werden 500 Schritte pro Tag ( $h=170$  s, 1000 Funktionsauswertungen) benötigt, so beträgt die Integrationszeit für eine KEPLER-Bahn etwa 15 s pro Tag. Eine auftretende Schwankung zwischen den Integrationsverfahren von maximal 20% ist für praktische Anwendungen nicht von Interesse, da der dominierende Rechenzeitanteil, wie bereits erwähnt, durch die Funktionsauswertungen verbraucht wird. Schon bei einem Geopotential 15. Grades (die Rechenzeit steigt quadratisch mit dem Grad) werden für 1000 Funktionsauswertungen bereits 80 s benötigt. Danach ergibt sich für eine 30-Tage-Modellierung eine Rechenzeit (CPU) von 50 Minuten, die auf 28 Minuten bei Nutzung der Pseudoauswertung ( $E^*$ ) sinkt (ESER 1040 mit 300000 Operationen/s).

Werden die erreichbaren Genauigkeiten unter Berücksichtigung der benötigten Funktionsaufrufe betrachtet, so sind nur noch die Verfahren EVERHART, STÖRMER-COWELL und VASOMI von Interesse. Für große Schrittweiten zeigen unter ihnen die Mehrschrittverfahren Vorteile. Bei einer in vielen Fällen ausreichenden Genauigkeit von 5 bis 10 cm sind sie um 20 - 30% effektiver. Insbesondere interessant ist das mit fester Schrittweite arbeitende Mehrschrittverfahren STÖRMER-COWELL. Es kann vorteilhaft bei der Integration von Variationsgleichungen (Gl. (2.5)) eingesetzt werden, die mit wesentlich größerer Schrittweite als die Bewegungsgleichung integriert werden können, wobei allerdings die Satellitenpositionen auch hier benötigt werden. Man kann die Schrittweitenverhältnisse so wählen, daß für die Variationsgleichungen unmittelbar die Stützstellen der Bahnberechnung genutzt werden können.

Alle Betrachtungen wurden für den Satelliten LAGEOS durchgeführt. Welchen Einfluß die Halbachse des Satelliten und das Störpotential auf die Anzahl der Schritte je Umlauf haben, ist in Tab. 4.1. angegeben. Bei LAGEOS ist kaum eine Beeinflussung der Schrittzahl durch das Geopotential festzustellen. Jedoch der niedrigfliegende Satellit STARLETTE benötigt etwa 10% mehr Schritte und insbesondere bei höherem Potential ist eine wesentlich höhere Schrittzahl (30%) erforderlich.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das in POTSDAM-5 implementierte Verfahren von EVERHART am genauesten ist und bzgl. der Effektivität im mittleren Genauigkeitsbereich keine großen Nachteile hat.

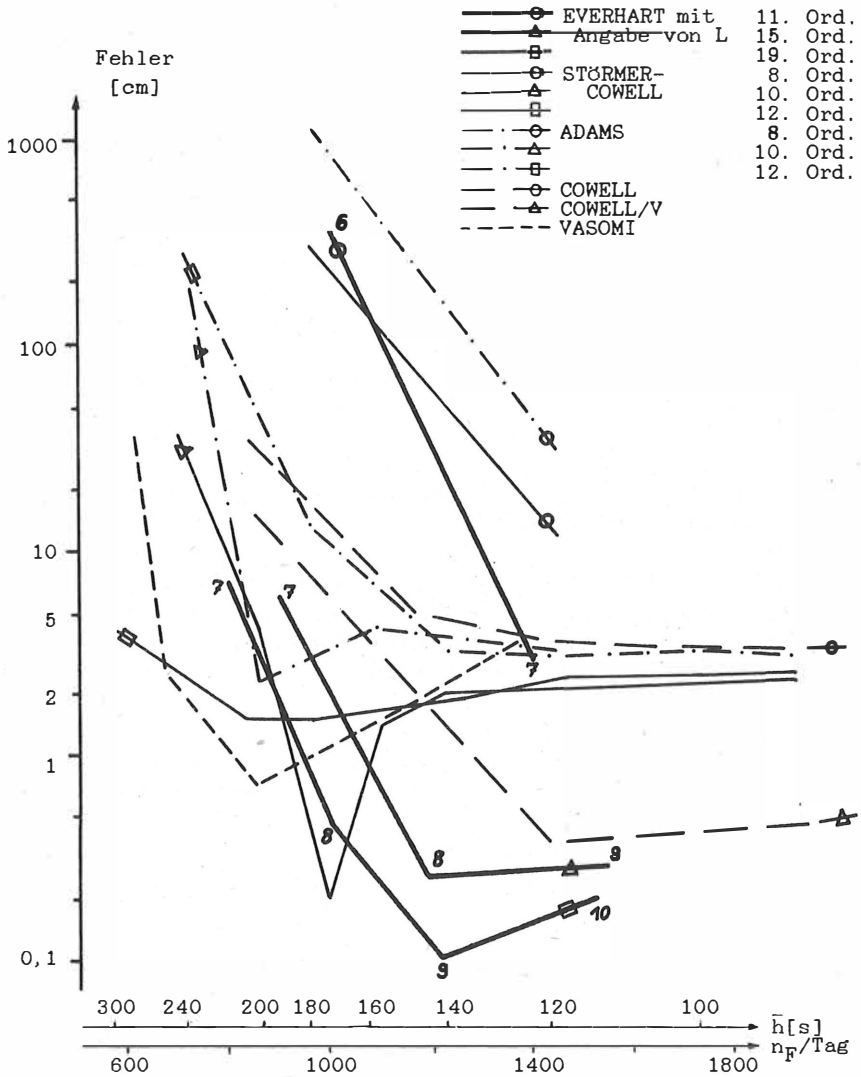


Abb. 4.2.a: Genauigkeitsdiagramm für KEPLER-Bahn über 15 Tage  
 (Satellit LAGEOS,  $a=12200$  km,  $e=0,004$ ,  $U=225$  min;  
 $\bar{h}$  - mittlerer Stützstellenabstand in Sekunden,  
 $n_F$ /Tag - Anzahl der f-Auswertungen pro Tag  
 (je Stützstelle 2 Auswertungen gerechnet) )

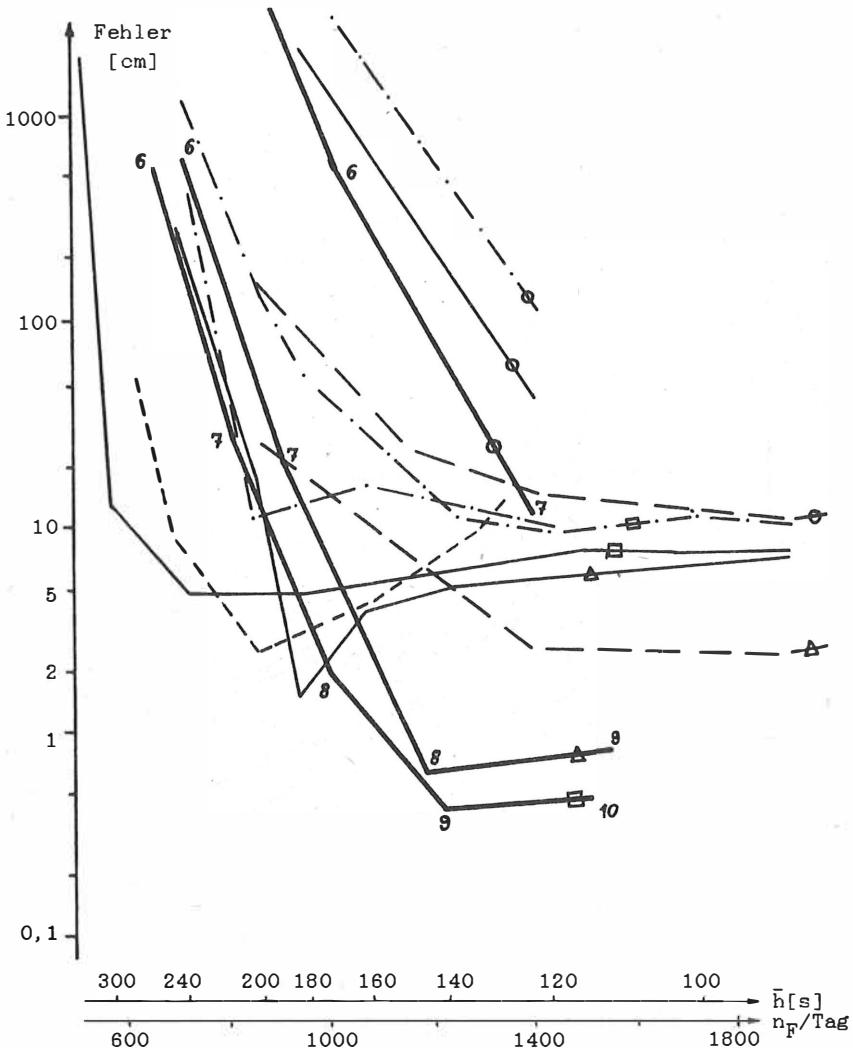


Abb. 4.2.b: Genauigkeitsdiagramm für KEPLER-Bahn über 30 Tage  
 (Satellit LAGEOS,  $a=12200$  km,  $e=0,004$ ,  $U=225$  min;  
 $\bar{h}$  - mittlerer Stützstellenabstand in Sekunden,  
 $n_F$ /Tag - Anzahl der  $f$ -Auswertungen pro Tag  
 (je Stützstelle 2 Auswertungen gerechnet) )

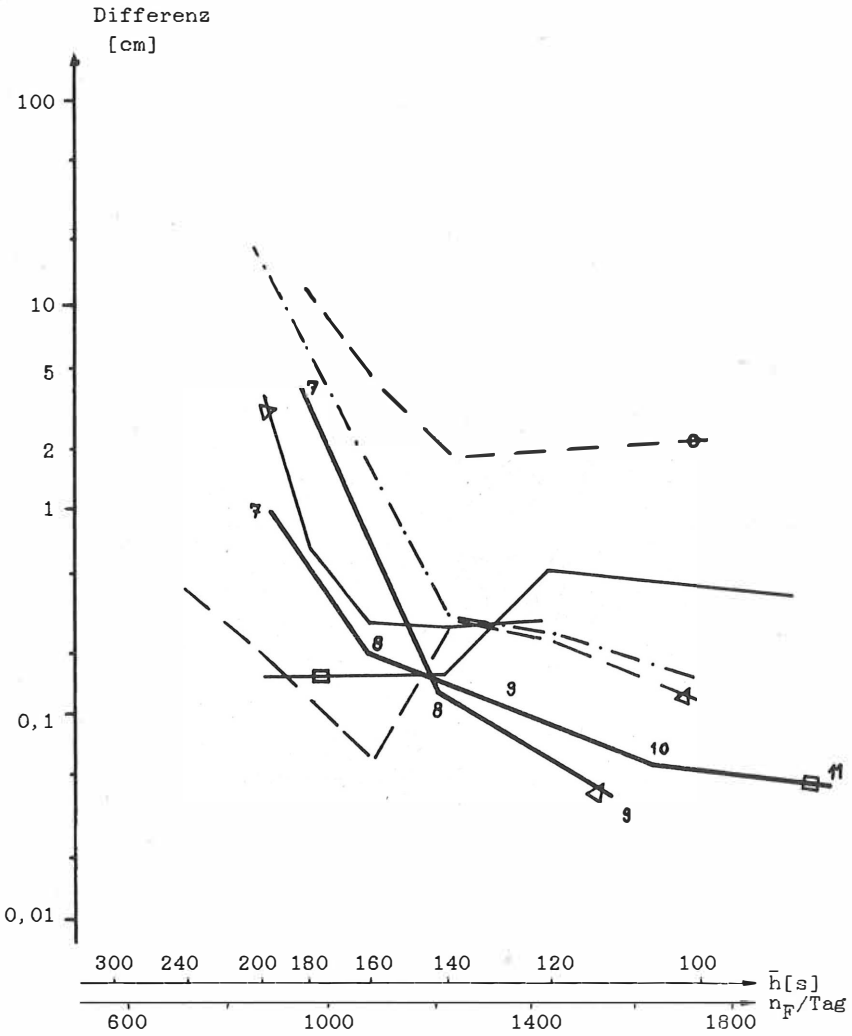


Abb. 4.3.a: Genauigkeitsdiagramm für gestörte Bewegung über 7 Tage aus Vor- und Rückwärtsintegration (Satellit LAGEOS,  $a=12200$  km,  $e=0,004$ ,  $U=225$  min; Potential 8. Grades;  $\bar{h}$ ,  $n_F$ /Tag und Legende s. Abb. 4.2.a)



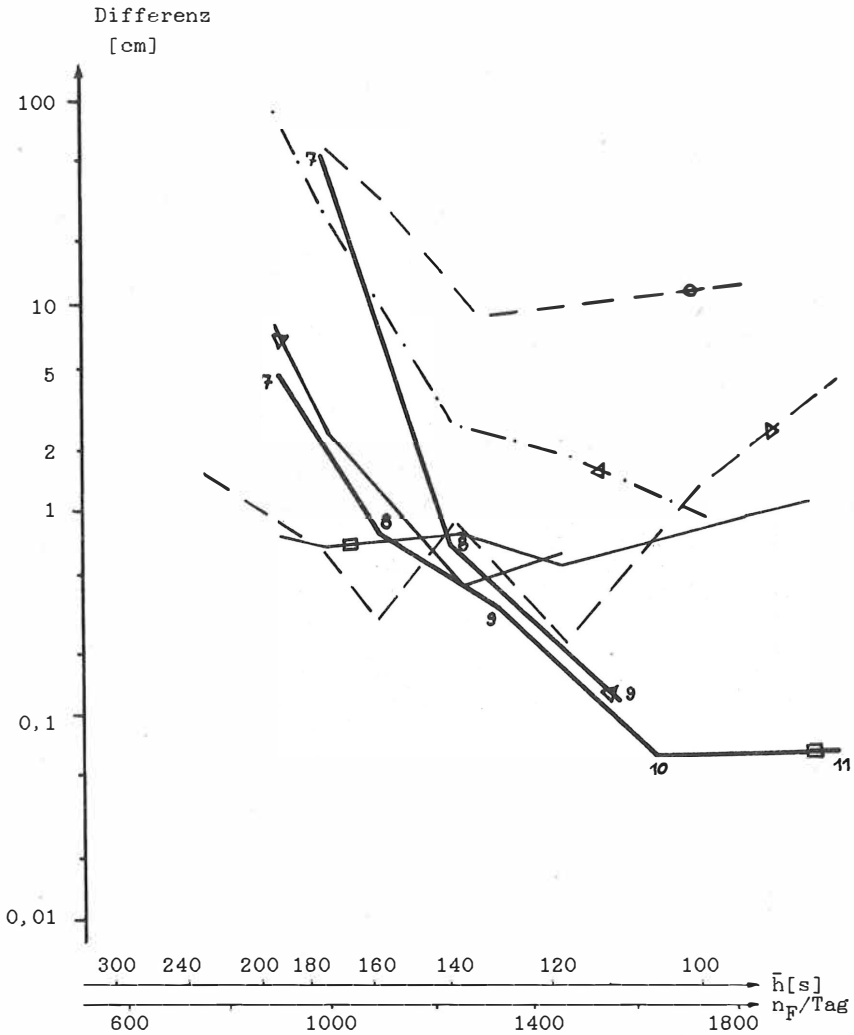


Abb. 4.3.b: Genauigkeitsdiagramm für gestörte Bewegung über 15 Tage aus Vor- und Rückwärtsintegration (Satellit LAGEOS,  $a=12200$  km,  $e=0,004$ ,  $U=225$  min; Potential 8. Grades;  $\bar{h}$ ,  $n_F$ /Tag und Legende s. Abb. 4.2. a)

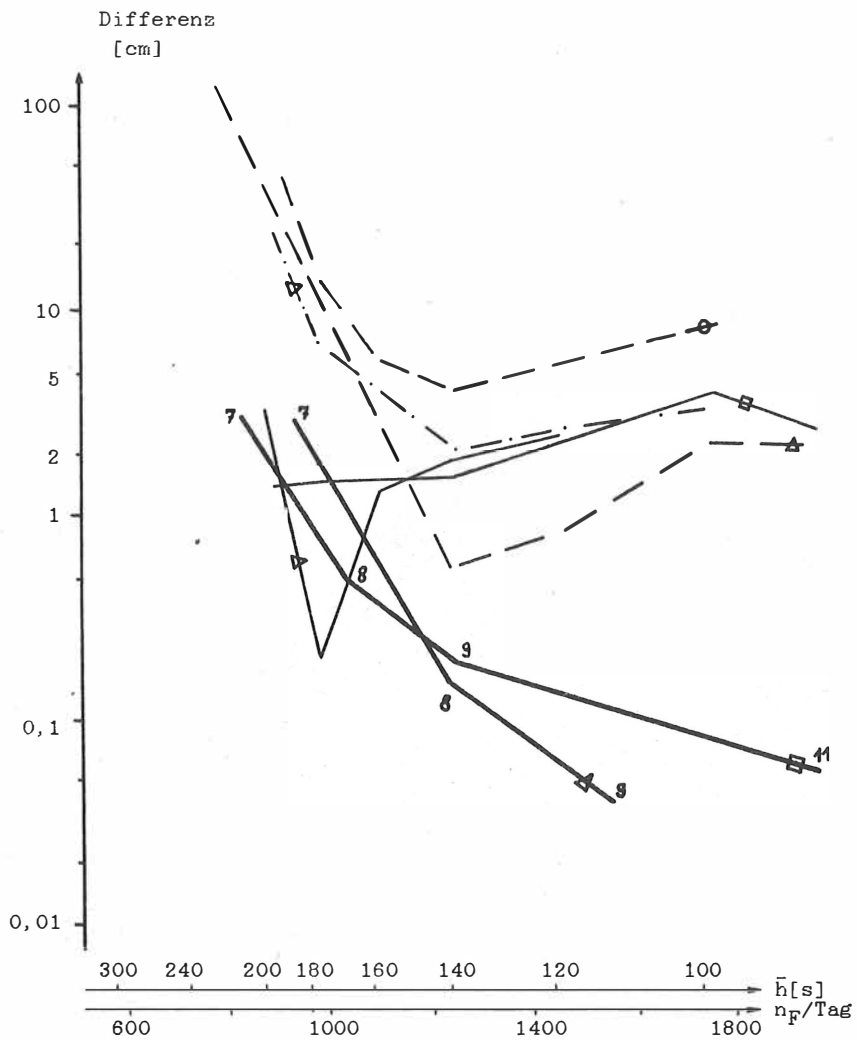


Abb. 4.4.: Genauigkeitsdiagramm für gestörte Bewegung über 15 Tage aus Differenz zu einer Referenzbahn (Satellit LAGEOS  $a=12200$  km,  $e=0.004$ ,  $U=225$  min; Referenzbahn: EVERHART 19. Ordnung,  $L=10$ ; Potential 8. Grades;  $\bar{h}$ ,  $n_F$ /Tag und Legende s. Abb. 4.2.a)

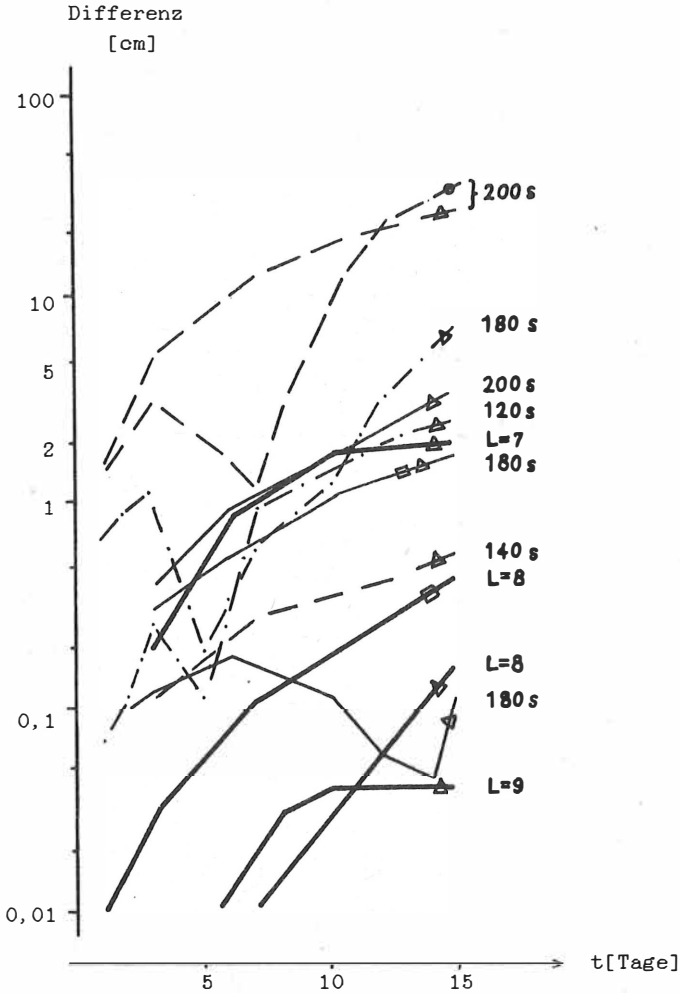


Abb. 4.5: Differenz zur Referenzbahn für eine gestörte Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit bei ausgewählten Beispielen (Satellit LAGEOS  $a=12200$  km,  $e=0,004$ ,  $U=225$  min; Referenzbahn: EVERHART 19. Ordnung,  $L=10$ ; Potential 8. Grades; Legende s. Abb. 4.2. a)

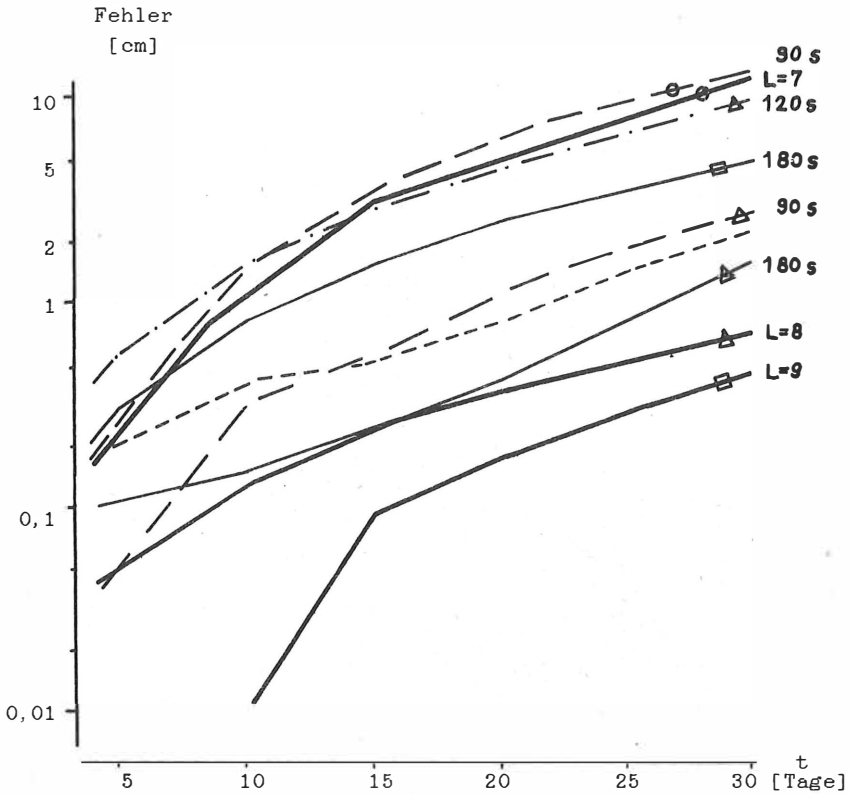


Abb. 4.6.: Fehler für KEPLER-Bahn in Abhängigkeit von der Zeit bei ausgewählten Beispielen (Satellit LAGEOS  $a=12200$  km,  $e=0,004$ ,  $U=225$  min; Legende s. Abb. 4.2.a)

Tabelle 4.1.: Anzahl der Schritte pro Umlauf für unterschiedliche Satelliten und Störpotentiale (bei EVERHART 15. Ordn.,  $L=8$ ; Satelliten: LAGEOS,  $a=12200$  km,  $e=0,004$ ,  $U=225$  min; STARLETTE,  $a=7400$  km,  $e=0,02$ ,  $U=105$  min)

Grad des Störpotentials	Anzahl der Schritte pro Umlauf	
	LAGEOS	STARLETTE
0 (KEPLER)	94	106
8	95	105
15	95	136

## 5. Referenzsysteme und ihre Realisierung

Für die meisten satellitengeodätischen Aufgaben ist heute und in naher Zukunft die Modellierung der Satellitenbewegung im Rahmen der klassischen Mechanik ausreichend. Die Aspekte der Relativitätstheorie werden im Kapitel 7. betrachtet.

In der Satellitengeodäsie ist es sinnvoll, zwei grundlegende Referenzsysteme einzuführen, ein terrestrisches und ein inertiales. Ein terrestrisches System ist am besten geeignet, alle mit dem Erdkörper verbundenen Phänomene zu beschreiben. Ein Inertialsystem wird benötigt, um die Bewegungsgleichungen aufzustellen und zu lösen. Für die durchzuführenden Berechnungen ist es notwendig, diese Systeme ineinander zu transformieren. Dabei sind komplizierte Bewegungen des Erdkörpers wie Präzession, Nutation und Polbewegung zu berücksichtigen.

### 5.1. Inertialsystem (CIS)

Inertialsysteme spielen in der klassischen Mechanik und in der speziellen Relativitätstheorie eine zentrale Rolle. Sie haben eine affine Struktur und können durch affine, insbesondere rechtwinklige kartesische Koordinaten beschrieben werden. In der Realität existieren Inertialsysteme nur in lokalen Raumbereichen (streng genommen nur in einem Punkt), in denen keine bzw. homogene Gravitationsfelder vorhanden sind, d.h. die differentielle Beschleunigung in dem betrachteten Gebiet Null ist. Insbesondere ist also der Ursprung eines Inertialsystems unbeschleunigt und die Koordinatenachsen unterliegen keiner Rotation.

Das Baryzentrum des Sonnensystems mit der zugehörigen Koordinatenzeit kann mit sehr hoher Genauigkeit ein Inertialsystem definieren. Die größte Störung dieses Systems wird durch das Sternsystem Alpha Centauri hervorgerufen und hat für den Durchmesser der Erdbahn einen Betrag von  $3 \cdot 10^{-18} \text{ ms}^{-2}$  (BLAIS, 1980). Bei Vernachlässigung der relativistischen Effekte (maximale Größenordnung  $10^{-8}$ ) kann die erdgebundene Atomzeit (IAT) anstelle der Koordinatenzeit des Baryzentrums (TDB) verwendet werden (s. dazu Kapitel 7.). Somit definieren Baryzentrum des Sonnensystems und Atomzeit ein Inertialsystem im Sinne der klassischen Mechanik. Die Beschleunigung eines Satelliten ergibt sich dann aus der Summe der Gravitationsauswirkungen aller Körper des Sonnensystems:

$$(5.1) \quad \ddot{\underline{x}} = \sum_K \underline{b}_K(S), \quad K = \{\text{Sonne, Mond, Planeten}\}, \\ S = \text{Satellit}, \\ \underline{b}_K(S) = \text{Beschleunigung von S durch K.}$$

Für die Berechnungen im erdnahen Raum ist es aber günstiger, den Koordinatenursprung ins Geozentrum zu transformieren und nur die Differenz hierzu zu betrachten. Der Ursprung dieses Koordinatensystems ist beschleunigt und seine Beschleunigung muß berücksichtigt werden:

$$(5.2) \quad \ddot{\underline{x}}^{\text{DIF}} = \sum_K \underline{b}_K(S) - \sum_{K \neq E} \underline{b}_K(E) = \underline{b}_E(S) + \sum_{K \neq E} (\underline{b}_K(S) - \underline{b}_K(E)), \\ E = \text{Erde.}$$

Ein solches geozentrisches Koordinatensystem wird als Quasi-Inertialsystem bezeichnet. Die Summe der Differenzbeschleunigungen in (5.2) kann als Störung des geozentrischen Inertialsystems angesehen werden. Für satellitengeodätische Anwendungen ist es ausreichend, die Störungen durch Sonne, Mond und eventuell Jupiter und Venus zu berücksichtigen (s. Kapitel 7.).

Von der allgemeinen Definition eines Inertialsystems bis zur praktischen Festlegung sind zwei Schritte erforderlich. Als erstes müssen die Theorien und Verfahren festgelegt werden, nach denen ein inertiales Koordinatensystem realisiert werden soll, beispielsweise geometrische Realisierung durch Richtungsmessungen zu Sternen und extragalaktischen Objekten oder die dynamische Realisierung durch Analyse der Bewegungen von Planeten, Mond und künstlichen Erdsatelliten. Zusätzlich sind alle materiellen Objekte für die Realisierung auszuwählen. Als zweites werden dann die frei wählbaren Parameter in Form von Koordinatenzuweisungen fixiert. Bei einem auf diese Weise durch Konventionen festgelegten Inertialsystem soll von einem inertialen Referenzsystem CIS (Conventional Intertial System) gesprochen werden.

Die konzeptionell einfachste Realisierung ist durch Richtungsmessungen zu Sternen und extragalaktischen Strahlungsquellen (Quasare, Radiosterne) möglich. Da bezüglich des Abstandes Erde - Sonne die Objekte praktisch unendlich weit entfernt sind, hat die Wahl des Koordinatenursprungs keinen Einfluß auf die Richtungen. Es ist naheliegend, für geozentrische Quasi-Inertialsysteme die x-y-Ebene in die Äquatorebene einer bestimmten Epoche (z.B. 2000) und die z-Achse senkrecht dazu nach Norden zu wählen. Die x-Achse

wird durch das Equinox (z.B. mittleres Equinox 2000) festgelegt. Die größte Genauigkeit bei der CIS-Realisierung wird durch radiointerferometrische Messungen auf langen Basislinien (VLBI = Very Long Baseline Interferometry) zu den extragalaktischen Objekten erreicht ( $\pm 0,005''$ ). Dieses System ist praktisch rotationsfrei, da aufgrund der großen Entfernung zu den Objekten keine meßbare transversale Geschwindigkeitskomponente vorhanden ist. Die klassischen astronomischen Sternbeobachtungen haben, begrenzt vor allem durch die Atmosphäre, nur eine Genauigkeit von etwa  $0,01''$  bis  $0,04''$  (Sternkataloge FK 4; FK 5). Die Genauigkeit der Sternkataloge wird außerdem durch Fehler in den Eigenbewegungen der Sterne (transversale Geschwindigkeitskomponente) beeinflusst. Eine durch die Rotation unserer Galaxis hervorgerufene gleichförmige Rotation des Sternenhimmels ist nicht zu identifizieren.

Die Bewegungen der Planeten des Mondes und der künstlichen Erdsatelliten müssen den Bewegungsgleichungen genügen und können somit zur Realisierung eines Inertialsystem genutzt werden. Neben der Festlegung der Richtungen sind hier auch die Bewegung des Null-Punktes (Erdschwerpunkt) und die Realisierung der Inertialzeit möglich. Diese Inertialzeit ist unter dem Begriff Ephemeridenzeit (ET) bekannt und war bis zur Einführung der Atomzeitskala (IAT) die genaueste Zeitrealisierung. Sie stand jedoch nur im nachhinein zur Verfügung. Die gemeinsame Integration der Bewegungsgleichungen der inneren Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) und des Mondes liefert derzeit eine Genauigkeit von  $\pm 0,005''$  für die Länge und  $\pm 0,01''$  für die ekliptikale Breite (WILLIAMS u.a., 1983). Das dynamische Equinoxium (Schnittpunkt des mittleren Äquators mit der mittleren Ekliptik) hat in diesem System eine Genauigkeit von  $\pm 0,001''$ . Die hohe Genauigkeit des so realisierten Systems basiert vor allem auf modernen Meßverfahren wie Radarmessungen zu den Planeten bzw. zu den die Planeten umkreisenden Raumsonden und Lasermessungen zum Mond. In jüngster Zeit sind Raumsonden zu den äußeren Planeten ebenfalls mit hoher Genauigkeit vermessen worden, so daß ihre Einbeziehung zu einer weiteren Stabilisierung beitragen wird. Künstliche Erdsatelliten haben aufgrund von Modellgenauigkeiten (säkulare Störungen) für die Realisierung eines Inertialsystems keine Bedeutung. Jedoch kann die Satellitenbahn an ein Inertialsystem angebunden werden und dieses mit ausreichender Genauigkeit über einen Zeitraum von einigen Tagen bis Wochen repräsentieren. Das ist insofern von entscheidender Bedeutung, als die Meßverfahren zu künstlichen

Erdsatelliten verhältnismäßig einfach durchführbar sind und in breitem Umfang angewandt werden können. Vor allem sind diese Verfahren für den Aufbau terrestrischer Referenzsysteme (CTS, s. 5.2) und die Bestimmung des Erdrotationsvektors wichtig.

Zur Kombination verschiedener Verfahren, sofern die zugehörigen Beobachtungsstationen nicht in unmittelbarer Nachbarschaft liegen, ist ein genaues terrestrisches Referenzsystem notwendig (0.005" entsprechen 15 cm am Äquator). In diesem Sinne sind die Realisierung von Inertialsystem (CIS) und terrestrischem System (CTS) als Einheit zu sehen. Insbesondere ist für die sehr genaue Realisierung des inertialen Bezugssystems eine Verbindung der VLBI-Stationen mit Stationen für Planeten- und Mondlasermessungen herzustellen (Empfehlungen MERIT/COTES-Projekt; DICKEY, 1985).

### 5.2. Terrestrisches Referenzsystem (CTS)

Neben dem inertialen Bezugssystem zur Beschreibung der Satellitenbewegung wird noch ein terrestrisches Bezugssystem (CTS, Conventional Terrestrial System) benötigt. In diesem können dann bequem Ereignisse und Objekte, die mit dem Erdkörper verbunden sind (Lage von Beobachtungsstationen auf der Erdoberfläche, Gravitationsfeld, Lage der Rotationsachse innerhalb des Erdkörpers u. a. m.) lokalisiert werden. Wäre die Erde ein starrer Körper, so gäbe es prinzipiell keine Probleme bei der Festlegung eines solchen Bezugssystems. Die Punkte der Erdoberfläche können jedoch bei den Genauigkeitsanforderungen von  $10^{-8}$  nicht mehr als unveränderlich angesehen werden.

Die im und auf den Erdkörper wirkenden Kräfte (Tektonik, Gezeiten) sorgen für eine ständige Lageveränderung von Punkten auf der Erde. Physikalisch sinnvolle Bezugssysteme können durch TISSERAND-Achsen (der relative Drehimpuls der Teilchen des Erdkörpers verschwindet) und Hauptträgheitsachsen (Figurenachsen) gegeben werden (MUNK und McDONALD, 1960; MORITZ, 1979). Jedoch sind diese Systeme nicht für eine praktische Realisierung geeignet. Ihre Grundideen sollen aber beibehalten werden, indem die z-Achse möglichst nahe der Hauptträgheitsachse gelegt wird (einfache Gestalt der harmonischen Entwicklung des Geopotentials) und das Koordinatensystem so mit der Erde rotiert, daß im Mittel keine relative Rotation der Erdoberfläche bezüglich des Koordina-



tensystems auftritt. Es sei zunächst einmal angenommen, daß die Punkte der Erdoberfläche nur periodischen, modellierbaren Bewegungen (z.B. Gezeiteneffekten) unterliegen, d.h., die Erdkruste sei im Mittel bezüglich des Erdkörpers und damit auch relativ zum Erdschwerpunkt fixiert. Unter dieser Voraussetzung kann wie bei einer starren Erde verfahren werden und den mittleren Punktlagen Koordinaten zugewiesen werden. Auf diese Weise wurde das BIH-System im Jahre 1968 durch Festlegung von Breiten- und Längenspositionen für 68 Instrumente derart definiert, daß die z-Achse des Koordinatensystems mit dem mittleren Pol der Jahre 1900-1905 zusammenfällt (CIO-Pol, Conventional International OrigIn). Die x-Richtung wurde durch die "astronomische Meridianebene GREENWICH" festgelegt. Nun bewegen sich die Punkte der Erdkruste aber nicht nur periodisch. Einmal kann der Erdschwerpunkt sich gegenüber der Erdkruste verlagern. Dieser Effekt ist jedoch noch nicht nachgewiesen worden und wird auch nur kleine Beträge annehmen können. Anders sieht es mit plattentektonischen Bewegungen aus. Bei den heutigen Meßgenauigkeiten würden bei Festlegung eines Referenzsystems ohne Berücksichtigung solcher Bewegungen schon nach einigen Jahren Widersprüche in dem Bezugssystem nachweisbar sein. Aufgrund eines aus Messungen gewonnenen kinematischen Tektonikmodells müssen den Punkten Bewegungen zugeordnet werden. Dabei ist der Anteil der tektonischen Bewegungen, der global einer beliebigen Rotation der drei Achsen entspricht, prinzipiell nicht durch Messungen zu kosmischen Objekten von einer Verlagerung der Rotationsachse im Erdkörper sowie einer Korrektur der Rotationsphase (UT1) zu trennen. Diese Frage könnte nur durch Verbindung der Erdkruste mit dem Erdinneren entschieden werden (Lage von Hotspots, Gravimetermessungen). Eine relative Bewegung zwischen Erdkruste und Erdinnerem soll hier also nicht betrachtet werden. Sie hat jedoch Einfluß auf die Berechnung des Drehimpulsvektors der Erde, wie er in den Theorien von Präzession, Nutation und Polbewegung benötigt wird, jedoch keinen signifikanten.

Das CTS wird also durch Koordinatenzuweisungen für mittlere, von Perioden befreite Positionen von Punkten für eine festgelegte Epoche realisiert. Aufgrund der noch nicht bekannten rezenten Tektonik werden 5 bis 10 Jahre mit genauesten Messungen benötigt, um ein genaues CTS aufstellen zu können. Da heute noch keine signifikanten Abweichungen vom Plattentektonikmodell AMO-2 (MINSTER und JORDAN, 1978) ermittelt werden konnten, ist vorerst

dieses Modell zur Reduktion aller Stationskoordinaten auf eine Bezugsepoche empfohlen worden.

Neben den schon für die Inertialsystemrealisierungen entscheidenden Meßmethoden VLBI und Mondlaser spielen künstliche Erdsatelliten für die Realisierung von terrestrischen Referenzsystemen eine wichtige Rolle. Solche satellitengeodätischen Meßverfahren und Auswertemethoden sind ökonomischer und damit effektiver in größerem Umfang anzuwenden. Durch geeignete Wahl der Satellitenbahnen (hinsichtlich Geometrie geodätischer Netze oder Empfindlichkeit gegenüber Phänomenen wie z.B. Pollage, Gezeiten) können Satellitenverfahren für bestimmte Problemstellungen Vorteile haben.

### 5.3. Transformation zwischen CTS und CIS

#### 5.3.1. Allgemeine Betrachtungen zu den Transformationen

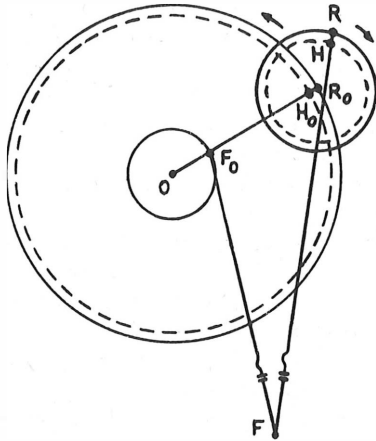
Für die Auswertung von Meßwerten (z.B. Entfernungen zu Satelliten) und die Berechnung des Einflusses von erdbezogenen Parametern (z.B. Gravitationsfeld) auf den Satelliten ist es notwendig, die Koordinaten der terrestrischen Positionen ins Inertialsystem, in dem die Satellitenpositionen vorliegen, zu transformieren. Dabei ist zu beachten, daß der Erdkörper als rotationssymmetrischer Kreisel unter dem Einfluß der Kräfte von Sonne, Mond und Planeten komplizierte Bewegungen ausführt. Sie werden am besten aufgespalten in Bewegungen der Drehimpulsachse (oder Rotationsachse) bezüglich des CIS, die als Präzession und Nutation bezeichnet werden, und in Veränderung der Lage dieser Achse relativ zum CTS, die als Polbewegung bezeichnet wird. Die Bewegungen der Punkte bezüglich des CTS durch Gezeiten u.a. müssen in die Transformation einbezogen werden.

Die aus Sternbeobachtungen bestimmte Präzessionskonstante hat eine Genauigkeit von  $\pm 0,15''/\text{Jahrhundert}$  ( $\approx 3 \text{ cm/Jahr}$  am Äquator). Es ist zu erwarten, daß durch VLBI- und Mondlasertechnik bis zum Jahr 2000 eine Genauigkeit von  $\pm 0,06''$  erreicht wird. Aufgrund der geringen Zeitspanne des Meßmaterials ist derzeit bei den modernen Verfahren die Präzession nicht von der 18,6-jährigen Nutationsperiode zu trennen. Die Nutation als erzwungene Bewegung durch Mond und Sonne ist sehr genau ( $< 0,001''$ ) modellierbar. Für die Drehimpulsachse  $H$  ist sie unabhängig von der Elastizität der

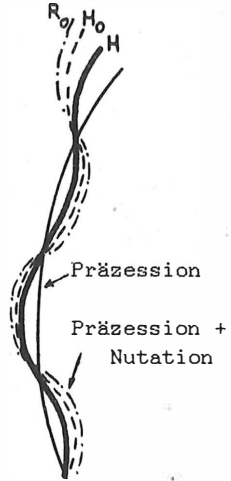
Erde und vom flüssigen Erdkern (FEDOROV, 1963; MORITZ, 1980). Das Nutationsmodell für H kann daher für die starre Erde aufgestellt werden. Die genaueste zugehörige Theorie wurde von KINOSHITA (1977) erarbeitet. Beim Übergang auf die Nutation für andere Achsen spielt jedoch das Modell für den Erdaufbau eine Rolle. Aus einer Kombination der Nutation für H und der Polbewegung für die entsprechende Achse ergibt sich die zugehörige Nutation. Die Polbewegung hängt von der Elastizität der Erde und ihrem inneren Aufbau ab. Diese Probleme sind ausführlich abgehandelt in McCLURE (1973), MORITZ (1980, 1981, 1982) und sollen hier nicht näher erläutert werden. Im wesentlichen ergeben sich Bewegungen, wie sie in Abb. 5.1. dargestellt sind. Momentane Figuren(F)-, Drehimpuls(H)- und Rotationsachse (R) vollführen nahezu tägliche Bewegungen um die dem kräftefreien Fall entsprechenden Achsen  $F_0$ ,  $H_0$  bzw.  $R_0$ . Die Radien dieser Bewegungen unterliegen periodischen Schwankungen und nehmen für H und R Beträge bis zu 60 cm und für F bis zu 60 m an. Die zugehörigen Perioden der freien Bewegungen liegen bei 435 Tagen (CHANDLER-Periode) bzw. mit sehr kleinen Amplituden bei einem Tag (NDFW - Nearly Diurnal Free Wobble). Eine meßbare Amplitude für NDFW konnte bisher nicht nachgewiesen werden.

Nun steht die Frage, welche dieser Achsen meßtechnisch am besten oder überhaupt beobachtbar sind. Hierbei sollen nur Messungen geometrischer Elemente, d.h. Entfernungen oder Richtungen von der Erde zu extraterrestrischen Objekten, betrachtet werden. Am einfachsten läßt sich der prinzipielle Sachverhalt am Beispiel der starren Erde im kräftefreien Fall verdeutlichen (Abb. 5.2.). Die Rotation der Erde entspricht dem Abrollen des Körperkegels um den Nutationskegel, wobei R und F kreisförmige Bewegungen um die im Raum feststehende Achse H ausführen. Alle anderen Körperpunkte haben nahezu kreisförmige Bahnen. Wird für eine Erdumdrehung die Bewegung von H im Körpersystem vernachlässigt, so kann H als Rotationsachse gewählt werden. Es wird also H beobachtbar sein, R nur indirekt über die Länge der Umlaufperiode von H im Körpersystem.

Ähnlich sieht es im allgemeineren Fall aus. Zunächst kann vorausgesetzt werden, daß die Position von H im Raum zu jedem Zeitpunkt berechenbar ist, d.h., H könnte man sich als im Raum feststehend vorstellen. Setzt man weiterhin voraus, daß während einer Umdrehung die Umlaufperiode von H um  $H_0$  nicht signifikant von der Tagesperiode abweicht und der Radius dieser Bewegung konstant sowie  $H_0$  konstant bezüglich des Körpersystems ist (5 cm pro 12



$R - R_0 \leq 0,6 \text{ m}$   
 $H - H_0 \leq 0,4 \text{ m}$   
 $H_0 - O \leq 10 \text{ m}$   
 $F - F_0 \leq 60 \text{ m}$



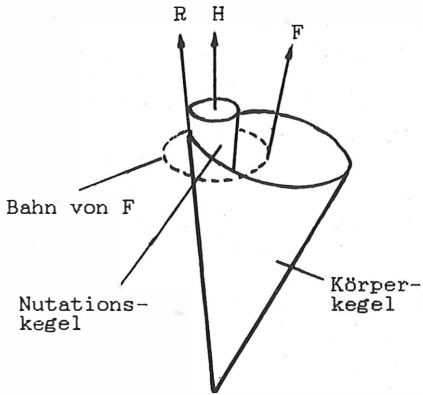
Polbewegung

terrestrisches System  
(körperfest)

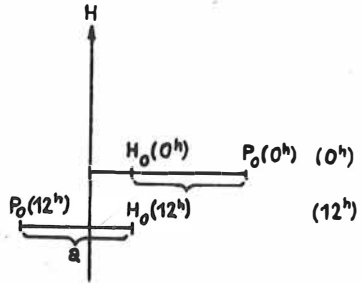
Präzession und Nutation

Inertialsystem  
(raumfest)

Abb. 5.1.: Bewegung von Drehimpuls- (H), Rotations- (R) und Figurenchse (F) im körperfesten (CTS) und raumfesten (CIS) Koordinatensystem



starre Erde



beliebiger Erdaufbau

Abb. 5.2.: Zur Beobachtbarkeit der Achsen (betrachtet im CIS)

Stunden); so kann im Raum  $H_0$  relativ zu  $H$  als feststehend angesehen werden. Punkte auf der Erdoberfläche vollführen in diesem Fall eine Rotation um  $H_0$  (Abb. 5.2.). Das hat zur Konsequenz, daß Beobachtungen extraterrestrischer Objekte als Erdrotationsachse  $H_0$  liefern.

Aus diesen Gründen wird  $H_0$  auch als Himmelspol C (Celestial Ephemeris Pol; s. LEICK, 1977) bezeichnet. C ist in erster Näherung der freie Pol (CHANDLER-Pol), beinhaltet aber auch Effekte von Ozean, Atmosphäre und anderen Phänomenen. Alle anderen Achsen ( $H$ ,  $R_0$ ,  $R$ ,  $F_0$ ,  $F$ ) sind in diesem Sinne nicht beobachtbar. Die Nutation des Himmelspols C, d.h. seine Lage im Raum, muß nun berechnet werden. Sie ergibt sich aus der Korrektur der Nutation für  $H$  um die Differenz von  $H$  und  $C$  im Körpersystem:

$$(5.3) \quad n_C = n_H + i e^{i\Phi} (p_H - p_C).$$

Hierbei muß die entsprechende Nutationsfrequenz  $\Phi$  berücksichtigt werden. Der so definierte Himmelspol vollführt weder im CTS noch im CIS tägliche Bewegungen. Das seit 1980 akzeptierte Nutationsmodell (IAU 1980 Theory of Nutation) basiert auf dem Modell von KINOSHITA für  $n_H$  und dem Modell der Polbewegung ( $p_H - p_C$ ) von WAHR und ist unter dem Begriff 'WAHRsches Nutationsmodell' bekannt. Hierzu wurde das Erdmodell 1066A von GILBERT und DZIEWONSKI (1975) verwendet. Grundlegende Konstanten entsprechen dem 'IAU (1976) System der Astronomischen Konstanten'. Treten keine unmodellierten Effekte auf, so wird die Nutation in vollkommener Weise zum beobachteten Pol C korrespondieren. Treten allerdings solche Effekte auf, die die Differenz  $|n_H - n_C|$  beeinflussen (z.B. Atmosphäre, Ozean, Tektonik), so erzeugen die zugehörigen Nutationsfehler eine Tagesperiode in den Messungen. Ein solcher Fehler kann z.T. umgangen werden, wenn für entsprechende Frequenzen die Nutationsglieder aus Beobachtungen abgeleitet werden.

Die Lage von C im Körpersystem (die Polbewegung) ist nicht modellierbar. Es ist nicht möglich, wie bei der Präzession, die Amplitude dieser freien Bewegung einmalig zu messen und dann zu modellieren. Durch eine Reihe noch unmodellierbarer Effekte in den Parametern dieser Bewegung ist es erforderlich, die Polbewegung ständig meßtechnisch zu überwachen (Internationaler Polbewegungsdienst, BIH).

5.3.2. Durchführung der Transformation

Als CIS (s. Abb. 5.3.) wird das mittlere astronomische System des Jahres 2000 (J 2000,0; MJD = 51544,5) (LIESKE u.a. 1977) gewählt. Die x-Achse ist durch den mittleren Frühlingspunkt  $\bar{\gamma}_F$  bestimmt, der durch die Ekliptik J 2000,0 ( $E_F$ ) und den mittleren Äquator J 2000,0 ( $A_F$ ) gebildet wird. Die z-Achse steht senkrecht auf  $A_F$  und die y-Achse wird ergänzt (Rechtssystem). Es besteht die Forderung, eine Transformation zwischen CIS und CTS mit höchsten Genauigkeitsansprüchen zu realisieren.

Durch Präzessions- und Nutationsbewegungen wird die Lage des Himmelspols C im CIS beschrieben. Das dazugehörige begleitende Koordinatensystem wird als wahres astronomisches System bezeichnet. Die allgemeine Präzession pro Jahrhundert für J 2000,0 ist:

$$(5.4) \quad p = (5029,0966 + 2,22226 T)''/\text{Jh.},$$

T in Jahrhunderten zu 36525 Tagen seit J 2000,0  
gerechnet (dimensionslos)

Der Schnittwinkel zwischen momentaner Ekliptik  $E_D$  und momentanem mittleren Äquator  $A_D$  beträgt:

$$(5.5) \quad \bar{\epsilon}_A = 23^\circ 26' 21.448'' - 46,815'' \cdot T - 0,00059'' \cdot T^2.$$

Die Transformation zwischen den Systemen  $(\bar{\gamma}_F, \bar{A}_F)$  und  $(\bar{\gamma}_D, \bar{A}_D)$ , wird durch die Präzessionsmatrix vollzogen:

$$(5.6) \quad \underline{P} = \underline{R}_3(-z_A) \underline{R}_2(\theta_A) \underline{R}_3(-\zeta_A),$$

wobei die Rotationswinkel durch Zeitpolynome gegeben sind (LIESKE u.a. 1977, IAU 1976 System der Astronomischen Konstanten). Für die Drehmatrizen gilt:

$$(5.7) \quad \underline{R}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad \underline{R}_2(y) = \begin{pmatrix} \cos y & 0 & -\sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin y & 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

$$\underline{R}_3(z) = \begin{pmatrix} \cos z & \sin z & 0 \\ -\sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bem.: Stets mathematisch positiver Drehsinn bei Draufsicht auf die Achsen.

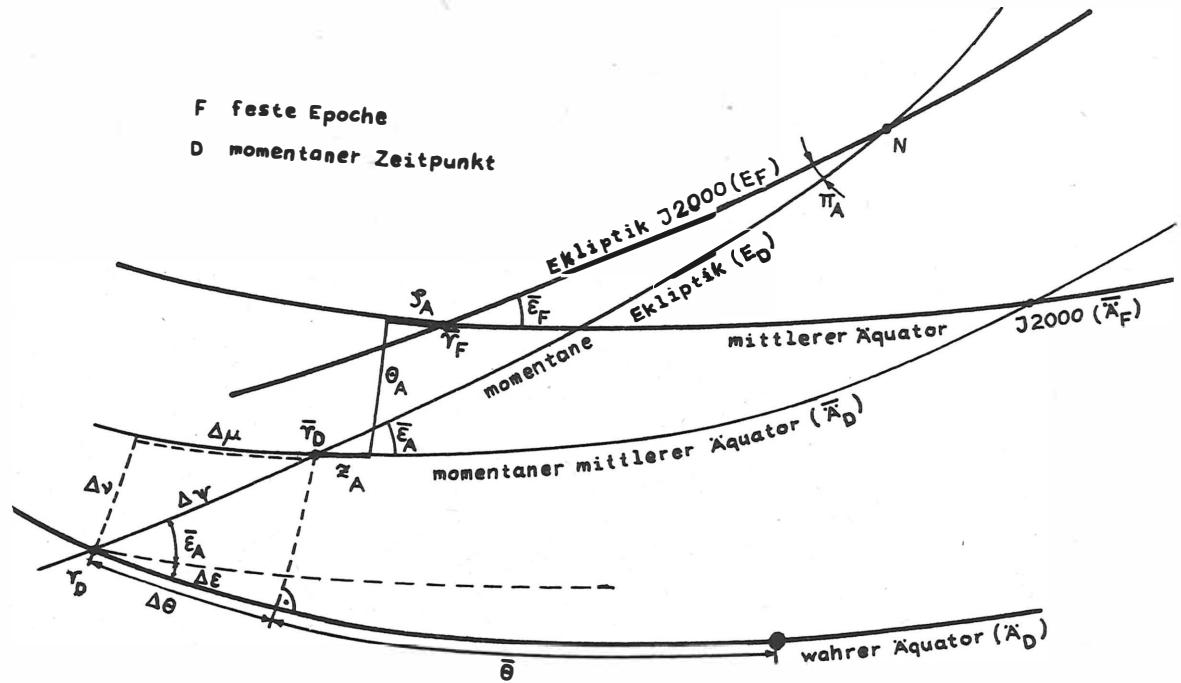


Abb. 5.3.: Inertiales Referenzsystem

Mit Hilfe der Nutationswinkel  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\epsilon$  (IAU 1980 Nutation, SEIDELMANN 1982) wird in das wahre astronomische System ( $Y_D, X_D$ ) gedreht.

Die Nutationsmatrix lautet:

$$(5.8) \quad \underline{N} = \underline{R}_1(-\Delta\epsilon) \underline{R}_2(\Delta\nu) \underline{R}_3(-\Delta\mu),$$

$$\text{mit } \Delta\mu = \Delta\psi \cos \bar{\epsilon}_A, \quad \Delta\nu = \Delta\psi \sin \bar{\epsilon}_A$$

und wird häufig in folgender Näherungsform verwendet:

$$(5.9) \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\mu & -\Delta\nu \\ \Delta\mu & 1 & -\Delta\epsilon \\ \Delta\nu & \Delta\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Die Form hat eine Genauigkeit von  $10^{-11}$  bei einem Winkel von  $\approx 1''$  und  $5 \cdot 10^{-9}$  bei  $20''$ . Sie ist nicht immer ausreichend, so daß mit einer Genauigkeit von  $10^{-13}$  bei  $20''$  die Näherung

$$(5.10) \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\mu \cdot \cos\Delta\nu & , & -\Delta\mu & , & -\Delta\nu \\ \Delta\mu - \Delta\nu \cdot \Delta\epsilon & , & \cos\Delta\mu \cdot \cos\Delta\epsilon & , & -\Delta\epsilon \\ \Delta\nu + \Delta\mu \cdot \Delta\epsilon & , & \Delta\epsilon - \Delta\mu \cdot \Delta\nu & , & \cos\Delta\nu \cdot \cos\Delta\epsilon \end{pmatrix}$$

in solchen Fällen Anwendung findet.

Für die Berechnung von  $\Delta\mu$ ,  $\Delta\nu$  kann  $\bar{\epsilon}_A$  für längere Zeitabschnitte auf eine vorgegebene Zeit  $T_0$  (Mitte des Untersuchungszeitraumes) fixiert werden. Bei Zeitintervallen  $(t-T_0)$  von einem Jahr hat  $Y_D$  dann einen Positionsfehler von 1 mm (am Äquator). Die Matrix (5.10) wird für Transformationen von Stationskoordinaten bei Vergleichen mit den Meßwerten benötigt. Für die Positionierung der Erde zur Berechnung der auf den Satelliten wirkenden Kräfte ist die Matrix (5.9) ausreichend. In diesem Fall wird eine quadratische Interpolation der Nutation realisiert, so daß die rechenzeitintensiven Berechnungen von  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\epsilon$  nur in Abständen von einigen Stunden durchgeführt werden. Hierbei entstehen zusätzliche Positionsfehler von maximal 1 mm (bei Abständen von 6 Stunden).

Nach der so vorgenommenen Positionierung des Himmelspols C im CIS erfolgt die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse. Sie wird durch die Sternzeit, den Winkel  $\Theta$  zwischen dem Frühlingspunkt und dem Nullmeridian, beschrieben. Für die mittlere Stern-



zeit (Winkel bezüglich  $\bar{Y}_D$ ) gilt:

$$(5.11) \quad \bar{\Theta}(t) = A + B \cdot (t - T_F) + C \cdot (t - T_F)^2,$$

$$A = 280,46061 \ 838 \text{ } ^\circ,$$

$$B = 360,98564 \ 73662 \ 87 \text{ } ^\circ/\text{d}, \quad T_F = 51544,5,$$

$$C = 0,290788 \ 10^{-12} \text{ } ^\circ/\text{d}^2, \quad t \text{ in Tagen}.$$

Aufgrund von Rundungsfehlern im Rechner ist es günstiger, sich auf die Epoche  $T_O$  zu beziehen:

$$(5.12) \quad \bar{\Theta}(t) = \bar{\Theta}(T_O) + B' \cdot (t - T_O) + C \cdot (t - T_O)^2,$$

mit

$$B' = B + 2 \ C \cdot (T_O - T_F).$$

Das quadratische Glied ist in (5.12) bei einem Positionsfehler von maximal 4 mm für Zeitintervalle  $(t - T_O)$  von 1 Jahr vernachlässigbar. Die wahre Sternzeit (Winkel bzgl.  $Y_D$ ) ergibt sich durch Addition der Nutation in der Länge:

$$(5.13) \quad \bar{\Theta}(t) = \bar{\Theta}(t) + \Delta\psi(t) \cos(\bar{\epsilon}_A + \Delta\epsilon) \approx$$

$$\approx \bar{\Theta}(t) + \Delta\psi(t) [\cos\bar{\epsilon}_A(T_O) - \Delta\epsilon \sin\bar{\epsilon}_A(T_O)].$$

Die Berechnung von  $\bar{\Theta}$  setzt immer noch eine regelmäßig rotierende Erde voraus. Die reale Erdrotation ist jedoch einigen Schwankungen durch Gezeiten, Atmosphäre und anderen Phänomenen unterworfen und ergibt sich zu:

$$(5.14) \quad \Theta(t) = \bar{\Theta}(t) + \Delta\Theta_G(t) + \Delta\Theta_U(t).$$

$\Delta\Theta_G$  ist der sehr gut modellierbare Anteil aufgrund von Gezeiten einflüssen. Alle nichtmodellierten Rotationsschwankungen sind im Term  $\Delta\Theta_U$  enthalten. Er basiert auf den Messungen des Internationalen Dienstes (BIH), der durch astronomische und kosmische Verfahren die Rotationsphase der Erde ständig registriert. Die zugehörige Zeit wird als UT1 bezeichnet (Einflüsse durch Stationsbreite und Pollage eliminiert).

Das CTS ist durch Festlegung der Koordinaten  $X_E$  für die Stationen zur Epoche  $T_A$  gegeben. Zu Beginn wird die säkulare Änderung der mittleren Stationsposition aufgrund plattentektonischer Bewegungen berücksichtigt. Nach einem Satz von EULER kann jede ortho-

gonale Transformation auf einer Kugeloberfläche durch Rotation um eine entsprechend orientierte Achse erfolgen und somit jede Bewegung von Platten in erster Näherung durch einen Rotationspol  $P(\varphi, \lambda)$  (Achsenlage) und eine dazugehörige Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  angegeben werden. MINSTER und JORDAN (1973) haben ein Modell AMO-2 der globalen Plattentektonik, das Rotationspole und -geschwindigkeiten beinhaltet, aus geophysikalischen Daten berechnet. Die momentane mittlere Stationsposition ist demnach:

$$(5.15) \quad \underline{X}(t) = \underline{S} \underline{X}_E = \underline{X}_E + \underline{V}(\underline{X}_E) \cdot (t - T_A),$$

$$\underline{S} = \underline{S}(t - T_A; P(\varphi, \lambda), \omega),$$

wobei der Einfachheit halber stets  $\underline{X}_E := \underline{X}_E(T_A)$  benutzt wird.

Die Matrix  $S$  kann aufgrund der sehr geringen Geschwindigkeit  $\omega$  (wenige cm/Jahr) durch eine lineare Geschwindigkeit  $\underline{V}(\underline{X}_E)$  für jede Station ersetzt werden.

Gegenüber dieser mittleren Lage erfährt die Station jetzt noch periodische Schwankungen, die durch Gezeiten der festen Erde und durch Deformationen aufgrund von Meeresgezeitenbelastungen bedingt sind. Andere Effekte sollen hier nicht betrachtet werden (z.B. Luftdruck), da sie z.Z. nur unvollständig modellierbar sind. Stellt  $\underline{G}^E$  die nichtlineare gezeitenabhängige Transformation dar, so ergibt sich die momentane Position im CTS zu:

$$(5.16) \quad \underline{X}_E(t) = \underline{G}^E \underline{X}_E(t) = \underline{G}^E \underline{S} \underline{X}_E.$$

Die momentane Lage der Himmelspolachse  $C$  bezüglich des CTS wird durch die Polkoordinaten  $x_p, y_p$  gegeben. Hierbei ist zu beachten, daß die  $y_p$ -Achse in Richtung der negativen  $Y$ -Achse zeigt. Die Gesamttransformation vom CTS ins CIS lautet:

$$(5.17) \quad \underline{X}_R = \underline{G} \underline{P}^T \underline{N}^T \underline{R}_3(-\theta) \underline{R}_2(x_p) \underline{R}_1(y_p) \underline{S} \underline{X}_E = \underline{G} \underline{T} \underline{S} \underline{X}_E,$$

wobei sich als günstiger erweist, die gezeitenabhängigen Transformationen im CIS, in den Mond- und Sonnenpositionen gegeben sind, durchzuführen. Für eine Genauigkeit von  $<10^{-11}$  gilt:

$$(5.18) \quad \underline{T} = \underline{P}^T \underline{N}^T \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -x_p \cos \theta - y_p \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -x_p \sin \theta + y_p \cos \theta \\ x_p & -y_p & 1 \end{pmatrix}$$

Die Transformation  $\underline{G}$  wird in zwei Schritten realisiert und nur das Gezeitenpotential zweiten Grades berücksichtigt (Genauigkeit < 1 cm).

Im ersten Schritt werden die frequenzunabhängigen LOVEschen Parameter verwendet. Der Verschiebungsvektor für die Station ergibt sich daraus zu:

$$(5.19) \quad \Delta \underline{X}_R = \sum_K \mu_K \frac{|\underline{X}_R|^4}{|\underline{X}_K|^3} \left\{ 3l_2 \cos \psi_K \frac{\underline{X}_K}{|\underline{X}_K|} + \left[ 3 \left( \frac{h_2}{2} - l_2 \right) \cos^2 \psi_K - \frac{h_2}{2} \right] \frac{\underline{X}_R}{|\underline{X}_R|} \right\},$$

mit  $\underline{X}_R, \underline{X}_K, \psi_K$  - geozentrischer Vektor der Station und des Himmelskörpers (Mond, Sonne) und Winkel zwischen  $\underline{X}_R, \underline{X}_K$ ,

$h_2, l_2$  - LOVEsche und SHIDASche Zahl ( $h_2=0,609, l_2=0,0852$ ),

$\mu_K$  - Massenverhältnis vom Himmelskörper zur Erde.

Die Verschiebung ist streng genommen frequenzabhängig und muß demzufolge noch korrigiert werden. Dazu ist es ausreichend (Genauigkeit < 0,5 cm), in einem zweiten Schritt eine Korrektur der Stationshöhe durch Berücksichtigung der  $K_1$ -Tide vorzunehmen (MELBOURNE u.a., 1983):

$$(5.20) \quad \delta h_{sta} = -0,02527 \cdot \sin \varphi \cos \varphi \sin(\Theta + \lambda) \text{ [Meter]},$$

mit  $\varphi, \lambda$  - Breite und Länge der Station.

Die Höhenänderungen der Stationen infolge Belastungen durch Meeresgezeiten können einige cm betragen. Für ihre Modellierung wird das in MELBOURNE u.a. (1983) beschriebene Modell von C. GOAD verwendet. Es basiert auf dem Meeresgezeitenmodell von SCHWIDERSKI (1978). Für die Mehrheit der Stationen ergeben sich Höhenänderungen unter 1 cm, jedoch für Stationen in Küstennähe oder auf Inseln können 10 cm erreicht werden. Die Höhenänderung  $h(i)$  für eine bestimmte Tide  $i$  wird folgendermaßen berechnet:

$$(5.21) \quad h(i) = \text{amp}(i) \cdot \cos(\text{arg}(i, t) - \text{phase}(i)),$$

mit  $\text{amp}(i), \text{phase}(i)$  } - Amplitude, Phase (stationsabhängig) und Argument für Tide  $i$ .

In POTSDAM-5 sind die Tiden  $M_2, S_2, K_2, N_2, O_1, P_1, K_1$  berücksichtigt. Der Mittelwert der periodischen Stationskoordinatenän-

derungen (5.19) ist nicht Null. In der Stationshöhe resultiert eine permanente Deformation von

$$(5.22) \quad \Delta h_{\text{perm}} = -0,19841 \cdot h_2 \cdot \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \text{ [Meter]}$$

und in der Breite von

$$(5.23) \quad \Delta \hat{\varphi}_{\text{perm}} = -0,19841 \cdot l_2 \cdot 3 \cdot \cos \varphi \sin \varphi \text{ [Meter].}$$

Sie erreicht Beträge bis zu 1 dm und ist daher nicht außer acht zu lassen. Es ist erforderlich, bei allen ermittelten Stationskoordinaten  $\underline{X}_E$  anzugeben, ob sie die permanente Deformation enthalten oder nicht. Empfohlen werden sollte, diese in  $\underline{X}_E$  aufzunehmen und nur die periodischen Anteile in  $\underline{Q}$  zu modellieren, denn die Parameter  $h_2$ ,  $l_2$  sollten nicht zur Beschreibung der konstanten Erdfigur herangezogen werden.

Die Transformation (5.17) muß mit höchster Genauigkeit realisiert werden, da hierauf die Berechnung des topozentrischen Vektors von der Station zum Satelliten basiert. Dieser bildet dann die Vergleichsgröße mit den genauen Meßwerten (z.B. Laserentfernung). Da die Transformation einmalig für jeden Meßwert erfolgt, spielt die erforderliche Rechenzeit keine wesentliche Rolle. Geringere Genauigkeitsansprüche, wie schon erwähnt, werden an die Transformation der Satellitenposition vom CIS ins CTS, die für die bei der Bahnintegration sehr häufig benötigten Kraftberechnungen erforderlich ist, gestellt:

$$(5.24) \quad \underline{X}_E = \underline{R}_1(-y_p) \cdot \underline{R}_2(-x_p) \cdot \underline{R}_3(\theta) \cdot \underline{N} \cdot \underline{P} \cdot \underline{X}_R = \underline{D} \underline{X}_R .$$

Für die Genauigkeit von  $10^{-9}$  gilt:

$$(5.25) \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} c + \Delta\mu \cdot s & s - \Delta\mu \cdot c & -\Delta\nu \cdot c - \Delta\epsilon \cdot s + x_p \\ -s + \Delta\mu \cdot c & c + \Delta\mu \cdot s & \Delta\nu \cdot s - \Delta\epsilon \cdot c - y_p \\ -x_p c - y_p s + \Delta\nu, & -x_p s + y_p c + \Delta\epsilon, & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{P}$$

$$\text{mit } s = \sin \theta \quad \text{und } c = \cos \theta .$$

Die auf dieser Basis im CTS berechnete Beschleunigung (vgl. 6.5.1.) muß ins CIS zurücktransformiert werden:

$$(5.26) \quad \underline{f} = \underline{D}^{-1} \cdot \underline{f}_E \approx \underline{D}^T \cdot \underline{f}_E$$

Die zum Kugelterm des Geopotentials gehörende Beschleunigung

wird direkt im CIS berechnet und somit der Einfluß des Fehlers  $D^{-1} \approx D^T$  auf den um den Faktor  $10^3$  geringeren Kugelfunktionsterm  $C_{20}$  beschränkt. Ein Transformationsfehler von  $1 \cdot 10^{-9}$  im Radius von  $X_E$  ergibt einen relativen Fehler von  $4 \cdot 10^{-9}$  in der Beschleunigung durch  $C_{20}$ . (Alle anderen Kugelfunktionsterme brauchen nicht betrachtet zu werden, da ihr Einfluß um den Faktor  $10^6$  geringer ist.)

#### 5.4. Fehlerbetrachtungen

Bei der Realisierung von CIS und CTS durch verschiedene Techniken wird durch unterschiedliche Festlegung freier Parameter (vor allem Stationskoordinaten) i. a. keine Identität der Systeme erreicht. Außerdem wird jedes System nur mit endlicher Genauigkeit realisierbar sein. Welche Auswirkungen Systemdifferenzen bzw. Fehler haben, soll etwas näher betrachtet werden (s. MUELLER u. a., 1982; ZHU und MUELLER, 1983; BOCK und ZHU, 1982). Mit dem oberen Index a sei eine fehlerfreie Realisierung von CIS und CTS bezeichnet. Es gelte

$$(5.27) \quad X_R^a = \underline{P}^T \underline{N}^T \cdot \underline{R}_3(-\theta^a) \cdot \underline{R}_2(x_p^a) \cdot \underline{R}_1(y_p^a) \cdot X_E^a.$$

Nun ist es möglich, aufgrund der Freiheitsgrade der Systemdefinition, eine andere Realisierung zu betrachten, die folgende Beziehung zur ersten hat:

$$(5.28) \quad \begin{aligned} X_R^b &= \underline{R}_1(\alpha_1) \underline{R}_2(\alpha_2) \underline{R}_3(\alpha_3) X_R^a, \\ X_E^b &= \underline{R}_1(\beta_1) \underline{R}_2(\beta_2) \underline{R}_3(\beta_3) X_E^a. \end{aligned}$$

Alle vorkommenden Winkel bis auf  $\theta$  sollen klein sein, so daß eine Vertauschung der Reihenfolge ihrer Rotationen vorgenommen werden kann, und es gilt, wie leicht nachzuprüfen ist:

$$(5.29) \quad \begin{aligned} \underline{R}_1(\alpha) \cdot \underline{R}_2(\beta) \cdot \underline{R}_3(\theta) &= \underline{R}_3(\theta) \cdot \underline{R}_1(\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta) \\ &\quad \cdot \underline{R}_2(\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Relationen (5.28) in (5.27) ergibt sich:

$$(5.30) \quad \underline{X}_R^b = \underline{R}_1(\alpha_1) \cdot \underline{R}_2(\alpha_2) \cdot \underline{R}_3(\alpha_3) \cdot \underline{P}_N^T \cdot \underline{E}_3(-\theta^a - \beta_3) \cdot \\ \cdot \underline{R}_2(x_p^a - \beta_2) \cdot \underline{R}_1(y_p^a - \beta_1) \cdot \underline{X}_E^b .$$

Gleichung (5.30) stellt nun die Transformationen in den neuen Systemen dar. Die neue Präzession-Nutation-Matrix  $(\underline{P}_N)^b$  ist durch Einbeziehung der Winkel  $\alpha_i$  zu erhalten. Alle Rotationen der CTS-Systeme sind vollständig durch Veränderungen der Polkoordinaten sowie der Rotationsphase der Erde (UT1) aufzufangen. Die Präzession-Nutation-Matrix  $\underline{P}_N$  des Systems a soll nun im System b beibehalten werden, d.h., mit anderen Worten, die  $\underline{P}_N$ -Matrix hat Fehler  $\alpha_i$ . Aus Gleichung (5.30) ergibt sich durch Umformung:

$$(5.31) \quad \underline{X}_R^b = \underline{P}_N^T \cdot \underline{R}_3(-\theta^a + \alpha_3 - \beta_3) \cdot \underline{R}_2(x_p^a - \beta_2 - \alpha_1 \sin\theta + \alpha_2 \cos\theta) \cdot \\ \cdot \underline{R}_1(y_p^a - \beta_1 + \alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \sin\theta) \cdot \underline{X}_E^b .$$

Für die Polkoordinaten und Sternzeit erhält man daraus:

$$(5.32) \quad x_p^b = x_p^a - \beta_2 - \alpha_1 \sin\theta + \alpha_2 \cos\theta , \\ y_p^b = y_p^a - \beta_1 + \alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \sin\theta , \\ \theta^b = \theta^a + \beta_3 - \alpha_3 .$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß die Differenzen  $\beta_i$  und  $\alpha_3$  zu konstanten Veränderungen in den Erdrotationsparametern (Pol, UT1) führen. Zusätzlich wäre es notwendig, Polkoordinaten einzuführen, die sich mit Tagesperiode ändern. Wird dies nicht gemacht, und das entspricht der Praxis, so ergeben sich Tagesperioden in den Abweichungen (Residuen) zwischen Modell und Messungen, deren Amplituden von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  abhängen. Vergleiche der Erdrotationsparameter ermöglichen es, die Systemdifferenzen  $\beta_i$  und  $\alpha_3$  zu berechnen. Die Winkel  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ergeben sich nur aus einer Residuenanalyse. Die Winkel  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  können natürlich auch direkt durch eine Kollokation berechnet werden, sofern in beiden jeweiligen Systemen (a und b) identische Objekte (Stationen, Sterne u.ä.) bzw. Objekte, zwischen denen bekannte Relationen bestehen, verwendet wurden.

Neben den durch die Festlegung der Koordinatensysteme bedingten Differenzen  $\alpha_i$  können auch Fehler im Präzessions- und Nutationsmodell existieren, die linear (Präzession) bzw. periodisch (Nutation) variierende Winkel  $\alpha_i$  und somit entsprechende Amplitudenschwankungen in den Residuen erzeugen. Diese ermöglichen die Bestimmung der entsprechenden Parameter.

Bei einer CTS-Festlegung können Fehler in der Bestimmung des Maßstabes und in Bezug auf den Erdschwerpunkt auftreten. Es gilt also die allgemeine Relation

$$(5.33) \quad \underline{X}_E^b = (1+C) \cdot \underline{R}_1(\beta_1) \cdot \underline{R}_2(\beta_2) \cdot \underline{R}_3(\beta_3) \cdot \underline{X}_E^a + \underline{dX}_E$$

wobei Maßstabsfehler und Translation kleine Größen ( $<10^{-6}$ ) sind, so daß

$$(5.34) \quad \underline{X}_E^b = \underline{R}_1(\beta_1) \cdot \underline{R}_2(\beta_2) \cdot \underline{R}_3(\beta_3) \cdot \underline{X}_E^a + C \underline{X}_E^a + \underline{dX}_E$$

Insgesamt ergibt sich eine von  $\underline{X}_E$  abhängige Verschiebung der Koordinaten bezüglich des Ursprungs. Hieraus resultieren Änderungen der Koordinaten  $\underline{X}_R$  mit Tagesperiode und konstanter Amplitude.

Bei den Messungen zu den kosmischen Objekten (Sterne, Quasare, Satelliten u.ä.) muß in Rechnung gestellt werden, daß ihre Positionen nur mit gewissen Fehlern angegeben werden können. Es werden also Residuen auftreten, die eine Verbesserung der Position dieser Objekte erlauben. Dabei bleiben für Bahnen künstlicher Erdsatelliten über größere Zeitintervalle Restfehler, die eine Bestimmung von Präzession und Nutation unmöglich machen. Eine Ausnahme bilden nur Nutationen mit kleinen Perioden.

Die Bestimmung der Koordinaten des CTS ist untrennbar verbunden mit der Bestimmung der Erdrotationsparameter (UT1,  $x_p$ ,  $y_p$ ). Ein Fehler in den Erdrotationsparametern von  $\pm 0.001''$  kann zu Fehlern bis  $\pm 5$  cm in terrestrischen Strecken und somit zu einer Verzerrung des CTS führen (PAVLIS und MUELLER, 1983).

## 6. Bahnmodellierung künstlicher Erdsatelliten, differentielle Bahnverbesserung und Parameterbestimmung (POTSDAM-5)

Der Programmkomplex POTSDAM-5 zur numerischen Integration einer Satellitenbahn einschließlich der differentiellen Verbesserung von geodätischen, geodynamischen und gerätetechnischen Parametern soll in diesem Kapitel vorgestellt werden (GENDT und SOROKIN, 1978; GENDT, 1980; GENDT und MONTAG, 1981; GENDT, 1984). Mit ca. 200 Unterprogrammen von insgesamt 20000 FORTRAN-Quelltextzeilen hat POTSDAM-5 einen beträchtlichen Umfang, so daß hier nur auf die grundlegenden Prinzipien eingegangen werden kann. Die Anwendungsbreite geht von der wissenschaftlichen Grundlagenforschung bis zur Nutzung in der geodätischen Praxis, hier z.Z. insbesondere für den Einsatz der DOPPLER-Technologie. Das Programm ist u.a. dafür konzipiert, umfangreiche, sich über viele Jahre erstreckende Daten zu nutzen, um weltweite geodätische Netze (Referenzsysteme) höchster Genauigkeit zu schaffen sowie Erdrotationsparameter im Rahmen internationaler Kampagnen und Dienste zu bestimmen. Daher spielen Fragen einer optimalen rechentechnischen Realisierung (hinsichtlich Flexibilität, Rechenzeit, Speicherplatzbedarf und Anwenderfreundlichkeit) eine wesentliche Rolle. Auf diesen Aspekt wird am Ende dieses Kapitels eingegangen.

### 6.1. Verwendete Konstanten und Parameter

Alle verwendeten Konstanten und Parameter sind in der folgenden Übersicht angegeben. Dabei sei bemerkt, daß die meisten Parameter, wie beispielsweise Gezeiten- und Schwerefeldparameter, wahlfrei sind. In solchen Fällen sind diejenigen Werte angegeben, die bei den Anwendungen im Abschnitt 8. verwendet wurden.

- Lichtgeschwindigkeit	$c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$
- Gravitationskonstante • Erdmasse	$GM = 3,98600448 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
- große Halbachse der Erde	$R_E = 6\,378\,144,11 \text{ m}$
- Abplattung der Erde	$f = 298,257$
- Erdpotential	GEM-L2 (gemäß MERIT-Standards, permanente Tide für $k_2=0,29$ eingeschlossen)
- Mond-Erde-Massenverhältnis	$\mu_M = 0,012300034$



- Sonne-Erde-Massenverhältnis	$\mu_S = 332\,946,038$
- gravitative Erdgezeitenparameter	$k_2 = 0,30$ , $\varphi = 0^0$ (Ohne permanente Tide, WAHR- sche Korrekturen laut MERIT- Standards)
- Meeresgezeiten	SCHWIDERSKI-Modell (MERIT- Standards)
- Solarkonstante	$\text{flux} = 4,5605 \cdot 10^{-5} \text{ dyn/cm}^2$
- Reflektionskoeffizient (LAGEOS)	$k = 1,17$
- Empirische Beschleunigung(LAGEOS)	$e = -3 \cdot 10^{-12} \text{ ms}^{-2}$
- Präzession und Nutation	IAU 1980
- Polkoordinaten und UT1 (Ausgangswerte)	BIH, Circular D
- Erdgezeiteneffekte auf Sta- tionsposition	$h_2 = 0,609$ , $l_2 = 0,085$ $\delta^2 h_{K_1} = -0,0887^2$  (einschl. permanenter Defor- mation)
- Gezeitenbedingte Variation von UT1	zonale Tiden mit Perioden $\leq 32$ Tage (MERIT-Standards)
- Deformationen durch Meeresge- zeitenbelastung	MERIT-Standards
- Reduktionsmodell	
troposphärische Korrektur	MARINI und MURRAY (1973)
Massenzentrumskorrektur	0,24 m für LAGEOS

6.2. Referenzsysteme, Positionen von Mond und Sonne

Als Inertialsystem wird das mittlere astronomische System J 2000,0 (vgl. Abschnitt 5.3.2.) gewählt. Die Koordinaten der Stationen wurden so berechnet, daß das CTS eine möglichst gute Übereinstimmung mit dem CIO-System (vgl. Abschnitt 5.2.) aufweist. Alle Berechnungen werden in Internationaler Atomzeit (IAT) durchgeführt. Die benötigten Transformationen zwischen CIS und CTS sind bereits beschrieben worden.

Neben dem Gravitationsfeld der Erde haben Mond und Sonne den größten Einfluß auf die Satellitenbahn. Daher sind genaue Posi-

tionen für diese Himmelskörper von Bedeutung. In POTSDAM-5 werden die auf numerischer Integration basierenden und sich auf die Epoche J 2000,0 beziehenden Ephemeriden DE 200/LE 200 benutzt (USNO Circular N. 163, Washington, 1981). Sie umfassen den Zeitraum von 1800 bis 2050 und bilden das derzeit beste dynamische Modell für die Bewegungen von Sonne, Baryzentrum Erde-Mond, großen Planeten und einigen kleinen Planeten relativ zum Baryzentrum des Sonnensystems (DE 200) sowie für die Bewegung des Mondes relativ zum Geozentrum (LE 200). Als unabhängige Variable bei dieser Integration wurde die Baryzentrische Dynamische Zeit (TDB) verwendet. Sie unterscheidet sich von der Zeitskala TDT (Terrestrische Dynamische Zeit; praktisch gleich der früheren Ephemeridenzeit ET) nur um periodische Anteile, die kleiner als 2 ms (s. 7.1.) sind und für unsere Ansprüche vernachlässigt werden können ( $< 0.005''$  für Mondposition). So kann auf einfache Weise die Atomzeit in die benötigte Zeitskala überführt werden.

$$(6.1) \quad \text{TDB} \approx \text{TDT} = \text{IAT} + 32.184 \text{ s} .$$

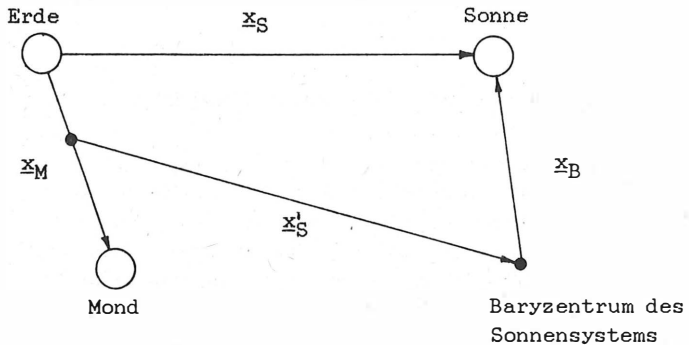


Abb. 6.1.: Berechnung geozentrischer Positionen von Mond und Sonne

Die Ephemeriden sind in Form von TSCHEBYSCHOWschen Polynomen gegeben, die die kartesischen Koordinaten von Mond  $\underline{x}_M$ , Sonne  $\underline{x}_S$  und Baryzentrum  $\underline{x}_B$  liefern. Die geozentrische Position des Mondes  $\underline{x}_M$  ist direkt berechenbar und die der Sonne über die Relation

$$(6.2) \quad \underline{x}_S = \frac{\mu_M}{\mu_M + 1} \underline{x}_M + \underline{x}'_S + \underline{x}_B .$$

### 6.3. Reduktion der Laserentfernungsmessungen

Die Entfernung  $e$  von der Station zum Satelliten wird über die Laufzeit  $\Delta t$  eines Laserimpulses zum Satelliten und zurück gemessen. Es ist üblich, die halbe Laufzeit als Entfernung dem mittleren Zeitpunkt (praktisch die Zeit der Reflexion am Satelliten; Fehler von max.  $0,03 \mu s$  in der Zeit und  $0,2 \text{ mm}$  in der Entfernung, s. 7.1.) zuzuordnen. Die Berechnung der Entfernung  $e$  kann so mit identischem Zeitmoment für Satelliten- und Stationsposition (Gleichung (2.2)) vorgenommen werden. Durch Übergang von Laufzeit und endlicher Lichtgeschwindigkeit sowie den damit verbundenen verschiedenen Zeitmomenten (Aussende-, Reflexions- und Empfangszeit) auf eine direkt zu berechnende Strecke ergibt sich eine Vereinfachung.

Im Programm POTSDAM-5 können sowohl reduzierte als auch nicht-reduzierte Laserentfernungsmessungen ( $e$  bzw.  $e_{ROH}$ ) verwendet werden. Bei einer Meßgenauigkeit im cm-Bereich wird eine hohe Reduktionsgenauigkeit gefordert. Die hierfür notwendigen Satellitenbahnelemente (für Höhenwinkel  $h$ ) sind in vielen Fällen erst während der Bearbeitung im Bahnprogramm mit der nötigen Genauigkeit bekannt. Hieraus ergibt sich, daß die Reduktion erst innerhalb des Bahnprogramms vorgenommen werden kann. Die reduzierte Entfernung  $e$  ergibt sich zu:

$$(6.3) \quad e = e_{ROH} - \Delta e_R + \Delta e_m ,$$

$\Delta e_R$  - Refraktionskorrektur,  
 $\Delta e_M$  - Korrektur auf Massenmittelpunkt.

Für die Berechnung der Refraktionskorrektur nach der Formel von MARINI und MURRAY (1978) erhält man:

$$(6.4) \quad \Delta e_R = \frac{f(\lambda)}{g(\varphi, H)} \frac{A+B}{\sin h + B/(A+B)/(\sin h + 0,01)} ,$$

$f, g$  - Funktionen der Laserfrequenz  $\lambda$  sowie der Breite  $\varphi$  und Höhe der Station,

$h$  - Höhenwinkel für Satellitenposition,

$A, B$  - Funktionen von Temperatur, Druck und Luftfeuchte.

Der Höhenwinkel  $h$  wird durch die Bahnberechnung bestimmt und ist somit von der Ephemeridengenauigkeit abhängig. Sein Fehler kann über die Residuen  $\Delta e$  abgeschätzt werden, wenn nur Fehler in der Längskomponente der Bahn angenommen werden. Hierüber ergibt sich eine Abschätzung des Refraktionsfehlers  $e$ :

$$(6.5) \quad e(\Delta e_R) \approx 1,2 \frac{a^2 - R_E^2 + e^2}{R_E e^2 \sin^2 h} \Delta e \quad [\text{Meter}],$$

wobei

$a, R_E$  - große Halbachse der Satellitenbahn und der Erde.

Fehler der Atmosphärenparameter sind hier nicht berücksichtigt. Bei der iterativen Bahnanpassung wird mit reduzierten Daten weitergearbeitet, sobald eine vorgegebene Genauigkeit der Refraktionskorrektur erreicht ist.

Die Massenzentrumskorrektur für den Kugelsatelliten LAGEOS ist eine Konstante:

$$(6.6) \quad \Delta e_M = 0.2425 \text{ m}$$

#### 6.4. Numerische Integration der Satellitenbewegungsgleichung und der Variationsgleichungen

Die numerische Integration der Differentialgleichung (2.1) (oder (3.1) bis (3.3)) liefert die gesuchte Satellitenbewegung  $\underline{x}(t)$ . Die damit verbundenen Probleme sind in den Kapiteln 3. und 4. ausführlich behandelt worden.

Die partiellen Ableitungen  $\partial \underline{x} / \partial \underline{x}_0$ ,  $\partial \underline{x} / \partial \dot{\underline{x}}_0$ ,  $\partial \underline{x} / \partial d$  genügen ebenfalls Differentialgleichungen 2. Ordnung (Gl.(2.5)), den sogenannten Variationsgleichungen, die man aus der Bewegungsgleichung durch partielle Differentiation gewinnt. Diese haben die allge-

meine Form (BALLANI, 1984):

$$(6.7) \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0, \underline{d})} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial (\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{d})} \frac{\partial (\underline{x}, \dot{\underline{x}}, \underline{d})}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0, \underline{d})}$$

und stellen ein System von  $3 \cdot (k+6)$  Differentialgleichungen 2. Ordnung dar ( $k$  ist  $\dim(\underline{d})$ ). Unter der Voraussetzung, daß die Parameter  $d_i$  untereinander sowie von  $\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0$  unabhängig sind, ergeben sich aus (6.7) die Differentialgleichungen:

$$(6.8) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \right) = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \right) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \dot{\underline{x}}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \right),$$

$$(6.9) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{d}} \right) = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{d}} \right) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \dot{\underline{x}}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{d}} \right) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{d}}$$

Zur numerischen Lösung der Systeme (6.8), (6.9) sind pro zu bestimmender partieller Ableitung zwei Anfangsbedingungen erforderlich. Diese sind nicht frei wählbar, sondern liegen aufgrund der Theorie fest. Im einzelnen gilt:

$$(6.10a) \quad \left. \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \right|_{t_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(6.10b) \quad \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \right|_{t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(6.11) \quad \left. \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{d}} \right|_{t_0} = \underline{0}, \quad \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{d}} \right) \right|_{t_0} = \underline{0},$$

wobei Zeilen und Spalten der Matrizen folgende Anordnung haben:

$$(6.12) \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0} \end{pmatrix}$$

Für die rechte Seite  $\underline{f}$  der Differentialgleichung (2.1) wird im allgemeinen ein Modellansatz verwendet, der die einzelnen Teilbeschleunigungen je nach Problemstellung und geforderter Genauigkeit additiv zusammensetzt:

$$(6.13) \quad \underline{f} = \underline{f}^K(t, \underline{x}) + \underline{f}^{MS}(t, \underline{x}) + \underline{f}^{GF}(t, \underline{x}) + \underline{f}^{MG}(t, \underline{x}) + \underline{f}^R(t, \underline{x}) + \underline{f}^A(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}).$$

Dabei bedeuten im einzelnen (genauer s. Abschnitt 6.5.):

- $\underline{f}^K$  - Kugelfunktionsentwicklung des Geopotentials,
- $\underline{f}^{MS}$  - Gravitation von Mond und Sonne,
- $\underline{f}^{GF}, \underline{f}^{MG}$  - Gezeiten der festen Erde und Meeresgezeiten,
- $\underline{f}^R, \underline{f}^A$  - Strahlungsdruck und Atmosphärenreibung.

Unter Vernachlässigung kleiner Größen ergibt sich aus (6.8):

$$(6.14) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \right) = \frac{\partial \underline{f}^K}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \right)$$

Als konkrete Parameter (Komponenten des Vektors  $\underline{d}$ ) sollen hier stellvertretend betrachtet werden:

- GM - Gravitationskonstante • Erdmasse,
- $k_2$  - LOVEsche Zahl,
- $C_D$  - atmosphärischer Reibungskoeffizient,
- (weitere Parameter s. Abschnitte 6.6.3, 8.3., 8.5.).

Damit erhalten die Gleichungen (6.9) für diese Parameter folgende Form, wobei kleine Terme vernachlässigt werden:

$$(6.15) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial GM} \right) = \frac{\partial \underline{f}^K}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial GM} \right) + \frac{\partial \underline{f}^K}{\partial GM}$$

$$(6.16) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial k_2} \right) = \frac{\partial \underline{f}^K}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial k_2} \right) + \frac{\partial \underline{f}^{GF}}{\partial k_2}$$

$$(6.17) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial C_D} \right) = \frac{\partial \underline{f}^K}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial C_D} \right) + \frac{\partial \underline{f}^A}{\partial C_D}$$

In POTSDAM-5 wird zur Lösung der Differentialgleichungen (2.1) und (6.14), wie bereits im Kapitel 4. erwähnt, das Verfahren von EVERHART eingesetzt. Es ist selbststartend, liefert eine hohe Genauigkeit und ermöglicht eine unmittelbare Interpolation der Ergebnisse auf jeden gewünschten Zeitpunkt, ohne die Schrittweitenoptimierung innerhalb des Verfahrens zu beeinflussen. Die Interpolation liefert die notwendigen Werte  $\underline{x}(t)$ , um Vergleiche mit den Meßwerten durchführen zu können, aber auch in äquidistanten Abständen  $\underline{x}(t)$ ,  $\dot{\underline{x}}(t)$  und  $\partial \underline{f}^K / \partial \underline{x}$ . Letztere Werte werden eingesetzt, um bei einer separaten Integration von (6.9) zur Bestimmung der partiellen Ableitungen einer größeren Anzahl von dynamischen Parametern nicht erneut die aufwendige Integration der Satellitenbahn wiederholen zu müssen. Bei der Integration der Variationsgleichungen kann außerdem eine wesentlich größere Schrittweite genutzt werden. Wie aus (6.15) bis (6.17) ersichtlich ist, wird die erste Ableitung der gesuchten Werte nicht benötigt, so daß beispielsweise das effektive Verfahren STÖRMER/COWELL eingesetzt werden kann. Der Wert  $\partial \underline{f}^K / \partial \underline{x}$  wird nicht nur abgespeichert, um seine aufwendige Berechnung zu ersparen, sondern auch um den Speicherplatz der nicht mehr benötigten Kugelfunktionskoeffizienten des Geopotentials für eine erhöhte Anzahl von Differentialgleichungen zu nutzen.

#### 6.5. Berechnung der auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen

In diesem Abschnitt werden der Aufbau der Funktion  $\underline{f}$  und die sich daraus ergebenden Ausdrücke für die Variationsgleichungen im einzelnen beschrieben.

6.5.1. Darstellung der Gravitation der Erde

Das Geopotential wird als Kugelfunktionsentwicklung im CTS dargestellt (vgl. (3.3)):

$$(6.18) \quad U = GM \operatorname{real} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_E^l (C_{lm} - iS_{lm}) V_{lm}$$

$$(6.19) \quad V_{lm} = P_l^m(\sin\varphi)(\cos m\lambda + i \sin m\lambda)/r^{l+1}$$

wobei  $r, \varphi, \lambda$  - Radius, geozentrische Breite und Länge.

Als erstes muß eine Denormalisierung der in der Regel normalisiert gegebenen Koeffizienten vorgenommen werden:

$$(6.20) \quad \begin{pmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!(2-\delta_{0m})}{(l+m)!}}$$

Die Beschleunigung  $\underline{f}_E^K$  im CTS wird mit (5.26) ins CIS transformiert und ergibt:

$$(6.21) \quad \underline{f}_E^K = \underline{D}^T \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \underline{x}_E} \right)^T$$

In POTSDAM-5 wird als Maßeinheit "Erdradius" gewählt, so daß die Potenzen  $R_E^l$  entfallen. Es werden die Formeln von CUNNINGHAM (1970) angewandt, die eine unmittelbare Nutzung der kartesischen Koordinaten  $\underline{x}_E$  gestatten. Mit steigendem Grad und damit auch steigender Ordnung  $m$  sind die Denormalisierungsfaktoren und die rekursiv berechneten  $V_{lm}$  sehr schnell an den Exponentengrenzen (beim ESER z.B. 70) angelangt. Die Einfachheit der Formeln konnte auch für sehr hohe Grade ( $l=m=300$ ) durch eine Exponentenverschiebung

$$C'_{lm} = C_{lm} \cdot 10^{2m} ; S'_{lm} = S_{lm} \cdot 10^{2m}$$

erhalten werden. Die abgewandelten Rekursionsformeln lauten:



$$\underline{x}_E = (x, y, z)^T ; V'_{00} = 1/r ; i = \sqrt{-1} ;$$

$$(6.22) \quad V'_{11} = (2l-1) \frac{x+iy}{r^2} V'_{l-1, l-1} / 100 ; l \geq 1 ;$$

$$V'_{l, l-1} = (2l-1) \frac{z}{r^2} V'_{l-1, l-1} ; l \geq 1 ;$$

$$(1-m)V'_{lm} = (2l-1) \frac{z}{r^2} V'_{l-1, m} - \frac{(1+m-1)}{r^2} V'_{l-2, m} , l \geq 2, m \geq 0.$$

Hieraus ergeben sich die benötigten partiellen Ableitungen:

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V'_{l,0}}{\partial x} &= -\frac{1}{2} (V'_{l+1,1} + V'_{l+1,1}^*) \cdot 100 , & (* \text{ konjugiert komplex}) \\ \frac{\partial V'_{l,0}}{\partial y} &= \frac{i}{2} (V'_{l+1,1} - V'_{l+1,1}^*) \cdot 100 , \\ \frac{\partial V'_{l,0}}{\partial z} &= -(l+1) V'_{l+1,0} \\ \frac{\partial V'_{lm}}{\partial x} &= \frac{1}{2} (k V'_{l+1, m-1} / 100 - V'_{l+1, m+1} \cdot 100) , & m > 0, \\ \frac{\partial V'_{lm}}{\partial y} &= \frac{i}{2} (k V'_{l+1, m-1} / 100 + V'_{l+1, m+1} \cdot 100) , \\ \frac{\partial V'_{lm}}{\partial z} &= -k V'_{l+1, m} , & k = (l-m+2)(l-m+1), \end{aligned}$$

die die Beschleunigung

$$(6.24) \quad \underline{f}_E^K = GM \text{ real} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_E^l (C'_{lm} - iS'_{lm}) \frac{\partial V'_{l,m}}{\partial \underline{x}_E}$$

liefern. Da die komplexe Zahlendarstellung zu hohe Rechenzeiten erfordert, werden Real- und Imaginärteil getrennt als reelle Zahlen behandelt. Um in der Summe (6.24) die Akkumulation von Rundungsfehlern zu minimieren, ist zu empfehlen, für jeden Grad erst eine getrennte Summe zu ermitteln und insbesondere die  $C_{00}$ -,  $C_{20}$ -Glieder als letzte zu addieren.

Für die Variationsgleichungen (6.14) bis (6.17) werden

$$(6.25) \quad \frac{\partial \underline{f}^K}{\partial \underline{GM}} = \underline{f}^K / \underline{GM} \quad ,$$

$$(6.26) \quad \frac{d \underline{f}^K}{d \underline{x}} = \underline{D}^T \underline{W} \underline{D}$$

benötigt.  $\underline{W}$  ist eine (3,3)-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von  $\underline{U}$  nach  $\underline{x}_E$ , die ebenfalls rekursiv nach Formeln von CUNNINGHAM berechnet werden (BALLANI, 1984). Wegen der Symmetrie der Matrix  $\underline{W}$  und der Gültigkeit der LAPLACE-Gleichung enthält diese nur 5 voneinander unabhängige Elemente. Diese günstige Eigenschaft überträgt sich auch auf die Matrix  $\partial \underline{f}^K / \partial \underline{x}$ .

### 6.5.2. Gravitation von Mond und Sonne

Im Abschnitt 6.3. wurde die Berechnung der Positionen von Mond und Sonne beschrieben. Die direkten Beschleunigungen von Mond und Sonne ergeben sich zu:

$$(6.27a) \quad \underline{f}^{MS} = \left( \mu_M \left( \frac{\underline{x}_M - \underline{x}}{|\underline{x}_M - \underline{x}|^3} - \frac{\underline{x}_M}{|\underline{x}_M|^3} \right) + \mu_S \left( \frac{\underline{x}_S - \underline{x}}{|\underline{x}_S - \underline{x}|^3} - \frac{\underline{x}_S}{|\underline{x}_S|^3} \right) \right) \cdot \underline{GM}$$

Hierbei werden für alle drei Himmelskörper jeweils Punktmassen angenommen. Geht man jedoch auf die Wechselwirkung ausgedehnter Körper über, so sind Abplattung von Erde und Mond einzubeziehen. Es ergibt sich folgende verfeinerte Darstellung (Symbolik vgl. (5.2)):

$$(6.27b) \quad \underline{f}^{MS} = \underbrace{b_M(S) - b_M(E)}_{(a)} + \underbrace{b_M(S; J_2^M) - b_M(E; J_2^M)}_{(b)} - \underbrace{b_M(E; J_2^E)}_{(c)}$$

wobei  $J_2^E$ ,  $J_2^M$  - Abplattung von Erde und Mond

Der Ausdruck (a) sei äquivalent zu (6.27a). Die Ausdrücke (b) bzw. (c) entsprechen dem direkten Einfluß der Mondabplattung bzw. dem indirekten Einfluß der Erdabplattung (Anziehung zwischen der Abplattung der Erde und dem Mond als Punktmasse). Der relative Anteil dieser Kräfte beträgt  $10^{-13}$  bzw.  $10^{-11}$  (HUANG CHENG und HE MIAO-FU, 1985).

6.5.3. Gezeiten der festen Erde

In einem ersten Schritt wird das frequenzunabhängige Gezeitenpotential mit der LOVEschen Zahl  $k_2$  verwendet. Die Gezeitenkraft berechnet sich zu (vgl. Gl.(5.19)):

$$(6.28) \quad \underline{f}^{GF} = k_2 \sum_K \frac{3 \mu_K}{|\underline{x}_K|^3 |\underline{x}|^4} \left( \frac{\underline{x}_K}{|\underline{x}_K|} \cos \psi_K - \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \left( \frac{5}{2} \cos^2 \psi_K - \frac{1}{2} \right) \right).$$

In einem zweiten Schritt werden nun Korrekturen berechnet, die für jede Tide  $s$  den durch Annahme von  $k_2$  gemachten Fehler in Rechnung stellen. Sie lassen sich am einfachsten durch Variationen der Kugelfunktionsparameter des Geopotentials realisieren (MELBOURNE u. a., 1983):

$$(6.29) \quad \Delta \bar{C}_{1m} - i \Delta \bar{S}_{1m} = A_m \sum_{s(1,m)} (k_s - k_2) H_s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\theta_s} \begin{matrix} 1+m \text{ gerade} \\ 1+m \text{ unger.} \end{matrix}$$

mit 
$$A_m = \frac{(-1)^m}{R_E \sqrt{4\pi(2 - \delta_{0m})}}$$

$k_s, H_s$  sind Konstanten, die für jede Tide  $s$  gegeben sind, und  $\theta_s$  ist das Gezeitenargument.

Besondere Aufmerksamkeit ist dem Kugelfunktionsglied  $\bar{C}_{20}$  zu widmen. Der Mittelwert über die Gezeiteneffekte ist hierfür nicht Null, sondern (HONKASALO-Term):

$$(6.30) \quad m(\Delta \bar{C}_{20}) = A_0 H_0 k_2 = (4,4228 \cdot 10^{-8}) \cdot (-0,31455) \cdot k_2$$

Das im Geopotential verwendete  $\bar{C}_{20}$ -Glie d sollte diesen Wert enthalten, da, streng genommen,  $k_2$  nicht die zur Null-Frequenz gehörende LOVEsche Zahl ist.

Für die Variationsgleichungen zur Bestimmung von  $k_2$  (6.16) wird benötigt:

$$(6.31) \quad \frac{\partial \underline{f}^{GF}}{\partial k_2} = \frac{\underline{f}^{GF}}{k_2}$$

6.5.4. Meeresgezeiten

Der Einfluß der Meeresgezeiten auf die Bewegung des Satelliten wird ebenfalls am einfachsten durch entsprechende Änderung der Kugelfunktionskoeffizienten des Geopotentials realisiert. Die Variationen können folgendermaßen beschrieben werden:

$$(6.32) \quad \Delta \bar{C}_{1m}^- - i \Delta \bar{S}_{1m}^- = \bar{F}_{1m} \sum_s (1, m) \left( \sum_+ \left( C_{slm}^+ - i S_{slm}^+ \right) \cdot e^{\pm i \theta_s} \right)$$

mit 
$$\bar{F}_{1m} = \frac{4\pi \cdot G \cdot \rho_w \cdot R_E^2}{GM} \sqrt{\frac{(1+m)!}{(1-m)!(2l+1)(2-\rho_{om})}} \cdot \frac{1+k_1'}{(2l+1)}$$

$\rho_w = 1025 \text{ kgm}^{-3}$  (Dichte des Meerwassers)

$k_1'$  - Auflastdeformationskoeffizienten für Tide s

$C_{slm}^+, S_{slm}^+$  - Meeresgezeitenkoeffizienten für Tide s

$\theta_s$  - Gezeitenargument für Tide s

Da die  $C_{slm}^-$  und  $S_{slm}^-$ -Glieder für Tages- und Halbtagestiden keine langperiodischen Bahnstörungen hervorrufen, werden sie ignoriert. Für die langperiodischen Tiden können diese Glieder vernachlässigt werden, wenn die  $C^+, S^+$  doppelt genommen werden. Langperiodische Störungen werden nur erzeugt für

- m = 0 bei langperiodischen Tiden,
- m = 1 bei Tagestiden,
- m = 2 bei Halbtagestiden.

Die Meeresgezeitenamplituden und deren Einfluß auf die Satellitenbahn verringern sich mit wachsendem Grad, so daß eine Modellierung bis l=6 ausreicht. Die Koeffizienten  $C_{slm}^+, S_{slm}^+$  ergeben sich aus den SCHWIDERSKI'schen Meeresgezeitenamplituden  $\bar{C}_{slm}^+$  und -phasen  $\epsilon_{slm}^+$ .

Die Tiden  $S_{sa}, M_m, M_f, Q_1, O_1, P_1, K_1, N_2, M_2, S_2$  und  $K_2$  sind in POTSDAM-5 berücksichtigt.

### 6.5.5. Nichtgravitative Störungen

Die Störbeschleunigung für den Strahlungsdruck setzt sich zusammen aus dem direkten Strahlungsdruck der Sonne, der Infrarotstrahlung der Erde und der Albedo:

$$(6.33) \quad \underline{f}^R = \underline{f}_d + \underline{f}_r,$$

wobei

$$\underline{f}_d = -k \cdot \frac{A}{m} \cdot S \cdot \left( \frac{|\underline{x}_S|}{|\underline{x}_S - \underline{x}|} \right)^2 \cdot \frac{\underline{x}_S - \underline{x}}{|\underline{x}_S - \underline{x}|} \cdot \delta_1$$

die direkte Strahlung und

$$\underline{f}_r = \frac{A}{m} \cdot S \cdot \left( \frac{R_E}{|\underline{x}|} \right)^2 [k' \cos^2 \varphi + k'' \sin(100^\circ - \psi_S) \cdot \delta_2] \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$$

die Infrarotstrahlung und Albedo sind, mit

k	- Reflektionskoeffizient,
S	- Strahlungsdruck,
k' = 0,25	- Koeffizient der Infrarotstrahlung,
k'' = 0,45	- Koeffizient der radialen diffusen Strahlung,
$\delta_1, \delta_2$	- Schattenfunktionen,
A/m	- Querschnitt-Masse-Verhältnis.

Für die Atmosphärenreibung ergibt sich folgende Beschleunigung:

$$(6.34) \quad \underline{f}^A = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \cdot \rho \cdot |\underline{v}| \cdot \underline{v}$$

mit $C_D$	- Reibungskoeffizient,
$\rho$	- Atmosphärendichte,
$\underline{v}$	- Geschwindigkeitsvektor des Satelliten relativ zur Atmosphäre.

Es ist vorgesehen, die Dichte  $\rho$  anhand eines einfachen Schichtmodells oder durch die CIRA-72 Referenzatmosphäre unter Berücksichtigung von Tageszeit, Sonnenaktivität, geomagnetischer Aktivität zu berechnen (JACCHIA, 1971). Der einfache Ausdruck

$$(6.35) \quad \frac{\partial \underline{f}^A}{\partial C_D} = \frac{\underline{f}^A}{C_D}$$

wird in die Variationsgleichungen (6.17) eingesetzt.

Eine sehr präzise Bahnanpassung für den Satelliten LAGEOS erfordert die Berücksichtigung einer empirischen Beschleunigung

$$(6.36) \quad \underline{f}^{EM} = c_T \cdot \frac{\dot{\underline{x}}}{|\dot{\underline{x}}|}$$

Der Parameter  $c_T$  wird durch Ausgleichung bestimmt und hat im Mittel den Wert (s. 7.2.2.)

$$c_T = - 3 \cdot 10^{-12} \text{ms}^{-2}$$

### 6.6. Berechnung der partiellen Ableitungen

Für die Aufstellung der Verbesserungsgleichungen (2.3) werden die partiellen Ableitungen der Meßwerte, in diesem Fall der Entfernungen, nach den gesuchten Parametern benötigt.

Ausgehend vom topozentrischen Richtungsvektor von der Station  $\underline{x}$  zum Satelliten  $\underline{x}$ ,

$$(6.37) \quad \underline{x}_T = \underline{x}_R(t, p_1, \dots, p_n) - \underline{x}_R(t, q_1, \dots, q_m)$$

ergeben sich die benötigten Ableitungen (s. Gl.(2.2)):

$$(6.38) \quad e = |\underline{x}_T| = \sqrt{\underline{x}_T^T \cdot \underline{x}_T}$$

$$(6.39) \quad \frac{\partial e}{\partial p_i} = \left( \frac{\underline{x}_T}{e} \right)^T \cdot \frac{\partial \underline{x}_R}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial e}{\partial q_i} = \left( \frac{\underline{x}_T}{e} \right)^T \cdot \left( - \frac{\partial \underline{x}_R}{\partial q_i} \right)$$

$$(6.40) \quad \frac{\partial e}{\partial t} = \left( \frac{\underline{x}_T}{e} \right)^T \cdot \left( \dot{\underline{x}}_R - \frac{\partial \underline{x}_R}{\partial t} \right)$$

Im folgenden werden nun die partiellen Ableitungen der inertialen Positionen von Station und Satellit nach den in POTSDAM-5 möglichen Parametern betrachtet.

6.6.1. Partielle Ableitungen für Bahnparameter

Die Bahnparameter Anfangsort ( $\underline{x}_0 = \underline{x}_R(t_0)$ ) und Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\underline{x}}_0 = \dot{\underline{x}}_R(t_0)$  gehören zur Parametermenge  $\{p_i\}$ . Für die Ausgleichung zur Verbesserung dieser Anfangswerte werden die Ableitungen  $\partial \underline{x}_R(t) / \partial \underline{x}_0$  und  $\partial \underline{x}_R(t) / \partial \dot{\underline{x}}_0$  benötigt. Sie werden durch numerische Integration (s. Abschnitt 6.5.) berechnet. Vielfach wird anstelle von  $\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0$  die Darstellung in Form von KEPLERSchen Bahnelementen  $\underline{\epsilon} = (\omega, \Omega, i, e, \nu, a)^T$  bevorzugt. Das ermöglicht, einzelne Bahnparameter (z.B. Längskomponente der Bahn) bei der Ausgleichung zu bestimmen bzw. zu fixieren. Unter Verwendung der Beziehung

$$(6.41) \quad \frac{\partial \underline{x}_R}{\partial \underline{\epsilon}_0} = \frac{\partial \underline{x}_R}{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)} \cdot \frac{\partial (\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0)}{\partial \underline{\epsilon}_0}$$

können die durch die Integration berechneten partiellen Ableitungen in diejenigen nach den Anfangselementen  $\underline{\epsilon}_0$  transformiert werden. Die benötigte Transformationsmatrix braucht nur einmal berechnet zu werden. Die darin enthaltenen 36 partiellen Ableitungen sind direkt aus der Darstellung der KEPLERSchen Bahnelemente durch Ort und Geschwindigkeit zu gewinnen und stellen geschlossene analytische Ausdrücke dar.

6.6.2. Partielle Ableitungen für Stations- und Polkoordinaten sowie Zeit und Erdrotation

Zur Parametermenge  $\{q_i\}$  gehören die Stationskoordinaten  $r, \lambda, \varphi$  sowie die Polkoordinaten  $x_P, y_P$ . Diese Parameter beschreiben die Lage der Station im CTS, so daß für die weiteren Betrachtungen die Transformation (5.17) angewendet werden muß. Dabei können mit hinreichender Genauigkeit die Matrizen G, P, N durch die Einheitsmatrix ersetzt werden. Es gilt:

$$(6.42) \quad \underline{X}_R = \underline{T} \cdot \underline{X}_E, \quad \underline{X}_E = \begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Für die geozentrischen Koordinaten ergeben sich die partiellen Ableitungen ( $\varphi \neq 90^\circ$ ,  $r \neq 0$ ):

$$(6.43) \quad \frac{\partial X_R}{\partial r} = T \cdot \frac{\partial X_E}{\partial r} = T \cdot \frac{X_E}{r} = \frac{X_R}{r}$$

$$(6.44) \quad \frac{\partial X_R}{\partial \varphi} = T \cdot \frac{\partial X_E}{\partial \varphi} \approx \begin{pmatrix} -Z_E & X_R/r^* \\ -Z_E & Y_R/r^* \\ & r^* \end{pmatrix}, \quad r^* = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2}$$

$$(6.45) \quad \frac{\partial X_R}{\partial \lambda} = T \cdot \frac{\partial X_E}{\partial \lambda} \approx \begin{pmatrix} -Y_R \\ X_R \\ 0 \end{pmatrix}$$

für die Polkoordinaten:

$$(6.46) \quad \frac{\partial X_R}{\partial x_P} = \frac{\partial T}{\partial x_P} \cdot X_E = \begin{pmatrix} -Z_E \cos \Theta \\ -Z_E \sin \Theta \\ X_E \end{pmatrix}$$

$$(6.47) \quad \frac{\partial X_R}{\partial y_P} = \frac{\partial T}{\partial y_P} \cdot X_E = \begin{pmatrix} -Z_E \sin \Theta \\ +Z_E \cos \Theta \\ -Y_E \end{pmatrix}$$

für die Zeit:

$$(6.48) \quad \frac{\partial X_R}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \cdot X_E = \omega_E \cdot \begin{pmatrix} -Y_R \\ X_R \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Winkelgeschwindigkeit der Erde  $\omega_E = \frac{\partial \Theta}{\partial t}$

und für die Erdrotation analog:

$$(6.49) \quad \frac{\partial X_R}{\partial \omega_E} = \frac{\partial X_R}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \omega_E} = (t - t_0) \cdot \begin{pmatrix} -Y_R \\ X_R \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei  $\Theta = \omega_E \cdot (t - t_0)$ .



6.6.3. Partielle Ableitungen für weitere geodynamische Parameter

In POTSDAM-5 sind zur Zeit die Bestimmungen für GM,  $C_{20}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{22}$ ,  $k_2$ ,  $C_{22}^*$ ,  $S_{22}^*$  (für Tide  $M_2$ ) aus der Parametermenge  $\{P_i\}$  sowie für  $h_2$ ,  $l_2$ , Deformationsparameter aufgrund von Meeresgezeitenbelastungen und Nutation aus der Parametermenge  $\{q_i\}$  möglich. Die Berechnung der Ableitungen  $\partial x_P / \partial p_i$  erfolgt durch Variationsgleichungen (s. Abschnitte 8.3., 8.5.).

6.7. Parameterschätzung

Die Laserentfernungsmessung  $e$  hängt i. a. nichtlinear von den gesuchten Parametern ab. Daher werden ausgehend von Näherungswerten die Parameter iterativ verbessert. Es bereitet in der Regel keine Probleme, die Näherungswerte so genau vorzugeben, daß die Lösung durch das Iterationsverfahren berechnet werden kann.

In POTSDAM-5 sind folgende Parameter bestimmbar:

- 11 Parameter für Bahnelemente (einschl. Zeitpolynome),
- 2 Parameter für Erdrotation ( $\omega_E, \dot{\omega}_E$ ),
- 2 Parameter für die Atmosphärenreibung ( $C_D, \dot{C}_D$ ),
- 4 Parameter für Polkoordinaten ( $x_P, y_P, \dot{x}_P, \dot{y}_P$ ),
- 4 Parameter für jede Station ( $r, \lambda, \varphi, t$ ),
- Biasparameter (wie z.B. konstanter Entfernungsfehler),
- geodynamische Parameter (wie z.B. GM,  $k_2$ ).

Die Bahnparameter können sowohl KEPLERSche Bahnelemente als auch Ort und Geschwindigkeit sein.

Wird mit  $\underline{y}$  der Vektor aller Parameter bezeichnet und für jeden Meßwert eine Verbesserungsgleichung der Form (2.3) aufgestellt, so ergibt sich folgendes i. a. überbestimmtes Gleichungssystem ( $L > M$ ) für L Meßwerte und M Parameter:

$$(6.50) \quad \underline{A} \underline{dy} = \underline{l} + \underline{v}$$

$$\text{mit } l_j = e_0^j - e_C^j, \quad e_C = e_C(\underline{y}_0), \quad j = 1, \dots, L,$$

$\underline{y}_0, \underline{dy}$  - Näherungswert und gesuchte Korrektur,

$$\dim \underline{A} = (L, M).$$

Die gewichtige klassische Ausgleichung (Methode der kleinsten Quadrate) ergibt dann:

$$(6.51) \quad \underline{A}^T \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{dy} = \underline{A}^T \underline{P}^{-1} \underline{l} , \quad (\underline{P}^{-1} - \text{Gewichtsmatrix}),$$

$$(6.52) \quad \underline{N} \underline{dy} = \underline{b} ,$$

wobei  $\underline{v}^T \underline{P}^{-1} \underline{v} \longrightarrow \min$

Die verbesserten Parameter

$$(6.53) \quad \underline{y}_1 = \underline{y}_0 + \underline{dy}$$

werden als neue Näherungswerte für eine wiederholte Ausgleichung verwendet. Der Iterationsprozeß ist abgeschlossen, wenn der Wert  $\underline{l}_1^T$  sich nicht mehr signifikant ändert.

Bei der Behandlung des Gleichungssystems (6.50) treten oft Instabilitäten auf. Diese haben zwei Ursachen.

Einmal handelt es sich um eine scheinbare Instabilität, hervorgerufen durch ungünstige Maßeinheiten für die Parameter, und zum anderen um die reale, dem Problem innewohnende Instabilität.

Das Maßeinheitenproblem kann durch Normierung der Hauptdiagonale von  $\underline{N}$  auf  $\underline{l}$  ausgeschaltet werden; die so bestimmten Verbesserungen werden mit  $\underline{dy}'$  bezeichnet. Die Transformation

$$(6.54) \quad \underline{\beta} \underline{N} \underline{\beta} \underline{dy}' = \underline{\beta} \underline{b} , \quad \underline{N}' \underline{dy}' = \underline{b}'$$

mit der Hauptdiagonalmatrix  $\underline{\beta}$ , wobei

$$\beta_{ii} = n_{ii}^{-\frac{1}{2}} \quad (n_{ii} - \text{Hauptdiagonalelement von } \underline{N}),$$

führt zu einer Matrix  $\underline{N}'$  mit  $n'_{ii}=1$ . Unter Anwendung der Relation

$$(6.55) \quad \underline{dy} = \underline{\beta} \underline{dy}'$$

errechnen sich die Zuschläge für die Originalmaßeinheiten.

Die reale Instabilität kann durch Regularisierung behandelt werden. Bei der Regularisierung nach TICHONOV wird das Gleichungssystem

$$(6.56) \quad (\underline{N} + \alpha \underline{I}) \underline{dy} = \underline{b}$$

gelöst. Das entspricht einer Minimierung von

$$(6.57) \quad \underline{v}^T \underline{P}^{-1} \underline{v} + \alpha \underline{dy}^T \underline{dy} \longrightarrow \min$$

Da die Probleme nichtlinear sind, muß die Lösung von (6.56) für  $\alpha=0$  nicht notwendig zu kleineren Residuen  $\underline{1}^T \underline{1}$  führen (bei zu großen Schritten  $\underline{dy}$ ). Für sehr große Werte von  $\alpha$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) zeigt der Vektor  $\underline{dy}$  zwar in Richtung des steilsten Abstieges von  $\underline{1}^T \underline{1}$ , hat aber nur einen kleinen Betrag. Durch entsprechende Anzahl von Iterationen kommt man stets zur Lösung. Für praktische Anwendungen muß ein optimaler Wert von  $\alpha$  gefunden werden (LEVENBERG-MARQUARDT-Methode). Günstig ist es, für jeden Parameter einen gesonderten Wert  $\alpha$  zuzulassen (keine Einheitsmatrix). Er sollte einen solchen Betrag haben, daß

$$\underline{v}^T \underline{P}^{-1} \underline{v} \gg \alpha \underline{dy}^T \underline{dy}$$

gilt, damit in jedem Fall eine optimale Anpassung an die Meßwerte (kleines  $\underline{v}$ ) gewährleistet ist, und das für die volle Breite der möglichen Korrekturen  $\underline{dy}$ . In  $\underline{v}^T \underline{P}^{-1} \underline{v}$  gehen die zu erwartenden Residuen und die Anzahl der Meßwerte einschließlich der verwendeten Maßeinheiten ein. Da in der Regel  $L \gg M$  ist, wird  $\underline{dy}^T \underline{dy}$  nur durch die Maßeinheiten der Parameter beeinflusst. Jedem Parameter muß ein gesondertes  $\alpha$  zugewiesen werden, sofern die Maßeinheiten stark variieren. Beispielsweise erwartet man Zuschläge für die LOVEsche Zahl  $k_2$  in der Größenordnung von  $10^{-1}$  und für die Stationskoordinaten von  $10^{-6}$ , so daß die entsprechenden  $\alpha$ -Werte, sofern der gleiche Effekt erzielt werden soll, sich um den Faktor  $10^{-10}$  unterscheiden müssen. Die Transformation (6.54) ergibt zwar einen gewissen gleichmäßigen Einfluß von  $\alpha$  für die verschiedenen Parameter, indem in (6.57) der Summand  $\alpha \underline{dy}^T \underline{dy}$  auftritt, es ist jedoch auch in diesem Fall zu empfehlen, daß überschlagsmäßig der Einfluß der Regularisierung abgeschätzt wird.

Eine andere Form der Regularisierung ist die BAYESSche Methode der kleinsten Quadrate (MARTIN u. a., 1976). Hier wird die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$(6.58) \quad P(\underline{dy}/\underline{e}_0) = P(\underline{dy}) P(\underline{e}_0/\underline{dy})/P(\underline{e}_0)$$

maximiert, was äquivalent der Minimierung

$$\underline{v}^T \underline{P}^{-1} \underline{v} + \underline{dy}^T \underline{V}_y^{-1} \underline{dy} \longrightarrow \min$$

ist, wobei  $\underline{V}_y$  die a priori Varianz-Kovarianz-Matrix der Parameter  $\underline{y}$  ist. Die Lösung erhält man iterativ durch folgende Gleichung:

$$(6.59) \quad \underline{dy}^{(n+1)} - \underline{dy}^{(n)} = (\underline{N} + \underline{V}_y^{-1})^{-1} (\underline{A}^T \underline{P}^{-1} \underline{l}^{(n)} - \underline{V}_y^{-1} \underline{dy}^{(n)}),$$

wobei  $\underline{l}^{(n)}$  - Residuen für Parameter  $\underline{y}^{(n)} = \underline{y}_0 + \underline{dy}^{(n)}$

$$\underline{dy}^{(0)} = \underline{0} \quad .$$

Ist das Problem linear oder nahezu linear, so gilt:

$$(6.60) \quad \underline{l}^{(n)} = \underline{l}^{(0)} - \underline{A} \underline{dy}^{(n)} \quad .$$

Wird (6.60) in (6.59) eingesetzt, erhält man

$$(6.61) \quad \underline{dy} = (\underline{N} + \underline{V}_y^{-1})^{-1} \underline{b} \quad .$$

In diesem Fall ist keine Iteration erforderlich, und (6.61) stellt eine Verallgemeinerung der Regularisierung (6.56) dar.

Eine andere Betrachtungsweise, bei der a-priori-Werte für die Parameter als Meßwerte eingeführt werden, ergibt dieselbe Gleichung (6.61). Mit den Verbesserungen  $\underline{\tilde{v}}$  und den Gewichten  $\underline{\tilde{W}}^{-1}$ ,

$$(6.62) \quad \underline{\tilde{v}} = \begin{pmatrix} \underline{l} - \underline{A} \underline{dy} \\ \underline{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{dy} \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{W}} = \begin{pmatrix} \underline{P} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{V}_y \end{pmatrix},$$

liefert die klassische Ausgleichung mit der Zielfunktion

$$\underline{\hat{v}}^T \underline{W}^{-1} \underline{\hat{v}} \longrightarrow \min$$

das Gleichungssystem (6.61).

### 6.8. Methode der fiktiven Meßwerte

Die für die Kometenbahnberechnung entwickelte Methode der fiktiven Meßwerte wurde erstmals von DROZYNER (1980) in der Satellitenbahnmodellierung angewandt. Sie kann folgendermaßen charakterisiert werden:

Eine Berechnung der Satellitenbahn unter Verwendung des vollen Modells  $M$  liefert Residuen  $e_O - e_C$ . Nun werden für ein Modell  $M_F$ , das nur die wesentlichen Modellparameter enthält (z.B. Geopotential bis 4. Grades), die zugehörige Werte  $e_{CF}$  berechnet, aus denen sich die fiktiven Meßwerte

$$(6.63) \quad e_{OF} = e_{CF} + (e_O - e_C)$$

ergeben. Sie sind so definiert, daß man für  $e_{OF}$  in  $M_F$  dieselben Residuen wie für  $e_O$  in  $M$  erhält, sofern in beiden Modellen dieselben Anfangswerte  $\underline{x}_O, \dot{\underline{x}}_O$  eingesetzt werden. Unter der Voraussetzung, daß die partiellen Ableitungen  $\partial e / \partial \underline{x}_O, \partial e / \partial \dot{\underline{x}}_O$  in beiden Modellen nahezu gleich sind, können verbesserte Anfangswerte unter Verwendung von  $M_F$  und den zugehörigen fiktiven Meßwerten ermittelt werden. Die iterative Bahnverbesserung wird so auf ökonomische Art durchgeführt. Abschließend wird auf das Modell  $M$  und die Meßwerte  $e_O$  zurückgegangen, um die endgültigen Residuen und exakten Werte  $\underline{x}_O, \dot{\underline{x}}_O$  zu erhalten. Diese Methode ist in solchen Fällen anwendbar, in denen drei und mehr Iterationsschritte erforderlich sind.

### 6.9. Aspekte der rechentechnischen Realisierung

Das Satellitenbahnprogramm POTSDAM-5 stellt, wie in der Einleitung des Kapitels bereits erwähnt, einen umfangreichen Programmkomplex für Anwendungen in Forschung und Praxis dar. Die Grundkonzeption für die Programmstruktur mußte in Rechnung stellen, daß neben dem in dieser Arbeit behandelten Meßverfahren der Laserentfernungsmessung auch DOPPLER- und interferometrische Mes-

sungen genutzt werden können, d.h. Entfernungsdifferenzen von einer Station zu zwei Satellitenpositionen oder von zwei Stationen zu einer Satellitenposition bzw. ihre doppelten Differenzen. Eine gleichzeitige Bearbeitung aller Meßverfahren beeinflusste in wesentlichen Punkten die Anlage des Programms. Da POTSDAM-5 routinemäßig oft eingesetzt wird, war es gefordert, das Programm hinsichtlich Rechenzeit und Speicherplatzverbrauch bei gleichzeitig anwenderfreundlicher Handhabung zu optimieren. Die Speicherplatzoptimierung ist deshalb besonders wichtig, da Rechenzeiten von mehreren Stunden schon für durchschnittliche Probleme anfallen (ESER 1040, vgl. Abschnitt 4.5) und für diese Zeiten der Multi-User-Betrieb nicht blockiert werden soll.

Alle Programme sind in der Programmiersprache FORTRAN geschrieben, was die Transportabilität auf andere Rechenanlagen gewährleistet.

Das Programm wurde in modularer Struktur aufgebaut, wodurch auch die Handhabbarkeit für den Anwender erleichtert wird. Es gibt die drei großen Module

- Dateneingabe und -auswahl aus den verfügbaren Archiven
- Bahnmodellierung einschließlich iterativer Bahnverbesserung und Berechnung der partiellen Ableitungen
- Ausgleichungsteil, Berechnung gesuchter Parameter.

Die Bereitstellung aller für die Modellierungen erforderlichen Informationen (Stationskoordinaten, Pol, UT1, Geopotentialmodelle u.ä.) wird automatisch realisiert. Die Steuerung des Programmablaufs in allen drei Modulen erfolgt durch Bereitstellung von Steuerdateien, die sogenannte RUN-Karten und TITLE-Blöcke (nutzerfreundliche Angaben in Form von Texten und Zahlenwerten; in nicht fest vorgeschriebener Reihenfolge) enthalten. Ein Minimum an Steuerinformationen und damit an Kenntnis der inneren Struktur und des Programmablaufs ist nötig, um Standardvarianten realisieren zu können. Andererseits ist dem Nutzer aber die Möglichkeit gegeben, alle sinnvollen Parameter zu beeinflussen. So sind etwa 150 RUN-Karten und TITLE-Blöcke vorgesehen. Alle Daten, Parameter und Steuerinformationen werden überprüft und ihre gegenseitige Verträglichkeit getestet. Nur falls eine sinnvolle Programmbearbeitung möglich ist, wird diese eingeleitet.

Der speicherplatzintensive Teil der Bahnmodellierung und -verbesserung würde einen Platz von 900 K erfordern. Er wurde in 30 Überlagerungsteile (bei Verwendung von zwei Regionen) zerlegt, so daß ein maximaler Speicherplatzverbrauch von 275 K bei einem residenten Anteil von 140 K (einschließlich 40 K für Puffer)

erhalten wurden. Die Algorithmen, Technologien und Anordnungen der Unterprogramme wurden so optimiert, daß ein minimaler Wechsel der Überlagerungsteile erforderlich ist. Weiterhin war es nötig, ein Optimum hinsichtlich der Dimensionen der Felder auf dem Hauptspeicher, der Anzahl der Transfers mit den Magnetplatten und der wiederholten Berechnung von Informationen zu finden. Eine Minimierung der Transfers konnte durch entsprechende Reihenfolge der Informationen auf den Dateien und ihre Zuordnung zu verschiedenen Dateien erreicht werden, denn im Verlauf der Bearbeitung werden unterschiedliche Kombinationen der Informationen benötigt. Insgesamt sind 20 Dateien für die Abspeicherung von Zwischenergebnissen vorhanden, die für 1000 zu bearbeitende Meßwerte etwa 4 MByte Speicherplatz belegen. Derzeit sind alle ESER-Prozeduren so ausgelegt, daß 8000 Meßwerte gleichzeitig in einem Satellitenbogen verarbeitet werden können.

Der Hauptspeicher wird wesentlich durch das Anlegen von großen Normalgleichungssystemen, d.h. symmetrischen Matrizen, belastet. Schon bei 100 Parametern ergeben sich beachtliche Umfänge. Aus diesem Grunde werden alle symmetrischen Matrizen nur in Form von Dreiecksmatrizen abgespeichert. Hierfür wurde ein Komplex von Routinen zur Manipulation dieser Matrizen geschaffen, wobei keine mit Multiplikationen verbundenen Abbildungsfunktionen für die Matrixelemente genutzt, sondern alle Algorithmen unmittelbar auf die Struktur der Dreiecksmatrix ausgerichtet wurden (z.B. Matrixinversion auf eigenem Platz, Aufstellung der Normalgleichungsmatrix, Matrix \* Vektor, Blockpartitionierung, Parameterumordnungen).

Eine Optimierung der Rechenzeit muß in erster Linie bei der Modellierung der Satellitenbewegung, insbesondere der Berechnung der auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen einsetzen. 90% der Gesamtrechenzeit fallen an dieser Stelle an. Eine triviale, aber nicht immer beachtete Maßnahme ist, alle Formeln auf einmalig durchzuführende Operationen (z.B. Denormalisierung oder ähnliche Aufbereitungen) und mehrfach nutzbare Terme hin zu untersuchen. Wenn irgend möglich, sind Divisionen durch Multiplikationen zu ersetzen und komplizierte Indexierungen in Feldern durch bereitgestellte Indexfelder zu realisieren. Weiterhin ist zu beachten, die Rechnungen stets nur so genau wie nötig auszuführen. Beispielsweise reicht es aus, für Bahnmodellierungen die aufwendige Berechnung der Nutationswinkel nur in bestimmten Zeitabständen (z.B. 30 min) vorzunehmen. Außerdem reagieren verschiedene Satelliten auf unterschiedliche Kugelfunktionsglieder des

Geopotentials signifikant, so daß vorgesehen wurde, getrennte, frei wählbare Grenzen für zonale, tesserale und resonanzerzeugende Glieder einzuführen.

Auf Effektivitätsprobleme im Prozeß der numerischen Integration wurde bereits in 6.4. eingegangen. Der Startzeitpunkt für die Integration wurde in die Mitte des Untersuchungszeitraumes gelegt und eine Vor- und Rückwärtsintegration durchgeführt. Das bringt zwar einige organisatorische Probleme mit sich, liefert aber optimale Bedingungen hinsichtlich der Genauigkeit (vgl. 4.5.).

Die effektive Abarbeitung einer einzelnen Bahnmodellierung und -verbesserung spielt zwar eine wichtige Rolle, ist aber allein nicht ausreichend. Genauso wichtig, wenn nicht noch wichtiger, ist die Technologie für die Bearbeitung umfangreicher Aufgabenstellungen. In POTSDAM-5 wurde ein Konzept realisiert, das zwei Varianten der Bearbeitung ermöglicht, die beide auf der Grundvariante zur differentiellen Bahnverbesserung aufbauen. Bei der ersten Variante (MULTI-Pass-Variante) wird eine Normalgleichungsmatrix für alle in dem Satellitenbahnbogen enthaltenen Meßwerte aufgestellt. Dadurch ist eine unmittelbare Bestimmung von Parametern möglich, auch im Wechsel mit erneuten iterativen Bahnverbesserungen. In diesem Fall kann nur ein eingeschränkter Satz von Parametern (z.B. keine Biasparameter) berücksichtigt werden.

Die zweite Variante (SINGLE-Pass-Variante) ist ursprünglich für die Auswertung von DOPPLER-Daten konzipiert worden, aber auch allgemein einsetzbar. Hier wird für jeden Überflug und für jede Station eine gesonderte Normalgleichungsmatrix aufgestellt, die alle möglichen Parameter umfaßt. Diese Matrizen werden in einem Archiv gesammelt. Das Archiv ist dann Ausgangspunkt für umfassende Analysen, die außerhalb des eigentlichen Bahnprogramms (Programm SOLVE, DIETRICH, 1987) durchgeführt werden. Die Auswertung verschiedener Varianten hinsichtlich Gewichtsfestlegungen, zu berücksichtigender Parameter und Stationen kann so sehr ökonomisch gestaltet werden. Es ist unter anderem auch möglich, die Zeitintervalle für verschiedene Parameter zu variieren (z.B. Bahnelemente alle 5 Tage, Polkoordinaten alle 1, 3 bzw. 5 Tage, Biasparameter nur für jeden Überflug). Die hier angewandten Algorithmen zur Lösung der Normalgleichungen basieren auf dem HELMERT-Block-Verfahren.

Neben der Ausgabe der Normalgleichungsmatrizen ist auch vorgesehen (aus Speicherplatzgründen nur bei wenigen Meßwerten pro



Durchgang sinnvoll, z.B. 3-Minuten-Normalpunkte), die originalen Verbesserungsgleichungen zu sammeln, wobei zusätzliche Informationen wie z.B. Höhenwinkel angegeben sind. Diese Form der SINGLE-Pass-Variante hat weitere Vorteile. Es ist nun auch in der Endstufe der Parameterbestimmung möglich, fehlerhafte Meßwerte zu eliminieren und Höhenwinkelkriterien bei der Auswahl zu berücksichtigen. Durch Bereitstellung anderer meßwertbezogener Informationen (z.B. Satellitenort) können weitere Anwendungen (z.B. nachträgliche Berechnungen neuer partieller Ableitungen) erschlossen werden.

Abschließend soll noch erwähnt werden, daß das Problem der Dokumentation einer umfangreichen Software nicht zu unterschätzen ist. Hiervon hängen der Nutzen für den Anwender und die Effektivität bei Pflege und Erweiterungen der Software ab. Eine Dokumentation sollte sich in folgende drei Bestandteile gliedern:

- Anwendungshandbuch
- Darlegung der realisierten Theorien und des eingesetzten mathematischen Apparates
- Beschreibung der rechentechnischen Umsetzung, Dokumentation der internen Programm- und Datenstrukturen.

## 7. Relativistische Effekte und Einfluß kleiner Störungen auf LAGEOS

### 7.1. Relativistische Effekte bei der Satellitenbahnmodellierung und in der Reduktion von Laserentfernungsmessungen

Die NEWTONsche Gravodynamik ist für die im Sonnensystem vorhandenen Massen und Geschwindigkeiten der betrachteten Körper (Planeten, Monde, Satelliten) eine sehr gute Approximation der Allgemeinen Relativitätstheorie. Jedoch erfordert die hohe Meßgenauigkeit bei Radar-, DOPPLER- und Laserentfernungsmessungen zum Mond und zu den Planeten schon heute die Berücksichtigung relativistischer Effekte. Hier ist es ausreichend, den parametrisierten Post-NEWTONschen Formalismus (PPN) zu verwenden. Er gilt im nichtrotierenden baryzentrischen Koordinatensystem, das mit  $S_C$  bezeichnet werden soll. Die Zeitkomponente ist die zugehörige Koordinatenzeit. Der Koordinatenvektor sei  $(ct, x, y, z)$  oder  $(ct, \underline{x})$ . Die Parameter des PPN sind  $\gamma, \beta$  und  $GM_1$ .

Für die Allgemeine Relativitätstheorie ergeben sich  $\gamma = \beta = 1$  und  $GM_1$  als Gravitationsmassen der Quellen.

Für  $n$  nichtrotierende Punktmassen  $M_i$  gilt die Metrik (BRUMBERG, 1980):

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left( 1 - \frac{2}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} + \frac{2\beta}{c^4} \left( \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{4\beta-2}{c^4} \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{GM_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} - \frac{2\gamma+1}{c^4} \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} \dot{\underline{x}}_i^2 \right) c^2 dt^2 \\
 (7.01) \quad & + \frac{1}{c^3} \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} \left[ (4\gamma+3) \dot{\underline{x}}_i + \frac{1}{r_i} (\underline{r}_i^T \cdot \dot{\underline{x}}_i) \underline{r}_i \right] d\underline{x} c dt \\
 & + \left( 1 + \frac{2\gamma}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} \right) (d\underline{x})^2
 \end{aligned}$$

wobei  $\underline{x}_i, \dot{\underline{x}}_i$  - Ort und Geschwindigkeit der Punktmasse  $M_i$ ,  
 $\underline{x}$  - Ort des Aufpunktes,  
 $\underline{r}_i = \underline{x} - \underline{x}_i, r_i = |\underline{r}_i|$ .

Die Koordinaten des baryzentrischen Systems sind nahezu kartesisch, und die Bewegungsgleichung eines Körpers ergibt sich aus der NEWTONschen Bewegung unter Berücksichtigung kleiner Korrekturterme. Die bekannte EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN (EIH)-Lösung des PPN liefert die Beschleunigung jeder Punktmasse:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\underline{x}}_m = & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n \frac{GM_i}{r_{im}^3} \underline{x}_{im} \left( 1 - \frac{4}{c^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n \frac{GM_j}{r_{jm}} - \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{GM_k}{r_{ki}} + \frac{1}{c^2} \underline{x}_{im}^T \cdot \underline{x}_i^N \right. \\
 & \left. + \frac{1}{c^2} (\dot{\underline{x}}_m^2 + 2\dot{\underline{x}}_i^2 - 4\dot{\underline{x}}_m^T \cdot \dot{\underline{x}}_i) - \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{\underline{x}}_i^T \cdot \underline{x}_{im}}{c \cdot r_{im}} \right)^2 \right) \\
 (7.2) \quad & - \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n \frac{GM_i}{r_{im}^3} \underline{x}_{im}^T \cdot (3\dot{\underline{x}}_i - 4\dot{\underline{x}}_m) (\dot{\underline{x}}_i - \dot{\underline{x}}_m) \\
 & + \frac{7}{2c^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n \frac{GM_i}{r_{im}} \ddot{\underline{x}}_i^N
 \end{aligned}$$

mit  $\underline{x}_{ik} = \underline{x}_i - \underline{x}_k, \quad r_{ik} = |\underline{x}_{ik}|,$

$$\ddot{\underline{x}}_i^N = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{GM_k}{r_{ki}^3} \underline{x}_{ki} \quad - \text{NEWTONSche Beschleunigung für } i\text{-te Punktmasse}$$

Da nur Messungen von der Erde zu künstlichen Erdsatelliten betrachtet werden, interessiert vor allem der Differenzvektor zwischen Satellit  $\underline{x}_L$  und Erdmittelpunkt  $\underline{x}_E$ . Die Positionen der Erde und der anderen Himmelskörper sind durch Ephemeriden bekannt (z.B. DE200, LE200).

Die relativistisch berechnete Differenz der Vektoren  $\underline{x}_L$  und  $\underline{x}_E$  kann erhalten werden, indem die Differenz der Beschleunigungen von Satellit und Erde

$$(7.3) \quad \ddot{\underline{x}}_L^{\text{DIF}} = \ddot{\underline{x}}_L - \ddot{\underline{x}}_E$$

auf der Basis der Gleichung (7.2) ermittelt und integriert wird (analog (5.2)). Hierdurch wird sowohl Rechenzeit eingespart als auch eine höhere Integrationsgenauigkeit erreicht.

Ausgehend von (7.2) ergibt sich mit den Symbolen

M Mond, S Sonne, E Erde, J Jupiter, V Venus, L Satellit,

N(K) NEWTONSche Beschleunigung durch Körper K

folgende Formel für eine Genauigkeit von  $10^{-12}$ :

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \ddot{\underline{x}}_L^{\text{DIF}} = \frac{GM_E}{r_{EL}^3} \underline{x}_{EL} & \left( 1 - \frac{4}{c^2} \left( \frac{GM_S}{r_{SL}} + \frac{GM_E}{r_{EL}} + \frac{GM_J}{r_{JL}} \right) - \frac{1}{c^2} \left( \frac{GM_S}{r_{SE}} + \frac{GM_J}{r_{JE}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} (\dot{\underline{x}}_L + 2\dot{\underline{x}}_E^2 - 4\dot{\underline{x}}_L^T \dot{\underline{x}}_E) - \frac{3}{2c^2} \left( \frac{\dot{\underline{x}}_E^T \dot{\underline{x}}_{EL}}{r_{EL}} \right)^2 \right) \\ & - \frac{1}{c^2} \frac{GM_E}{r_{EL}^3} \underline{x}_{EL}^T (3\dot{\underline{x}}_E - 4\dot{\underline{x}}_L) (\dot{\underline{x}}_E - \dot{\underline{x}}_L) + \frac{7}{c^2} \frac{GM_E}{r_{EL}} \ddot{\underline{x}}_E^N(S) \\ & + (\ddot{\underline{x}}_L^N(S) - \ddot{\underline{x}}_E^N(S)) + (\ddot{\underline{x}}_L^N(M) - \ddot{\underline{x}}_E^N(M)) + (\ddot{\underline{x}}_L^N(J) - \ddot{\underline{x}}_E^N(J)) \\ & + (\ddot{\underline{x}}_L^N(V) - \ddot{\underline{x}}_E^N(V)) \end{aligned}$$

(Bem.: Alle Geschwindigkeitsvektoren gelten im System  $S_C$ !)

Bei den durch die Erde erzeugten Beschleunigungen des Satelliten müssen einige relativistische Korrekturterme berücksichtigt werden, die allerdings nur Beschleunigung und Geschwindigkeit der Erde sowie das Potential von Erde, Sonne und Jupiter einbeziehen. Bei allen anderen Himmelskörpern ist die NEWTONsche Gravitationsbeschleunigung ausreichend.

Die Größenordnung der relativistischen Korrekturen nimmt Werte von etwa  $-5 \cdot 10^{-8}$  mit periodischen Schwankungen an. Dadurch ergibt sich bei relativistischer Rechnung natürlich ein um diese Größenordnung anderer Wert für  $GM_E$  im Vergleich zur rein NEWTONschen Behandlung.

Natürlich kann die Erde nicht als Punktmasse aufgefaßt werden. Anstelle der Beschleunigung der Punktmasse Erde wird der erste Term in Gleichung (7.4) durch die entsprechende harmonische Entwicklung des Geopotentials ersetzt.

Für die EIH-Bewegungsgleichung werden nichtrotierende Punktmassen angenommen. Jedoch hat ihre Rotation Einfluß auf die Satellitenbewegung. Der Effekt ist mit den Namen LENSE und THIRRING verbunden. Hierauf wird später eingegangen.

Nun soll noch einmal die Metrik (7.1) betrachtet werden. Es sei mit

$$(7.5) \quad U = \sum_{i=1}^3 \frac{GM_i}{|x-x_i|}$$

das Potential der Punktmassen  $M_i$  bezeichnet. Unter Berücksichtigung aller Glieder bis  $c^{-2}$  ergibt sich die SCHWARZSCHILD- Metrik

$$(7.6) \quad ds^2 = \left(1 - 2 \frac{U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + 2\gamma \frac{U}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

zu der der metrische Tensor

$$(7.7) \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \left(1 - 2 \frac{U}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 + 2\gamma \frac{U}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + 2\gamma \frac{U}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1 + 2\gamma \frac{U}{c^2}\right) \end{pmatrix}$$

gehört. Wird nun auf ein Koordinatensystem  $\tilde{S}_C$  übergegangen, das

relativ zum System  $S_C$  ruht, aber reduziert ist um die Einflüsse der Potentialwirkungen auf die Erde, so gelten die Transformationen:

$$(7.8) \quad d\tilde{t}^2 = \sqrt{1 - 2 \frac{U}{c^2}} dt ,$$

$$(7.9) \quad d\tilde{x} = \sqrt{1 + 2 \frac{U}{c^2}} dx .$$

Im System  $\tilde{S}_C$  lautet das Linienelement

$$(7.10) \quad ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - (d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2) ,$$

was dem speziell-relativistischen Fall entspricht. Der Übergang zu dem mit dem Beobachter auf der Erde verbundenen System  $S_E$  ( $(ct, x_E, y_E, z_E)$ ), das sich mit der Geschwindigkeit  $\underline{v}$  relativ zum System  $\tilde{S}_C$  bewegt, wird durch die LORENTZ-Transformation vermittelt (BRUMBERG, 1972, S. 100,103):

$$(7.11) \quad d\tilde{t} = (1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}) (d\bar{t} + \frac{v^T dx_E}{c^2}) ,$$

$$(7.12) \quad d\tilde{x} = dx_E + \frac{1}{2} \frac{dx_E^T v}{c^2} \underline{v} + (1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}) \underline{v} d\bar{t} .$$

Somit ergibt sich durch Kombination der Gleichungen (7.8) bis (7.12) die Gesamttransformation zwischen  $S_C$  und  $S_E$ :

$$(7.13) \quad dt = (1 + \frac{U}{c^2} + \frac{1}{2} (\frac{v}{c})^2) (d\bar{t} + \frac{v^T dx_E}{c^2}) ,$$

$$(7.14) \quad dx = (1 - \frac{U}{c^2}) (dx_E + \frac{1}{2} \frac{dx_E^T v}{c^2} \underline{v} + (1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}) \underline{v} d\bar{t}) .$$

Nach diesen Zwischenbetrachtungen soll noch einmal auf die Bewegungsgleichung (7.2) eingegangen werden. Sie liefert die Positionen des Erdmittelpunktes in  $S_C$ . Ein Punkt der Erdoberfläche, der relativ zum Erdmittelpunkt für den betrachteten Zeitpunkt die Differenz  $\Delta x_E$  im System  $S_E$  hat, hat dann eine Differenz im System  $S_C$  zu (Gl. (7.14) mit  $d\bar{t}=0$ ):

$$(7.15) \quad \Delta x = (1 - \frac{U}{c^2}) \Delta x_E + \frac{1}{2} \frac{\Delta x_E^T v}{c^2} \underline{v} .$$

Die Position des Punktes der Erdoberfläche (Beobachtungsstation) ergibt sich durch Addition von  $\Delta x$  zur Lösung der Bewegungsgleichung. Der Vektor  $y$  berechnet sich aus Bahngeschwindigkeit der Erde, den erdfesten Koordinaten der Station und der Erdrotation. Der Potentialeinfluß, der nahezu konstant ist, hat eine Größenordnung von etwa  $1 \cdot 10^{-8}$  (6 cm im Erdradius), und der auf der Relativgeschwindigkeit basierende Tagesterm hat eine Amplitude von maximal 3 cm.

Nun sollen Entfernungsmessungen von der Erde zu Objekten wie Satelliten, Mond und Planeten mit Hilfe von Laser- oder Radarverfahren betrachtet werden. Der Impuls wird zur Zeit  $t_1$  ausgesendet, zur Zeit  $t_2$  am Objekt reflektiert und zur Zeit  $t_3$  an der Station wieder empfangen. Der eigentliche Meßwert ist demnach die Zeitdifferenz  $t_3 - t_1$ . Sie muß sich aus den Positionen der Station  $\underline{x}(t_1)$  bzw.  $\underline{x}(t_3)$  sowie der des Satelliten  $\underline{x}(t_2)$  berechnen lassen. Die allgemeine Formel für die Berechnung der Laufzeit von Photonen in der Metrik (7.1) zwischen beliebigen Punkten  $\underline{x}(t_a)$  und  $\underline{x}(t_b)$  lautet unter Vernachlässigung der Bewegung der Körper während der Lichtausbreitung (BRUMBERG, 1980):

$$(7.16) \quad t_b - t_a = \frac{r_{ba}}{c} + \frac{1+\gamma}{c^3} \sum_{i=1}^n M_i \ln \frac{r_{ai} + r_{bi} + r_{ba}}{r_{ai} + r_{bi} - r_{ba}}$$

wobei

$$r_{ba} = |\underline{x}(t_b) - \underline{x}(t_a)|, \quad r_{ai} = |\underline{x}(t_a) - \underline{x}_i|, \\ r_{bi} = |\underline{x}(t_b) - \underline{x}_i|.$$

Danach ergibt sich für die zu messende Laufzeit:

$$(7.17) \quad t_3 - t_1 = \frac{r_{21} + r_{32}}{c} + \frac{1+\gamma}{c^3} \sum_{i=1}^n M_i \ln \left( \frac{r_{2i} + r_{1i} + r_{21} \cdot r_{3i} + r_{2i} + r_{32}}{r_{2i} + r_{1i} - r_{21} \cdot r_{3i} + r_{2i} - r_{32}} \right).$$

Hierbei handelt es sich um die Laufzeit, ausgedrückt in Koordinatenzeit des  $S_C$  und nicht in Atomzeit einer erdgebundenen Uhr. Die für diesen Übergang erforderliche Transformation wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

Die zur Metrik (7.1) des PPN-Formalismus gehörende Koordinatenzeit PNT (Parameterized NEWTONian Time) kann man sich als eine Atomuhr vorstellen, die relativ zum Baryzentrum ruht und unendlich weit entfernt ist. Unsere Zeitmessungen werden jedoch mit einer auf der Erde befindlichen Atomuhr (die IAT mißt) durchge-

führt, deren Eigenzeit mit  $t$  bezeichnet wird. Ihre Transformation in die Koordinatenzeit  $t$  erfolgt nach (7.13) durch folgende Gleichung:

$$(7.18) \quad dt = \left(1 + \frac{U}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) d\bar{t} .$$

Mit  $U$  ist das auf die Uhr wirkende Gesamtpotential und mit  $v$  die Geschwindigkeit der Uhr in  $S_C$  zu verstehen. Die Mittelwerte von  $U$  und  $v$  sind nicht Null, so daß ein unterschiedlicher säkularer Gang zwischen beiden Zeitsystemen auftritt. Das führt in der Praxis zu Problemen. So wurde von der Internationalen Astronomischen Union (IAU) beschlossen, ein relativistisches Koordinatensystem einzuführen, dessen Zeit nur periodische Schwankungen relativ zur erdgebundenen Atomzeit aufweist. Diese Zeit  $t^*$  sei mit TDB (Temps Dynamique Barycentrique) bezeichnet. Der Unterschied zu PNT ist

$$(7.19) \quad dt^* = (1-L) dt,$$

$$\text{wobei} \quad L = \bar{U} + \frac{1}{2} \frac{\bar{v}^2}{c^2}$$

als Mittelwert über Potential und Geschwindigkeit einen Betrag von  $\approx 1,5 \cdot 10^{-8}$  hat. In (7.18) eingesetzt, ergibt sich die Beziehung zwischen TDB und IAT zu

$$(7.20) \quad dt^* = \left(1 + \frac{U}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - L\right) d\bar{t} .$$

Die Integration dieser Gleichung liefert (MOYER, 1981):

$$(7.21) \quad t^* - \bar{t} = \Delta T_A + \frac{2}{c^2} (\dot{x}_B^S \cdot x_B^S) + \frac{1}{c^2} (\dot{x}_B^C \cdot x_E^B) + \frac{1}{c^2} (\dot{x}_E^C \cdot x_A^E) \\ + \frac{M_J}{c^2 (M_S + M_J)} (\dot{x}_J^S \cdot x_J^S) + \frac{M_{SA}}{c^2 (M_S + M_{SA})} (\dot{x}_{SA}^S \cdot x_{SA}^S) + \frac{1}{c^2} (\dot{x}_S^C \cdot x_B^S),$$

wobei

B	Baryzentrum Erde - Sonne,	E	Erde,
C	Baryzentrum Sonnensystem,	S	Sonne,
$x_E^B$	Position von E im System B,	J	Jupiter,
A	Position der Atomuhr auf der Erde,	SA	Saturn.

Die konstante Differenz  $\Delta T_A$  beträgt 32,184 s. Sie wurde von der IAU auf der 16. Generalversammlung 1976 auf diesen Wert festgelegt, so daß (IAT + 32,184 s) nur periodische Abweichungen von TDB aufweist und eine kontinuierliche Fortsetzung der Ephemeridenzeit (ET) darstellt, mit der Anschlußstelle bei 1977,0. Der mittlere Gang beider Zeitsysteme ist also gleich. In Gleichung (7.21) wird vorausgesetzt, daß die Atomuhr in der Position  $\underline{x}_A$  die Zeit IAT anzeigt, d.h. ihr Gang auf das Potential des Meeresniveaus reduziert wurde. Je Kilometer Höhenunterschied zum Meeresniveau ergibt sich ein Gangunterschied von etwa 10 ns pro Tag. Die Genauigkeit von (7.21) beträgt für Tages-, Monats- bzw. Jahresperioden etwa 4 ns, 0,1  $\mu$ s bzw. 1  $\mu$ s. Die Terme der rechten Seite der Formel (7.21) haben etwa folgende maximale Amplituden und Perioden:

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 2. Term - 1,658 ms              | mit Jahresperiode  |
| 3. Term - 1,6 $\mu$ s           | mit Monatsperiode  |
| 4. Term - 2,1 $\mu$ s           | mit Tagesperiode   |
| 5. Term - 5,2 $\mu$ s           | mit 12-jähriger Periode  |
| 6. Term - 2,5 $\mu$ s           | mit 29-jähriger Periode  |
| 7. Term - 20 $\mu$ s; 5 $\mu$ s | mit Jahresperiode durch Einfluß von Jupiter, Saturn (andere Planeten < 1 $\mu$ s). |

Für eine vorgegebene Koordinatenzeit  $t^*$  zeigen zwei Atomuhren auf der Erde eine Zeitdifferenz von maximal 2  $\mu$ s an, die allein durch den 4. Term bestimmt ist. Hierbei handelt es sich um eine Differenz, die auf der LORENTZ-Transformation beruht, also um einen speziell-relativistischen Effekt. Im erdgebundenen Koordinatensystem zeigen beide Uhren dieselbe Zeit (IAT) an.

Für die Anwendung der Formel (7.21) für satellitengeodätische Zwecke ist es wichtig zu wissen, daß die Festlegung der Zeit eines Ereignisses (der Messung) mit einer Genauigkeit erfolgen muß, die in Beziehung zur Geschwindigkeit des Satelliten zu sehen ist. Der Satellit legt maximal 7 km/s (relativ zur Erde) bzw. 30 km/s (in  $S_C$ ) zurück, so daß 0,1  $\mu$ s einer Positionsgenauigkeit von wenigen mm entspricht und für praktische Zwecke völlig ausreichend ist. Dabei ist es außerdem nur entscheidend, eine hohe relative Genauigkeit innerhalb des Integrationszeitraumes (meistens einige Tage bis Wochen) aufrecht zu erhalten. Eine wesentlich höhere Genauigkeit wird für die Lichtlaufzeitmessung zum Satelliten benötigt, da hier die Lichtgeschwindigkeit eingeht. Allerdings handelt es sich hierbei nur um Zeitintervalle unterhalb einer Sekunde, in denen differentiell eine Genauigkeit von 0,01 ns (entspricht 0,3 cm in der Strecke) angestrebt werden muß.



Hier ist die Berücksichtigung des 2. und 4. Terms von Gleichung (7.21) ausreichend. Die differentielle Änderung von  $t^* - \bar{t}$  beträgt pro Sekunde maximal 0,33 ns mit Jahresperiode und maximal 0,15 ns mit Tagesperiode. Für LAGEOS ergeben sich hierdurch Korrekturen von 8 mm bzw. 4 mm für die Strecke zum Satelliten und zurück.

Der Übergang von PNT zu TDB hat natürlich Einfluß auf die Bewegungsgleichung (7.2). Um die Form der Bewegungsgleichung auch bei Verwendung von TDB beizubehalten, müssen die Raumkoordinaten und die Massen entsprechend transformiert werden, d.h.

$$(7.22) \quad \underline{x}^* = (1-L) \underline{x}_i, \quad M_i^* = (1-L) M_i.$$

Dadurch ändert sich der Potentialwert (7.5) nicht, und für die Variablen bzw. Parameter  $t^*$ ,  $\underline{x}^*$ ,  $M^*$  kann die Bewegungsgleichung (7.2) unverändert angewendet werden. Die dann aufgrund von Beobachtungen bestimmten Massen entsprechen nicht den physikalischen Massen. Der auftretende Faktor L wirkt keinerlei prinzipielle Probleme auf, muß aber bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden.

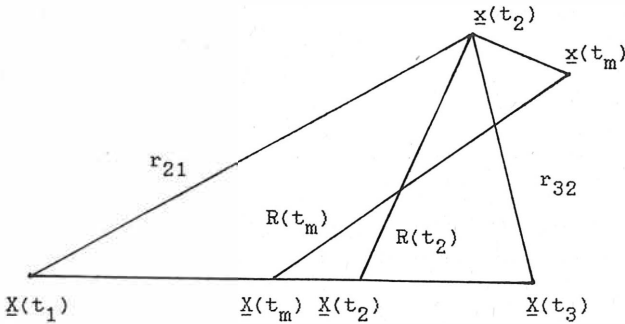


Abb. 7.1.: Laufzeitmessung zum Satelliten

Die eigentlichen Meßwerte sind Aussendezeit  $t_1$  und Empfangszeit  $t_3$  des Signals auf der Station. Bei der Berechnung im Modell müssen die Positionen des Satelliten  $\underline{x}(t)$  zum Zeitpunkt  $t_2$  ermittelt werden. Nun ist es aber nicht einfach,  $t_2$  und  $t_3$  und damit die Positionen so vorzugeben, daß das Modell in sich stimmt. Die Zeiten müssen so fixiert sein, daß die Laufzeiten zu den Orten  $\underline{x}(t_2)$  und  $\underline{X}(t_3)$  mit den entsprechenden Zeitdifferenzen übereinstimmen. Im allgemeinen wird hierzu eine Iteration nötig sein. Die dann im Modell berechnete Laufzeit  $t_3-t_1$  wird eine Abweichung zum Meßwert aufweisen, die durch Veränderung der Satellitenbahnparameter zu kompensieren ist. Die Berechnungen können etwas vereinfacht werden, wenn unter Verwendung derselben Zeit

$$(7.23) \quad t_m = (t_1 + t_3)/2$$

für die Stationen  $\underline{X}(t_m)$  und den Satelliten  $\underline{x}(t_m)$  eine Entfernungsberechnung im Modell durchgeführt wird (s. Abb. 7.1.). Es gilt

$$(7.24) \quad r_{21} + r_{32} = |\underline{x}(t_2) - \underline{X}(t_1)| + |\underline{X}(t_3) - \underline{x}(t_2)|$$

Durch die Einführung der Geschwindigkeit  $\dot{\underline{X}}(t)$  (etwa 30 km/s) und der Ausdrücke

$$(7.25) \quad t_2 - t_1 = \frac{R}{c} + \Delta t, \quad \Delta t = \frac{\dot{\underline{X}}^T R}{c^2}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{R}{c} - \Delta t$$

$$\text{mit } R(t_2) = |\underline{x}(t_2) - \underline{X}(t_2)|, \quad R = |R|,$$

für die Zeitdifferenzen (MARTIN u. a., 1985) kann unter Verwendung von TAYLORreihen die folgende mit hoher Genauigkeit geltende Näherung

$$(7.26) \quad r_{21} + r_{32} \approx 2R(t_2) + \frac{(\dot{\underline{X}}^T R)^2}{R c^2} + R \frac{\dot{\underline{X}}^2}{c^2}$$

abgeleitet werden. Für den Übergang zum Zeitpunkt  $t_m$  wird

$$(7.27) \quad R(t_2) = R(t_m) + \dot{R} \cdot (t_2 - t_m), \quad t_2 - t_m = \Delta t$$

in Gl. (7.26) eingesetzt. Es ist üblich, die halbe Laufzeit als Entfernung zum Zeitpunkt  $t_m$  zu betrachten. Die Satellitenbahnmodellierung ergibt die Strecke  $R(t_m)$ . Durch Berücksichtigung von (7.26), (7.27) und (7.15) kann ein Vergleich zwischen Meßwert und Modell auf der Basis folgender Formel durchgeführt werden:

$$(7.28) \quad e = \frac{c \cdot (t_3 - t_1)}{2} \approx R(t_m) + \dot{R} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \left( \frac{\dot{X}^T R}{c} \right)^2 + R \left( \frac{\dot{X}}{c} \right)^2 \right) + \frac{1+\gamma}{c^2} \sum_{i=1}^n M_i \ln \frac{r_{1i} + r_{2i} + R}{r_{1i} + r_{2i} - R}$$

Für einen Satelliten wie LAGEOS (Halbachse 12 Mm) erreichen  $\Delta t$  maximal 3  $\mu$ s sowie der 2. und 3. Term der rechten Seite von Gleichung (7.28) höchstens Beträge von 2 cm bzw. 10 cm. Die relativistischen Laufzeitkorrekturen im 4. Term ergeben sich durch die Sonne bis zu 18 cm (1,8 cm je 1000 km) und durch die Erde bis zu 1 cm; andere Planeten haben keinen Einfluß.

Nun werden noch einmal kurz alle Berechnungen zusammengefaßt, die man benötigt, um Laserentfernungsmessungen zu künstlichen Erdsatelliten auswerten zu können.

Eine Station auf der Erde mißt mit einer Atomuhr im Zeitsystem IAT Abschluß und Empfangszeit  $\bar{t}_1$  bzw.  $\bar{t}_3$ . Unter Verwendung von Ephemeriden für Sonne und Planeten kann Gleichung (7.21) zur Umrechnung dieser Zeiten in TDB-Zeiten  $t_1^*$ ,  $t_3^*$  verwendet werden. Die halbe Lichtlaufzeit als sogenannte gemessene Entfernung  $e$  wird der Intervallmitte zugeordnet:

$$(7.29) \quad e_0(t_m^*) = \frac{c}{2} (t_3^* - t_1^*), \quad t_m^* = \frac{1}{2} (t_3^* + t_1^*)$$

Die sich aus dem Modell ergebende Entfernung  $e_c$  muß nun berechnet werden. Es bietet sich an, Gleichung (7.4) für die unmittelbare Berechnung der letztlich benötigten Differenz zwischen Satelliten- und Erdposition zu verwenden. In die Bewegungsgleichung werden die Massen  $M_i^*$  (vgl. Gl.(7.22) eingesetzt und die Differenz zum Zeitpunkt  $t_m^*$  ermittelt. Da (7.4) die Differenz des Satelliten zum Geozentrum liefert, muß (7.15) unter Berücksichtigung

sichtigung von (7.22) die benötigte Relation zwischen Geozentrum und Station liefern. Dabei ist mit  $\underline{\Delta X}_E$  die zum Zeitpunkt  $t_m^*$  geltende Position der Station, bezogen auf das geozentrische System  $S_E$ , gemeint. Bei dieser Positionierung spielen Erdrotation, Polbewegung, Präzession u. a. m. eine Rolle. Im letzten Schritt müssen noch einige Korrekturen an der sich ergebenden Entfernung  $R(t_m^*)$  zwischen Station und Satellit nach Gleichung (7.28) angebracht werden. Die einzusetzenden Geschwindigkeiten  $\dot{R}, \dot{X}$  gehen nur in Korrekturterme mit einer Größenordnung von wenigen cm ein und sind daher ohne Probleme bereitzustellen. Für  $\dot{R}$  ist die Satellitengeschwindigkeit in  $S_E$  und für  $\dot{X}$  die Geozentrums-geschwindigkeit und die Erdrotation ausreichend. Die so berechnete Entfernung  $e_C(t_m^*)$  kann der gemessenen gegenübergestellt und zur Parameterbestimmung des Problems herangezogen werden.

Viele der zu berücksichtigenden relativistischen Formeln erzeugen Effekte im dm-Bereich. So reduziert beispielsweise die Bewegungsgleichung (7.4) durch eine relative GM-Änderung um  $-5 \cdot 10^{-8}$  die Halbachse von LAGEOS um  $\approx 21$  cm, und die Laufzeitkorrekturen von Gleichung (7.16) entsprechen 10 bis 20 cm je nach Entfernung. Hieraus ist jedoch nicht abzuleiten, daß die NEWTONsche Behandlung des Problems Fehler solcher Größenordnung in sich birgt. Beispielsweise entsprechen speziell-relativistische Terme, die nur durch den Übergang auf ein anderes Koordinatensystem hervorgerufen werden, keinen Fehlern. Die konstanten Anteile, die durch Potentialeinflüsse hervorgerufen werden, können durch entsprechende Skalierung von Parametern fast aufgefangen werden. Es bleiben nur die kleinen Differenzen, die aufgrund ihrer komplexen Ursachen in der Bewegungsgleichung und im Zeitsystem nur schwer abzuschätzen sind.

Wird von der NEWTONschen Behandlung des Problems ausgegangen, so hat man folgende Veränderungen abzuschätzen: Das Zeitsystem TDB hat gegenüber dem sonst verwendeten IAT-System nur periodische Schwankungen. Der größte Anteil hat eine Amplitude von 1,658 ms mit Jahresperiode. Von Bedeutung sind die differentiellen Änderungen innerhalb einiger Tage, sofern es um die Festlegung der Beobachtungsepoche geht. Hier spielt die Geschwindigkeit des Satelliten eine Rolle. Die Effekte können mehrere Zehntel  $\mu$ s annehmen und somit absolute Positionsfehler von Zentimetern erreichen. Da nahezu lineares Verhalten im Intervall vorliegt, kann der Effekt durch Änderung der Halbachse des Satelliten kompen-

siert werden. Die differentielle Zeitkorrektur während der Laufzeitmessung beträgt etwa 0,01 ns und entspricht somit Entfernungsänderungen von einigen mm.

Geht man von der bisher hier vorgestellten Formulierung des Problems im Baryzentrischen Sonnensystem zu einer Betrachtung im geozentrischen System über, so kann man den Fehler der NEWTONschen Behandlung des Problems gut abschätzen. Zu diesem Thema sind kürzlich einige Veröffentlichungen erschienen (SOFFEL, 1987; ZHU und GROTEN, 1987). Beim Übergang auf das geozentrische System verändert sich die Formel der Entfernungsberechnung zwischen Station und Satelliten dahingehend, daß alle Effekte der Sonne in der Größenordnung von  $10^{-8}$  entfallen. Es verbleibt nur der Einfluß des Geopotentials in der Größenordnung von 1 cm (max.) für LAGEOS. Ebenso kann gezeigt werden, daß die geozentrische Formulierung der Bewegungsgleichung in der klassischen Form bei einer Genauigkeit von  $10^{-8}$  mit der relativistischen Formulierung übereinstimmen.

Es ergeben sich also relativistische Störungen der NEWTONschen Behandlung des Problems durch das Geopotential und durch Gezeiteneffekte der Sonne, die jeweils nur in der Größenordnung von  $10^{-8}$  liegen. Dabei muß natürlich beachtet werden, daß dies eine Skalierung durch den genannten Faktor L voraussetzt.

MARTIN u.a. (1985) haben anhand simulierter Laserentfernungsmessungen zum Satelliten LAGEOS den Schluß gezogen, daß relativistische Effekte bei der Bestimmung von Stationskoordinaten nur wenige cm betragen werden. Sie untersuchten auch reale Daten aus einem Zeitraum von 4 Monaten. Die relativistische Behandlung ergab z.T. eine Verbesserung in den Restfehlern um wenige mm. Die erhaltenen Strecken- und Höhenänderungen können auch noch nicht als signifikant angesehen werden.

Dies alles läßt den Schluß zu, daß die Anwendung der Relativitätstheorie in der Satellitengeodäsie Korrekturen der durch NEWTONsche Theorien erhaltenen Ergebnisse von höchstens einigen cm erwarten läßt. Mit Übergang auf das cm-Niveau in den nächsten Jahren wird es von Vorteil sein, die Relativitätstheorie einzubeziehen, um jeden noch so kleinen systematischen Effekt bei der Bestimmung von Parametern, wie GM oder Stationsradien, auszuschließen.

Bei den bisherigen relativistischen Betrachtungen wurden stets nichtrotierende Punktmassen angenommen. Jedoch erfährt ein Satellit, der eine rotierende Masse umkreist, eine zusätzliche Störung seiner Bahn. Dieser Effekt wird nach seinen Entdeckern, LENSE und THIRRING (1918), benannt und ist bis heute nicht experimentell nachgewiesen. Hier könnte die Satellitengeodäsie einen wertvollen Beitrag leisten. Für erdumkreisende Satelliten gelten die relativistischen Störungen (BRUMBERG, 1972)

$$(7.30) \quad \dot{\Omega}_{LT} = \frac{4}{5} \frac{GM_E R_E^2 \omega_E}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \quad (\text{d.h. ostwärts}),$$

$$(7.31) \quad \dot{\omega}_{LT} = -3 \dot{\Omega} \cos i, \quad \dot{\omega}_{RK} = \frac{GM_E}{c^2} \frac{3n}{a(1-e^2)} \quad (\text{relativistisches KEPLER-Problem}),$$

für den Knoten  $\Omega$  bzw. das Perigäum  $\omega$ . Mit  $R_E$ ,  $\omega_E$  seien Erdradius und Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation sowie mit  $a$ ,  $n$ ,  $e$ ,  $i$  Halbachse, Winkelgeschwindigkeit, Exzentrizität und Neigung des Satelliten bezeichnet. Die Tab. 7.1. gibt von ausgewählten Satelliten die Störbeiträge für einen Zeitraum von einem Jahr an (s. auch KOZEVA und GEORGIEV, 1984).

Tabelle 7.1.: LENSE-THIRRING-Effekt für verschiedene Satelliten

Satellit	a [Mm]	i [°]	LENSE-THIRRING		Rel. KEPLER-Problem (zum Vergleich) $\Delta\omega_{RK}$ ["/Jahr]
			$\Delta\Omega_{LT}$ ["/Jahr]	$\Delta\omega_{LT}$ ["/Jahr]	
STARLETTE	7,3	50	0,18	-0.34	12
LAGEOS	12,3	110	0,037	0,038	3,3
GPS	26,6	63	0,0036	-0,0049	0,47
Geostat.	42,2	0	0,0009	-0,0027	0,15

Das Perigäum ist wesentlich ungenauer anhand von Meßwerten zu bestimmen. So kann der Effekt, wenn überhaupt, nur durch Analyse der Knotenlage nachgewiesen werden.

Der Knoten ist untrennbar mit der Erdrotation verbunden. Die Phase der Erdrotation, d.h. die erdgebundene Zeit UT1, muß unter Verwendung unabhängiger Meßverfahren vorgegeben werden. Hier kommt nur das VLBI-Verfahren in Betracht. Bei einer Genauigkeit für UT1 von  $\pm 0,1$  ms und besser (s. 8.4.1.), was etwa  $\pm 0,002''$  entspricht, wäre es somit möglich, bei Satelliten bis zu einer Höhe von LAGEOS und Zeiträumen von etwa einem Jahr den LENSE-THIRRING (LT)-Effekt nachzuweisen. Dies setzt natürlich voraus, daß die Knotenlage aufgrund aller anderen einwirkenden Kräfte mit hoher Genauigkeit modelliert werden muß. Der Hauptanteil der Knotenwanderung wird durch die zonalen Harmonischen der Entwicklung des Geopotentials, insbesondere durch  $C_{20}$ , hervorgerufen. Der Ausdruck für die Knotenwanderung hat im Prinzip folgende Gestalt (KAULA, 1966):

$$(7.32) \quad \dot{\Omega}_{s\ddot{a}k} = \frac{3n}{2p^2} \cos i \left( C_{20} + C_{40} \left[ \frac{5}{8p^2} (3-7 \cos^2 i) (1 + \frac{3}{2} e^2) \right] \right. \\ \left. + C_{60} \left[ \frac{35}{64p^4} (5-30 \cos^2 i + 33 \cos^4 i) (1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4) \right] + \dots \right),$$

mit  $p = \frac{(1-e^2)a}{R_E}$ .

Die Knotenwanderung hängt vom Faktor "cos i" ab, d.h., zwei Satelliten mit den Neigungen i und  $(180^\circ - i)$  haben betragsmäßig gleiche Werte für  $\dot{\Omega}$ , jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen. Da der LT-Effekt unabhängig von der Neigung ist, können zwei solche Satelliten zu seiner Bestimmung herangezogen werden. Es ist dann nicht einmal eine entsprechend genaue Modellierung von  $\dot{\Omega}_{s\ddot{a}k}$  notwendig. Sie wäre mit der heutigen Kenntnis des Geopotentials ohnehin nicht hinreichend genau durchzuführen. Ein Vorschlag zur Bestimmung des LT-Effektes ist bereits 10 Jahre alt (VAN PATTEN und EVERITT, 1976). Er verwendet zwei entgegengesetzt kreisende, reibungskompensierte Satelliten in einer Polbahn. Dieser Vorschlag wurde jedoch nicht realisiert.

Zur Zeit wird in der Literatur der Vorschlag diskutiert, den geplanten Satelliten LAGEOS II auf eine Bahn mit der Neigung  $i=70,06^\circ$  zu bringen (CIUFOLINI, 1986), d.h. eine Neigung komple-

mentär zu  $180^\circ$ , bezogen auf die Neigung von LAGEOS. Für  $i=109,94^\circ$  ergibt sich für LAGEOS ein Wert  $\dot{\Omega}_{s\ddot{a}k}=126^\circ/\text{Jahr}$ . Der LT-Effekt beträgt  $10^{-7}$  dieses Betrages. Die derzeitigen Werte für die zonalen Harmonischen des Geopotentials haben eine relative Genauigkeit von  $10^{-6}$ , woraus sich eine gegenüber dem gesuchten Effekt 10-fach größere Störung ergibt.

Durch Verwendung eines entsprechenden LAGEOS II kann der lineare Einfluß durch die zonalen Harmonischen eliminiert werden. Natürlich werden die Bahnneigungen in der Praxis nicht völlig komplementär und die anderen Bahnparameter nicht identisch sein. Die Differenzen in den Parametern werden mit großer Präzision aus Laserentfernungsmessungen bestimmt. Der Unterschied in  $\dot{\Omega}_{s\ddot{a}k}$  kann dann mit hinreichender Genauigkeit modelliert werden.

Weiterhin ist es notwendig, die indirekten Effekte durch die zonalen Harmonischen sowie die Störungen durch tesserale Harmonische, Mond, Sonne, Planeten, Atmosphäre, Strahlungsdruck, Erd- und Meeresgezeiten mit hoher Genauigkeit zu berechnen. Das ist zwar eine komplizierte, anspruchsvolle Aufgabe, müßte aber in naher Zukunft lösbar sein.

Neben dem LT-Effekt sollte auch die relativistische geodätische Präzession (geodetic precession), die von FOKKER (1920) angegeben wurde (VAN PATTEN und EVERITT, 1976), berücksichtigt werden. Sie entsteht durch Bewegung der Erde um die Sonne und beeinflußt die Drehimpulsachse der Erde. Es resultieren  $\dot{\Omega}_G \approx 0,02''/\text{Jahr}$  und  $di/dt \approx 0.008''/\text{Jahr}$ .

Sind diese relativistischen Effekte scheinbar auch sehr klein, so wird es sinnvoll sein, sie in Zukunft zu berücksichtigen. Dabei sollte man sich vergewissern, daß  $0,04''/\text{Jahr}$  etwa einem Betrag von 3 ms/Jahr entsprechen und somit eine Genauigkeitsbegrenzung der satellitengeodätischen UT1-Berechnung schon nach wenigen Monaten liefern würden.

Bei den derzeitigen Ermittlungen von Geopotentialeffekten anhand von Satellitenbahnstörungen werden relativistische Effekte nicht berücksichtigt. Daraus resultiert eine systematische Beeinflussung der Koeffizienten, und das ist u. a. ein Grund dafür, daß für jeden Satelliten ein anderes optimales Geopotentialmodell existiert.



## 7.2. Kleine Störungen in der Bahn des Satelliten LAGEOS

Neben den in 7.1. diskutierten relativistischen Effekten gibt es noch eine Reihe weiterer kleinerer Störungen, die bei der LAGEOS-Satellitenbahn in der Regel unberücksichtigt bleiben. Hierzu zählen die gravitativen Einflüsse der Planeten und die nichtgravitativen Störungen, ausgenommen der in jedem Falle modellierte direkte Strahlungsdruck der Sonne. Die Größenordnung einer Reihe von Effekten soll für ihre eventuelle Einbeziehung zur künftigen Steigerung der Modellierungsgenauigkeit diskutiert werden.

### 7.2.1. Gravitativer Einfluß der Planeten

Durch Sonne und Mond werden die weitaus größten Störungen aller Himmelskörper auf künstliche Erdsatelliten hervorgerufen. Darum ist es üblich, nur diese beiden Himmelskörper zu betrachten. In diesem Abschnitt soll jedoch untersucht werden, ob für höchste Genauigkeitsanforderungen die Planeten berücksichtigt werden müssen. Die durch einen Himmelskörper K auf einen Satelliten wirkende Beschleunigung ergibt sich zu

$$(7.33) \quad \underline{b}_K = GM \cdot \mu_K \cdot \left( \frac{\underline{x}_K - \underline{x}}{|\underline{x}_K - \underline{x}|^3} - \frac{\underline{x}_K}{|\underline{x}_K|^3} \right),$$

$\mu_K$  - Massenverhältnis vom Himmelskörper zur Erde,  
 $\underline{x}, \underline{x}_K$  - geozentrische Vektoren zum Satelliten und zum Himmelskörper.

Je höher ein Satellit fliegt, desto größer ist der Einfluß des Himmelskörpers. Hier soll der Einfluß auf LAGEOS betrachtet werden. In Tabelle 7.2. sind einige Angaben dazu vorhanden, insbesondere die durch die Planeten in Konjunktion und Opposition erzeugten Beschleunigungen, deren Werte relativ zur Beschleunigung durch die Erde angegeben sind.

Zum Vergleich sind in der Tabelle auch Sonne und Mond aufgeführt. Für die meisten geodätischen Anwendungen müssen vor allem Knoten  $\Omega$  und Neigung  $i$  des Satelliten sehr genau modelliert werden. Hierbei ist der Einfluß der Sonne aufgrund der längeren Periode bzgl. der Lage zur Satellitenbahnebene etwa um den Faktor

Tabelle 7.2.: Gravitative Beschleunigung des Satelliten LAGEOS durch Planeten, Sonne und Mond (relativ zur Beschleunigung durch die Erde)

Himmelskörper K	$\mu_K$	Entfernung von der Erde		Umlaufperiode [Jahre]	Zeitlicher Abstand zw. Konjunktionen [Jahre]	Umlaufzeit in Rekt- aszension [Jahre]	Periode bzgl. LAGEOS [Jahre]	Beschleunigung auf LAGEOS relativ ( $\cdot 10^{-12}$ )	
		min	max					max	min
Merkur	0,553	92	208	0,241	0,32	0,9	1,3	2,5	0,2
Venus	0,815	42	258	0,615	1,59	0,9	1,3	38	0,2
Mars	0,107	78	378	1,881	2,14	1,8	4,8	0,8	0,01
Jupiter	317,9	628	928	11,86	1,09	11,9	3,8	4,4	1,3
Saturn	95,18	1277	1577	29,46	1,01	29,5	3,2	0,2	0,1
Sonne	332946	-150		1	-	1	1,53	340000	
Mond	0,0123	0,4		0.08	-	0,08	0,08	700000	

10 größer als derjenige des Mondes und nimmt Werte in der Größenordnung von  $10^3$  m an. Da die Planeten etwa ähnliche Perioden wie die Sonne aufweisen, kann daraus abgeschätzt werden, daß nur Kräfte ab  $10^{-12}$  zu berücksichtigen sind, um eine Genauigkeit im cm-Bereich zu garantieren. Hierbei muß bedacht werden, daß zusätzlich zur Periode bzgl. der Rektaszension eine Periode durch Änderung der Entfernung zum Planeten vorhanden ist. Aus der Tabelle ist zu entnehmen, daß nur Jupiter und Venus betrachtet werden müssen. Die Venus erreicht die Größenordnung von  $10^{-11}$  diese aber nur über wenige Monate.

### 7.2.2. Nichtgravitative Störungen

Ein viel diskutiertes Problem ist die Verminderung in der Halbachse der LAGEOS-Bahn um durchschnittlich 1,1 mm/Tag. Dieser säkulare Effekt wird von längeren Perioden überlagert. Da seine Ursachen nicht geklärt sind, wird er heute noch empirisch mit einer Beschleunigung von ca.  $-3 \cdot 10^{-12} \text{ms}^{-2}$  (mit Schwankungen von  $-1 \cdot 10^{-12} \text{ms}^{-2}$  bis  $-6 \cdot 10^{-12} \text{ms}^{-2}$ ) modelliert. Bei diesem Phänomen wird ein Komplex verschiedener Ursachen zugrunde liegen. Der Aufbau der Hochatmosphäre sowie die Struktur der Albedo der Erde werden für seine Erklärung herangezogen.

Es sei noch erwähnt, daß eine Halbachsenänderung von  $\Delta a = 1$  cm einen Fehler von 9 m in der Satellitenposition nach 15 Tagen hervorruft.

### Albedo der Erde

Die Albedo (Rückstrahlungsvermögen) kann nur periodische Änderungen der Halbachse erklären, welches Modell auch immer angenommen wird. Für die mittlere säkulare Halbachsenverringerng spielen Reibungskräfte eine Rolle. Hierauf wird später eingegangen.

Die Albedo wird durch eine Vielzahl von geographischen und meteorologischen Parametern beeinflusst. Deshalb ist es nicht leicht, ein Modell zu finden, das einfach genug ist, um bei Satellitenbahnmodellierungen eingesetzt werden zu können, und gleichzeitig alle Bahnstörungen hinreichend genau widerspiegelt. Schon bei sehr einfachen Voraussetzungen über optische Eigen-

schaften der Erde und der Art der Reflexion (z.B. LAMBERTSches Gesetz, diffuse Strahlung) entstehen komplizierte Integrale. Die Albedo hängt von der Erdoberfläche (Land, Meer, Schnee, Eis) und der Bewölkung ab. Bei einem Albedo-Modell geht es in erster Linie darum, die wesentlichen Parameter, die langperiodische Effekte in der Satellitenbahn hervorrufen, auszuwählen. Wird überall auf der Erde dieselbe Albedo angenommen, so mittelt sich der Einfluß auf den Satelliten schon nach einem Satellitenumlauf heraus.

Untersuchungen ergaben (RUBINCAM und WEISS, 1986), daß ein realistisches zonales Albedo-Modell bei Annahme des LAMBERTSchen Gesetzes eine 833-tägige Periode in der Halbachse von LAGEOS hervorruft. Die Amplitude beträgt aber nur 1 cm und kann damit auch nicht annähernd die Halbachsenänderungen von LAGEOS erklären.

Nun existiert zwischen Nord- und Südhalbkugel ein Unterschied in der mittleren Albedo, insbesondere durch die Land-Meer-Verteilung verursacht. Desweiteren ist eine jahreszeitliche Schwankung der Albedo zu verzeichnen (durch Bewölkung, Schnee, Vegetation). Beträgt die mittlere Albedo etwa 0,3 ... 0,4, so ergeben sich breitenabhängige und jahreszeitliche Schwankungen von 0,2 bis 0,8. Die Schwankungen sind besonders ausgeprägt in den höheren Breiten, die auch von LAGEOS überflogen werden. Bei der Modellierung von Störungen in der LAGEOS-Bahn aufgrund der genannten Effekte überlagern sich Perioden von einem Jahr (Sonne), 2,8-Jahren und 4,6-Jahren (Knoten- und Perigäumswanderung bei LAGEOS). Bei Annahme von 10% Asymmetrie und 20% jahreszeitlichen Schwankungen führt das Albedo-Modell zu Amplituden und Frequenzen in den Störbeschleunigungen, die gut mit den gemessenen Werten übereinstimmen (ANSELMO u.a., 1983). Es liegen zwar Messungen des Strahlungsverhaltens der Erde, die vom Satelliten aus durchgeführt worden sind, vor, aber ein Vergleich mit dem hier angenommenen Albedo-Modell ist nicht unmittelbar möglich, da eine komplizierte Abhängigkeit der Rückstrahlung vom Einfallswinkel Probleme aufwirft.

### Hochatmosphäre

Der Einfluß der Hochatmosphäre auf LAGEOS wurde in den letzten Jahren umfassend untersucht (AFONSO u.a., 1985). In den Höhen der LAGEOS-Bahn ist Wasserstoff der dominierende Anteil der Atmosphä-

re. Die Teilchen bewegen sich hier mit Geschwindigkeiten, die größer sind als die Geschwindigkeit des Satelliten. Dadurch kann die Atmosphäre nicht mehr als Menge von Partikeln aufgefaßt werden, die dem Satelliten im Wege steht. Unter Berücksichtigung der Teilchengeschwindigkeit von H ergibt sich ein Reibungskoeffizient von  $C_D \approx 4$  für LAGEOS (MERIT-Standard  $C_D = 3,8$ ). Die unter diesen Gesichtspunkten modellierte Neutralgas-Abbremsung liefert maximal 10% des gesuchten Effektes. Wesentlich größere Effekte sind durch geladene Teilchen, vor allem  $H^+$ , zu erwarten. Der Satellit wird bei der Bewegung im Plasma negativ aufgeladen, etwa -1V bis -3V. Dadurch zieht er die positiv geladenen Teilchen an und verzögert seinen effektiven Querschnitt um den Faktor 2 bis 3. Außerdem bewegen sich die Ionen schneller als die neutralen Teilchen, so daß ein wirksamer Reibungskoeffizient  $C_D \approx 15$  bis 20 möglich ist. Die gemessene Abbremsung des LAGEOS wurde durch die Effekte von Neutralgas, Albedo,  $He^+$  und  $O^+$  korrigiert und einer Fourieranalyse unterzogen. Setzt man voraus, daß die verbleibende Abbremsung durch  $H^+$  hervorgerufen wird, so ergeben sich Schwankungen von  $H^+$ , die sowohl in der Periode als auch im Betrag vernünftig erscheinen. Die Abbremsung durch geladene Teilchen könnte also durchaus einen großen Teil der Verringerung der LAGEOS-Halbachse einschließlich der periodischen Schwankungen erklären. Um diese Aussage abzusichern, sind jedoch genauere Angaben über die Plasmasphäre erforderlich.

#### Infrarotstrahlung der Erde

Neben der direkten Wirkung der Infrarotstrahlung (5.6.5.5.) ist noch eine indirekte Wirkung durch Aufheizung der Laserreflektoren zu verzeichnen (RUBINCAM, 1987). Aufgrund der thermischen Trägheit der Laserreflektoren werden diese bei entsprechender Orientierung der Bahnebene und der Spinachse von LAGEOS ungleichmäßig erwärmt. Die thermische Rückstrahlung erfolgt danach asymmetrisch, und wegen der thermischen Trägheit zeigt der Gradient nicht in Richtung des Erdmittelpunktes, sondern hat einen Anteil in Richtung Satellitenbewegung. Dies führt zur Abbremsung des Satelliten. Der Effekt kann bei Annahme einfacher Modellvorstellungen mindestens 47% der beobachteten mittleren Verringerung der LAGEOS-Halbachse sowie wesentliche Schwankungen erklären. Jedoch müssen die größeren kurzperiodischen Störungen andere Ursachen haben.

### Sonnenfinsternis durch den Mond

Bei der Modellierung des direkten Strahlungsdrucks der Sonne auf den Satelliten wird zwar der Eintritt des Satelliten in den Erdschatten berücksichtigt, aber nicht der in den Mondschatten. Der Effekt ist klein und hebt sich kaum aus dem Rauschpegel aller anderen Fehlerquellen heraus. Es sind Veröffentlichungen erschienen, die sich diesem Problem widmen (RUBINCAM, D.P. und WEISS, N.R., 1985; BATRAKOV, Y.V. und HELALI, Y.E., 1985). Der Eintritt von LAGEOS in den Mondschatten bewirkt Änderungen in der Halbachse. Bei den von 1976 bis 1983 aufgetretenen 30 solchen Ereignissen sind Beträge von 1 mm bis 2 mm für  $\Delta a$  zu verzeichnen. Lediglich zwei Ergebnisse ergeben Änderungen von 1 cm bis 2 cm, die dann sprunghaft eine andere Geschwindigkeit erzeugen. In Bahnbögen mit solchen Ereignissen sollte dieser Effekt bei sehr genauen Auswertungen durchaus berücksichtigt werden.

Das Problem des Eintritts eines Satelliten in den Erdschatten wird zur Zeit ohne Berücksichtigung des Halbschatteneffektes behandelt. Auch hier können sich noch kleinere Störungen langperiodischer Art ergeben.

Satellitenbahnstörungen durch Albedo und Atmosphäre sind durch den Sonnenstand beeinflusst. Es werden in beiden Fällen Effekte mit denselben Perioden auftreten. Auch wenn qualitativ der Zusammenhang zwischen diesen Modellkomponenten und der Störung in der Halbachse von LAGEOS nachgewiesen werden kann, so bedarf es noch einer quantitativen Abschätzung des Anteils der einzelnen Komponenten. Zukünftige Forschungen auf diesem Gebiet werden nicht nur für die Modellierung von LAGEOS selbst von Interesse sein, sondern auch zum Verständnis von Erdalbedo und Aufbau der Hochatmosphäre beitragen.

Auch durch die Gezeiten werden ähnliche periodische Störungen verursacht. Ist das Gezeitenmodell nur annähernd realistisch, so bleiben Reststörungen, die unterhalb der gesuchten Effekte liegen.

Die hier diskutierten Effekte auf den Satelliten LAGEOS zeigen, wie komplex das Modellierungsprogramm wird, wenn man das cm-Niveau anstrebt. Bei der heutigen Kenntnis des Geopotentials überschatten dessen Fehler noch viele der kleinen Störungen. Aber man sollte sich ihres Betrages bewußt sein, um in Zukunft darauf zurückgreifen zu können.

## 8. Bestimmung geodynamischer Parameter

In diesem Kapitel werden die aus simulierten und realen Daten erhaltenen Ergebnisse vorgestellt. Voraussetzung für eine Bestimmung geodätischer und geodynamischer Parameter ist die Modellierung der Satellitenbewegung mit einer Genauigkeit, die in Relation zur Meßgenauigkeit steht. So konnte bei der Berechnung von LAGEOS-Bahnen das dm-Genauigkeitsniveau unterschritten werden (s. 8.2.). Eine Grundlage für alle Untersuchungen bildet ein homogenes präzises terrestrisches Referenzsystem. Die damit verbundene Genauigkeit globaler Koordinatensätze und Strecken wird in 8.2.2. nur kurz vorgestellt und soll in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt werden; dazu sind nähere Ausführungen gemacht in DIETRICH und GENDT (1982 a,b, 1986), GENDT und DIETRICH (1984), MONTAG u. a. (1985, 1986).

Aufbauend auf den hohen Genauigkeiten bei der Bestimmung der terrestrischen Referenzsysteme sind die Effekte der Geodynamik zu erforschen. Hierbei wurde der Schwerpunkt auf die Gezeitenproblematik gelegt. Wegen ihrer Aktualität im Zusammenhang mit der Schaffung neuer Dienste für die Bestimmung der Erdrotationsparameter unter Verwendung moderner kosmisch-geodätischer Verfahren wird die Ableitung von UT1-Variationen für einen möglichst langen Zeitraum untersucht.

### 8.1. Beschreibung von verwendeten Daten und Bewertungsmethoden

Sowohl bei den simulierten als auch bei den realen Meßwerten wird ausschließlich auf Laserentfernungsmessungen zum Satelliten LAGEOS zurückgegriffen.

Einige Angaben zur Charakterisierung von LAGEOS

Startdatum	Mai 1976
Masse	406,9 kg
Durchmesser	60 cm
große Halbachse	12300 km
Exzentrizität	0,004
Bahnneigung	110°

Die große Höhe des Satelliten gestattet eine gute Bahnmodellierung, da die ungenauer bekannten, höherfrequenten Anteile des

Geopotentials keinen großen Einfluß besitzen, und das große Masse-Querschnitt-Verhältnis für eine verhältnismäßig geringe nicht-gravitativ Störung sorgt. Daher ist der LAGEOS besonders gut für geodätisch-geodynamische Forschungen geeignet. Laserentfernungsmessungen zu diesem Satelliten ergeben gegenwärtig mit Abstand die genauesten Resultate für globale satellitengeodätische Aufgabenstellungen.

Die Meßgenauigkeit der Laserradargeräte liegt heute zwischen  $\pm 0,2 \dots 0,4$  m (2. Generation) und  $\pm 0,05 \dots 0,10$  m (3. Generation). Neben dem zufälligen Fehler (Meßrauschen) muß noch mit einem bei der Kalibrierung verbleibenden systematischen Restfehler (engl. bias) gerechnet werden, der etwa 30% des Meßrauschens beträgt. Das ist auch bei der Nutzung von sogenannten Normalpunkten ("Mittelwert" für gewisse Zeitintervalle) zu beachten, bei denen zwar die zufälligen Meßfehler sehr gut herausgefiltert werden, systematische Anteile jedoch erhalten bleiben.

Bei der Ableitung von Parametern mit satellitengeodätischen Verfahren wird eine Reihe von Fehlern wirksam. Sie reichen von unvermeidlichen Fehlern im Meßprozeß und bei der Widerspiegelung der Realität im Modell bis zu numerischen Approximationsfehlern der Verfahren aufgrund der endlichen Stellenzahl im Rechner und der Beschränkung auf ausgewählte Modellkomponenten im Sinne einer ökonomischen Datenanalyse. Folgende Einteilung der Fehler kann vorgenommen werden:

- Meßfehler (zufällige und systematische einschließlich Fehler im Zeitsystem)
- Fehler bei der Datenreduktion (Fehler im Höhenwinkel, in den meteorologischen Daten, im Reduktionsmodell für Troposphäre und Massenmittelpunkt)
- Fehler bei der Berechnung der Stationsposition im CTS und bei der Transformation ins CIS (Fehler im Tektonikmodell, bei den Gezeiten, in den Erdrotationsparametern sowie bei Präzession und Nutation)
- Fehler bei der Modellierung der Satellitenbewegung (Fehler im Geopotential, im Gezeitenmodell u.a.m. sowie Verfahrensfehler bei der numerischen Integration).

Von Bedeutung ist letztlich, wie stark und in welcher Weise sich vorhandene Modellfehler in den abzuleitenden geodätischen oder geodynamischen Parametern widerspiegeln. Eine wesentliche Zielstellung der Simulationsuntersuchungen besteht deshalb darin, die Wirkung von Modellfehlern festzustellen und Methoden zu finden, ihren Einfluß zu verringern.



Untersuchungen mit simulierten Daten geben die Möglichkeit, bei Kenntnis der Sollwerte sowohl den Einfluß der Fehler einzelner Modellkomponenten als auch ihr komplexes Zusammenwirken auf das Ergebnis zu untersuchen. Bei der Erzeugung von simulierten Daten durch POTSDAM-5 werden mit genau festgelegten Parametern Transformationen der Stationskoordinaten und die Integration der Satellitenbahn vorgenommen. Daraus werden entsprechende Entfernungen zwischen Stations- und Satellitenpositionen berechnet und in einer Datei archiviert. Die den Simulationen zugrundeliegenden Festlegungen bezüglich der fixierten Modellparameter und der Meßwertverteilung sollten der Realität möglichst nahe kommen (Stationsverteilung s. Abb.8.2). Die bei den sich anschließenden Untersuchungen vorgenommenen Variationen in den Modellparametern und die eingeführten Meßfehler sollten dabei die Größenordnung der Fehler im heutigen oder in naher Zukunft erreichbaren Erkenntnisstand entsprechen. In Tabelle 8.1. sind die Meßwerte zusammengestellt. Bei der Wahl der Streuung der Meßwerte wurden Normalpunkte vorausgesetzt.

Einige Probleme bereitete das Geopotential, dessen Modellfehler entscheidenden Einfluß auf die derzeit erreichbaren Genauigkeiten besitzen. Mit Hilfe von Sensitivitätstabellen wurden die für die Bahnstörungen von LAGEOS wesentlichen Kugelfunktionskoeffizienten ausgewählt (zonal bis 11. Grades, tesseral bis Grad und Ordnung 6, Resonanzterme (7,6), (7,7)) und um zufällige Beträge verändert, die im Mittel ihren mittleren Fehlern (nach LERCH u. a., 1985) entsprechen. Die so erzielbare Bahnanpassung war jedoch wesentlich schlechter als die mit realen Daten bereits erreichte. Die Ursache wird vermutlich darin begründet sein, daß bei diesem Vorgehen die Korrelationen zwischen den einzelnen Kugelfunktionskoeffizienten nicht berücksichtigt werden konnten. So ergab sich die Notwendigkeit, durch weitere Reduktion dieser Zufallsbeträge bei den jeweiligen Koeffizienten auf schließlich etwa ein Drittel die Bahnanpassung in bessere Übereinstimmung mit der Realität zu bringen. Im Verlauf der Untersuchungen erwies es sich als zweckmäßig, mehrere solcher modellfehlerbehafteter Geopotentiale zu nutzen. Zusätzlich zur Standardvariante wurde ein zweites Geopotential mit bezüglich zur Standardvariante nur im Vorzeichen vertauschten Zufallsbeträgen sowie ein drittes nach gleichem Schema, aber anderen Zahlenwerten für die Zufallsbeträge erzeugt.

Tabelle 8.1.: Modellkomponenten, die für die Simulations-  
untersuchungen verändert wurden

	Modellkomponente	Veränderung
MB	- Meßwert: .Streuung (Entfer- .Bias (pro Station für nung) jeweils 10 Tage fest)	$\pm 1$ cm $\pm 2$ cm
ER	- Erdrotationsvektor (Abstand der Werte jeweils 5 Tage) .Polkoordinaten .UT1-IAT	$\pm 0,002''$ ( $\cong \pm 6$ cm) $\pm 0,0001s$ ( $\cong \pm 5$ cm)
KO	- Stationskoordinaten .Streuung	$\pm 3$ cm
GD	- Gezeitendeformationen .Gezeitenhub (LOVEsche Zahl $h_2$ ) .Gezeitenhub (Abweichung der Tide $K_1$ vom Nominal- wert) .Deformation wegen Meeresgezeiten	$\Delta h_2 = 0,06$ ( $\cong 10\%$ ) weglassen (100%) weglassen (100%)
NU	- Nutation (14-tägiger Term)	$\Delta\psi = \Delta\epsilon = \pm 0,001''$ ( $\cong \pm 3$ cm)
GM	- Geopotential .GM	$\Delta GM = 0,002 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ ( $\cong 5 \cdot 10^{-9}$ )
GP	.Kugelfunktionskoeffi- zienten $C_{1m}, S_{1m}$ (vgl. Text)	etwa $\pm 0,3 \sigma_{C,S}$
K2	- Gezeitenpotential	$\Delta k_2 = 0,01$ ( $\cong 3\%$ )

Der Einfluß von Fehlern der verschiedenen Modellkomponenten kann nun untersucht werden, indem man mit diesen verfälschten Modellkomponenten eine Bahn- und Parameterbestimmung durchführt. Dabei können einerseits die Abweichung der simulierten Meßwerte von der neu ausgeglichenen Bahn (Bahnanpassungsfehler  $m_0$ ), andererseits die Veränderungen bei den interessierenden Unbekannten des Problems analysiert werden. Weiterhin ist es auch

Tabelle 8.2. : Charakterisierung der bei den numerischen Untersuchungen verwendeten Daten

	reale Daten	simulierte Daten
Satellit	LAGEOS	LAGEOS
Zeitraum	14 Monate (MERIT-Kampagne)	1 Monat
Anzahl der Stationen	30	13
Anzahl der Durchgänge	5000	1300
Anzahl der Meßwerte	50 000 (Normalpunkte)	20 000
minimaler Höhenwinkel	15°	20°
Daten mit einem Höhenwinkel		
< 45°	65%	57%
> 45°	35%	43%

möglich, Einflüsse einer variierten Meßwertverteilung (z.B. nur Nachtmessungen, Veränderungen des Mindest-Höhenwinkels der Daten, Anzahl der beteiligten Stationen) auf entsprechende Weise einzu-  
beziehen.

Die verwendeten realen Daten beinhalten die Laserentfernungsmessungen zum Satelliten LAGEOS, die im Rahmen der internationalen MERIT-Kampagne (Sept. 1983 bis Oktober 1984) gewonnen wurden. Bei einigen Anwendungen wurde der Zeitraum auf 21 Monate (bis Mai 1985) erweitert. Es wurden 3-Minuten-Normalpunkte genutzt. Die Stationsverteilung ist aus Abbildung 8.1. zu entnehmen. Eine Charakterisierung der einzelnen Stationen (Meßwerte, mittlere Bahn-anpassung) erfolgt in Tabelle 8.3..

Wesentliche Informationen über die simulierten und realen Daten sind in Tabelle 8.2. zusammengestellt.

Tabelle 8.3.: Nähere Angaben für die bei der MERIT-Auswertung verwendeten Stationen

Station Nr. Name	$\varphi$ [ ° ]	$\lambda$ [ ° ]	Anzahl der Durchgänge	Anzahl der Normalpunkte	Zeitintervall [MJD]	mittlere Bahnanpassung [cm]
118100 Potsdam	52,2	13,0	111	626	45583 - 46004	18,7
708600 Ft. Davis	30,5	255,9	124	1118	45578 - 45990	9,8
709000 Yaragadee	-28,9	115,3	268	3170	45639 - 46004	6,5
710500 Greenbelt	38,8	283,2	234	2545	45592 - 46000	5,4
710900 Quincy	39,8	239,1	448	5818	45584 - 46000	4,9
711000 Monument Peak	32,7	243,6	386	4180	45614 - 46003	4,4
711200 Platteville	40,0	255,3	137	1292	45578 - 45985	7,8
712100 Huahine	-16,6	209,0	133	1115	45580 - 45999	8,3
712200 Mazatlan	23,2	253,5	184	2027	45603 - 46003	7,7
721000 Maui	20,6	203,7	384	3682	45579 - 46000	5,7
726500 Mojave	35,1	243,1	48	438	45717 - 45761	5,2
740000 Santiago/Ch.	-33,0	289,3	39	325	45769 - 45830	8,9
740100 Cerro Tololo	-30,0	289,2	50	536	45835 - 45871	9,4
780500 Metsahovi	60,0	24,4	38	242	45772 - 45992	23,9
781000 Zimmerwald	46,7	7,5	45	424	45835 - 46004	5,4
783300 Kootwijk	52,0	5,8	69	591	45601 - 46004	12,1
783400 Wettzell	49,0	12,9	320	2592	45583 - 46004	6,9
783500 Grasse	43,6	6,9	46	416	45802 - 46004	6,7
783700 Shanghai	30,9	121,2	40	283	45863 - 46003	17,9
783800 Simosato	33,4	135,9	238	1593	45586 - 46004	8,0
783900 Graz	46,9	15,5	182	1506	45587 - 46003	5,4
783400 Herstmonceux	50,7	0,3	332	2935	45611 - 46004	6,2
784300 Ororal	-35,5	148,9	31	252	45980 - 46004	11,1
788600 Quincy	39,8	239,1	48	539	45890 - 45950	4,3
788601 Quincy	39,8	239,1	40	352	45954 - 45998	5,9
790700 Arequipa	-16,4	288,5	421	5551	45578 - 46002	8,9
793900 Matera	40,5	16,7	343	4348	45578 - 46004	8,3

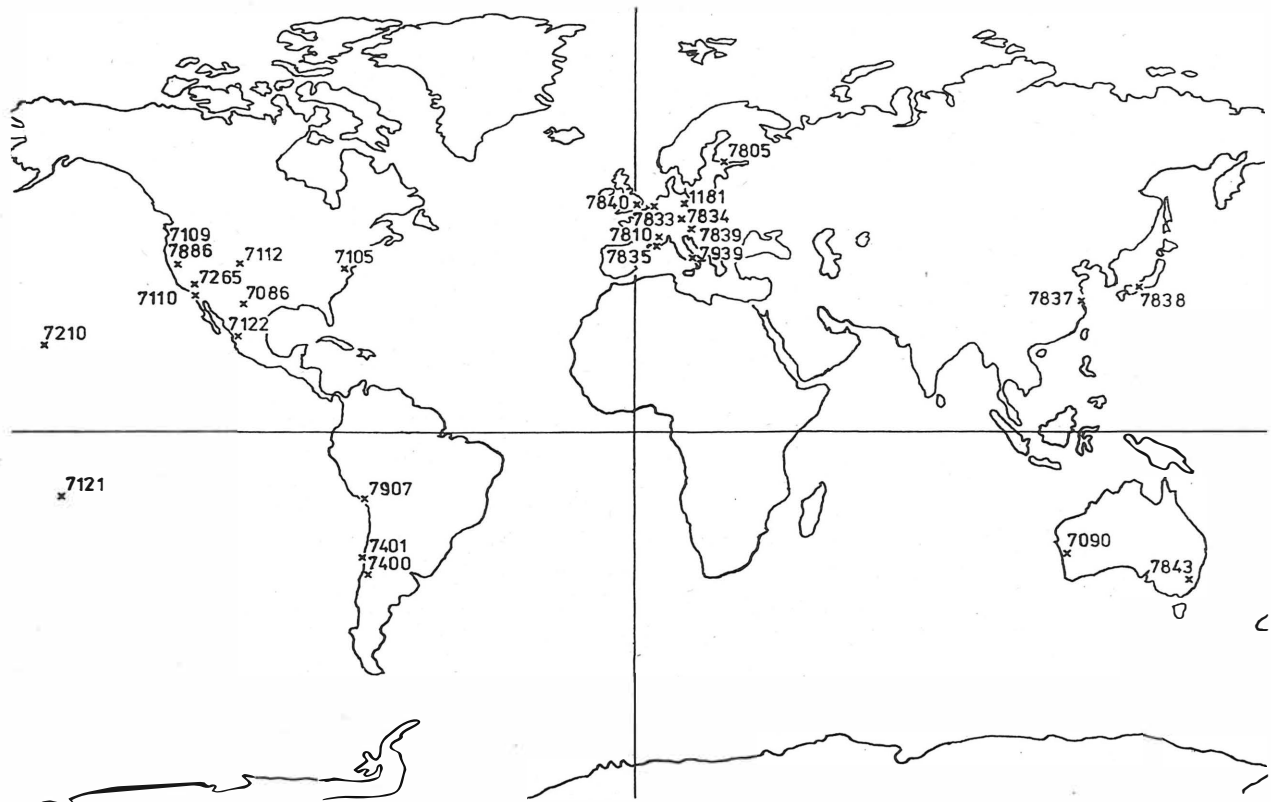


Abb. 8.1.: Verteilung der bei den Untersuchungen verwendeten MERIT-Stationen

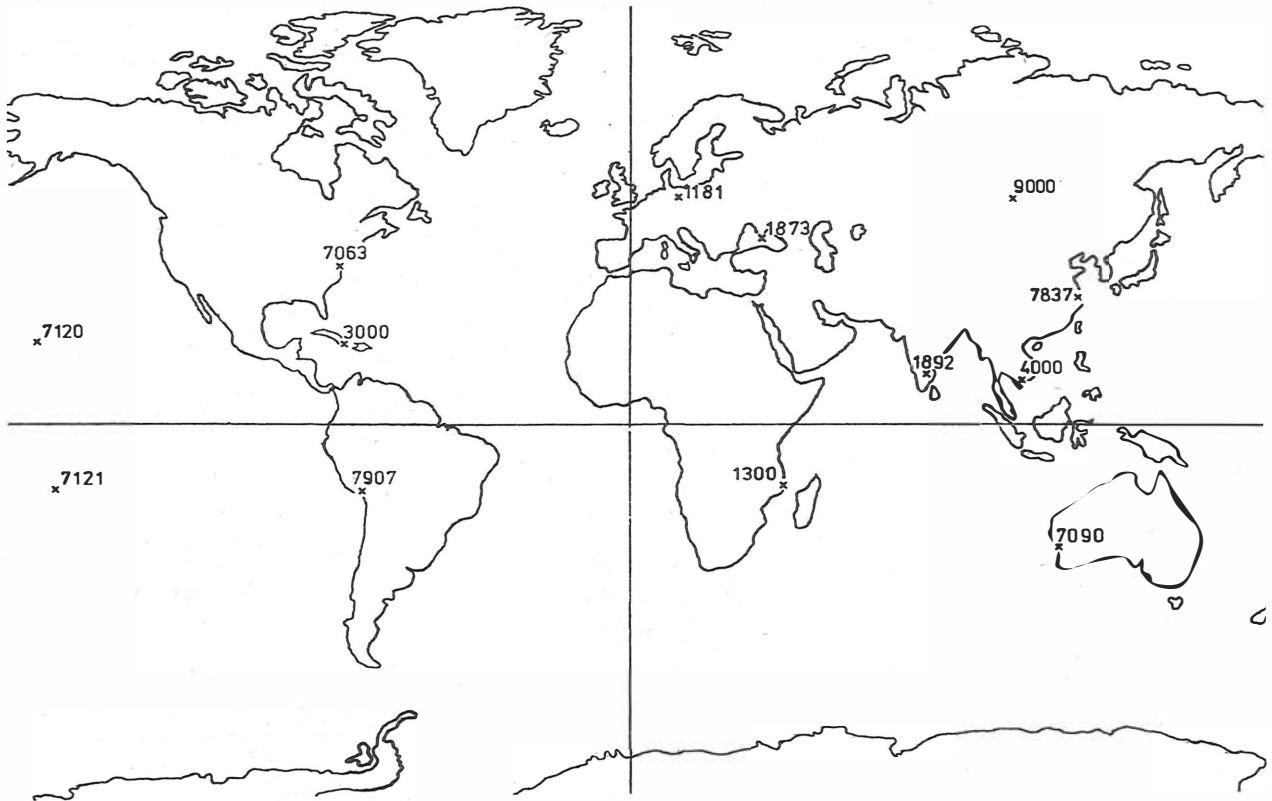


Abb. 8.2.: Verteilung der bei den Simulationsuntersuchungen verwendeten Stationen

### Methoden zur Bewertung von Ergebnissen

Als Fehlermaß für die durch eine Ausgleichung ermittelten Parameter ergibt sich die mittlere Standardabweichung  $m$  für die  $i$ -te Komponente des Parametervektors  $\underline{dy}$  aus:

$$(8.1) \quad m = \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{P}^{-1} \underline{v}}{L-M}} \quad q_{ii} \quad (\text{statistische Signifikanz: } 68\%),$$

wobei  $\underline{Q} = \underline{N}^{-1}$ ,  $q_{ii}$  - Hauptdiagonalelement von  $\underline{N}$ .

Die so ermittelte Größe wird im folgenden auch als formale mittlere Standardabweichung  $m_F$  (auch kurz formaler Fehler oder innerer Fehler) bezeichnet. Insbesondere wegen des Vorhandenseins von systematischen Meß- und Modellfehlern ist es nicht ausreichend, die Genauigkeit eines ausgeglichenen Parameters nur mit Hilfe des durch die Ausgleichung formal ermittelten Fehlermaßes zu bewerten. Vorhandene Korrelationen bewirken einen systematischen Fehler in den Unbekannten und eine Verringerung des Fehlermaßes. Bereits früher durchgeführte Untersuchungen, die in dieser Arbeit bestätigt werden, ergaben, daß die formale mittlere Standardabweichung etwa um den Faktor 3 bis 5 zu optimistisch ist. Es ist also nach Möglichkeiten zu suchen, unabhängig von derartigen Effekten bessere Fehlermaße (äußere Fehler) zu erhalten.

Eine Möglichkeit besteht darin, die erhaltenen Unbekannten mit wahren Werten zu vergleichen. Das ist allerdings nur bei Simulationsuntersuchungen möglich. Durch Vergleich der ermittelten Unbekannten und ihrer Fehler mit den richtigen Größen können auch Rückschlüsse auf Untersuchungen mit realen Daten gezogen werden. Bei der Analyse realer Daten kann es in speziellen Fällen ebenfalls vorkommen, daß ähnliche Vergleichsmöglichkeiten vorhanden sind. Beispielsweise kann die Distanz zwischen zwei Stationen, die nicht weit voneinander entfernt sind, terrestrisch vermessen sein. Bei anderen Parametern kann man auf Ergebnisse anderer Verfahren oder Theorien (z.B. bei der Nutation) zurückgreifen.

Ist es nicht möglich, auf derartige Weise die Ergebnisse einzuschätzen, so bietet sich eine Unterteilung der Daten nach verschiedenen Gesichtspunkten an, z.B. Zeitintervallen, Stationen. Die Menge der zu bestimmenden Parameter kann ebenfalls variiert

werden. Die aus verschiedenen Varianten erhaltenen Werte für bestimmte Unbekannte können verglichen werden. Ihre Varianz ergibt dann im gewissen Sinne ein äußeres Fehlermaß.

## 8.2. Zur Genauigkeit der Bahnmodellierung einschließlich Ephemeridenberechnung und der Stationskoordinatenbestimmung

### 8.2.1. Bahnmodellierung und Ephemeridenberechnung für den Satelliten LAGEOS

Die Leistungsfähigkeit eines Satellitenbahnprogrammes spiegelt sich in erster Linie darin wider, wie gut die berechneten Bahnen der Satelliten die Realität approximieren. Hierdurch werden die Genauigkeiten für die Bestimmung aller weiteren Parameter entscheidend beeinflusst. Es wurden die Laserentfernungsmessungen (3-Minuten-Normalpunkte) zum Satelliten LAGEOS während der MERIT-Hauptkampagne für die Analyse der Modellierungsgenauigkeiten verwendet.

In Tabelle 8.4. ist der mittlere Fehler der Bahnanpassung für verschiedene Bogenlängen dargestellt (gemittelt über die gesamte MERIT-Kampagne). In allen Fällen wurden neben den Bahnparametern die Erdrotationsparameter - Polkoordinaten  $x_p, y_p$  und Tageslänge LOD (length of day) - verbessert. Zusätzlich sind in zwei Varianten alle 2,5 Tage bzw. 5 Tage Korrekturen  $\Delta M$  in der Längskomponente der Bahn vorgenommen worden, um unmodellierete Effekte zu kompensieren. In Programmen anderer Autoren sind ähnliche empirische Parameter vorgesehen (z.B. Ausgleichung empirischer Beschleunigungen).

Die  $\Delta M$ -Korrektur bringt erwartungsgemäß bei längeren Bahnbögen eine Verbesserung - bis etwa 1 cm bei 30 Tagen (10%) und 30 cm bei 90 Tagen (50%). Eine Verbesserung in der Bahnanpassung wird auch erzielt, wenn nur die Daten der 11 besten Stationen mit Lasergeräten 3. Generation verwendet werden. Es ergaben sich Genauigkeiten von 6 cm für 5-Tage-Bögen und 9 cm für 30-Tage-Bögen.

Die Bahnanpassung aller Monatsbögen der MERIT-Kampagne ist für verschiedene Varianten in Tabelle 8.5. angegeben. Der Vergleich mit den Ergebnissen der NASA (CHRISTODOULIDIS, 1985) zeigt die hohe Leistungsfähigkeit von POTSDAM-5.



**Tabelle 8.4.:** Bahnanpassungen (in cm) für verschiedene Bogenlängen bei Verwendung der LAGEOS-Lasermessungen aus der MERIT-Hauptkampagne; 21 Stationen bzw. 11 Stationen der 3. Generation (in Klammern)

Unbekannte für Intervalle von 2,5 Tagen (bzw. 5 Tagen)	Bogenlänge (in Tagen) für Parameter $\omega, \Omega, i, e, M, n, \dot{n}$						
	2,5	5	10	15	30	50	90
$x_p, y_p, \text{LOD}, \Delta M$	7,7	8,1	8,4	8,8	10,0 (8,4)	-	-
$x_p, y_p, \text{LOD}$	-	8,2 (6,3)	8,6	9,2	11,3 (9,7)	-	-
$x_p, y_p, \text{LOD}$ (5 Tage)	-	-	-	-	11,8	59,9	64,9
$x_p, y_p, \text{LOD}, \Delta M$ (5T.)	-	-	-	-	-	20,3	30,7

**Tabelle 8.5.:** Bahnanpassungen (in cm) für Monatsbögen aus der MERIT-Hauptkampagne; Vergleich mit CHRISTODOULIDIS (1985)

Monat	21 Stationen		11 Stationen		CHRISTODOULIDIS (1985)	
	$x_p, y_p,$ LOD für 2,5	$x_p, y_p,$ LOD, $\Delta M$ Tage, Int.	$x_p, y_p,$ LOD für 2,5	$x_p, y_p,$ LOD, $\Delta M$ Tage, Int.	MERIT- Konstan- ten	SL6* Konstan- ten
Sep. 83	10,2	9,2	6,6	5,3	-	-
Okt. 83	9,6	9,1	6,8	6,3	-	-
Nov. 83	9,3	9,0	7,5	6,8	-	-
Dez. 83	12,2	10,0	10,3	8,3	-	-
Jan. 84	9,2	8,0	7,8	6,6	9,4	9,5
Feb. 84	10,2	9,4	9,7	8,9	12,0	13,3
März 84	13,5	12,4	11,0	10,3	12,9	12,3
Apr. 84	12,3	11,3	11,0	9,9	12,5	10,7
Mai 84	12,8	11,7	10,2	9,6	12,7	8,2
Juni 84	12,5	11,6	10,6	9,6	13,6	8,0
Juli 84	10,3	9,6	8,7	8,0	10,4	7,0
Aug. 84	10,5	8,1	8,8	6,3	10,9	8,7
Sep. 84	9,9	7,7	8,7	6,7	10,4	9,0
Okt. 84	10,8	7,8	10,2	7,0	-	-
Mittelwert	11,3	10,0	9,7	8,4	11,6	9,6

\* Anhand der verwendeten Daten wurden Geopotential-, Gezeitenmodell und andere Parameter verbessert

Ephemeriden für LAGEOS

Die Beobachtung von Satelliten, insbesondere von schwach sichtbaren wie LAGEOS, kann wesentlich günstiger gestaltet werden, wenn genaue Ephemeriden vorhanden sind. Hierdurch erhöht sich die Ausbeute an Meßwerten in einem Satellitendurchgang, und es wird eine Blindbeobachtung in der Dämmerung und am Tage ermöglicht.

Die Eignung von POTSDAM-5 für die Berechnung von Ephemeriden soll nun untersucht werden. Dabei muß man bedenken, daß der Öffnungswinkel des Laserstrahls etwa 10" beträgt und somit in der Höhe der LAGEOS-Bahn einen Durchmesser von 300 m hat. Diesen 300m entsprechen geozentrisch etwa 5", so daß Ephemeridenfehler von 2,5" in den Bahnelementen noch im Öffnungswinkelbereich liegen. Nach diesen Vorbemerkungen soll nun auf Abb. 8.3. verwiesen werden. Beobachtungsdaten weltweit verteilter Stationen aus einem 5-Tage-Intervall (-5 bis 0) wurden verwendet, um Ausgangsbahnelemente zu ermitteln. Mit diesen Bahnelementen werden Ephemeriden für 200 Tage (Intervall (0,200)) berechnet. Im gesamten Bereich lagen Meßwerte vor, aus denen die Fehler für die Ephemeriden abgeleitet werden konnten. Bei der Modellierung wurden die Einflüsse der Meeres- und frequenzabhängigen Festerdezeiten vernachlässigt. Es ist ersichtlich, daß die Querkomponente der Bahn ( $\Omega, i$ ) für den gesamten 200-Tage-Zeitraum mit einer Genauig-

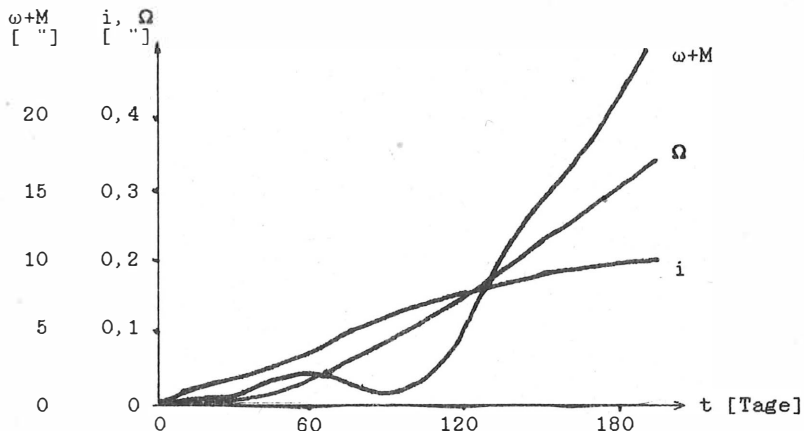


Abb. 8.3.: Ephemeridengenauigkeit von POTSDAM-5 für LAGEOS

keit berechnet wurde, die weit unterhalb der geforderten Schranke liegt ( $0,35'' \approx 20$  m bei LAGEOS). Anders sieht es mit der Längskomponente ( $\omega+M$ ) aus. Hier kann die Schranke nur für wenige Wochen eingehalten werden. Nach 200 Tagen ergab sich ein Fehler von  $25''$  (1500 m oder 0,3 s). Ein Fehler dieser Größenordnung in der Längskomponente, der sich nur langsam ändert, stellt kein Problem für die Beobachtung dar. Aus Messungen an der eigenen Station kann die zugehörige Zeitverschiebung berechnet und für die nächsten Satellitendurchgänge verwendet werden.

Diese Untersuchung zeigt, daß POTSDAM-5 in der Lage ist, Ephemeriden über große Zeiträume mit ausreichend hoher Genauigkeit bereitzustellen.

### 8.2.2. Zur Genauigkeit der Stationskoordinatenbestimmung

Im Verlaufe der letzten Jahre hat sich die Genauigkeit satellitengeodätischer Koordinatenbestimmungen ständig erhöht. Das betrifft sowohl die innere Geometrie (und damit die Streckenbestimmung) globaler geodätischer Netze als auch die Homogenität in der Festlegung bzw. Ableitung der Datumsparameter (Ursprung, Orientierung und Maßstab).

Der Vergleich globaler Koordinatensätze erfolgt über eine HELMERT-Transformation (Ähnlichkeitstransformation mit 7 Parametern: Translation, Rotation und Maßstab), die Restklaffungen und Transformationsparameter liefert. Lagen die Restklaffungen bei der MERIT-Kurzkampagne 1980 noch im Bereich von mehreren Dezimetern, so konnte innerhalb weniger Jahre bis zur MERIT-Kampagne 1983/84 eine Steigerung auf ein Niveau von wenigen cm erreicht werden.

Tabelle 8.6. enthält HELMERT-Transformationsergebnisse zwischen fünf Analysenzentren für die Auswertung der MERIT-Satellitenlaserentfernungsmessungen. In allen Fällen wurde nur LAGEOS verwendet. Aus Gründen der Einheitlichkeit sind für den Vergleich nur 14 Stationen herangezogen worden, die in allen Lösungen enthalten waren.

Es zeigt sich, daß die mittleren Restklaffungen  $m_0$  für die Koordinaten der drei Hauptanalysenzentren bei etwa  $\pm 3$  cm liegen, während die Vergleiche mit den Lösungen der assoziierten Analysenzentren zu Werten von  $\pm 5$  bis 6 cm führen. Das Geozentrum ist in der Äquatorebene auf  $\pm 1$  bis 2 cm übereinstimmend, während in der Z-Komponente Differenzen von  $\pm 1$  bis 2 dm auftreten. Aufgrund

Tabelle 8.6.: Parameter der HELMERT-Transformationen zwischen den Koordinatensätzen verschiedener Analysenzentren

		SFB78	GSFC	GAOUA	ESOC
ZIPE	$m_o$	$\pm 0,028$ m	$\pm 0,035$ m	$\pm 0,047$ m	$\pm 0,059$ m
	dX	+ 0,002 m	+ 0,008 m	+ 0,019 m	- 0,013 m
	dY	+ 0,007 m	- 0,012 m	+ 0,004 m	+ 0,016 m
	dZ	- 0,090 m	- 0,142 m	+ 0,059 m	+ 0,038 m
	$\mu$	+ $3,3 \cdot 10^{-9}$	+ $3,8 \cdot 10^{-9}$	+ $2,0 \cdot 10^{-9}$	- $0,2 \cdot 10^{-9}$
SFB78	$m_o$		$\pm 0,033$ m	$\pm 0,055$ m	$\pm 0,058$ m
	dX		+ 0,005 m	+ 0,017 m	- 0,015 m
	dY		- 0,017 m	- 0,003 m	+ 0,009 m
	dZ		- 0,042 m	+ 0,149 m	+ 0,128 m
	$\mu$		$0,0 \cdot 10^{-9}$	- $1,3 \cdot 10^{-9}$	- $3,5 \cdot 10^{-9}$
GSFC	$m_o$			$\pm 0,057$ m	$\pm 0,062$ m
	dX			+ 0,012 m	- 0,020 m
	dY			+ 0,014 m	+ 0,026 m
	dZ			+ 0,192 m	+ 0,171 m
	$\mu$			- $1,3 \cdot 10^{-9}$	- $3,5 \cdot 10^{-9}$
GAOUA	$m_o$				$\pm 0,054$ m
	dX				- 0,032 m
	dY				+ 0,012 m
	dZ				- 0,021 m
	$\mu$				- $2,2 \cdot 10^{-9}$

ZIPE : Hauptanalysenzentrum (MONTAG u. a., 1985)

SFB78 : Hauptanalysenzentrum Sonderforschungsbereich 78  
Satellitengeodäsie/BRD (REIGBER u. a., 1985)

GSFC : Hauptanalysenzentrum Goddard Space Flight Center  
NASA/USA (SMITH u. a., 1985)

GAOUA : Assoziiertes Analysenzentrum Astronomisches Hauptobser-  
vatorium der AdW der Ukrainischen SSR Kiew/UdSSR  
(YATSKIV u. a., 1985)

ESOC : Assoziiertes Analysenzentrum European Space Operations  
Center-ESA/Westeuropa (DOW und AGROTIS, 1985)

$m_o$  - Restklaffungen in den Koordinaten

dX,dY,dZ - Differenzen in der Lage des Geozentrums

$\mu$  - Maßstabdifferenz

einer einheitlichen Anwendung der in den MERIT-Standards vorgegebenen Werte von GM und c sind die Maßstabdifferenzen sehr klein.

Die aus dem gleichen Datenmaterial ermittelten Basislinien haben einen Fehler von ca.  $\pm 3$  cm, was zu den HELMERT-Transformationsergebnissen in Beziehung steht.

Die dargestellten Ergebnisse weisen das Niveau der mit POTSDAM-5 erzielten hohen Genauigkeiten für Stationskoordinaten und Basislinien aus.

### 8.3. Untersuchungen zur Bestimmung von Gezeitenparametern

#### 8.3.1. Allgemeines

Die durch Mond und Sonne auf die Erde wirkenden Gezeitenkräfte erzeugen eine Deformation der festen und flüssigen Erdoberfläche (im folgenden mit "geometrische Effekte" bezeichnet) und daraus resultierend eine Potentialänderung ("gravitative Effekte"). Die klassischen terrestrischen Verfahren haben in ihren Messungen stets beide Effekte miteinander verknüpft. Nur durch Kombination von Verfahren ist ihre Trennung möglich.

Anders sieht es bei modernen kosmischen Verfahren aus. So gehen in die VLBI-Messungen zu Quasaren nur die Veränderungen der Stationspositionen, d.h. die geometrischen Effekte, ein. Auch Messungen von der Erde zu künstlichen Erdsatelliten (Laserentfernungsmessungen) und umgekehrt (Altimetermessungen) ermöglichen die Bestimmung geometrischer Gezeiteneffekte. Diese können zur Bestimmung der LOVEschen Zahlen  $h_2$ ,  $l_2$  sowie der Meeresgezeitenamplituden und -phasen herangezogen werden. Daneben gibt es Verfahren zur Berechnung der Parameter gravitativer Gezeiteneffekte. Sie ermitteln nur die Änderung des Geopotentials aufgrund der Gezeiten. Solche Verfahren können beispielsweise durch in Satelliten eingebaute Gravimeter und Gradiometer sowie durch Messungen von Satellit zu Satellit (line of sight gravity) realisiert werden. Sie liefern Meßwerte an Punkten im Raum, die auf die Erdoberfläche heruntergerechnet werden müssen. Diese Lösungsvariante ist z.Z. noch nicht technisch realisierbar. Neben den Messungen an einem Ort ist es möglich, Störungen der Satellitenbahn zu analysieren und somit auf Gezeitenparameter zu schließen. Letzte Methode ist die derzeit praktizierte.

Tabelle 8.7.: Übersicht über Verfahren zur Bestimmung von Gezeitenparametern

<u>Klassische Verfahren</u>	
Neigungsmessungen:	$\gamma_n = 1 + k_n - h_n$
Gravimetermessungen:	$\delta_n = 1 + 2 h_n/n - (n+1) k_n/n$
astronomische Breiten- und Längenmessungen:	$\lambda_n = 1 + k_n - l_n$
<u>Moderne kosmische Verfahren</u>	
<u>geometrische Effekte</u>	<u>gravitative Effekte</u>
- VLBI	- punktweise Messungen durch Gravimeter, Gradiometer (in Satelliten) und Satellit-zu-Satellit-Verfahren
- Altimetrie	
- Laserentfernungsmessung (möglichst hochfliegende Satelliten)	- Analyse von Satellitenbahnstörungen (z.B. Laserentfernungsmessungen)
Parameter:	Parameter:
- $h_2, l_2$	- $k_2$
- $\hat{C}^+, \epsilon^+$ für Meer	- $\hat{C}^+, \epsilon^+$ als Gesamteffekt für feste Erde und Meer

8.3.2. Modellierung der Gezeiteneffekte

8.3.2.1. Deformation der Erdoberfläche

Durch die Gezeiten wird die Erdoberfläche in ihrer Form deformiert, sowohl die feste Erde als auch das Meer.

Die Veränderung der Lage eines Punktes der festen Erde wird mit Hilfe der LOVEschen Zahlen  $h_2, l_2$  beschrieben. Es ist ausreichend, die Parameter 2. Grades zu betrachten, da der Einfluß für höhere Grade durch den Faktor  $(1/60)^n$  schnell abnimmt. Die Formeln (5.19) bzw. (5.20) geben den Verschiebungsvektor an. Darin ist der radiale Anteil dominierend und hat die Form:

$$(8.2) \quad \Delta r = \sum_K \mu_K \frac{|\underline{x}|^4}{|\underline{x}_K|^3} \cdot h_2 \cdot \left( \frac{3}{2} \cos^2 \psi_K - \frac{1}{2} \right)$$

Er erreicht Beträge von ca. 24 cm für den Mond und 11 cm für die Sonne. Als Mittelwert ergibt sich nicht Null, sondern eine permanente Deformation, die nach Gleichung (5.22) Beträge von max. 12 cm annimmt.

Die LOVEsche Zahl  $l_2$  beeinflusst die Länge und Breite einer Station. Der Effekt beträgt nur 20% desjenigen von  $h_2$  und wird bei den Simulationsuntersuchungen nicht näher untersucht.

Bei der Bestimmung des Parameters  $h_2$  sollen nur periodische Effekte berücksichtigt werden. Auf diese Weise soll eine Beeinflussung der  $h_2$ -Ermittlung durch systematische Fehler in den Stationsradien über Gleichung (5.22) ausgeschlossen sein. Somit gilt:

$$(8.3) \quad \frac{\partial \Delta r}{\partial h_2} = \sum_K \nu_K \frac{|X|}{|X_K|}^4 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \psi_K - \frac{1}{2} \right) + 0,19841 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right).$$

Die partielle Ableitung muß noch auf die Entfernung  $\rho$  transformiert werden:

$$(8.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial h_2} = \frac{\partial \Delta r}{\partial h_2} \frac{\partial \rho}{\partial r},$$

wobei  $\partial \rho / \partial r$  durch Gleichungen (6.39), (6.43) bereits bekannt ist.

Die Deformation des Meeres ist ein wesentlich komplizierteres Phänomen. Für jeden Ort und jede Tide werden eine Amplitude und eine Phasenverschiebung angegeben. Die Formeln sind in Abschnitt 8.3.2.2. aufgeführt.

#### 8.3.2.2. Gravitativer Einfluß der Gezeiten auf Satelliten

Die Änderung des Geopotentials, wie sie durch Gezeiten der festen Erde und des Meeres hervorgerufen wird, läßt sich für satellitengeodätische Anwendungen am effektivsten durch zeitlich variable Zuschläge zu den harmonischen Koeffizienten der Geopotentialentwicklung realisieren.

Das derzeit beste Modell der Gezeiten der festen Erde ist dasjenige von WAHR (1981), das auf dem Erdmodell 1066A von GILBERT und DZIEWONSKI (1975) basiert. WAHR gibt effektive LOVE-

sche Zahlen  $k_s$  des Gezeitenpotentials 2. Ordnung für jede Gezeitenfrequenz an. Hieraus und aus den Amplituden  $H_s$  der einzelnen Tiden  $s$  (CARTWRIGHT und EDDEN, 1973) ergeben sich Potentialänderungen zu:

$$(8.5) \quad \Delta \bar{C}_{1m} - i \Delta \bar{S}_{1m} = \sum_s A_m k_s H_s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}^{l+m \text{ ger.}} \cdot e^{i\theta_s} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Die Konstanten  $A_m$ ,  $k_s$ ,  $H_s$  sind für jede Tide gegeben.  $\theta_s$  ist das Gezeitenargument, das von Mond-, Sonnenposition und Sternzeit sowie den DOODSON-Zahlen abhängt. Da über eine Vielzahl von Tiden summiert werden muß, ist die Berechnung von (8.5) sehr aufwendig. Andererseits unterscheiden sich die Werte  $k_s$  der meisten Tiden nur unwesentlich vom Nominalwert 0,30, so daß man für alle Tiden in einem ersten Schritt den frequenzunabhängigen Wert  $k_2 = 0,30$  einführt und nach Gleichung (6.38) die Gezeitenbeschleunigungen berechnet. Der HONKASALO-Term (6.30) wird subtrahiert, um nur den periodischen Anteil zu betrachten. Anschließend werden für die Tiden, bei denen  $(k_s - k_2) \cdot H_s$  signifikante Beträge annimmt, nach Gleichung (6.29) Korrekturen vorgenommen.

Zur Bestimmung des Parameters  $k_2$  wird die Variationsgleichung (6.9) verwendet. Für die hier benötigte partielle Ableitung nach  $k_2$  ist es ausreichend, Gleichung (6.28) zu berücksichtigen, so daß der einfache Ausdruck (6.31) verwendet wird.

Bei den Meeresgezeiten wird von numerisch hydrodynamischen Modellen ausgegangen. Für jede Tide  $s$  geben die Modelle Amplituden  $A_s(\lambda, \varphi)$  und Phasen  $\delta_s(\lambda, \varphi)$  für jeden Punkt der Meeresoberfläche an. Diese Darstellung kann in sphärische Harmonische entwickelt werden, die schon bis etwa 6. Grades hinreichend genau alle auf Satelliten wirkende Kräfte widerspiegeln. Für die momentane Höhe der Tide  $s$  in einem Punkt gilt (LAMBECK u. a., 1974):

$$(8.6) \quad \begin{aligned} H_s(\lambda, \varphi) &= A_s(\lambda, \varphi) \cos(\theta_s - \delta_s(\lambda, \varphi)) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n P_l^m(\sin \varphi) [\hat{C}_{slm}^+ \sin(\theta_s + m\lambda + \epsilon_{slm}^+) \\ &\quad + \hat{C}_{slm}^- \sin(\theta_s - m\lambda + \epsilon_{slm}^-)] \end{aligned}$$



Die Amplituden  $\hat{C}^\pm$  und Phasen  $\epsilon^\pm$  hängen nicht mehr vom Ort ab. Eine solche Entwicklung für das Meereszeitenmodell von SCHWIDERSKI (1980) ist von GOAD bis Grad  $l=6$  und Ordnung  $m=2$  durchgeführt worden. Üblich ist es, durch

$$(8.7) \quad C_{slm}^\pm - i S_{slm}^\pm = -i \hat{C}_{slm}^\pm e^{i\epsilon^\pm}$$

auf die harmonischen Koeffizienten  $C, S$  zu transformieren. Speziell beim SCHWIDERSKI-Modell muß die Phase  $\epsilon^\pm$  für bestimmte Tagestiden um  $90^\circ$  korrigiert werden, da andere Gezeitenargumente verwendet wurden (MELBOURNE u.a., 1983). Unter Berücksichtigung der Wasserdichte und der Auflastdeformationskoeffizienten  $k'_1$  können die Meereszeiten in zeitlich variable Kugelfunktionskoeffizienten umgerechnet werden (Gl.(6.32)), so daß sich folgende Darstellung ergibt:

$$(8.8) \quad \Delta \bar{C}_{lm} - i \Delta \bar{S}_{lm} = \bar{F}_{lm} \sum_s (C_{slm}^+ - i S_{slm}^+) e^{i\theta_s}$$

(Hierbei sind die in Abschnitt 6.5.4. erwähnten Vernachlässigungen berücksichtigt, s. auch MONTAG, 1984; CHRISTODOULIDIS, 1978).

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß die Potentialänderungen der Erdzeiten (8.5) und der Meereszeiten nicht durch Analyse von Satellitenbahnstörungen zu trennen sind. Beide erzeugen Potentialänderungen mit derselben Frequenz  $\theta_s$ .

Da eine Methode zur Bestimmung der Gezeitenparameter darauf basiert, die am besten modellierbaren Bahnelemente Neigung  $i$  und Knoten  $\Omega$  zu analysieren, seien hier die Formeln kurz angegeben (LAMBECK u.a., 1974; MONTAG, 1984):

$$(8.9) \quad \Delta i_{slmpq}^+ = \hat{C}_{slm}^+ \frac{A}{\gamma_{slmpq}^+} \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-m \text{ gerade} \\ 1-m \text{ unger.} \end{matrix} \cdot \gamma_{slmpq}^+$$

$$(8.10) \quad \Delta \Omega_{slmpq}^+ = \hat{C}_{slm}^+ \frac{B_1}{\gamma_{slmpq}^+} \left( B_2 - \frac{B_3}{\gamma_{slmpq}^+} \right) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-m \text{ ger} \\ 1-m \text{ unger.} \end{matrix} \cdot \gamma_{slmpq}^+$$

mit

$$\gamma_{slmpq}^+ = (1-2p)\omega + (1-2p+q)M + m(\Omega - \theta) + \theta_s + \epsilon_{slm}^+$$

$A, B_1$  - Ausdrücke, die von  $l, m, p, q, e, i, k'_1$  abhängen.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Gezeitenparameter ermittelt die benötigten partiellen Ableitungen durch Variationsgleichungen (vgl. (6.9), (6.16)). Das bedeutet, daß für jeden einzelnen Parameter  $C_{slm}$ ,  $S_{slm}$  drei Differentialgleichungen 2. Ordnung zu integrieren sind. Da in der Regel mehrere Harmonische für eine Tide ermittelt werden und eine größere Anzahl von Tiden interessiert (s. 6.5.4.), ergeben sich Systeme von etwa 100 Differentialgleichungen, deren Lösung einen enormen numerischen und auch rechentechnisch-organisatorischen Aufwand darstellt. Diese Methode hat jedoch den großen Vorteil, daß die Gezeitenparameter gemeinsam mit anderen Parametern bestimmt werden können und somit vorhandene Korrelationen Berücksichtigung finden. Bei der Analyse durch die Gleichungen (8.9), (8.10) sind solche Korrelationen nicht anwendbar. Für die Variationsgleichungen werden die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \underline{f}^{MG}}{\partial C^+}$  bzw.  $\frac{\partial \underline{f}^{MG}}{\partial S^+}$  benötigt (s. Gl.(6.9),(6.13)). Unter Verwendung von (8.8) und (6.21) ergibt sich für die Tide  $s$  die Beschleunigung:

$$(8.11) \quad \underline{g} = \underline{f}_s^{MG} = GM \underline{D}^T \left( \text{real} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_E^l (\Delta \bar{C}_{slm} - i \Delta \bar{S}_{slm}) \left( \frac{\partial v_{1m}}{\partial \underline{x}_E} \right)^T \right)$$

Die benötigten partiellen Ableitungen nutzen die Kettenregel

$$(8.12) \quad \frac{\partial \underline{g}}{\partial C_{slm}^+} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \Delta \bar{C}_{slm}} \frac{\partial \Delta \bar{C}_{slm}}{\partial C_{slm}^+} + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \Delta \bar{S}_{slm}} \frac{\partial \Delta \bar{S}_{slm}}{\partial C_{slm}^+};$$

analoge Gleichung gilt für  $S_{slm}^+$ .

Endgültig ergibt sich:

$$(8.13) \quad \frac{\partial \underline{g}}{\partial C_{slm}^+} = F \text{ real} \left( \cos \Theta_s \left( \frac{\partial v_{1m}}{\partial \underline{x}_E} \right)^T - \sin \Theta_s \left( -i \frac{\partial v_{1m}}{\partial \underline{x}_E} \right)^T \right),$$

$$(8.14) \quad \frac{\partial \underline{g}}{\partial S_{slm}^+} = F \text{ real} \left( \sin \Theta_s \left( \frac{\partial v_{1m}}{\partial \underline{x}_E} \right)^T + \cos \Theta_s \left( -i \frac{\partial v_{1m}}{\partial \underline{x}_E} \right)^T \right),$$

mit  $F = \bar{F}_{1m} R_E^l GM \underline{D}^T$ .

### 8.3.2.3. Auftretende Frequenzen und Amplituden

Um Methoden zur Analyse der Meßwerte entwickeln zu können, ist es wichtig, sich einen Überblick über die auftretenden Frequenzen und Amplituden zu verschaffen. Bei den klassischen terrestrischen Verfahren registrieren die Meßinstrumente die unmittelbar auf der Erdoberfläche auftretenden Effekte. Dadurch werden die Messungen dominierend von der Erdrotation beeinflusst (s. Tab. 8.8.)

Tabelle 8.8.: Perioden charakteristischer Tiden in verschiedenen Bezugssystemen

Tide	Periode in Tagen (gerundet)			
	im Erdsystem	im Raumsystem	bzgl. STARLETTE	bzgl. LAGEOS
$M_2$	0,5	13,7	10,5	14,0
$S_2$	0,5	182,6	36,5	279,7
$K_1$	1	$\infty$	91,3	1052,6
$K_2$	0,5	$\infty$	45,6	526,3
$M_f$	13,7	13,7	13,7	13,7

Das Gezeitenpotential ist, von Inertialsystem aus betrachtet, nicht mit der Erdrotation verknüpft. Die räumlichen Perioden hängen nur von den Positionen von Sonne und Mond ab.

Die relative Lage des Gezeitenpotentials in Bezug auf die Bahnebene des Satelliten bestimmt die Periode der gezeitenbedingten Satellitenbahnstörungen, d.h., die Relativbewegung zwischen Knoten  $\Omega$  der Satellitenbahn und Himmelskörper muß betrachtet werden. In Tabelle 8.8. sind Perioden in den verschiedenen Systemen für charakteristische Tiden angegeben. Hieraus ist zu entnehmen, daß die Perioden der Satellitenbahnstörungen z.T. sehr groß sind und damit entsprechend lange Bahnbögen analysiert werden müssen. Diese langen Perioden bewirken jedoch, daß selbst kleinste Potentialänderungen meßbare Störungen in der Satellitenbahn erzeugen (s. Tab. 8.9.).

Tabelle 8.9.: Theoretische Amplituden der Gezeitenstörungen für LAGEOS und STARLETTE (Festerdegezeiten nach WAHR und Meeresgezeiten für 2. und 4. Grades nach SCHWIDERSKI, Amplituden in 0,001" und Perioden in Tagen)

Tide	LAGEOS				STARLETTE				
	Periode	$\Delta i$	$\Delta \Omega$	$\Delta(\omega+M)$	Periode	$\Delta i$	$\Delta \Omega$	$\Delta(\omega+M)$	
$M_2$	E	14,03	54	18	152	10,51	200	197	208
	2		5	1,6	14		19	18	19
	4		,1	1,3	0		12	10	45
$N_2$	E	9,30	7	2	18	7,61	28	26	34
	2		,7	,3	1		19	18	19
	4		0	,2	0		12	10	45
$S_2$	E	280,72	507	192	2397	36,43	323	426	225
	2		32	12	150		20	27	14
	4		,8	10	2		15	7	30
$K_2$	E	522,80	256	446	272	45,50	109	157	143
	2		17	28	18		7	10	9
	4		,5	6	1		5	2	7
$O_1$	E	13,84	8	19	52	11,88	78	14	314
	2		,7	2	5		7	1	29
	4		,1	0	1		0	10	5
$Q_1$	E	9,21	1	2	7	8,30	11	2	45
	2		,1	,3	,7		1	0	5
	4		0	0	,1		0	1	1
$K_1$	E	1040,20	720	269	787	91,00	740	626	967
	2		65	24	69		65	55	84
	4		11	28	23		1	102	63
$P_1$	E	221,29	57	171	461	60,74	181	82	130
	2		4	13	36		14	6	10
	4		,8	,8	9		,3	22	13
$M_f$	E	13,66	-	5	8	13,66	-	57	59
	2		-	,5	,8		-	6	6
	4		-	0	0		-	0	2
$M_m$	E	27,55	-	5	8	27,55	-	61	63
	2		-	0	,1		-	7	8
	4		-	0	0		-	1	1
$S_{sa}$	E	182,62	-	31	49	182,62	-	353	365
	2		-	5	8		-	57	59
	4		-	,3	,1		-	0	13

Analysiert man nicht die Satellitenbahnstörungen, sondern verwendet Satelliten (oder auch Quasare im Falle von VLBI-Messungen), um geometrische Veränderungen der Erdoberfläche zu messen, so gibt es hier keine Verstärkung des Phänomens. Es ist also notwendig, die Meß- und Modellierungsgenauigkeit für diese Aufgabe auf ein Genauigkeitsniveau von wenigen cm zu bringen, um für die Gezeitenforschung Beiträge leisten zu können. Die Messungen zum Satelliten können natürlich nur dann durchgeführt werden, wenn die Station sich nahe der Satellitenbahnebene befindet. Das hat zur Folge, daß auch hier die Periode des Gezeiteneffektes bzgl. der Satellitenbahnebene eine dominierende Rolle spielt. Aber durch Verwendung von Messungen mit größerer Zenitdistanz (bei Laserentfernungsmessungen) kommt durch die Erdrotation die Tagesperiode wieder etwas zum Tragen. Weiterhin ist zu beachten, daß bei einem Nicht-Polsatelliten eine Station in einem von 12 Stunden verschiedenen Zeitabstand Messungen durchführen kann. Das ist besonders bei Halbtagestiden günstig.

### 8.3.3. Ergebnisse zur Bestimmung geometrischer Gezeiteneffekte mit kosmischen Verfahren

#### 8.3.3.1. Analyse des internationalen Standes

Hydrodynamisch-numerische Methoden führten in den letzten Jahren zu beachtlichen Verbesserungen in der Modellierung der Meeresgezeiten (SCHWIDERSKI, PARKE und HENDERSHOT, u.a.) Jedoch zeigen die Modelle in einigen Bereichen des offenen Meeres noch zu große Abweichungen in Bezug auf die heutigen hohen Anforderungen durch Geophysik und Ozeanographie. Zur Verbesserung der Modelle gerade in diesem Bereich wären Altimetermessungen sehr geeignet. Die Satellitenaltimetrie unter Verwendung von GEOS C (Meßgenauigkeit 1 m bis 2 m) hat zu einem sprunghaften Erkenntnisgewinn über das globale Geoid und die Meerestopographie geführt. Mit der weiteren Steigerung der Meßgenauigkeit auf das dm-Niveau (Satellit SEASAT) kann man dazu übergehen, die zeitlich variablen Anteile, die Gezeiten, zu bestimmen. Die Meeresgezeiten stellen ein weitaus komplizierteres Phänomen als die Erdgezeiten dar, da es keine global einheitlichen Amplituden und Phasen der Tiden gibt (s. Gl.(8.6)). Um das Problem etwas zu vereinfachen, ist es sinnvoll, für jede Tide nur zwei Parameter - globale Korrektur für Ampli-

tude und Phase - zu bestimmen (BLAHA u.a., 1985). Diese Parameter haben gegenüber der Bestimmung eines breiten Spektrums von Gezeitenparametern den Vorteil, daß sie kaum mit systematischen Abweichungen des Geopotentials korreliert sind. Bei größeren Tiden ist es aber doch möglich, die Parameter der harmonischen Entwicklung der Tide (Gl. (8.6)) für die niederen Grade zu bestimmen. Ein Versuch, aus SEASAT-Altimeterdaten Gezeitenparameter abzuleiten, wurde von MAZZEGA (1985) unternommen. Durch den beschränkten Datenumfang von 24 Tagen ist es nur sinnvoll, die  $M_2$ -Tide zu betrachten. Bei der Datenbearbeitung gab es größere Probleme aufgrund von Beeinflussungen durch systematische Bahnfehler, Geoid-Referenzmodelle und Aliasing-Effekte mit anderen Tiden. Trotzdem konnte eine harmonische Entwicklung bis Grad und Ordnung 6 für die  $M_2$ -Tide ermittelt werden. Vergleiche mit bekannten Meßwerten zeigen für das offene Meer befriedigende Ergebnisse.

Die geometrischen Veränderungen der festen Erde werden durch die LOVEschen Zahlen  $h_2$ ,  $l_2$  beschrieben. Da diese Effekte nur wenige cm betragen, kommen nur Meßverfahren mit entsprechender Genauigkeit in Frage - Laserentfernungsmessungen zu Satelliten und VLBI-Messungen zu Quasaren. Erste Versuche zur Bestimmung von  $h_2$  mit Lasermessungen zu GEOS C wurden von BOWER und PAUL (1979) vorgestellt. Sie verwendeten eine spezielle geometrische Methode und erhielten eine nur sehr grobe Schätzung von  $h_2 \approx 0,7$ . In den folgenden Jahren wurden einige Bestimmungen der LOVEschen Zahlen unter Verwendung von VLBI-Daten durchgeführt. Das erste Ergebnis legten HERRING u.a. (1983) vor. Sie erhielten

$$h_2 = 0,62 \pm 0,01 \quad , \quad l_2 = 0,11 \pm 0,03 \quad , \quad \Delta\phi = 1^\circ \pm 1^\circ$$

und hatten Daten des MARK III-Systems von 1980 (2 Wochen) benutzt. Umfangreiche MARK I-Daten, insgesamt 37 Experimente aus den Jahren 1972-1978, zogen RYAN u.a. (1986) heran, um sowohl einen globalen Wert als auch stationsabhängige Werte von  $h_2$  zu ermitteln. Als Ergebnis wurde

$$h_2 = 0,62 \pm 0,008$$

für den globalen Wert erhalten. Die stationsweisen Werte betragen 0,59; 0,64; 0,61; 0,61; 0,3 und 0,7.

Das bisher umfangreichste Datenmaterial - MARK III-Daten aus den Jahren 1980 bis 1984 (etwa jede Woche ein Experiment) - verwendeten CARTER u.a. (1985). Als globale Parameter ergaben sich

$$h_2 = 0,6135 \pm 0,0054 \quad \text{und} \quad l_2 = 0,0768 \pm 0,0191$$

Die für die 12 beteiligten Stationen erhaltenen Ergebnisse liegen zwischen  $h_2 = 0,57$  und  $h_2 = 0,64$  mit einer Streuung von  $\pm 0,015$  beziehungsweise  $l_2 = 0,03$  und  $l_2 = 0,17$  mit einer Streuung von  $\pm 0,041$ . Da die formalen Fehler in der Regel zu optimistisch sind (Faktor 3 bis 5), kann die Streuung der Stationswerte, vorausgesetzt sie sind zufällig, als äußeres Fehlermaß verwendet werden. Hieraus ergibt sich eine sehr gute Genauigkeit von 2,5%.

Der erste Versuch, mit Laserentfernungsmessungen zu LAGEOS die LOVEsche Zahl  $h_2$  zu bestimmen, wurde von DIETRICH und GENDT (1984) durchgeführt. Dabei standen jedoch nur die Daten der dreimonatigen MERIT-Kurzkampagne zur Verfügung, bei der noch vorwiegend mit Lasergeräten der 2. Generation gemessen wurde. Das Ergebnis für den globalen Wert betrug

$$h_2 = 0,56 \pm 0,06$$

Die für 11 Stationen ermittelten Werte lagen zwischen 0,35 und 0,75. In Fortführung dieser Arbeiten wurden die Daten der MERIT-Kampagne analysiert. Erste dabei erhaltene Ergebnisse konnten bereits publiziert werden (GENDT und DIETRICH, 1985). Die Untersuchungen sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit und werden im Abschnitt 8.3.3.2. vorgestellt.

Neueste LAGEOS-Untersuchungen mit den umfangreichen Daten der Jahre 1980-1983 (40 Stationen) (CHRISTODOULIDIS u.a. 1985) lieferten u.a. auch Schätzungen für die LOVEschen Zahlen:

$$h_2 = 0,608 \pm 0,003 \quad \text{und} \quad l_2 = 0,0934 \pm 0,002$$

Diese Ergebnisse sind sehr gut, scheinen aber zu optimistisch, insbesondere da Meeresauflasteffekte und frequenzabhängige LOVEsche Zahlen im Modell nicht verwendet wurden (s. dazu 8.3.3.2.). Leider wurden keine stationsweisen oder intervallweisen Bestimmungen durchgeführt.

### 8.3.3.2. Untersuchungen zur Bestimmung der LOVEschen Zahl $h_2$

Die Untersuchungen zur Bestimmung der LOVEschen Zahl  $h_2$  mit Satellitenmethoden sollen in dieser Arbeit einen breiteren Raum einnehmen als diejenigen zu den anderen Gezeitenparametern. Dies liegt darin begründet, daß hinsichtlich einer gründlichen methodischen Analyse auf diesem Sektor international keine Veröffentlichungen vorliegen und daß zum anderen durch eigene Arbeiten in den letzten Jahren auf diesem Gebiet einige Erkenntnisse gewonnen werden konnten.

Der aus klassischen terrestrischen Erdgezeitenmessungen abgeleitete und heute als Standard angenommene Wert von  $h_2 = 0,609$  hat eine Genauigkeit von etwa 5%. Satellitengeodätische Beiträge mit etwa gleicher Genauigkeit wären also schon von Interesse. Im folgenden sollte man stets beachten, daß Abweichungen von  $\Delta h_2 = \pm 0,01$  Amplitudenänderungen in den Stationshöhen von maximal 5 mm (im Mittel nur etwa 2-3 mm) hervorrufen. Da Periode und Phase des gesuchten Effektes bekannt sind, lassen sich bei entsprechend langen Datenreihen jedoch gute Ergebnisse erzielen.

Um den Einfluß verschiedener Modellfehler und Ausgleichsvarianten auf die Lösung genauer zu untersuchen, wurden simulierte Daten verwendet (s.8.1.). Da es üblich ist, Bahnelemente, Stationskoordinaten und Erdrotationsparameter ( $x_p, y_p, LOD$ ) stets in eine Ausgleichung mit einzubeziehen, wurde auch bei den Simulationsuntersuchungen standardmäßig so verfahren. In der Regel wurden die Bahnelemente in Intervallen von 5 Tagen verbessert. Abweichungen von diesem Prinzip werden ausgewiesen.

Bekanntlich sind die formalen, inneren Fehler für die verbesserten Parameter in der Regel zu optimistisch. Um einen realistischen äußeren Fehler für  $h_2$  angeben zu können, wurden stationsabhängige Werte ermittelt und deren Streuung als Fehlermaß verwendet. Für eine Parameterbestimmung ist es wichtig, sich einen Überblick über vorhandene Korrelationen zu verschaffen. Wie in DIETRICH und GENDT (1984) gezeigt wurde, ergeben sich Korrelationen von  $h_2$  - in Abhängigkeit von Bogenlänge und Datenverteilung - von maximal 0,3 bis 0,5 mit den Bahnelementen, 0,1 mit den Stationsradien und der Tageslänge. Durch die in letzter Zeit vorgenommenen Erweiterungen von POTSDAM-5 war es möglich, weitere Korrelationen zu untersuchen. Die Ergebnisse lauten:



$k_2$	etwa	0,1 ,
GM	<	0,1 ,
$C_{20}, C_{22}, S_{22}$	<	0,1 ,
$C_{21}, S_{21}$	etwa	0,2.

Da nicht auszuschließen war, daß Korrelationen mit anderen bei den Gezeiten auftretenden Modellkomponenten ( $k_2$ , niedere  $C_{lm}$ ) auftreten, ist dieses Ergebnis wichtig.

In Tabelle 8.10. sind die Einflüsse von Fehlern verschiedener Modellkomponenten auf die ermittelten  $h_2$ -Werte zusammengestellt. Zu erkennen ist, daß Fehler in Anfangswerten für Bahnelemente und Stationskoordinaten (Nr. 1, Nr. 3) keinen signifikanten Einfluß haben, da sie bei der Lösung gleichzeitig verbessert werden. Ein größerer Einfluß ist bereits zu bemerken, sobald von fehlerfreien zu fehlerhaften (Meßrauschen  $\pm 1$  cm, Bias  $\pm 2$  cm) Daten übergegangen wird (Nr. 2). Hier spielt vor allem der Streckenbias eine Rolle. Fehler im Geopotential (Nr.4), auch bei einer Bahnanpassung von besser als 3 cm, erzeugen bereits eine Streuung von  $\pm 0,027$  in  $h_2$ . Der Vergleich der Variante Nr. 4 mit den Varianten Nr. 5 und Nr. 6 zeigt, daß das Geopotential die dominierende Fehlerquelle ist. Insbesondere wirken sich fehlerhafte Anfangswerte für Erdrotationsparameter nicht signifikant aus. Allein die Vernachlässigung von Auflasteffekten der Meeresgezeiten und von  $h_{K_1}$  ergeben Fehler von  $\pm 0,009$ , was zeigt, daß selbst kleinste Effekte schon von Bedeutung sein können.

Da, wie aus Tabelle 8.10 hervorgeht, das Geopotential den größten Einfluß hat, wurden hierfür verschiedene Varianten untersucht (Tabelle 8.11.). Wird das bisher verwendete verrauschte Geopotential mit Variante 1 bezeichnet, so ergibt sich Variante 2 dadurch, daß alle Korrekturen zum Referenzgeopotential mit zu Variante 1 entgegengesetztem Vorzeichen angebracht wurden. Die Variante 3 wurde völlig unabhängig davon, jedoch mit gleicher Streuung erzeugt. Die Varianten 1 und 3 zeigen, daß bei Geopotentialfehlern, die Bahnanpassungen von etwa 3 cm erlauben, mit Varianzen in der  $h_2$ -Bestimmung von etwa  $\pm 0,03$  bis  $\pm 0,04$  zu rechnen ist.

In Tabelle 8.10. ist zu bemerken, daß alle  $h_2$ -Abweichungen negativ sind. Daß dieses zufällig mit den Fehlern des Geopotentials zusammenhängt, kann daraus geschlossen werden, daß Variante 2 Lösungen mit entgegengesetztem Vorzeichen liefert. Die Varianz der Differenz (unter Berücksichtigung des anderen Vorzeichens) von  $\pm 0,001$  ist nicht signifikant.

Tabelle 8.10. : Einfluß von Fehlern verschiedener Modellkomponenten auf die Bestimmung der LOVEschen Zahl  $h_2$  ( $\sigma$ -Varianz für  $h_2$ -Wert einer Station)

Nr.	Fehlerhafte Modellkomponenten	Bahnanpassung [cm]	$h_2$ -Mittelwert für 13 Stationen (Differenz zu 0.609)	
			$h_2$	$\sigma$
1	BE,	0,2	- 0,001	0,001
2	BE, MB	2,2	+ 0,003	0,016
3	BE, KO	0,2	- 0,001	0,001
4	BE, GP1	2,9	- 0,012	0,027
5	BE, MB, KO, GP1	3,6	- 0,009	0,028
6	BE, MB, KO, GP1, ER	3,9	- 0,016	0,026
7	BE, MB, KO, ER, GM, K2	3,4	- 0,016	0,014
8	BE, GD	0,8	- 0,016	0,009
<p>Varianz der Differenzen der Lösungen von</p> <p>Nr. 4 und Nr. 5 <span style="float: right;">0,016</span></p> <p>Nr. 4 und Nr. 6 <span style="float: right;">0,013</span></p> <p>Nr. 5 und Nr. 6 <span style="float: right;">0,007</span></p>				
<p>Abkürzungen (s. Tab. 8.1.): BE: Anfangswerte der Bahnelemente GP1 = GP (Variante 1)</p>				

Bemerkung: Die Varianz  $\sigma$  ist die mittlere Abweichung vom Nominalwert 0,609 für die 13 Stationen. Sie wird im weiteren als äußeres Fehlermaß betrachtet.

Tabelle 8.11.: Einfluß des Geopotential auf die Bestimmung der LOVEschen Zahl  $h_2$   
( $\sigma$  - Varianz für  $h_2$ -Wert einer Station)

Nr.	Geopotential	Bahnanpassung [cm]	$h_2$ -Mittelwert für 13 Stationen (Differenz zu 0,609)	
			$h_2$	$\sigma$
1	Variante 1	2,9	- 0,012	0,027
2	Variante 2 ( $C_{1g}, S_{1g}$ mit zu Variante 1 entgegengesetzten Vorzeichen vertauscht)	2,9	+ 0,012	0,027
3	Variante 3 (unabhängig von Variante 1)	3,1	- 0,005	0,039
Varianz der Differenzen der Lösungen von Nr. 1 (mit Vorzeichenwechsel) und Nr. 2				0,001
Nr. 1				Nr. 3 0,036

Tabelle 8.12.: Einfluß der Datenverteilung auf die Bestimmung der LOVEschen Zahl  $h_2$   
( $\sigma$  - Varianz für  $h_2$ -Wert einer Station,  
 $m_F$  - formaler mittlerer Fehler)

Nr.	Fehlerhafte Modellkomponenten (s. Tab. 8.1.)	Datenverteilung	Bahnanpassung [cm]	$h_2$ -Mittelwert für 13 Stationen (Differenz zu 0,609)		
				$h_2$	$\sigma$	$m_F$
1		alle Daten	0,2	- 0,001	0,001	0,001
2	BE, KO	50% Bewölkung	0,4	- 0,000	0,002	0,003
3		50% Bewölkung, nur Nachtdurchg.	0,4	- 0,003	0,007	0,005
4		alle Daten	3,9	- 0,016	0,026	0,009
5	BE, GF1,	50% Bewölkung	3,8	- 0,005	0,040	0,014
6	MB, KO, ER	50% Bewölkung, nur Nachtdurchg.	3,6	+ 0,015	0,071	0,020
7	BE, GF1	Höhenwinkel $>45^\circ$ (5000 Meßwerte)	3,1	- 0,004	0,030	0,025
8	MB, KO, ER	Höhenwinkel $<45^\circ$ (13000 Meßwerte)	4,6	- 0,021	0,026	0,030

Der Einfluß der Datenverteilung auf das Ergebnis ist der Tabelle 8.12. zu entnehmen.

Bei Simulation einer Bewölkung von 50% ergeben sich noch keine entscheidenden Genauigkeitsverluste. Diese entstehen erst dann, wenn nur Nachtbeobachtungen durchgeführt werden und damit sowohl eine Bahnhälfte nicht mehr mit Messungen belegt als auch die Verteilung bzgl. der Gezeitenperiode ungünstiger wird. Es ist also anzustreben, Lasergeräte einzusetzen, die Messungen am Tage durchführen können. Die der Realität am nächsten kommenden Varianten Nr. 4 bis Nr. 6 zeigen deutlich das schon mehrfach zitierte Ergebnis, daß äußerer (hier durch die Varianz repräsentiert) und formaler Fehler ein Verhältnis von etwa 3 zu 1 aufweisen. Die Fehler in der Satellitenbahn liegen vor allem in der Längskomponente und beeinflussen somit am meisten die Entfernungsmessungen bei kleinen Höhenwinkeln. Dasselbe gilt auch für Fehler in Polkoordinaten, UT1, Länge und Breite der Stationen. Andererseits spiegelt sich die Höhenänderung einer Station in den zeitnahen Messungen wider. Es könnte also der Schluß gezogen werden, daß Messungen mit großem Höhenwinkel bessere Werte für  $h_2$  liefern. Mit einer Unterteilung der Daten in Messungen mit über und unter  $45^\circ$  (Nr.7 und Nr.8) wurde dieser Sachverhalt untersucht. Die geäußerte Vermutung hat sich dabei nicht durch eine kleinere Varianz in den  $h_2$ -Werten bestätigt. Aber es ist schon bemerkenswert, daß trotz wesentlich reduzierter Anzahl von Meßwerten das gleiche Fehlermaß erreicht wird. Obwohl nicht signifikant, deutet sich jedoch eine geringere systematische Abweichung an.

Theoretisch hat die Verwendung größerer Intervalle für die Verbesserung von Bahnelementen Vorteile bei der Bestimmung von  $h_2$ . Aufgrund von Modellfehlern ergeben sich dann aber größere Restfehler in der Bahnanpassung, die diesen Vorteil wieder kompensieren. Aus Tabelle 8.13. ist zu entnehmen, daß die günstigste Intervalllänge 7,5 Tage beträgt. Mit Intervallen von 5 Tagen, wie sie bei den meisten Untersuchungen anderer Art günstig sind und verwendet wurden, ergibt sich eine nur wenig größere Varianz.

Weitere Variationen in den Parametern wurden ebenfalls untersucht (Tab. 8.14.). Bei Festhalten an fehlerhaften Stationskoordinaten ( $\pm 3$  cm) ergeben sich bereits vergleichsweise erhebliche Streuungen von  $\pm 0,017$  (Nr.3). Auch wenn nur Länge und Breite fixiert werden, ergibt sich die Varianz  $\pm 0,015$ . Das ist insofern interessant, als diese völlig unkorreliert mit  $h_2$  sind. Die grö-

**Tabelle 8.13.:** Einfluß der Bogenlänge für die Verbesserung der Bahnelemente auf die Bestimmung der LOVEschen Zahl  $h_2$ , ( $\sigma$  - Varianz für  $h_2$ -Wert einer Station, fehlerhafte Modellkomponenten: BE, GP1 (s. Tab. 8.1.))

Nr.	Intervallänge für Verbesserung der Bahnelemente	Bahnanpassung [cm]	$h_2$ -Mittelwert für 13 Stationen (Differenz zu 0,609)	
			$h_2$	$\sigma$
1	2,5 Tage	2,4	- 0,011	0,028
2	5 Tage	2,9	- 0,012	0,027
3	7,5 Tage	3,7	- 0,010	0,025
4	10 Tage	4,3	- 0,040	0,031
5	30 Tage	11,3	+ 0,062	0,033

**Tabelle 8.14.:** Einfluß verschiedener Parameteransätze bei der Bestimmung der LOVEschen Zahl  $h_2$  [Im Standardfall wurden Stationskoordinaten ( $r, \lambda, \varphi$ ), Erdrotationsparameter und Bahnelemente (7,5-Tage-Intervalle) verbessert;  
 $\sigma$  - Varianz für  $h_2$ -Wert einer Station]

Nr.	Fehlerhafte Modellkomponente (s. Tab. 8.1.)	Parameter	Bahnanpassung [cm]	$h_2$ -Mittelwert für 13 Stationen (Differenz zu 0,609)	
				$h_2$	$\sigma$
1			0,2	- 0,001	0,001
2	BE, KO	$\lambda, \varphi$ fest	1,6	- 0,006	0,015
3		$r, \lambda, \varphi$ fest	2,5	+ 0,003	0,017
4	BE, GP1		3,7	- 0,010	0,025
5		$r, \lambda, \varphi$ fest	4,3	- 0,006	0,037
6		$k_2$ frei	3,7	- 0,010	0,025
Varianz der Differenzen der Lösungen von Nr. 4 und Nr. 6					0,001

Berechnete Residuen in der Bahnanpassung verursachen diesen Effekt. Werden andererseits die richtigen Koordinaten fixiert (Nr. 5), so ergeben sich schlechtere Werte als bei ihrer Mitbestimmung. Der Grund ist einfach darin zu sehen, daß gewisse durch das Geopotential verursachte Fehler kompensiert werden können. Eine gleichzeitige Bestimmung von  $k_2$  ergibt keine anderen Ergebnisse (Differenz von Nr. 4 und Nr. 6).

Aus den Simulationsuntersuchungen können nun folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

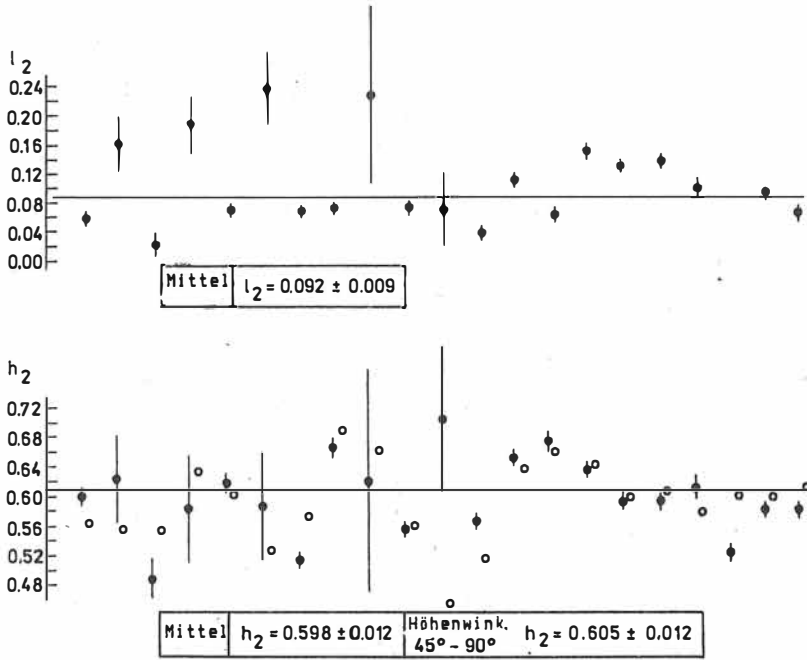
Den größten Einfluß auf die  $h_2$ -Bestimmung haben die Geopotentialfehler und der Bias in den Entfernungsmessungen. Die Varianz der  $h_2$ -Werte von  $\pm 0,03$  bis  $\pm 0,04$  (Tab. 8.11.) für die Stationslösungen führt auf einen Fehler für den Mittelwert von  $\pm 0,01$ . Bei Verwendung der realen MERIT-Daten ergeben sich Bahnanpassungen, die etwa um den Faktor 2 schlechter sind (Tab. 8.4.). Der Datenumfang ist dafür aber größer (Tab. 8.2.), so daß hier mit ähnlichen Genauigkeiten zu rechnen ist. Die Modellierung der Satellitenbahnen wird in Zukunft weiter verbessert werden, insbesondere durch bessere Geopotentialmodelle, und damit sind höhere Genauigkeiten zu erwarten.

Die Bearbeitung der Daten aus 21 Monaten (Sept. 1983 bis Mai 1985) führte zu Ergebnissen, die im folgenden vorgestellt werden sollen.

Die gesamte Datenmenge wurde herangezogen, um für jede Station Werte für  $h_2$  und  $l_2$  zu ermitteln. Bei der Ausgleichung wurden 7,5-Tage-Intervalle für die Verbesserung der Bahnelemente und 2,5-Tage-Intervalle für Erdrotationsparameter verwendet. Gleichzeitig wurden alle Stationskoordinaten verbessert. In Abb. 8.4. sind die erhaltenen Ergebnisse mit ihren formalen Fehlern eingezeichnet. Es wurden alle Stationen verwendet, die kontinuierlich und mehr als 40 Durchgänge beobachtet haben. Die größten Fehler haben die Stationen mit wenigen Durchgängen und großen Bahnanpassungsfehlern. Bedenkt man, daß der formale Fehler etwa um den Faktor 3 zu optimistisch ist, so gibt es kaum Stationen, deren Werte signifikant von den Nominalwerten abweichen. Die gewichteten Mittel für alle Stationen betragen

$$h_2 = 0,598 \pm 0,012, \quad l_2 = 0,092 \pm 0,009.$$

Eine globale Bestimmung von  $h_2$  führte zu den Resultaten



Station	7840	7833	7835	7810	7834	1181	7839	7939	7805	7090	7837	7838	7210	7121	7109	7110	7122	7112	7086	7105	7907
Durchm.	6.2	7.2	10.8	4.6	3.64	13.6	2.09	4.34	4.4	5.32	4.1	3.71	4.42	1.88	5.63	5.63	3.21	1.38	1.62	3.57	5.35
Bahnanpa. [cm]	12.7	5.5	5.5	6.8	19.4	6.0	8.4	28.8	5.8	17.9	8.3	5.4	7.1	4.0	4.0	6.4	7.3	9.0	4.8	10.1	

Abb. 8.4.: Lokale Bestimmung der LOVEschen Zahlen  $h_2$  und  $l_2$  (Standardlösung mit formalen Fehlern:  $\blacklozenge$ , Lösung bei Höhenwinkel  $> 45^\circ$ :  $\bullet$ )

$$h_2 = 0,605 \pm 0,004 \quad , \quad l_2 = 0,097 \pm 0,002$$

(formale mittlere Fehler).

Die Einbeziehung weiterer Parameter in die Ausgleichung brachte keine signifikant anderen Resultate (Tab. 8.15.).

Die Übereinstimmung mit dem aus den Stationslösungen berechneten Wert ist gut, und die Fehler zeigen den bekannten Faktor 3 zwischen innerer und äußerer Genauigkeit. Beim Übergang auf Intervalle von 15 und mehr Tagen für die Verbesserung der Bahnelemente ergaben sich größere Abweichungen. Dies bestätigte das mit den Simulationen erhaltene Ergebnis.

Eine weitere Variante der  $h_2$ -Auswertung besteht darin, nur Meßwerte mit einem Höhenwinkel über  $45^\circ$  zu verwenden. Die Ergebnisse ohne Angabe der Fehler sind in Abb. 8.4. eingetragen. Die formalen Fehler liegen nur unwesentlich oberhalb derjenigen der Standardlösung. Der sich ergebende Mittelwert

$$h_2 = 0,605 \pm 0,012$$

weicht im Rahmen seines Fehlermaßes nicht von der Standardlösung ab. Bedenkt man den wesentlich geringeren Datenumfang (vgl. Tab. 8.2.), so ist dies ein beachtliches Ergebnis.

Tabelle 8.15.: Verschiedene Varianten zur globalen Bestimmung der LOVEschen Zahlen mit Laserenfernungsmessungen zu LAGEOS (September 1983 bis Mai 1985)

$h_2$	$l_2$	Charakterisierung der Bestimmung
0,605±0,004	0,097±0,002	direkte globale Ausgleichung
0,610±0,003	0,099±0,002	direkte globale Ausgleichung ( $k_2, GM, M_2$ , harmonische 2. Grades simultan)
0,598±0,012	0,092±0,009	Mittel aus lokalen Bestimmungen
0,605±0,012		Mittel aus lokalen Bestimmungen (nur Daten mit Höhenwinkel $>45^\circ$ )
0,56 ± 0,06		LAGEOS, MERIT-Kurzkampagne 1980, DIETRICH und GENDT (1985)
0,6135±0,0054	0,0768±0,0191	VLBI, 1980-84, CARTER u.a. (1985)
0,608±0,003	0,0934±0,002	LAGEOS, 1980-83 CHRISTODOULIDIS u.a. (1985)



Die erhaltenen Resultate zeigen eine gute Übereinstimmung mit den aus der klassischen Erdgezeitentheorie erhaltenen Nominalwerten im Rahmen der angegebenen Fehler. Das Fehlermaß von etwa  $\pm 0,012$  bzw.  $\pm 0,009$  entspricht 2% bzw. 10% der Beträge von  $h_2$  bzw.  $l_2$  und stellt gute Werte dar.

Verglichen mit den Auswertungen der MERIT-Kurzkampagne konnte eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 4 erreicht werden (DIETRICH und GENDT, 1984). Die Ergebnisse liegen durchaus im Bereich der Resultate, die durch VLBI erzielt wurden. Durch Einbeziehung noch längerer Datenreihen kann ein weiterer Fortschritt erwartet werden.

### 8.3.4. Ergebnisse zur Bestimmung gravitativer Gezeitenparameter mit Hilfe von Satellitendaten

#### 8.3.4.1. Analyse des internationalen Standes

Vor etwa zehn Jahren wurden die Gezeitenuntersuchungen unter Verwendung der Satelliten GEOS, NNSS und ähnlichen Typs durchgeführt. Die Ergebnisse der  $k_2$ -Bestimmungen lagen zwischen  $k_2=0,22$  und  $k_2=0,34$ . Bei den Meeresgezeiten konnten nur die größten Effekte mit relativ kleinen Perioden ( $M_2$ - und  $O_2$ -Tide) untersucht werden (vgl. LAMBECK u. a., 1974; MONTAG, 1984). Durch Verbesserung der Modellparameter, der Meßgenauigkeit und nicht zuletzt durch den Start der Satelliten STARLETTE und LAGEOS in den Jahren 1975/76, die aufgrund ihrer Konstruktion geringe Störungen durch nichtgravitative Effekte haben, konnte in den letzten Jahren ein großer Fortschritt erzielt werden.

Bei der Bestimmung der Gezeitenparameter werden Gleichungen der Form (8.9), (8.10) herangezogen, um Amplituden und Phasen der Tiden zu ermitteln. Ergebnisse aus solchen Untersuchungen für die Meerestiden  $M_2$ ,  $O_1$  wurden u. a. von FELSENTREGER u. a. (1979) und CAZENAVE und DAILLET (1981) vorgestellt (s. Tab. 8.17). HE MIAOFU (1984) verwendete die STARLETTE-Daten von 1980, um aus einer Spektralanalyse der Neigungsschwankungen Tiden mit Perioden  $>20$  d zu identifizieren. Dies gelang recht gut für die Tiden  $K_1$ ,  $P_1$ ,  $K_2$ ,  $S_2$ , wobei das Verfahren keine Aussagen über Phasen liefert (Abb. 8.5., Tab. 8.16.).

Durch Entwicklung neuer Geopotentiale (PGS-1331) ist es gelungen, den Satelliten STARLETTE über einen Zeitraum von einer Woche mit einer Genauigkeit von 0,5 m zu modellieren. Das ist eine

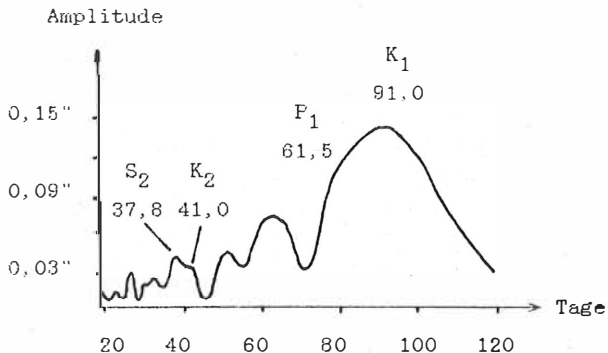


Abb. 8.5.: Spektrum der Neigungsresiduen für den Satelliten STARLETTE bei Modellierung ohne Meereszeiten (HE MIAOFU, 1984)

effektives  $k_2$

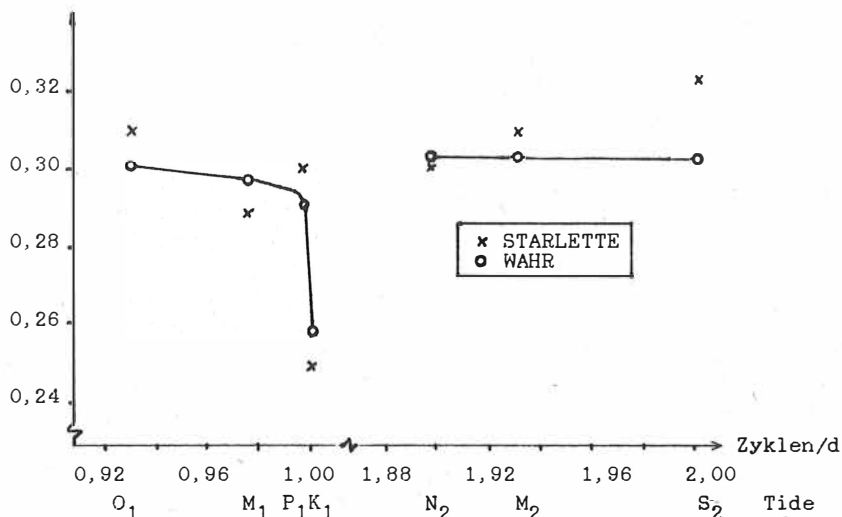


Abb. 8.6.: Berechnete frequenzabhängige LOVEsche Zahlen  $k_2$  aus Laserentfernungsmessungen zu STARLETTE (WILLIAMSON und MARSH, 1985) im Vergleich zu den Werten des WAHRschen Erdmodells

Steigerung gegenüber den alten Modellen um den Faktor 10. Diese hohe Genauigkeit ermöglicht es, Variationsgleichungen zur Bestimmung der Gezeitenparameter einzusetzen (WILLAMSON und MARSH, 1985). Bei dieser Methode können dann gleichzeitig mit den Gezeitenparametern andere Parameter wie beispielsweise Geopotentialkoeffizienten bestimmt werden. Das ist empfehlenswert, da bei Berechnung des Modells PGS-1331 die Meeres- und frequenzabhängigen Erdgezeiten nicht modelliert wurden und dadurch das Potential bis zum Grad 4 verfälscht ist. Die durch die Variationsgleichungen ermittelten Zuschläge zu den Geopotentialkoeffizienten (Gl. (8.5), (8.8)) stellen die Summe für Meeres- und Erdgezeiten dar. Die Gezeitenparameter können nur durch Vorgabe von jeweils einem der beiden Modelle ermittelt werden. Die Ergebnisse für die effektiven Werte von  $k_2$  bei verschiedenen Tiden der Erdgezeiten zeigen gute Übereinstimmung mit den theoretischen Werten (s. Abb. 8.6.). Für die Meeresgezeiten wurde der bisher umfangreichste Satz von Parametern ermittelt (17 Tiden in 2. und 4. Grades, Auswahl s. Tab. 8.17.). Für die Amplituden sind dabei Genauigkeiten von  $\pm 0,1$  cm bis  $\pm 0,5$  cm angegeben.

Dieses Variationsgleichungsverfahren wurde von CHRISTODOULIDIS u. a. (1985) angewendet, um erstmals Meeresgezeiten aus Lasermessungen zu LAGEOS zu erhalten. Die erzielten Resultate für 7 Tiden in 2. und 3. Grades sind sehr gut (s. Tab. 8.17.) (Amplituden  $\pm 0,01$  cm bis  $0,04$  cm, Phase  $\pm 0,1^\circ$  bis  $\pm 8^\circ$ ), obwohl LAGEOS wesentlich geringer durch Gezeiten gestört ist. Die Ursache für die guten Ergebnisse liegt in der sehr guten Bahnmodellierung für LAGEOS begründet. Jedoch erscheinen die Fehlermaße in manchen Fällen recht optimistisch.

#### 8.3.4.2. Untersuchungen zur Bestimmung der gravitativen Gezeitenparameter

Mit der Möglichkeit, anhand gravitativer Effekte, d.h. Analyse von Satellitenbahnstörungen, Gezeitenparameter zu bestimmen, wurde ein qualitativ neues Gebiet bei der Erweiterung und Anwendung von POTS DAM-5 beschritten.

Die LOVEsche Zahl  $k_2$  hat den größten Einfluß auf das Gezeitenpotential und damit auf die Störungen der Satellitenbahn. Dies hat zur Folge, daß dieser Parameter auch sehr genau bestimmbar ist. Anhand der simulierten Daten ergab sich eine äußere Genau-

Tabelle 8.16.: Meeresgezeitenparameter aus Spektralanalyse der Bahnneigung von STARLETTE (HE MIAOFU, 1984)

Tide	Modell		Beobachtung	
	Periode [d]	Ampl. ["]	Periode [d]	Ampl. ["]
K <sub>1</sub>	93,3	0,12	91,0	0,140
P <sub>1</sub>	60,9	0,08	61,5	0,075
K <sub>2</sub>	45,7	0,04	41,0	0,035
S <sub>2</sub>	36,5	0,03	37,8	0,045

Tabelle 8.17.: Zusammenstellung einiger Ergebnisse von Parameterbestimmungen der Meeresgezeiten (für 2. und 4. Grades) (Amplituden in cm, Phasen in Grad; SCHWIDERSKI-Modell zum Vergleich)

Tide	SCHWIDERSKI		STARLETTE <sup>1</sup>		LAGEOS <sup>2</sup>		Sonstige Satelliten	
	Ampl.	Phase	Ampl.	Phase	Ampl.	Phase	Ampl.	Phase
	$\hat{C}_{2m}^+$	$\epsilon_{2m}^+$	$\hat{C}_{2m}^+$	$\epsilon_{2m}^+$	$\hat{C}_{2m}^+$	$\epsilon_{2m}^+$	$\hat{C}_{2m}^+$	$\epsilon_{2m}^+$
M <sub>m</sub>	1,06	259	1,99	133				
M <sub>f</sub>	1,70	252	1,70	265				
O <sub>1</sub>	2,42	314	2,85	344	2,84	327	2,96	354 STARLETTE <sup>3</sup>
P <sub>1</sub>	0,90	314	1,77	188	0,79	266		
K <sub>1</sub>	2,82	315	2,63	312	2,51	324		
N <sub>2</sub>	0,65	322	0,76	323	0,59	346		
M <sub>2</sub>	2,95	311	2,57	319	3,46	317	3,5	338 STARLETTE <sup>3</sup>
							3,1	333 + GEOSC <sup>3</sup>
							3,4	325 + + NNSS <sup>4</sup>
							2,9	332 GEOSC <sup>5</sup>
							3,2	331 + NNSS <sup>5</sup>
S <sub>2</sub>	0,93	314	0,78	392	0,78	303		
K <sub>2</sub>	0,26	315	0,83	383	0,21	349		

- 1 WILLIAMSON und MARSH (1985)
- 2 CHRISTODOULIDIS u. a. (1985)
- 3 CAZENAVE und DAILLET (1981)
- 4 FELSENTREGER u. a. (1979)
- 5 GOAD und DOUGLAS (1978)

igkeit für die  $k_2$ -Bestimmung von  $\pm 0,0015$  und  $\pm 0,0003$  bei Verwendung von 7,5- bzw. 15-Tage-Intervallen für die Verbesserung der Bahnelemente. Korrelationen waren nur mit der LOVEschen Zahl  $h_2$  und der Harmonischen  $C_{20}$  festzustellen, ihre Größenordnungen betragen etwa 0,1. Die  $k_2$ -Werte, die sich aus der Analyse der MERIT-Daten ergaben, sind in Tabelle 8.18. zusammengestellt.

Tabelle 8.18.: Bestimmung der LOVEschen Zahl  $k_2$   
( $m_F$ -formaler mittlerer Fehler)

Datenumfang	$k_2$	$m_F$
Lösungen für jeweils 100 Tage	0,300	0,0005
	0,299	0,0007
	0,301	0,0004
	0,299	0,0008
MERIT (gesamt)	0,302	0,0003
	0,301 bei Verbesserung von $C_{20}, C_{21}, S_{21}, C_{22}, S_{22}$	0,0003

Zur besseren Beurteilung der Lösungsstabilität wurden neben der Gesamtlösung auch Teillösungen für 100-Tage-Intervalle ermittelt. Die Gesamtlösung von

$$k_2 = 0,302 \pm 0,0003$$

wird durch gleichzeitige Ausgleichung der niederen Kugelfunktionskoeffizienten des Geopotentialmodelles nicht beeinflusst. Beachtet man, daß der formale Fehler etwas optimistisch ist, so stimmen die Teillösungen gut mit der Gesamtlösung überein. Ebenfalls korrespondieren die Fehlermaße mit den für die Simulationen erhaltenen Beträgen.

Für satellitengeodätische Methoden zur Bestimmung von Meereszeitenparametern wurden in der Vergangenheit nur niedrigfliegende

Satelliten herangezogen. Hochfliegende Satelliten wie LAGEOS reagieren nur sehr schwach auf diese Störungen und haben für viele Tiden sehr lange Perioden (s. Tab. 8.9.). Die Modellierungsgenauigkeit speziell für LAGEOS ist in den letzten Jahren jedoch so stark verbessert worden, daß die Meereszeitenparameter bestimmt werden können. In einem ersten Schritt wurde untersucht, ob signifikante Störungen der Bahnelemente von LAGEOS durch die Meereszeiten bei der Analyse der MERIT-Daten mit POTSDAM-5 festzustellen sind. Hierzu wurde das am besten modellierbare Bahnelement, die Neigung  $i$ , herangezogen.

Die Daten aus einem Intervall von 120 Tagen wurden einmal mit und einmal ohne Modellierung der  $M_2$ -Tide analysiert. Für Intervalle von 30 Tagen wurden dabei optimale Neigungen berechnet. Anschließend wurden die Bahnelemente in Intervallen von 2,5 Tagen bestmöglich an die Daten angepaßt. Die dabei erhaltenen Korrekturen der Neigung sind der Abb. 8.7. zu entnehmen. Es ist deutlich die periodische Schwankung durch die  $M_2$ -Tide zu erkennen. In einem weiteren Beispiel wurde die  $K_1$ -Tide untersucht. Da aus ökonomischen und rechentechnischen Gründen nur Bahnbögen bis etwa 1 Monat Länge durchgehend integriert werden können, die Periode der  $K_1$ -Tide aber 2,8 Jahre beträgt, muß hier eine andere Methode als bei der  $M_2$ -Tide angewendet werden. So wurde in diesem Fall für jeden Monat der lineare Trend in der Neigungsänderung aufgrund der  $K_1$ -Tide ermittelt. Diese Werte haben natürlich einen verhältnismäßig großen Fehler. Es kann aber demonstriert werden (Abb. 8.8.), daß die Störungen der  $K_1$ -Tide nachzuweisen sind. So ermittelte Neigungskorrekturen könnten unter Nutzung von Gleichung (8.9) zur Bestimmung der Gezeitenparameter herangezogen werden.

Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Analysen wurde jedoch die Anwendung der Variationsgleichungen zur Bestimmung dieser Parameter vorgezogen (Gl. (8.13), (8.14)). Hierbei handelt es sich - wie bereits im Abschnitt 8.3.2.2. erwähnt - um eine gute, aber rechentechnisch sehr aufwendige Methode. Bei ihrer Nutzung für den Satelliten LAGEOS ist der Aufwand zwar um vieles geringer (etwa Faktor 5 bis 10) als bei STARLETTE, nimmt aber doch noch beträchtliche Ausmaße an. Deshalb kann im Rahmen dieser Arbeit die Leistungsfähigkeit der hierfür neu entwickelten Software nur mit einer ausgewählten Tide demonstriert werden. Es wurden die Parameter  $\hat{C}_{22}^+$ ,  $\hat{\epsilon}_{22}^+$  der  $M_2$ -Meerestide ausgewählt.

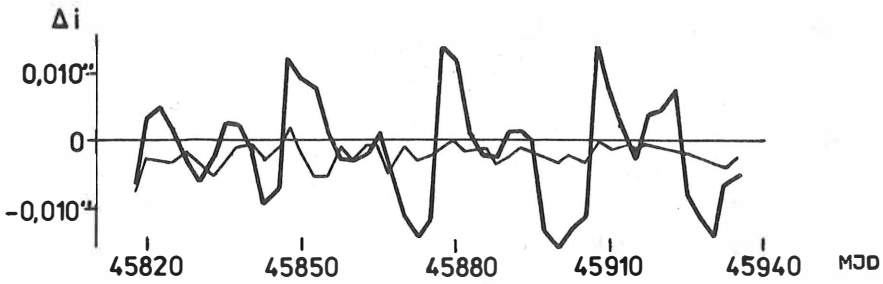


Abb. 8.7.: Korrekturen der Neigungsänderung  $\Delta i$  für LAGEOS gegenüber einer mittleren Neigung ( —  $M_2$ -Meerestide nicht modelliert —  $M_2$ -Meerestide modelliert)

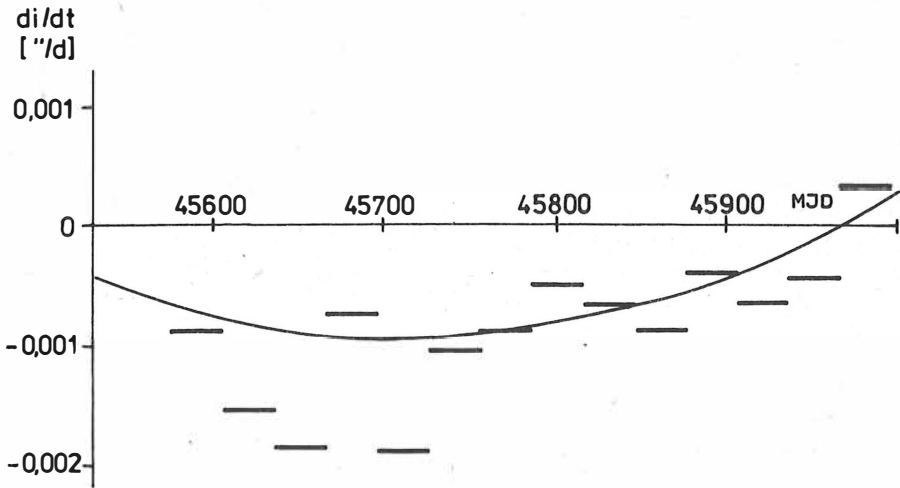


Abb. 8.8: Bestimmung von  $di/dt$  für Meerestide  $K_1$  anhand von LAGEOS-Daten der MERIT-Kampagne (durchgezogene Linie: geglättete Werte nach EANES u.a. (1983) )

Bei der Berechnung der Parameter (Tab. 8.19) wurden verschiedene Intervalle für die Verbesserung der Bahnelemente betrachtet. Dies hatte aber nur geringen Einfluß auf die Lösung. Dasselbe gilt für eine simultane Verbesserung der Parameter des Geopotentials ( $C_{20}$ ,  $C_{22}$ ,  $S_{22}$ ).

Tabelle 8.19.: Bestimmung der Meerestide  $M_2$  anhand von Laser-entfernungsmessungen zu LAGEOS

Amplitude [cm]	Phase [°]	Daten	Charakterisierung
3,28 ±0,03 3,41 ±0,01	319 ±0,39 320 ±0,14	Sept. 83 bis Mai 85	7,5-Tage-Bögen 30-Tage-Bögen
3,03 ±0,08 3,55 ±0,07 3,23 ±0,04 3,24 ±0,06 3,19 ±0,06	316 ±1,1 319 ±1,0 320 ±0,6 322 ±0,8 320 ±0,8	je 120 Tage	Ergebnis für nicht Überlappende Daten- mengen (7,5-Tage-Bögen)

Die Ergebnisse liegen im Bereich der Lösungen anderer Autoren (vgl. Tab. 8.17.) und haben zu den Parametern des Modells von SCHWIDERSKI Abweichungen von +0,3 cm bzw. 8°. Dies sind zufriedenstellende Übereinstimmungen. Um die Stabilität der Lösung, d.h. die äußere Genauigkeit, besser abschätzen zu können, wurden wiederum Teillösungen berechnet.

Die erzielten Ergebnisse zeigen die Leistungsfähigkeit von POTSDAM-5 für die Bestimmung von Gezeitenparametern mit Hilfe von Variationsgleichungen. Die Software kann ohne Probleme auf größere Mengen von Parametern erweitert werden. Werden gleichzeitig neue Auswertestrategien eingesetzt, so ist auch bei Nutzung der zur Verfügung stehenden EDVA die Möglichkeit gegeben, einen etwas umfangreicheren Satz von Gezeitenparametern aus LAGEOS-Daten zu bestimmen. Es verbleibt aber eine Reihe rechentechnischer Probleme (Ressourcen, Rechenzeit), die durch Übergang auf leistungsfähigere EDVA überwunden werden kann.



#### 8.4. Untersuchungen zur Bestimmung von Erdrotationsparametern

In diesem Abschnitt soll diskutiert werden, welche Beiträge die Satellitengeodäsie zur Bestimmung der Erdorientierungsparameter leisten kann. Zu diesen Parametern zählen einmal die Erdrotationsparameter (Polkoordinaten  $x_p, y_p$ ; Zeit UT1) und zum anderen Präzession und Nutation.

##### 8.4.1. Erdrotationsparameter

Die Polbewegung sowie die Unregelmäßigkeiten in der Rotationsgeschwindigkeit können bekanntlich heute noch nicht umfassend modelliert werden. Aus diesem Grunde werden die Polkoordinaten und die Phase der Erdrotation, angegeben durch die Zeit UT1, ständig anhand von Messungen überwacht. War das jahrzehntelang nur durch astronomische Beobachtungen (Astrometrie) möglich, so werden diese in den letzten Jahren immer mehr durch moderne kosmische Verfahren abgelöst. Hierzu zählen die interferometrischen Messungen zu extragalaktischen Radioquellen (VLBI) sowie Laserentfernungsmessungen zum Mond und zu künstlichen Erdsatelliten. Die VLBI hat praktisch eine unmittelbare Anbindung an ein inertiales Referenzsystem, wie es, abgesehen von Eigenbewegungen der Sterne, auch bei der Astrometrie der Fall ist. Anders sieht es bei den dynamisch durch Mond und künstliche Erdsatelliten realisierten Referenzsystemen aus. Wie genau dabei ein Inertialsystem approximiert werden kann, hängt von der Bahnmodellierungsgenauigkeit ab (insbesondere für die Knotenlage  $\Omega$  und die Neigung  $i$ ). Diese wird immer gewisse Fehler aufweisen, beim Mond weniger als bei Satelliten, so daß über beliebig lange Zeiträume niemals ein hinreichend genauer Bezug auf das Inertialsystem hergestellt werden kann (vgl. Kap.5).

Bei der Bestimmung von Polkoordinaten ist keine hohe Genauigkeit in der Realisierung des inertialen Referenzsystems erforderlich. Schon durch eine bis wenige Erdrotationen ist die Lage der Rotationsachse im Erdkörper bestimmbar. Dadurch hat die Satellitengeodäsie keinen Nachteil bei der Berechnung dieser Parameter. Anders sieht es für UT1 aus. Hier wird unbedingt ein präzises inertiales Referenzsystem benötigt, wodurch natürlich die VLBI und die Astrometrie gegenüber den Satellitenverfahren grundlegende, prinzipielle Vorteile besitzen. Die Satellitengeodäsie kann aber auf jeden Fall Beiträge zur Auflösung der Feinstruktur in

UT1 leisten und dadurch natürlich zur Überwachung von Schwankungen in der Tageslänge (LOD) dienen.

Die Leistungsfähigkeit von POTSDAM-5 bei der Bestimmung von Polkoordinaten und LOD wurde schon mehrfach unter Beweis gestellt. Die Analyse der Daten der MERIT-Kampagne ergab folgende formale mittlere Fehler für diese Parameter (MONTAG u. a., 1985):

$$\begin{array}{ll} x_p, y_p & - \pm 0,0005'' \\ \text{LOD} & - \pm 0,02 \text{ ms} \end{array}$$

Vergleiche mit Lösungen anderer Analysenzentren (GENDT und MONTAG 1986) ergeben äußere Genauigkeiten für die erhaltenen Werte von

$$\begin{array}{ll} x_p, y_p & - \pm 0,001'' \text{ im Mittel (max. } 0,003'') \\ \text{LOD} & - \pm 0,1 \text{ ms im Mittel (max. } 0,3 \text{ ms)} \end{array}$$

Die Berechnung dieser Erdrotationsparameter wird seit einiger Zeit schon routinemäßig durchgeführt und soll im weiteren nicht näher behandelt werden. Dafür wird etwas ausführlicher das Problem der UT1-Bestimmung betrachtet.

Bei der Nutzung von Satelliten für die Berechnung von UT1 ist zu beachten, daß UT1 und  $\Omega$  nicht voneinander trennbar sind. Um UT1 zu ermitteln, ist also eine Vorgabe von  $\Omega$ , d.h. die fehlerfreie Modellierung von  $\Omega$  im betrachteten Zeitraum, notwendig. Der Freiheitsgrad in der Nullpunktsdefinition muß durch entsprechende Fixierung von  $\Omega$  und UT1 zur Ausgangsposition beseitigt werden, ebenso durch entsprechende Längendefinitionen im terrestrischen Referenzsystem (MONTAG, 1984). Die hohen Genauigkeitsanforderungen an die Satellitenbahnmodellierung können auf einfache Weise verdeutlicht werden.

Während Modellkomponenten in den längeren Perioden (bzw. säkular) Fehler bis zu  $\pm 0,1 \text{ ms}$  ( $\approx 0,0015''$ ) pro Tag aufweisen können, ohne die Bestimmung von LOD merkbar zu beeinflussen, würden hieraus schon nach 3 Monaten etwa 5 bis 10 ms Fehler in UT1 entstehen. Beispielsweise erzeugt die  $K_1$ -Meerestide Störungen in  $\Omega$ , die einer UT1-Schwankung mit  $\approx 10 \text{ ms}$  Amplitude und 2,8-jähriger Periode entsprechen würde. Bei ungünstiger Phasenlage könnte sogar ein linearer Trend von 20 ms in einem Jahr entstehen. Für die LOD-Bestimmung ergibt sich aber nur ein maximaler Einfluß von 0,04 ms.

Zunächst sollen einmal einige UT1-Resultate verschiedener Analysenzentren für die MERIT-Kampagne vorgestellt werden. Die Werte sind dem MERIT-Ergebnisband (FEISSEL, 1986) entnommen. Stellvertretend für die VLBI-Methode wurde die Lösung von NGS (National Geodetic Survey, USA) ausgewählt. Andere VLBI-Lösungen unterscheiden sich nur unwesentlich davon. Die Ergebnisse der klassischen Astrometrie sind in der Lösung des BIH (ASTRO) (Bureau International Polar Motion Service, Japan) gegeben. Die einzige UT1-Bestimmung auf der Basis von Satellitendaten ist von CSR (Center of Space Research, Texas, USA) durchgeführt worden. Die Autoren geben für die UT1-Werte im Mittel folgende Fehlermaße an:

NGS (VLBI)	-	$\pm 0,05$ ms,
BIH (ASTRO)	-	$\pm 0,7$ ms,
IPMS (ASTRO)	-	$\pm 0,2$ ms,
CSR (LAGEOS)	-	$\pm 0,09$ ms .

Die Ergebnisse sind in den Abb. 8.9. und 8.10. zusammengestellt. Dabei ist die jeweilige Differenz von UT1R (Gezeitenstörungen mit Perioden bis 35 Tage korrigiert) zur geglätteten BIH-Zirkular-D-Lösung angegeben. Bei der weiteren Diskussion soll die VLBI-Kurve als Referenz gewählt werden, da sie die kleinsten Fehler hat.

In Abb. 8.9. sind die Lösungen der klassischen Verfahren der VLBI-Kurve gegenübergestellt. Es spiegelt sich deutlich die große Streuung von  $\pm 0,7$  ms für die BIH (ASTRO)-Lösung wider. Das Fehlermaß scheint hiernach sogar etwas optimistisch. Die Kurve zeigt große, verhältnismäßig kurzperiodische Schwankungen im Bereich von 10 Tagen. Ein wesentlich glatterer Verlauf ist bei der IPMS-Lösung festzustellen. Sie hat im groben zwar die gleichen Trends wie die VLBI-Kurve, zeigt aber an vielen Stellen und über größere Bereiche Abweichungen von 1 ms und mehr (bis 2 ms).

Interessant ist nun, wie sich die CSR-Satellitenlösung verhält (Abb. 8.10.). Sie zeigt eine im Gegensatz zu den Astrometrie-Lösungen sehr gute Übereinstimmung mit der VLBI-Kurve. Es treten Abweichungen mit sehr langen Perioden (mehrere Monate) auf, die im Mittel  $\pm 0,58$  ms betragen und maximale Werte von 1 ms annehmen (TAPLEY u. a., 1985).

Wird die Differenz zur VLBI-Kurve mit einem VONDRAK-Filter (halbe Amplitude für 60 Tage) bearbeitet, so ergibt sich eine Streuung im kurzperiodischer Bereich von  $\pm 0,15$  ms.

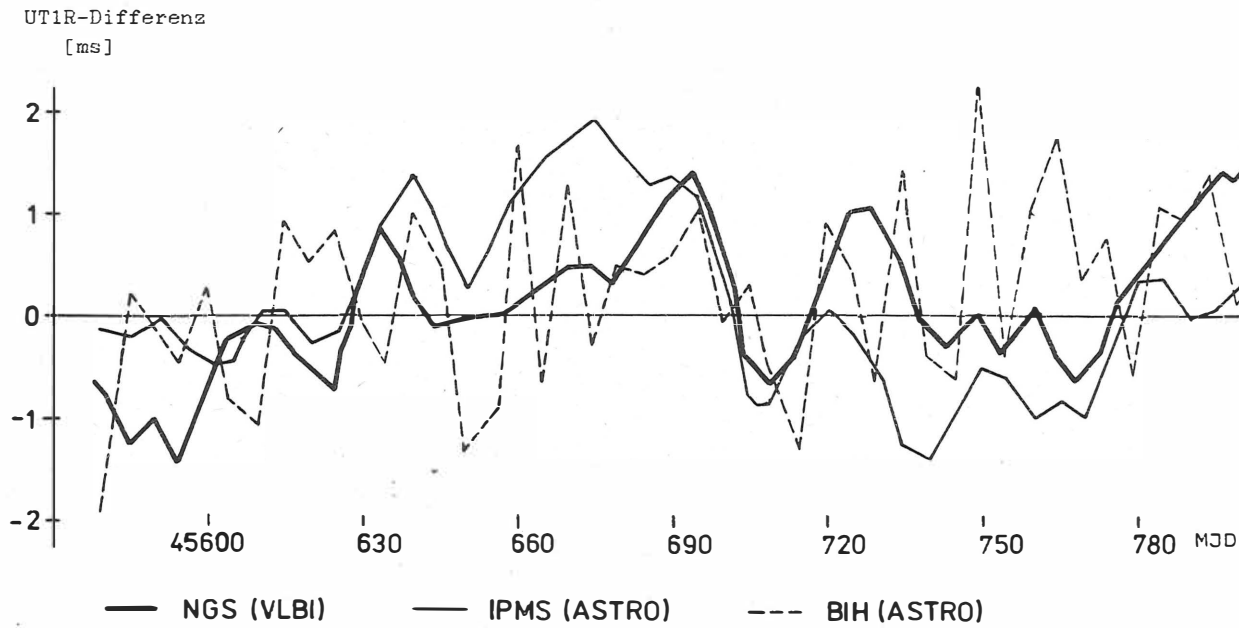


Abb. 8.9.: UT1R-Lösungen für den Zeitraum der MERIT-Kampagne,  
Vergleich von VLBI und Astrometrie  
(Differenz zu BIH-Zirkular-D)

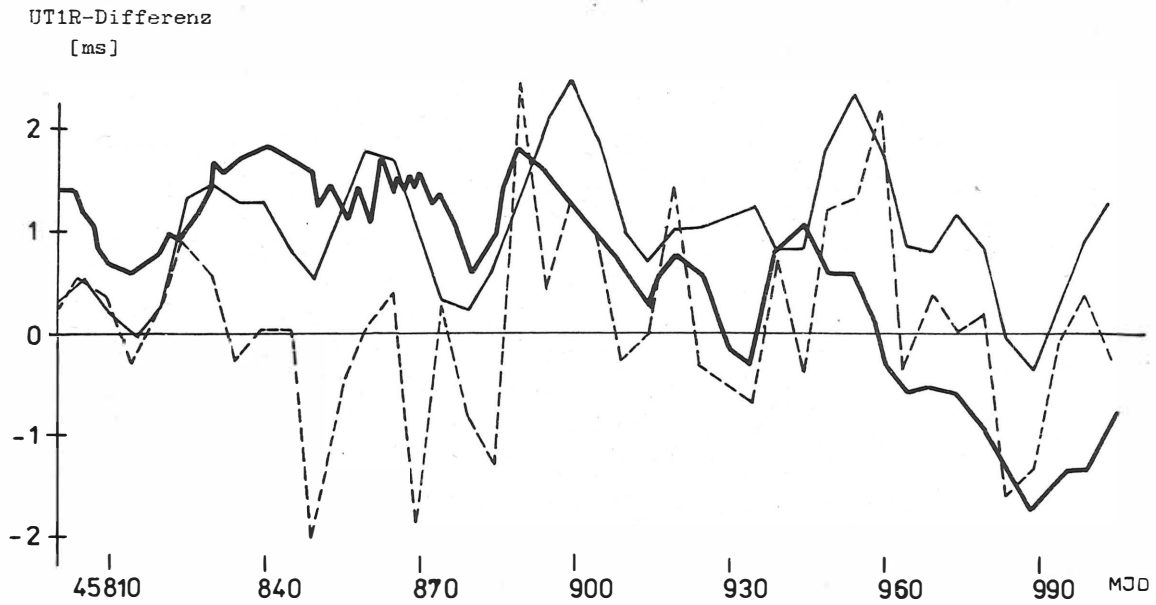


Abb. 8.9.: Fortsetzung

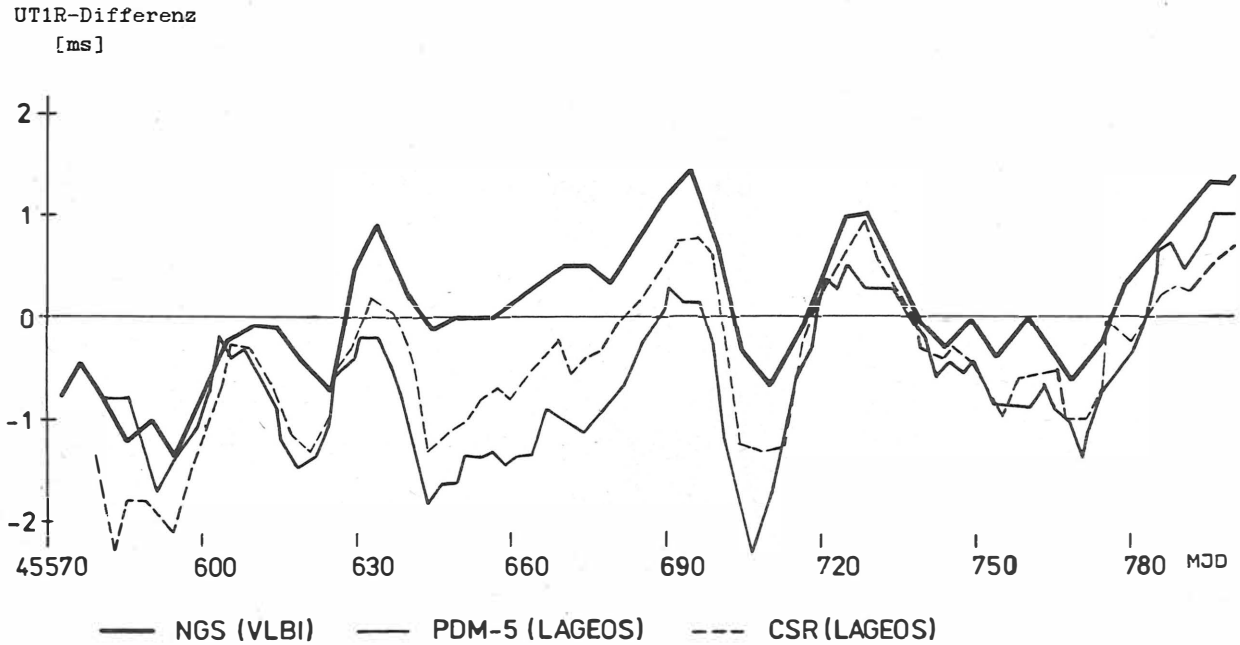


Abb. 8.10: UT1R-Lösungen für den Zeitraum der MERIT-Kampagne,  
Vergleich von VLBI und Satellitenverfahren  
(Differenz zu BIH-Zirkular-D)

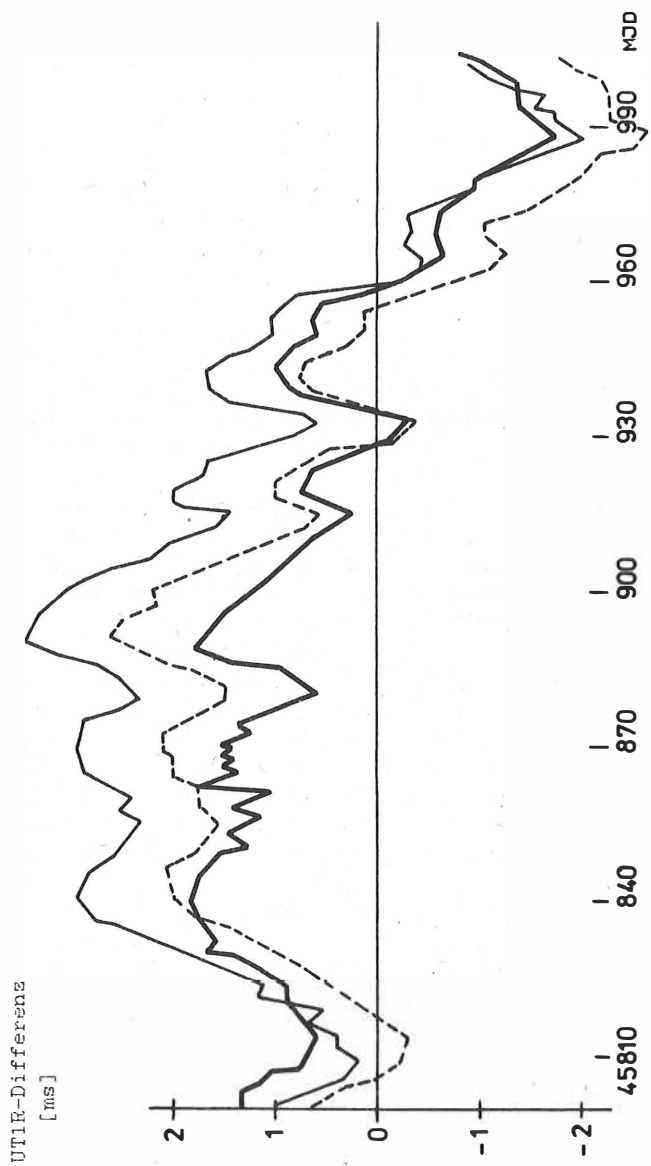


Abb. 8.10.1: Fortsetzung

Mit POTSDAM-5 wurden nun ebenfalls UT1-Werte für den Zeitraum der MERIT-Kampagne berechnet. Die guten Ergebnisse für Bahnanpassungen über längere Zeiträume (Tab. 8.4. und 8.5.) gaben Anlaß zu diesem Schritt. Der günstigste, aber aus rechentechnischen Gründen nicht realisierbare Weg bestünde in einer durchgehenden Integration der Satellitenbahn für den ganzen Zeitraum. So wurden 32,5-Tage-Bögen verwendet, für die im ersten Schritt eine optimale Bahnanpassung erzeugt wurde. Sodann wurden in Intervallen von 2,5 und 5 Tagen die Lage des Knotens  $\Omega$  bzw. die restlichen Bahnelemente verbessert. Die Verbesserungen für  $\Omega$  ergeben die UT1-Korrekturen. Der Anschluß an den nächsten Bogen wurde durch eine 2,5-Tage-Überlappung gewährleistet, d.h., die UT1-Werte für das letzte 2,5-Tage-Intervall des einen und das erste des nachfolgenden Bogens wurden jeweils gleichgesetzt. Da die UT1-Werte aber fehlerhaft sind, pflanzt sich durch diese Gleichsetzung ein Fehler fort. Die formale innere Genauigkeit einer UT1-Bestimmung für 2,5-Tage-Intervalle wird mit  $\pm 0,025$  ms ausgewiesen. Es muß aber mit einem äußeren Fehler von etwa  $\pm 0,1$  ms gerechnet werden. Über einen Zeitraum von 14 Monaten werden demnach 28 Werte mit dieser Varianz additiv verknüpft.

In Abb. 8.11. sind einige Realisierungen solcher Verknüpfungen simulierter zufälliger Zahlen mit  $\pm 0,1$  ms Varianz dargestellt. Es ist unmittelbar zu erkennen, daß Abweichungen - auch periodischer Art - mit Differenzen nahe 1 ms entstehen können. Diese Tatsache muß bei der Methode stets beachtet werden.

Die POTSDAM-5-Ergebnisse (PDM5 (LAGEOS)) sind in Abb. 8.10. eingetragen. Die Übereinstimmung der Lösung mit CSR (LAGEOS) und NGS (LAGEOS) ist ausgezeichnet. Die langperiodischen Abweichungen zur VLBI-Lösung zeigen ein ähnliches Verhalten wie die CSR (LAGEOS)-Lösung, wobei die Abweichungen bis etwa 1 ms größere Beträge annehmen. Der etwas bessere Verlauf der CSR-Lösung ist eventuell dadurch zu erklären, daß hier simultan eine Ausgleichung niederer Harmonischer des Geopotentials sowie langperiodischer Gezeiten erfolgte.

Die Differenz PDM5 (LAGEOS) minus NGS (VLBI) ist aus Abb. 8.12. zu entnehmen. Daraus ist klar ersichtlich, daß diese Differenz langperiodischer Natur ist. Sie hat eine Varianz von etwa  $\pm 0,8$  ms. Werden Intervalle von je 60 Tagen durch Verschiebung und Trendausgleich an die VLBI-Lösung angepaßt, so erhält man einen mittleren Fehler von  $\pm 0,2$  ms für die Perioden kleiner als 60 Tage. Die Differenz PDM5 (LAGEOS) minus CSR (LAGEOS) zeigt, daß beide Bahnmodelle in der Modellierung des Knotens  $\Omega$  recht gut übereinstimmen. Für das halbe Jahr von 45820 bis 46000 ergab sich



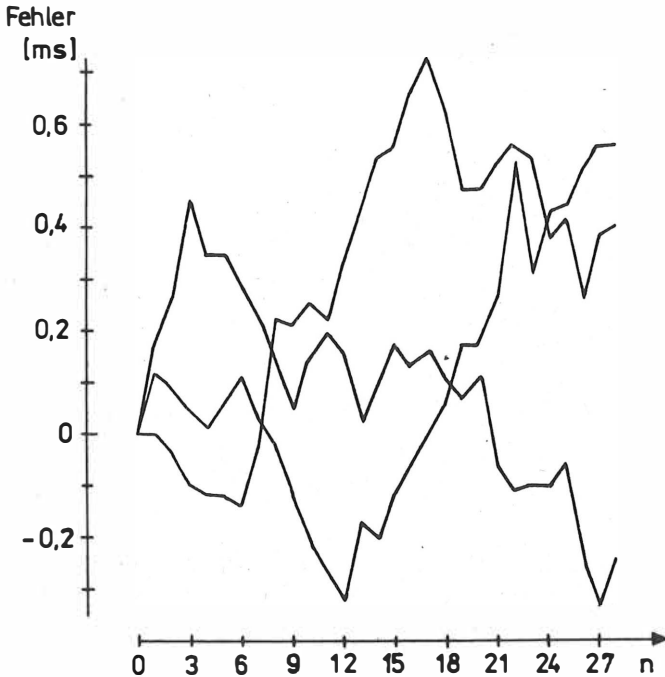


Abb. 8.11.: Addition von Zufallszahlen mit einer Varianz von  $\pm 0,1$  ms (3 Varianten)

sogar eine synchrone Knotenlage (konstante Differenz). Die sich ergebenden ähnlichen Differenzen zur VLBI-Lösung lassen den Schluß zu, daß noch gleiche fehlerhafte Modellkomponenten (z.B. Geopotential, Geseiten) in die Bahnmodellierung eingegangen sind.

Die Satellitenlösungen liefern gute Ergebnisse im kurzperiodischen Bereich (etwa 60 Tage) und stellen damit eine Ergänzung der VLBI-Methode für die Untersuchung der Feinstruktur der Rotationsschwankungen dar. Es ist erforderlich, durch Verfahren wie VLBI oder auch Astrometrie den absoluten Anschluß immer wieder herzustellen. Eine Kombination zwischen Satellitenmethoden und VLBI ist in solchen Fällen interessant, in denen Radioteleskope nicht ständig für geodätische Aufgaben zur Verfügung stehen. Dieses sind erste Ergebnisse zur UT1-Bestimmung mit POTSDAM-5.

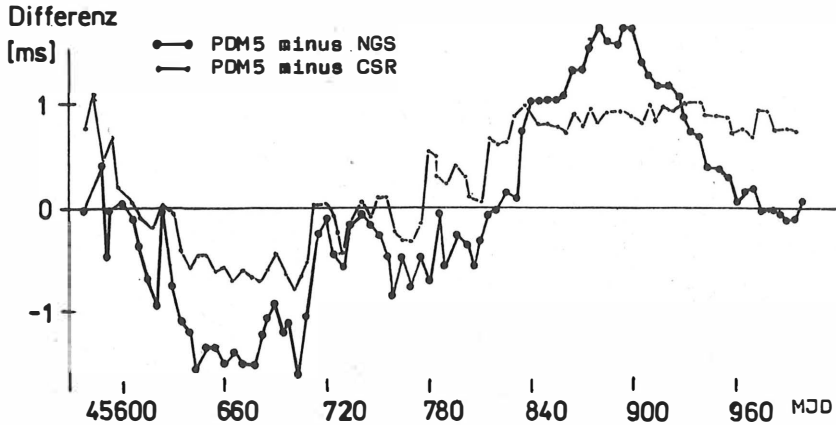


Abb. 8.12. Differenzen der UT1R-Lösung NGS (VLBI) und CSR (LAGEOS) zur Lösung PDM5 (LAGEOS)

Die Untersuchungen sollten in Zukunft weiter vertieft werden. Eine Möglichkeit bestünde in der Anwendung einer größeren Überlappung der Bögen und dadurch einer Reduktion des Anschlußfehlers (Abb. 8.11.). Sehr wichtig wird es sein, Technologien zu entwickeln, die wesentlich längere Bögen verwenden. Wie komplex dieses Problem zu behandeln ist, sollen folgende Bemerkungen noch verdeutlichen. Der relative Fehler des Koeffizienten  $C_{20}$  des Geopotentials wird mit etwa  $10^{-6}$  angegeben. Dies entspricht jährlichen säkularen Änderungen in  $\Omega$  von  $0,45''$  ( $\approx 30$  ms). Die festgestellte zeitliche Änderung von  $C_{20}$  (YODER u.a., 1983) kann zu Fehlern von mehreren Millisekunden im Jahr führen. Auch relativistische Störungen wie der LENSE-THIRING-Effekt haben etwa diese Größenordnung (KOZEVA und GEORGIEV, 1984).

#### 8.4.2. Nutation

Präzession und Nutation, verursacht durch Gezeitenkräfte, können mit hoher Genauigkeit modelliert werden. Die Unterschiede in den Theorien von KINOSHITA und WAHR liegen beispielsweise im Bereich

von maximal 0,001" bis 0,002". Bei der Bestimmung von zugehörigen Parametern haben, genau wie bei UT1, Verfahren einen Vorteil (bzw. sind überhaupt erst in der Lage dazu), die die Position der Rotationsachse der Erde direkt in einem inertialen Referenzsystem mit hoher Genauigkeit erhalten können. Das einzige Verfahren dieser Art ist die VLBI. Neueste Ergebnisse konnten die hohe Leistungsfähigkeit dieses Verfahrens bei der Bestimmung von Nutationskoeffizienten unter Beweis stellen (HERRING u.a., 1985; EUBANKS u.a., 1985). Aus einer Reihe einzelner Korrekturwerte für  $\Delta\epsilon$  und  $\Delta\psi\sin\epsilon_A$  mit einem Fehler von  $\pm 0,0001''$  bis  $\pm 0,0005''$  wurden Genauigkeiten von etwa  $\pm 0,0002''$  für die Nutationskoeffizienten der Perioden bis zu einem Jahr erreicht.

Abweichungen zur Theorie von WAHR, die oberhalb von  $\pm 0,001''$  lagen, konnten dabei nur für den Jahresterm festgestellt werden ( $\approx 0,002''$ ).

Die Nutation berechnet sich als Summe von Gliedern der Form

$$(8.15) \quad \Delta\psi = \sum_S r_\psi^S \sin(\arg^S), \quad \Delta\epsilon = \sum_S r_\epsilon^S \cos(\arg^S)$$

für die Nutationsfrequenz  $s$ , deren Argument  $\arg$  eine Linearkombination der Bahnelemente von Sonne und Mond ist. Bei der Transformation von Stationskoordinaten vom CTS ins CIS (Gl.5.17) beeinflusst die Nutationskomponente  $\Delta\psi$  die Orientierung in Richtung der Erdrotation (UT1) mit  $\Delta\psi\cos\epsilon_A$  und in der Breite mit  $\Delta\psi\sin\epsilon_A$ . Um die große Unsicherheit durch die Unregelmäßigkeit der Erdrotation bei der Nutationsbestimmung auszuschließen, wird nur  $\Delta\psi\sin\epsilon_A$  berücksichtigt. Die sich daraus ergebenden partiellen Ableitungen zur Berechnung der Amplituden für die Nutationsterme lauten

$$(8.16) \quad \frac{\partial X_R}{\partial r_\psi} = \begin{pmatrix} -aZ_R \\ 0 \\ aX_R \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X_R}{\partial r_\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\arg^S) \cdot Z_R \\ \cos(\arg^S) \cdot Y_R \end{pmatrix},$$

mit  $a = -\sin(\arg^S) \sin \epsilon_A$ .

Die Satellitenverfahren können keine absoluten Orientierungen liefern. Die Freiheitsgrade in der Neigung  $i$  der Bahnebene sowie in der Lage des Knotens  $\Omega$  schließen dieses aus. Es können also,

wie bei UT1, ausgehend von einer Nullpunktfixierung, nur differentielle Orientierungsänderungen gemessen werden. Im Gegensatz zu UT1 sind aber wesentlich höhere Genauigkeiten gefordert ( $0,001'' \approx 0,07 \text{ ms}$ ). Diese sind säkular, wie es für die Präzession erforderlich wäre, und über längere Perioden nicht zu erreichen. Es kommt also nur die Behandlung kurzperiodischer Nutationsglieder - wenige Tage bis Wochen - in Frage. Unter diesen sind nur einige, deren Amplituden oberhalb oder nahe von  $0,001''$  liegen. Da zu erwarten ist, daß eventuelle Differenzen zwischen Theorie und Realität mit dem Betrag des Effekts abnehmen, kommen darunter nur Glieder mit größeren Amplituden in Frage, wie beispielsweise der 13,7-tägige Nutationsterm (Nutationsargument 00202). Dieser Term wurde für einige praktische Untersuchungen zur Bestimmbarkeit der Nutation mit Laserentfernungsmessungen zu LAGEOS ausgewählt. In Abhängigkeit von den verwendeten Intervallen für die Verbesserung der Bahnelemente ergaben sich z.T. größere Korrelationen mit anderen Parametern (Tab. 8.20.).

Tabelle 8.20. : Korrelationen der 13,7-tägigen Nutationskoeffizienten bei Laserentfernungsmessungen zu LAGEOS

Korrelation von $\Delta\psi, \Delta\epsilon$ mit	Korrelationswerte bei angegebenen Intervallen für die Bahnverbesserung		
	5 Tage	15 Tage	30 Tage
$k_2$	0,3	0,4	0,5
$\Omega, i$	0,8	0,3	0,2
M	0,6	0,3	0,3
$\Delta\psi$ mit $\Delta\epsilon$	0,2	0,2	0,2

Anhand simulierter Daten wurden absolute Fehler im Bereich von einigen 0,001" festgestellt (Tab. 8.21.). Der formale mittlere Fehler war um mindestens eine Größenordnung zu optimistisch und betrug  $\pm 0,00010''$  bzw.  $0,00003''$  für  $\Delta\psi$  bzw.  $\Delta\epsilon$ . Bei Festhalten an einem fehlerhaften  $k_2$  ( $\Delta k_2 = -0,01$ ) ergaben sich wesentlich größere Abweichungen, was durch die starke Korrelation mit diesem Parameter zu klären ist.

Bei Anwendung des Ausgleichsverfahrens auf die LAGEOS-Daten der MERIT-Kampagne ergaben sich die in Tabelle 8.22. angegebenen Korrekturen zu den Koeffizienten der WAHRschen Nutationstheorie. In Anbetracht der Tatsache, daß die formalen Fehler, wie schon des öfteren betont, in der Regel zu optimistisch sind, muß man davon ausgehen, daß die Abweichungen nicht signifikant sind. Der Vergleich mit den Ergebnissen der Intensivkampagne zeigt noch keine hinreichende Stabilität der Lösung, insbesondere für die Komponente  $\Delta\psi$ .

Aus diesem Grunde muß für  $\Delta\epsilon$  mit Fehlern bei etwa  $\pm 0,001''$  und für  $\Delta\psi$  noch darüber hinaus gerechnet werden.

Die VLBI-Fehlerangaben haben zwar ähnliche Beträge, können aber als äußere Fehlermaße gelten, so daß sie etwa um den Faktor 3 kleiner sind. Dennoch können auch die VLBI-Korrekturen kaum als signifikant angesehen werden.

Die Genauigkeit der mit LAGEOS erhaltenen Korrekturbeträge liegt etwa im Bereich der Genauigkeit für die Polkoordinaten und UT1. Sie erreicht damit nicht das Niveau, das für die Ermittlung signifikanter Abweichungen vom verwendeten Nutationsmodell notwendig wäre. Da andererseits, wie einleitend dargestellt, die potentiellen Vorteile der VLBI-Methode inzwischen auch zu entsprechenden, sehr genauen Ergebnissen bei der Ableitung von Nutationsparametern genutzt wurden, sollte der hier dargestellte (erstmalige) Versuch, Satelliten-Lasermessungen zur Bestimmung von Nutationsparametern zu nutzen, vor allem unter methodischen Gesichtspunkten gesehen werden. Zukünftig wird es sich weiterhin empfehlen, die mit anderen Verfahren sehr genau bekannten Präzessions- und Nutationseffekte zwar voll in die Bahnmodellierung einzubeziehen, sie aber nicht für die Gruppe von zu bestimmenden Parametern vorzusehen, zumal die interessanten Phänomene im längerperiodischen Bereich liegen, wie beispielsweise die freie Nutation (NDFW, 433 Tage), die Jahresperiode und die 18,6-jährige Periode.

**Tabelle 8.21.:** Untersuchungen zur Bestimmung der 13,7-tägigen Nutation anhand von Simulationen (fehlerhafte Modellkomponenten: BE, MB, KO, ER, GM, K2, s.Tab. 8.1.)

Intervall zur Verbesserung d. Bahnelemente [Tage]	Bahnanpassung [cm]	Differenz zum Sollwert	
		$\Delta\psi$ [0,001"]	$\Delta\epsilon$ [0,001"]
5	3,1	- 3,1	- 4,7
7,5	3,0	- 2,3	- 5,5
15	4,2	- 5,5	- 3,4
5	2,5	- 0,2	- 1,1 mit
7,5	2,7	+ 0,2	- 1,0 $k_2$
15	2,7	- 0,1	+ 0,1 Verbesserung

**Tabelle 8.22.:** Bestimmung der 13,7-tägigen Nutation anhand von LAGEOS-Daten der MERIT-Kampagne (Differenz zum WAHRschen Nutationsmodell)

Daten	Intervall zur Verbesserung d. Bahnelemente [Tage]	Bahnanpassung [cm]	Korrekturen	
			$\Delta\psi$ [0,001"]	$\Delta\epsilon$ [0,001"]
MERIT gesamt	5	7,3	+1,3 ±0,2	+0,1 ±0,1
	7,5	7,7	+1,8 ±0,2	-0,3 ±0,1
	10	8,5	-0,6 ±0,2	-0,2 ±0,1
	15	8,5	-0,8 ±0,2	-0,2 ±0,1
	30	10,6	-1,5 ±0,2	-0,2 ±0,1
MERIT Intensiv- kampagne (100 Tage)	7,5	6,8	-1,9 ±0,5	-0,7 ±0,1
	10	7,1	-1,4 ±0,3	-1,0 ±0,1
	15	7,8	-8,1 ±0,3	-1,5 ±0,1
	30	9,8	-11,5 ±0,3	-1,7 ±0,1
VLBI (Daten der Jahre 1980-1985) (HERRING u.a., 1985)			-1,0 ±0,33	+0,13 ±0,13

8.5. Zur Bestimmung von Parametern des Geopotentials

8.5.1. Allgemeine Bemerkungen

Anschließend folgen einige Betrachtungen zur Bestimmung von Parametern des Geopotentials, d.h. von GM,  $C_{1m}$ ,  $S_{1m}$ . Dabei sollte es nicht Ziel der Untersuchungen sein, neue, genauere Parameter zu berechnen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde vorrangig untersucht, welchen Einfluß diese Parameter auf die Bestimmung der anderen uns interessierenden Größen haben. Dabei wurden auch einige Erkenntnisse über die Geopotentialparameter selbst gewonnen, die im folgenden niedergelegt werden sollen.

Ein wesentliches Ergebnis der Untersuchungen ist bereits darin zu sehen, daß die Programme zur Berechnung der Geopotentialparameter über GM hinaus entwickelt wurden. Im einzelnen sind es die Kugelfunktionskoeffizienten  $C_{20}$ ,  $C_{21}$ ,  $S_{21}$ ,  $C_{22}$ ,  $S_{22}$ . Diese Programme können prinzipiell auf Koeffizienten beliebigen Umfangs erweitert werden. Die Beschränkung auf die niederen Koeffizienten erfolgte unter dem Gesichtspunkt, daß diese bei den Gezeitenuntersuchungen eine Rolle spielen. Die Koeffizienten  $C_{21}$ ,  $S_{21}$  sind außerdem noch mit der Lage des Rotationspols im Erdkörper verknüpft. Die Berechnung der benötigten partiellen Ableitungen für GM werden unter Anwendung der Gleichungen (6.15), (6.25) und (6.26) (BALLANI, 1984) durchgeführt. Analog wird auch bei Aufstellung der Variationsgleichungen für die  $C_{1m}$ ,  $S_{1m}$  verfahren.

Die partiellen Ableitungen berechnen sich aus (6.21) zu:

$$(8.17) \quad \frac{\partial f^K}{\partial C_{1m}} = GM \cdot D^T \cdot R_E^1 \cdot \left( \frac{\partial V_{1m}}{\partial x_E} \right)^T$$

$$(8.18) \quad \frac{\partial f^K}{\partial S_{1m}} = GM \cdot D^T \cdot R_E^1 \cdot \left( -i \frac{\partial V_{1m}}{\partial x_E} \right)^T$$

Vergleicht man diese Ableitungen mit denen für die Gezeiten (Gl. (8.13), (8.14)), so ist zu erkennen, daß jene sich aus Verknüpfung von (8.17) und (8.18) unter Verwendung des Gezeitenarguments ergeben.

### 8.5.2. Die geozentrische Gravitationskonstante GM

In die Konstante GM gehen die Definitionen für Zeit und Länge ein ( $\text{km}^3\text{s}^{-2}$ ). Die Zeit ist um mehrere Größenordnungen genauer definiert als die Länge. Die Längendefinition erfolgt auf der Basis der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Daraus ergibt sich, daß der Wert von GM von der Lichtgeschwindigkeit abhängt und mit deren Vorgabe fixiert ist. Die Lichtgeschwindigkeit ist mit

$$c = 299\,792,458 \text{ ms}^{-1}$$

gegeben. In manchen Fällen wird noch der alte Wert von

$$c = 299\,792,5 \text{ ms}^{-1}$$

verwendet, woraus eine GM-Änderung von  $+0,167 \text{ km}^3\cdot\text{s}^{-2}$  resultiert.

Die von verschiedenen Autoren erhaltenen Werte für GM sind in Tabelle 8.23. zusammengestellt.

Nach dem 3. KEPLERschen Gesetz

$$(8.19) \quad a^3/U^2 = GM$$

sind die große Halbachse  $a$  der Satellitenbahn und GM miteinander verknüpft. Unter der Annahme, daß die Umlaufzeit  $U$  praktisch fehlerfrei ist, bewirkt danach ein relativer Fehler in GM von  $\text{rel}(GM)$  einen relativen Fehler in  $a$  von

$$(8.20) \quad \text{rel}(a) = \frac{1}{3} \text{rel}(GM) .$$

Weiterhin kann angenommen werden, daß die Entfernungsmessung von einer Station auf der Erde zum Satelliten praktisch fehlerfrei erfolgt, so daß die Halbachsenänderung sich voll in einer Stationsradiusänderung  $\Delta R$  niederschlägt, sofern es sich um Messungen im Zenit handelt. Anderenfalls erfolgt noch eine Verstärkung der Radiusänderung um etwa den Faktor 1,3 beim Höhenwinkel von  $45^\circ$  und 2,3 bei  $30^\circ$  (vgl. Abb. 8.13.). Der Schwerpunkt dieses Effekts liegt bei  $45^\circ$ , so daß sich für die relative Radiusänderung, d.h. Maßstabsänderung  $\mu$ , ergibt:



$$(8.21) \quad \text{rel}(R) = 1,3 \cdot \frac{a}{3R} \text{rel}(GM) .$$

Für LAGEOS bedeutet dies einen Faktor von 0,9.

Die Messungen im Zenit liefern dann einen Entfernungsfehler von  $0,3 \cdot \Delta R$ . Durch die Ausgleichung wird also ein Maßstab bestimmt, der mittlere Fehler in der Bahnanpassung von  $0,15 \cdot \Delta R$  hervorrufen. Für eine Änderung  $\Delta GM = 0,01 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  ergeben sich beispielsweise folgende Werte (LAGEOS):

$$\begin{aligned} \text{rel}(GM) &= 2,5 \cdot 10^{-8}, \\ \text{rel}(a) &= 0,84 \cdot 10^{-8}, & \Delta a &= 10,5 \text{ cm}, \\ \text{rel}(R) = \mu &= 2,2 \cdot 10^{-8}, & \Delta R &= 14,4 \text{ cm}, \\ \text{Bahnanpassung} &= 2,2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Tabelle 8.23.: Bestimmungen der geozentrischen Gravitationskonstanten GM

Autor bzw. Erdmodell	Wert von GM + 398,609 [km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ]	Verfahren	Jahr
GEM10B	0,47 ±0,02	Satelliten	1978
LERCH u. a. (GEM-L2)	0,44	LAGEOS	1983
SL5.1 (CHRISTO-DOULIDIS u. a. 1982)	0,4358 ±0,003	LAGEOS (72 Monate)	1982
SMITH u. a. 1985	0,4342 ±0,002 0,4377 ±0,007 0,4353 ±0,004 0,4364 ±0,003 0,4329 ±0,003	LAGEOS 1979-1982 Teillösungen 1979 1980 1981 1982	1985
SL6 (CHRISTO-DOULIDIS u. a. 1985)	0,436 ±0,0001	LAGEOS 1980-1983	1985
SMITH u. a.	0,441 ±0,005'	LAGEOS 1982-1985	1986
WILLIAMS und DICKEY (1983)	0,444 ±0,01	Mondlaser	1983
MERIT-Standard	0,448		1983

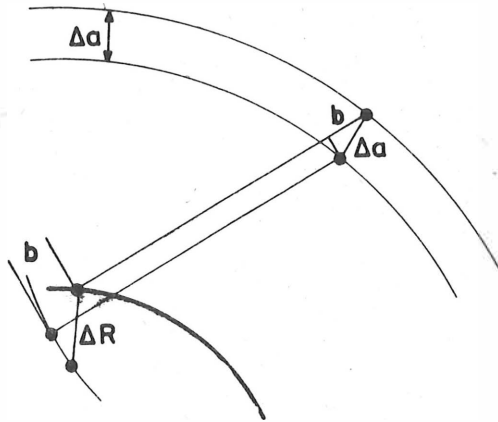


Abb. 8.13.: Einfluß der Änderung  $\Delta a$  in der Halbachse des Satelliten auf die Radiusänderung  $\Delta R$

Die abgeleiteten Werte sind in guter Übereinstimmung mit den durch Simulation erhaltenen Resultate.

Nun ist es leider nicht so, daß die genauere radiale Komponente der Satellitenbahn über die Zenitmessungen eine gute Bestimmung des Wertes von GM ermöglichen. Im Gegenteil - die alleinige Verwendung von Zenitmessungen würde eine völlige Korrelation mit dem Maßstab in den Radien beinhalten. Nur die sich ergebenden Widersprüche (Residuen) in den Messungen mit verschiedenen Höhenwinkeln ermöglichen die Berechnung von GM. Damit aber müssen ungenauer modellierbare Bahnkomponenten mit herangezogen werden. Bei praktischen Untersuchungen festgestellte Korrelationen mit den Radien lagen bei 0,6.

Vergleicht man verschiedene Lösungen miteinander, so kann man (die ältere GEM10B-Lösung ausgenommen) Differenzen von etwa  $\pm 0,01 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  feststellen.

Wie oben dargelegt, werden solche GM-Abweichungen zu einem Teil durch Maßstabsänderungen in den Stationsradien kompensiert und resultieren in Restfehlern, die unterhalb der Modellierungsgenauigkeiten liegen. Es ist also in jedem Falle sinnvoll, die GM-

Werte stets im Zusammenhang mit dem Maßstab zu betrachten. Diese Aussage kann durch einige Untersuchungen bestätigt werden.

Bei simulierten Daten wurde  $\Delta GM = +0,002$  gewählt. Sodann wurden optimale Stationskoordinaten und Bahnparameter für den neuen GM-Wert berechnet. Bei einer davon ausgehenden simultanen Verbesserung von GM und den Stationskoordinaten schaffte die Ausgleichung (in einem Iterationsschritt) lediglich, 50% der GM-Verfälschung rückgängig zu machen. Daraus resultierende Fehler in der Bahnanpassung von 0,2 cm wurden von anderen fehlerhaften Modellanteilen, die  $\pm 3$  cm Bahnanpassung lieferten, überschattet. Im Endergebnis verblieb eine Maßstabsänderung von  $\mu = 0,33 \cdot 10^{-8}$ .

Die Laserentfernungsmessungen zu LAGEOS (September 1983 - Mai 1985) wurden verwendet, um GM zu bestimmen. Dabei wurden simultan Bahnelemente einschließlich empirischer Beschleunigung, Stationskoordinaten und Erdrotationsparameter ausgeglichen. Die Ergebnisse für die monatliche Bestimmung dieses Parameters sind Abb. 8.14. zu entnehmen. Hierbei wurden sowohl 7,5- als auch 30-Tagebögen verwendet. Es ergeben sich deutlich kleinere Werte für GM als im MERIT-Standard empfohlen wurden. Als Mittelwert über den ganzen Zeitraum erhalten wir

$$GM = 398600,441 \text{ km}^3 \text{s}^{-2}$$

Eine gemeinsame Ausgleichung aller Daten führt auf dasselbe Ergebnis (vgl. Tab. 8.24), das in guter Übereinstimmung mit den neuesten publizierten Werten ist.

Tabelle 8.24: POTSDAM-5 Ergebnisse für GM (LAGEOS, September 1983 - Mai 1985)

GM 398600,0+ [km <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> ]	Charakterisierung	
0,4408 ± 0,00015	7,5-Tage-Bögen	} direkte Ausgleichung aller Daten
0,4416 ± 0,00014	30 -Tage-Bögen	
0,4411 ± 0,00023	7,5-Tage-Bögen	} Mittel aus Monatslösungen
0,4418 ± 0,00033	30 -Tage-Bögen	

$$GM = 398\,600 + [km^3 s^{-2}]$$

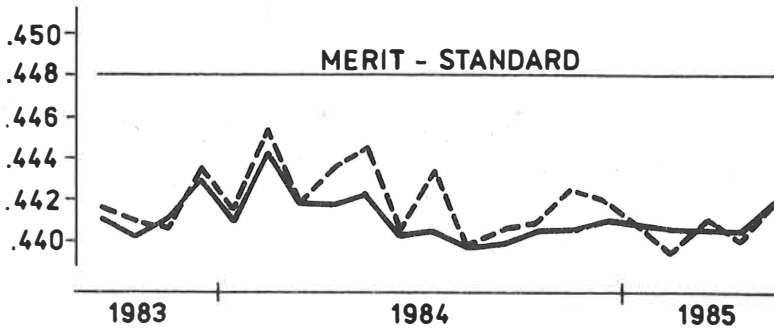


Abb. 8.14.: Bestimmung von GM für 30-Tage-Intervalle  
 ——— 7,5-Tage-Bögen (r.m.s. = 7,2 cm)  
 - - - 30-Tage-Bögen (r.m.s. = 10,0 cm)

### 8.5.3. Die niederen Harmonischen des Geopotentials

In den MERIT-Standards sind für die Parameter  $C_{21}$ ,  $S_{21}$  Werte festgelegt worden, die von den GEM-L2-Parametern abweichen. Damit wird eine bessere Übereinstimmung mit der Lage der Rotationsachse hergestellt. Es wird aber darauf verwiesen, daß dies eventuell eine schlechtere Bahnanpassung zur Folge haben könnte, weil die GEM-L2-Werte besser zu dem gemeinsam bestimmten Satz von Geopotentialkoeffizienten dieses Modells passen.

Es wird empfohlen, gegebenenfalls  $C_{21}$ ,  $S_{21}$  mitzubestimmen. Die Beziehung zwischen  $C_{21}$ ,  $S_{21}$  und der Polposition (MONTAG 1984) lautet für die MERIT-Kampagne:

$$(8.22) \quad C_{21} = x'_p \cdot C_{20} \quad , \quad \begin{array}{l} x'_p, y'_p \text{ Figurenachse,} \\ x'_p \approx 0,040'' + 0,3 \cdot (x_p - 0,040''), \\ y'_p \approx 0,300'' + 0,3 \cdot (y_p - 0,300''), \end{array}$$

$$(8.23) \quad S_{21} = -y'_p \cdot C_{20} \quad .$$

In Tabelle 8.25. sind verschiedene Werte angegeben. Die Intensivkampagne (120 Tage) wurde ausgewählt, da aus Kapazitätsgründen die aufwendige Geopotentialbestimmung nur mit begrenztem Datenumfang möglich war.

Die harmonischen Koeffizienten hatten mit den Stationsradien und GM Korrelationen im Bereich von 0,1 bis 0,3. Weitere festgestellte Korrelationen waren  $(C_{21}, S_{21})$  mit  $(C_{22}, S_{22})$  von 0,2 bis 0,4,  $C_{20}$  mit  $k_2$  von 0,1 sowie  $C_{21}, S_{21}$  mit  $h_2$  von 0,2.

Es ergaben sich die in Tabelle 8.26. angegebenen mittleren Korrekturen für die Harmonischen.

Die einzige signifikante Korrektur wurde für  $S_{21}$  erhalten. Sie korrespondiert jedoch nicht mit der mittleren Pollage des Untersuchungszeitraumes, sondern zeigt in Richtung des GEM-L2-Wertes. Dieser Wert paßt wahrscheinlich am besten zu den anderen Parametern des Geopotentials. Neueste Geopotentialbestimmungen wurden auch schon durchgeführt, die optimal zu den MERIT-Standardwerten für  $C_{21}, S_{21}$  passende Koeffizienten der Harmonischen bestimmten (CHRISTODOULIDIS u.a., 1985).

Tabelle 8.25.: Verschiedene Werte der Parameter  $C_{21}, S_{21}$   
(Werte \*  $10^9$ )

	GEM-L2	MERIT-Standard	aus $x_p, y_p$ für Intensiv- kampagne
$C_{21}$	- 1,06	- 0,1	- 0,2
$S_{21}$	- 3,07	+ 1,02	+ 1,4

Tabelle 8.26.: Korrekturen für niedere Harmonische des Geopotentials aus LAGEOS-Daten der MERIT-Intensivkampagne

Koeffizient	Korrektur * $10^9$	
$C_{20}$	+ 0,9	± 2,8
$C_{21}$	+ 0,2	± 0,1
$S_{21}$	- 1,2	± 0,1
$C_{22}$	+ 0,6	± 0,1
$S_{22}$	- 0,3	± 0,2

## 9. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Die vorliegende Arbeit beinhaltet Methoden und Technologien zur Auswertung von Laserentfernungsmessungen zu künstlichen Erdsatelliten für die Bestimmung geodynamischer Parameter. Der sehr komplexen Modellbildung für die dynamischen Auswerteverfahren auf dem geforderten cm-Genauigkeitsniveau ist ein breiter Teil der Arbeit gewidmet. Die durchgeführten Datenanalysen zeigen die hohe Leistungsfähigkeit von POTSDAM-5 sowohl im Parameterumfang als auch in der erzielten Qualität der Lösungen. Anhand verschiedener Variationen in den eingehenden Parametern (z.B. Bahntogenlänge, Satz der zu bestimmenden Unbekannten) konnten die Auswertestrategien optimiert werden. Großer Wert wurde dabei auf die Bestimmung realistischer Fehlermaße gelegt. Die Ergebnisse werden stets am führenden internationalen Stand gemessen.

Die wesentlichen Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Die in POTSDAM-5 verwendete Formulierung der Bewegungsgleichung und das eingesetzte numerische Integrationsverfahren sind in der Lage, die für Spitzenleistungen bei der geodätischen und geodynamischen Parameterbestimmung erforderliche Genauigkeit zu sichern.
- Die relativistischen Störungen in der Satellitenbewegung sollten in Zukunft berücksichtigt werden, um jegliche systematische Beeinflussung von Parametern auszuschalten.
- Die mit dem Bahnmodell POTSDAM-5 erreichten Bahnanpassungen lagen bei Intervallen von 5 bis 30 Tagen im Bereich von 6 bis 12 cm. Hier sowie bei der Bestimmung geodätischer und geodynamischer Parameter sind die wesentlichen genauigkeitsbegrenzenden Faktoren in den Fehlern des Geopotentialmodells sowie in den systematischen Fehlereinflüssen bei der Meßwertgewinnung zu sehen.
- Mit Hilfe von POTSDAM-5 können Ephemeriden für LAGEOS berechnet werden, die über einen Zeitraum von mindestens 6 Monaten ausreichende Qualität haben, um Blindbeobachtungen mit Laserradargeräten zu ermöglichen.

- Anhand von Simulationen wurden umfangreiche Untersuchungen zur Bestimmung der LOVEschen Zahl  $h_2$  durchgeführt, die den Schluß zulassen, daß  $h_2$  auf etwa  $\pm 0,01$  bestimmbar ist. Diese Aussage konnte durch reale Daten aus 21 Monaten bestätigt werden ( $h_2 = 0,598 \pm 0,012$ ). Zusätzlich wurde  $l_2 = 0,092 \pm 0,009$  ermittelt. Weiterhin wurden mit  $k_2 = 0,302 \pm 0,0003$  und  $\hat{C}_{22}^* = 3,28 \pm 0,03 \text{ cm}$ ,  $\epsilon_{22}^* = 319 \pm 0,39^\circ$  ( $M_2$ -Meerestide) erstmalig mit POTSDAM-5 Ergebnisse zu gravitativen Gezeitenparametern erhalten.
- Beiträge zur Bestimmung von Erdrotationsparametern über Polkoordinaten und LOD hinaus wurden erarbeitet. Durch Analyse längerer Bahnbögen konnte eine UT1-Bestimmung realisiert werden, die eine Genauigkeit von  $\pm 0,8 \text{ ms}$  für den Zeitraum der MERIT-Kampagne (400 Tage) und für Perioden kleiner als 60 Tage sogar  $\pm 0,2 \text{ ms}$  lieferte. Die Satellitenverfahren sind für die Ermittlung kurzperiodischer Erdrotationsschwankungen der VLBI-Methode gleichwertig und können in solchen Fällen, in denen Radioteleskope nicht ständig für geodätische Aufgaben eingesetzt werden können, zur Interpolation herangezogen werden. Bei der Nutzung von Laserentfernungsmessungen zu LAGEOS für die Bestimmung kurzperiodischer Nutationsglieder wurde eine Genauigkeit von  $\pm 0,001''$  erreicht.
- Die Programme zur Bestimmung niederer Harmonischer des Geopotentials (2. Grades) wurden realisiert und sind potentiell auf eine beliebige Anzahl von harmonischen Koeffizienten erweiterbar. Hiermit wurden vor allem Korrelationsuntersuchungen, aber auch erste Versuche zur Bestimmung dieser Parameter selbst durchgeführt.

Der Softwarekomplex POTSDAM-5 wird auch in Zukunft eine zentrale Stellung bei allen mit kosmisch-geodätischen Verfahren zu lösenden Aufgaben einnehmen. Er bietet gute Voraussetzungen, neben der Bestimmung von geodätischen Referenzsystemen und Erdrotationsparametern weitere geodynamische Parameter umfassend untersuchen zu können. Dabei wird ein breites Spektrum von Fragestellungen - von plattentektonischen Bewegungen über Gezeitenparameter bis hin zu ausgewählten Harmonischen des Geopotentials - mit Methoden der Satellitengeodäsie zu bearbeiten sein.

Aus dem ständig wachsenden Kenntnisstand auf dem Gebiet der Satellitenbahnmodellierung und dem sich ständig erweiternden

Umfang an zu lösenden Problemen resultiert eine laufende Pflege und Erweiterung des Programmsystems POTSDAM-5. Die Nutzung von POTSDAM-5 für die im Rahmen der internationalen Erdrotationsdienste zu lösenden Aufgaben erfordert insbesondere bei der Realisierung der Referenzsysteme, einschließlich der Berücksichtigung der Plattentektonik, eine Erweiterung der Technologie zur Handhabung des von Jahr zu Jahr steigenden Datenumfangs.

Für viele Phänomene - Gezeiten, Massenverlagerungen im Erdinnern durch postglaziale und andere Effekte - sind Bestimmungen der niederen Harmonischen des Geopotentials notwendig. Es ist daher vorgesehen, in Zukunft zumindest die Harmonischen bis 4. Grades einzubeziehen. Hierzu sind entsprechende Technologien einzusetzen, die eine effektive Lösung der Variationsgleichungen unabhängig von der aufwendigen Integration der Bewegungsgleichung ermöglichen.

Um bei Auswertungen mit höchsten Genauigkeitsansprüchen jede Beeinflussung auch durch kleinste Störungen der Satellitenbahn auszuschließen, wird neben den relativistischen Effekten auch eine Reihe kleinerer gravitativer und nichtgravitativer Störungen zu modellieren sein.



## 10. Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M. und I. Stegun: Pocketbook of mathematical functions. Thun-Frankfurt (Main): Verlag Harri Deutsch, 1984.
- Afonso, G., F. Barlier, C. Berger, F. Mignard und J.J. Walch: Reassessment of the charded and neutral drag of LAGEOS and its geophysical implications. Journ. of Geophys. Res., Washington 90 (1985) B11, S.9381-9398.
- Albrecht, P.: Die numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1979, 193 S.
- Anselmo, L., P. Farinella, A. Milani und A.M. Nobili: Effect of earth-reflected sunlight on the orbit of LAGEOS satellite. Astron. Astrophysics 117 (1983), S. 3-8
- Arnold, K.: Methoden der Satellitengeodäsie. Berlin: Akademie-Verlag, 1970
- Ballani, L.: Dokumentation über die Realisierung von Variationsgleichungen im Programmsystem POTSDAM-5. Zentralinstitut für Physik der Erde, interner Bericht, Potsdam, 1984
- Barthelmes, F., R. Dietrich und G. Gendt: Programmentwicklungen zur Verarbeitung von Dopplermessungen am Zentralinstitut für Physik der Erde. Vermessungstechnik, Berlin 31 (1983) 6, S. 204-205
- Batrakov, Y.A. und Y.E. Helali: Possible changes of the AES orbit caused by a passage through the moons shadow. Earth, Moon and Planets, Dordrecht, Boston 33 (1985) 3, S. 15-218
- Berger, X.: Importance of the coupling effects between earth potential harmonics in the motion of an artificial satellite. Computed and checked solution of this coupling problem. The case of J<sub>7</sub>. COSPAR-IAU-IUTAM, Satellite Dynamics, Symp. Sao Paulo/Brasil, June 19-21, 1974 (Hrsg. Ciacaglia, G.E.O.), Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975, S.111-126
- Blaha, G., G. Hadgigeorge und T. Rooney: Inclusion of tidal parameters in satellite altimetry adjustment model. Marine Geod., 9 (1985) 3, S. 263-290
- Blais, J.A.R.: Geodetic reference systems. Boll. di Geod. e Sci. Affini, Firenze 39 (1980) 1, S. 1-12
- Bock, Y. und S.Y. Zhu: On the establishment and maintenance of a modern conventional terrestrial reference system. Proc. Symp. No. 5 of IAG, Tokyo, May 1982, NOAA Techn. Rep. NOS 95 NGS24, Washington 1982
- Bordovicyna, T.V. und N.A. Šarkovskij: Číslennoe prognosirovanie dviženija vysokich geodeziceskich ISZ. Geodezija i kartografija, Moskau 5 (1983), S. 11-13
- Borza, T., I. Fejes, S. Mihaly, R. Dietrich, G. Gendt und K. Lehmann: The Doppler Baseline Interferometry Experiment /DBLI/. Acta Geod. Geophys. et Montanist., Hung. Acad. Sci., 23(2-4), Budapest 1988, S. 187-198

Bower, D.R. und M.K. Paul: A quasi-geometrical method for investigating tidal displacements of the earth's surface using laser ranging to GEOS 3. Jour. Geophys. Res., Washington 84 (1979) B8, S. 3959-3963

Bronstein, I.N. und K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: Teubner Verlagsges., 1985

Brumberg, V.A.: Reljativistskaja nebesnaja mehanika. Moskau: Verlag Nauka, 1972

Brumberg, V.A.: Relativistic reduction of astronomical measurements and reference frames. Paper IAU Coll. No. 56, Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics, Warschau, 8.-12. Sept. 1980

Bulirsch, R., und J. Stoer: Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. Numerische Mathematik, 8 (1966), S. 1-13

Butcher, J.C.: Implicit RUNGE-KUTTA processes. Math. Comp., 18 (1964), S. 50-64

Carter, W.E., D.S. Robertson und J.R. MacKay: Geodetic Radio Interferometric Surveying: Applications and results. Jour. Geophys. Res., Washington 90 (1985) B6, S. 4577-4587

Cartwright, D.E. und A.C. Edden: Corrected tables of tidal harmonics. Geophys. J.R. Astron. Soc., London 33 (1973), S. 253-264

Cazenave, A. und S. Daillet: Lunar tidal acceleration from earth satellite orbit analysis. Jour. Geophys. Res., Washington 86 (1981) B3, S. 1659-1663

Cesis, M.L.: Vyšislenie traektorij iskusstvennych sputnikov zemli, Stravnenie programm čislennogo integrirovanija. Akad. Nauk Ukr. SSR, Inst. Teor. Fiziki, Preprint ITF-84-91R, Kiew 1984

Cheng, H. und He Miao-fu: A refined analysis of the perturbations on LAGEOS. Paper IUGG, XVIII Gen. Ass., Hamburg, Aug. 1983

Christodoulidis, D.C.: Satellite contributions to tidal studies. Techn. Uni. München, Astr. und Phys. Geod., Mitt. Nr. 147, München 1978

Christodoulidis, D.C., D.E. Smith, S.M. Klosko, M.H. Torrence und P.J. Dunn: A GSFC alternative to the SLR MERIT constants. Proc. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frame, Hrsrg.: Mueller, I.I., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 2, S. 674-699

Ciufolini, I.: Measurement of the LENSE-THRIRRING drag on high-altitude laser-ranged artificial satellites. Physical Review Letters, 56 (1986) No. 4

Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1955

Colombo, O.L.: The global mapping of gravity with two satellites. Netherlands geod. comm., Vol 7, Num. 3, Delft 1984

Cunningham, L.E.: On the computation of spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. *Celestial Mechanics*, Dordrecht 2 (1970), S. 207-216

Dickey, J.O., J.G. Williams, W.G. Melbourne, T.E. Eubanks und X.X. Newhall: Comments and suggested revisions on the MERIT/COTES resolutions. Paper pres. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frame, Ohio, Columbus, Juli 1985

Dietrich, R.: Untersuchungen zur Nutzung künstlicher Ersatelliten für die geoätische Koordinatenbestimmung. Zentralinstitut für Physik der Erde, Dissertation B, Potsdam 1987

Dietrich, R. und G. Gendt: Bestimmung großer Sehnenlängen aus Laserentfernungsmessungen zum Satelliten LAGEOS. *Vermessungstechnik*, Berlin 30 (1982 a) 6, S. 198-200

Dietrich, R. und G. Gendt: Determination of regional networks for geodynamical studies based on satellite laser ranging data. *Nabl. isk. sputn. zemli*, 21 (1982 b) Teil 2, S. 586-594

Dietrich, R. und G. Gendt: An attempt to detect geometrical tidal information using LAGEOS laser ranging data. 5th Int. Symp. "Geod. a. Physics of Earth", Magdeburg 1984, Veröff. Zentralinst. Physik d. Erde, Potsdam, Nr. 81 (1985), Teil 1, S. 77-81

Dietrich, R. und G. Gendt: Erweiterte Modellbildung und Parameterbestimmung bei dynamischen Satellitenmethoden. AdW, Zentralinst. Physik d. Erde, Forschungs- und Entwicklungsbericht, Potsdam, Sept. 1986

Dow, J.M. und L.G. Agrotis: Earth rotation, station coordinates and orbit solutions from LAGEOS during the MERIT Campaign. Proc. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frames. Hrsg.: Mueller, I.I., Dep. geod. Sci., Ohio Sate Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 217-235

Drozyner, A.: System of orbital computations (ORBIT-1), part 2, Improvement of satellite orbits. *Pol. Acad. Nauk, Artif. Satellites*, Warschau 15 (1980) 2, S. 13-18

Eanes, R., B. Schutz und B. Tapley: Earth and ocean tide effects on LAGEOS and STARLETTE. Proc. Ninth Intern. Symp. on Earth Tides, Stuttgart: Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung, 1983, S. 239-249

Emeljanov, N.V.: Problemy primenenija analitičeskoj teorii dviženija ISZ v zadačach geodinamiki i kosmičeskoj geodezii. *Nabl. isk. sputn. zemli*, Prag 23 (1984), S. 399-411

Eubanks, T.M., J.A. Steppe und O.J. Sovers: An analysis and intercomparison of VLBI nutation estimates. Proc. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frames. Hrsg.: Mueller, I.I., Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 326-340

Everhart, E.: Implicit single-sequence methods for integrating orbits. *Celestial Mech.*, Dordrecht 10 (1974) a), S. 35-55

Everhart, E.: An efficient integrator of very high order and accuracy with appendix listing of RADAU. Tech. Report, Denver Res. Inst., Denver, Colorado, 1974 b

Federov, Y.P.: Nutation and forced motion of the earth's pole. Oxford: Pergamon Press, 1963 (Übers. aus dem Russ.)

Fehlberg, E.: Eine Runge-Kutta-Formel 9-ter Ordnung. Z. f. Angew. Math. u. Mech., Berlin 61 (1981) 10, S. 477-486

Fehlberg, E.: Eine RKT-Formel für Differentialgleichungen der Form  $x=f(t,x)$ . Z. f. Angew. Math. u. Mech., Berlin 53 (1983) 6, S. 261-268

Feissel, M. (Hrsg.): Observational results on earth rotation and reference systems. Reports on the MERIT-Cotes Campaign on earth rotation and reference systems, Part III, Paris 1986

Felsentreger, T.L., J.G. Marsh, und R.G. Williamson:  $M_2$  ocean tide parameters and the deceleration of the moon's mean longitude from satellite orbit data. Jour. Geophys. Res., Washington 84 (1979) B9, S. 4675-4679

Gear, C.W.: The automatic integration of ordinary differential equations. Comm. of ACM, Vol 14, Num. 3, März 1971, S. 176-185

Genét, G.: Realisierung eines Inertialsystems für die numerische Integration von Satellitenbahnen. Vermessungstechnik, Berlin 28 (1980) 1, S. 17-19

Genét, G.: Further improvements of the orbital program system POTSDAM-5 and their utilization in geodetic-geodynamic investigations. Nabl. isk. sputn. zemli, Prag 23 (1984), S. 421-428

Genét, G. und R. Dietrich.: On homogeneous global satellite network determination for tectonic motion investigations. Proc. Int. Symp. on Space Techniques for Geodynamics, Sopron, UVR, Juli 1984, S. 110-118

Genét, G. und R. Dietrich: Geometrical tidal effects from IAGEOS laser ranging data. Proc. Tenth Int. Symp. on Earth Tides, Hrsg.: R. Vieira, Cons. Superior de Invest. Cient., Madrid 1985, S. 963-968

Genét, G. und H. Montag: The program POTSDAM-4 for differential improvement of orbital elements and other parameters. Advances in Space Research, COSPAR 1 (1981) 6, S. 43-56

Genét, G. und H. Montag: Orbital computations by means of the "POTSDAM-5" program system and applications. Advances in Space Research, TOULOUSE 1986, im Druck

Genét, G. und N.A. Sorokin: Probleme bei der numerischen Integration von Satellitenbahnen mit hoher Genauigkeit. Vermessungstechnik, Berlin 26 (1978) 9, S. 291-295

Gilbert, F. und A.M. Dziewonski: An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanics from seismic spectra. Phil. Trans R. Soc., London, A 278 (1975), S. 187-269

Goad, C.C. und B.C. Douglas: Lunar tidal acceleration obtained from satellite-derived ocean tide parameters. Jour. Geophys. Res., Washington 83 (1978) B5, S. 2306-2310

Hellings, R.W.: Relativistic effects in astronomical timing measurements. The Astron. Journal, Washington 91 (1986) 3, S.650 ff

He Miaofu: Ocean tidal perturbations on the orbit of the satellite "STARLETTE". Chin. Astron. Astrophys., 8 (1984), S. 113-118

Herring, T.A., B.E. Corey, C.C. Counselman, I.I. Shapiro, A.E.E. Rogers, A.R. Whitney, T.A. Clark, C.A. Knight, C. Ma, J.W. Ryan, B.R. Schupler, N.R. Vandenberg, D.G. Elgered, G. Lundquist, B.O. Rönnäng, J. Chambell und P. Richards: Determination of tidal parameters from VLBI observations. Proc. Ninth Int. Symp. on Earth Tides, Stuttgart: Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung, 1983, S. 205-214

Herring, T.A., C.R. Gwinn und I.I. Shapiro: Geodesy by radio interferometry: Corrections to the IAU 1980 Nutation Series. Hrsg.: I.I. Mueller, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 307 -325

Isaacson, E. und H.B. Keller: Analyse numerischer Verfahren. Leipzig: Edition Leipzig, Verlag für Kunst und Wissenschaft, 1979.

Jacchia, L.G.: Revised static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles. Smith. Astrophys. Obs., Spec. Rep. 332, Cambridge (Mass.) 1971

Kaula, W.M.: Theory of satellite geodesy. Waltham: Blaisdell, 1966

Keller, W.: Zur Bahnmechanik geostationärer Satelliten. TU Dresden Fak. F. Bau-, Wasser- und Forstwesen, Dissertation, Dresden 1984

Kinoshita, H.: Theory of rotation of the rigid earth. Celestial Mech., Dordrecht 15 (1977) S. 227-326

Kozeva, V. und N. Georgiev: Ob učete relativistskich efektov v dviženii IZS. Bulg. Akad. Wiss., Visit geodezija, Sofia 10 (1984) S. 8-12

Krogh, F.T.: Changing stepsize in the integration of differential equations using modified divided differences. Calif. Inst. Techn., JPL, Techn. Memorandum No. 312, Pasadena 1973

Kulikov, D.K.: Integrirovanié, uravnenij dvizenija nebesnoj mehaniki na elektronnych vyiislitelnyh masinach po kvadraturnomu metodu Cowella s avtomatičeskim vyborom sağa. Bull. Inst. Teor. Astr., Leningrad 93 (1960) 10, S. 770-797

- Kulikov, D.K.: Integration of equations of celestial mechanics by Cowell's method with variable intervals. In Dynamics of satellites (Hrsg.: M. Roy), Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag, 1963, S. 123-135
- Lambeck, K., A. Cazenave und G. Balmino: Solid earth and ocean tides estimated from satellite orbit analysis. Reviews of Geophys. and Space physics, 12 (1974) 3, S. 421-434
- Leik, A.: The observability of the Celestial Pole and its nutation. Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Rep. 262, Columbus, Ohio 1977
- Lelgemann, D.: Differential equations for the motion of artificial satellites with special regard to interpolation series of harmonic kernel functions. Manuscripta geod., Berlin-West 4 (1979), S. 1-43
- Lerch, F.J., S.M. Klosko und G.B. Patel: A refined gravity model from LAGEOS (GEM-L2). NASA, GSFC, Techn. Mem. 84986, Greenbelt, Md., Febr. 1983
- Lerch, F.J., S.M. Klosko, C.A. Wagner und G.B. Patel: On the accuracy of recent Goddard gravity models. Jour. Geophys. Res., Washington 90 (1985), B11, S. 9312-9334
- Lieske, J.H., T. Lederle, W. Fricke und B. Morando: Expressions for the precession quantities based upon the IAU(1976) system of astronomical constants. Astron. Astrophysics, 58 (1977), S. 1-16
- Lippold, G. und T. Reiher: Ein Programmpaket zur Lösung von Anfangswertaufgaben für Systeme expliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen. ZfR-Informationen 80.90, Berlin-Adlerhof 1980
- Marini, J.W. und C.W. Murray: Corrections of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees. NASA, GSFC, X-591-73-351, Greenbelt, Md., Nov. 1973
- Martin, C.F., M.H. Torrence und C.W. Misner: Relativistic effects on an earth-orbiting satellite in the barycenter coordinate system. Jour. Geophys. Res., Washington 90 (1985) B11, S. 9403-9410
- Martin, T.V., I.H. Oh, W.F. Eddy und J.A. Kohut: GEODYN system description, Volume I. Wolf Res. and Developm. Group, Riverdale (Maryl.) 1976
- Mazegga, P.:  $M_2$ -model of the global ocean tide derived from SEASAT altimetry. Marine Geod., 9 (1985) 3, S. 335-364
- McClure, P.: Diurnal polar motion. NASA, GSFC, Rep. X-592-73-295, Greenbelt, Md., 1973
- Melbourne, W., R. Anderle, M. Feissel, R. King, D. McCarthy, D. Smith, B. Tapley und R. Vicente: Projekt MERIT Standards. U.S. Nav. Obs., Circ. No. 167, Washington 1983
- Minster, J.B. und T.H. Jordan: Present-day plate motions. Jour. Geophys. Res., Washington 83 (1978) B11, S. 5331-5353
- Montag, H.: Zur Untersuchung des Erdrotationsvektors mit Hilfe von Laserfernungsmessungen zu künstlichen Erdsatelliten. Veröff. Zentralinst. Physik d. Erde, Nr. 80, Potsdam 1984

- Montag, H., G. Gendt, R. Dietrich, W. Korth und K. Kurth: Analyse der Satelliten-Laserentfernungsmessungen des MERIT-Projektes zur Bestimmung präziser Erdrotationsparameter. Veröff. Zentralinst. Physik d. Erde, Nr. 91, Potsdam 1986
- Montag, H., G. Gendt, R. Dietrich und K. Kurth: Investigation of polar motion and length of the day by means of SLR data of the MERIT campaign. Proc. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frames. Hrsg.: I. I. Mueller, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 71-87
- Moore, H.: Comparison of numerical integration techniques for orbital applications. In Lecture Notes in Mathematics, Bd. 362, Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1974, S. 149-166
- Moritz, H.: Concepts in geodetic reference frames. Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Rep. 294, Columbus, Ohio 1979
- Moritz, H.: Theories of nutation and polar motion I, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Rep. 309, Columbus, Ohio 1980
- Moritz, H.: Theories of nutation and polar motion II, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Rep. 318, Columbus, Ohio 1980
- Moritz, H.: Theories of nutation and polar motion III, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Rep. 342, Columbus, Ohio 1980
- Moyer, T.D.: Transformation from proper time on earth to coordinate time in solar system barycentric space-time frame of reference, part 1. Celestial Mech., Dordrecht 23 (1981), S.33-56
- Mueller, I. I., S.Y. Zhu und Y. Bock: Reference frame requirements and the MERIT-Campaign. Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Rep. 329, Columbus, Ohio 1982
- Munc, W.H. und G.J.F. McDonald: The rotation of the earth. Cambridge: University Press, 1960
- Nacozy, P.: Numerical aspects of time elements. Celestial Mech., Dordrecht 14 (1976), S. 129-132
- Nasonova, L.P.: Analiz točnosti opredelenija luno-solnečych vozmuzhenij v analitičeskoj teorii dviženija ISZ Nabl. isk. sputn. zemli, Prag 23 (1984), S.413-419
- Nesterov, V.V.: Obrabotka probnogo rjada nabljudenij ISZ "LAGEOS", vypolnennyh po projektu MERIT. Nabl. isk. sputn. zemli, 21 (1982) Teil 2, S. 473-476, Moskau 1984
- Pavlis, E.C. und I. I. Mueller: The effect of the earth orientation errors in baseline determination. Bull. Geod., Paris 57 (1983), S. 273-282
- Pötschke, K. und P. Seifert: Vergleiche von numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen. TU Dresden, Sekt. Mathematik, Heft 07-26-78, Dresden 1978
- Reigber, C.: LAGRANGESche Störungsgleichungen bezüglich nicht-inertialer Bezugssysteme. Deutsche Geod. Komm., Reihe A, Nr. 79, München 1974

Reigber, C., H. Müller, P. Schwintzer, F.H. Massmann und E.C. Pavlis: MERIT-LAGEOS laser ranging data analysis at SFB78/DGFI. Proc. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frames, Hrsg.: I.I. Mueller, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 88-103

Rubincam, D.P.: LAGEOS orbit decay due to infrared radiation from earth. Jour. Geophys. Res., Washington 92 (1987) B2, S. 1287-1294

Rubincam, D.P. und N.R. Weiss: The orbit of LAGEOS and solar eclipsis. Jour. Geophys. Res., Washington 90 (1985) B11, S. 9399-9402

Rubincam, D.P. und N.R. Weiss: Earth albedo and the orbit of LAGEOS. Celestial Mech., Dordrecht 36 (1986), S. 233-296

Ryan, J.W., T.A. Clark, R.J. Coates, C. Ma, W.T. Wildes, C.R. Gwinn, T.A. Herring, I.I. Shapiro, B.E. Corey, C.C. Counselman, H.F. Hinteregger, A.E.E. Rogers, A.R. Whitney, C.A. Knigth, N.R. Vandenberg, J.C. Pigg, B.R. Schupler und B.O. Rönning: Geodesy by radio interferometry: Determination of baseline vector, earth rotation, and solid earth tide parameters with the MARK I Very Long Baseline Radio Interferometry system. Jour. Geophys. Res., Washington 91 (1986) B2, S. 1985-1946

Schwiderski, E.W.: Global Ocean Tides, Part 1, A detailed hydrodynamical model. U.S. Nav. Surf. Waep. Center, Rep. TR-3866, Dahlgren (Va.) 1978

Schwiderski, E.W.: On charting global ocean tides. Rev. Geophys. Space Phys., 18 (1980), S. 243-268

Seidelman, P.K.: 1980 IAU theory of nutation: Final report of the IAU working group on nutation. Celestial Mech., Dordrecht 27 (1982), S. 79-106

Smith, D.E., D.C. Christodoulidis, M.H. Torrence, S.M. Klosko und P.J. Dunn: Polar motion and length of day determination from satellite laser ranging. Proc. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frames, Hrsg.: I.I. Mueller, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 142-171

Smith, D.E., R. Kolenkiewicz, M.H. Torrence und P.J. Dunn: Geophysical parameters obtained during a decade of LAGEOS tracking. Paper Int. Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and planets, Prag, Sept. 1986

Soffel, M.H.: Eine Notiz zum Radar-Delay-Effect in Entfernungsmessungen zu Satelliten. ZfV 8/1987, Stuttgart, S. 424-427

Stiefel, E.L. und G. Scheifele: Linear and regular celestial mechanics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1971

Tapley, B.D., R.J. Eanes und B.E. Schutz: UT/Center for Space Research, Analysis of earth rotation from LAGEOS SLR data. Proc. Int. Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frames, Hrsg.: I.I. Mueller, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 111-125



Taradij, V.K. und M.L. Cesis: Vyčislenie traektorij iskusstvennyh sputnikov zemli. Postroenie algorithmov i programm metoda Adamsa s peremennym sagom i peremennym porjadkom. Akad. Nauk Ukr. SSR, Inst. Teor. Fisiki, Preprint ITF-84-92R, Kiev 1984

Taradij, V.K. und M.L. Cesis: O vyčislenii traektorij ISZ dlja celej geodinamiki. Kinemat. i fifika nebesnyh tel, 1 (1985), S. 55-60

Urmaev, M.S.: Orbitalnye metody kosmičeskoj geodezii. Moskau: Verlag Nedra, 1981

Van Patten, R.A. und C.W.F. Everitt: A possible experiment with two counter-orbiting drag-free satellites to obtain a new test of Einsteins's general theory of relativity and improved measurements in geodesy. Celestial Mech., Dordrecht 13 (1976), S. 429-447

Velez, V.E., P.J. Cefola, A.C. Long und U.S. Nimitz: Calculation of precision satellite orbits with nonsingular elements (VOP formulation). Lecture Notes in Math., Bd. 362, Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1974, S. 183-206

Velez, V.E.: Stabilization and real world satellite problem. COSPAR-IAU-IUTAM, Satellite Dynamics, Symp. Sao Paulo/Brazil, June 19-21, 1974 (Hrsg.: G.E.O. Giacaglia), Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1975, S. 136-153

Wahr, J.M.: Body tides on an elliptical rotating, elastic, and oceanless earth. Geophys. J. R. Astron. Soc., London 64 (1981), S. 677-703

Williams, J. und J. Dickey: Lunar laser ranging: Geophysical parameters, ephemerides, and modelling. Paper Fifth Annual NASA Geodyn. Progr. Conf. and Crust. Dyn. Proj. Rev., Washington, D.C., 1983

Williams, J.G., J.O. Dickey, W.G. Melbourne und E.M. Standish: Unification of celestial and terrestrial coordinate systems. IUGG, XVIII Gen. Ass. Hamburg, Aug. 1983, Proc. IAG Symp., Ohio 1983, S. 227-261

Williamson, R.G. und J.G. Marsh: STARLETTE geodynamics: The earth's tidal response. Jour. Geophys. Res., Washington 90 (1985) B11, S. 9346-9352

Winkler, G.M.R. und C. van Flandern: Ephemeris time, relativity, and the problem of uniform time in astronomy. The Astron. Journal, Washington 82 (1977) 1

Yatskiv, Y., V. Taradij, N. Mironov, M. Cesis und K. Nurutdinov: On the use of the Kiev geodynamics program complex for analyzing the MERIT laser ranging data. Proc. Int Conf. on Earthrot. and Terr. Ref. Frames, Hrsg.: I.I. Mueller, Dep. geod. Sci., Ohio State Uni., Columbus, Ohio (1985) Teil 1, S. 138-141

Yoder, C.F., J.G. Williams, J.O. Dickey, B.E. Schutz, R.J. Eanes und B.D. Tapley: Secular variation of earth's gravitational harmonic  $J_2$  coefficient from LAGEOS and nontidal acceleration of earth rotation. *Nature*, 303 (1983) 5920, S. 757-762

Zhu, S.Y. und E. Groten: Relativistic effects in SLR. Paper IUGG, XIX. Gen. Ass., Vancouver/Kanada, August 1987

Zhu, S.Y. und I. I. Mueller: Effects of adopting new precession, nutation and equinox corrections on the terrestrial reference frame. *Bull. Geod.*, Paris 57, S. 29-42