

ISSN 0514-8790

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
Forschungsbereich Geo- und Kosmoswissenschaften
ZENTRALINSTITUT FÜR PHYSIK DER ERDE

Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde
Nr. 105

Untersuchungen
zur magnetischen Kern-Mantel-Kopplung
und zu ihrem Einfluß auf die Erdrotation

von
Hans Greiner-Mai

Herausgeber: Der Direktor des Zentralinstituts für Physik der Erde

Als Manuskript gedruckt
Potsdam 1989

III-12-12 Ag 521/519/89

Für die hilfreiche Unterstützung bei der
Anfertigung dieser Arbeit möchte ich
Herrn Dr.-Ing. habil. H. Jochmann meinen
herzlichsten Dank aussprechen.

Zusammenfassung

Die Korrelation zwischen den dekadischen Variationen der Erdrotation und denen des Erdmagnetfeldes wurden mit der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung beschrieben. Dazu wurden auf der Grundlage einer einfachen Rotationsbewegung kernoberflächennaher Schichten gegenüber dem Erdmantel und eines geeigneten Leitfähigkeitsmodells die magnetischen Kopplungsdrehmomente aus dem geomagnetischen Feld berechnet und ihr Einfluß auf die Mantelrotation studiert. Zur Berechnung des Kernbewegungsparameters, der Drehmomente und zur Interpretation des Verhaltens beider Größen wurden kinematische Modelle verwendet. Für den Zeitverlauf der berechneten Werte und die in ihm festgestellte 30jährige Periode wurden die Modellparameter eines starr rotierenden magnetisch gekoppelten Kern-Mantel-Systems ermittelt und diskutiert. Das Verhalten der mit diesem Modell nicht mehr beschreibbaren Perioden um 20 a und 60 a wurde soweit analysiert, daß Schlußfolgerungen für eine Fortführung der Untersuchungen mit dynamischen Modellen abgeleitet wurden.

Summary

The obvious correlations between the decade variations of the Earth's rotation and the Earth's magnetic field were described by magnetic core-mantle coupling. For this end, the magnetic core-mantle coupling torques were computed for a simple rigid rotation of an upper core layer with respect to the Earth's mantle and a certain model of the electroconductivity of the mantle. The influence of these torques on the mantle's rotation was studied. Kinematic models were used to compute the parameters of the core motions, the torques and for the interpretation of the behaviour of these quantities. The parameters of a rigid rotating and coupled core-mantle system were estimated for both, the time behaviour and the 30 years periods stated within the time series of the computed quantities. The periods of about 20 years and 60 years which could not be described by this model were analysed with regard to a future continuation of the

investigations by dynamic models.

Резюме

С помощью электромагнитного взаимодействия ядра с мантией описывается корреляция между вековыми вариациями вращения Земли и геомагнитного поля. На основе модели простого относительного вращения между поверхностными слоями ядра и мантией Земли и на основе подходящей модели электропроводности мантии были вычислены магнитные моменты вращения взаимодействия ядра с мантией. Исследовалось влияние магнитных моментов вращения на вращение мантии. Использовались кинематические модели для вычисления соответствующих параметров движения ядра, электромагнитных моментов вращения и для интерпретации обеих величин. Определены временные параметры связанной системы ядра и мантии и ее параметры для 30-летнего периода вычисленных величин. Обсуждались эти параметры, а также периоды около 20 и 60 лет, которые невозможно было описать моделью вращения твердых тел. Намечены направления продолжения исследований на основе динамической модели.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Verzeichnis häufig verwendeter Symbole und Indizes	I
1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen für die Berechnung der Kopplungsdrehmomente der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung	10
2.1. Das Leitfähigkeitsmodell des Mantels und das Bewegungsmodell des Kerns	12
2.2. Die Lösungen der Induktionsgleichung des Mantels	16
2.2.1. Bemerkungen zum allgemeinen Lösungsweg	16
2.2.2. Eine iterative Methode zur genäherten Lösung der Induktionsgleichung des Mantels	21
2.3. Die Berechnung der magnetischen Kopplungsdrehmomente für ein allgemeines Geschwindigkeitsfeld der kernoberflächennahen Bewegungen	27
2.4. Die Berechnung der toroidalen Kopplungsdrehmomente für das Modell der starren Rotation einer Kernoberflächenschicht	33
3. Die Berechnung der Parameter des Geschwindigkeitsfeldes an der Kernoberfläche	36
4. Numerische Untersuchungen zum Verhalten der Kopplungsdrehmomente und Rotationsgeschwindigkeiten	43
4.1. Die Ausgangsdaten und ihre Verarbeitung	43
4.2. Bemerkungen zu den Auswertemethoden und Fehlergrenzen	45
5. Die Ergebnisse der Berechnung der Kerndriftgeschwindigkeit und Kopplungsdrehmomente	48
5.1. Die Größenordnung und das Zeitverhalten der Rotationsgeschwindigkeiten und Drehmomente	48
5.2. Das Periodenverhalten der Rotationsgeschwindigkeiten und Drehmomente	51
6. Theoretische Grundlagen für die Interpretation der Ergebnisse mit einem einfachen Bewegungsmodell des gekoppelten Kern-Mantel-Systems	55

	Seite
6.1. Die Bewegungsgleichungen des starr rotierenden gekoppelten Kern-Mantel-Systems	56
6.2. Eine Methode zur Bestimmung des beschleunigenden Drehmoments	60
6.3. Zur Interpretation des Verhaltens der Kerndriftgeschwindigkeit mit dem Modell einer starren Rotation	63
7. Interpretation der Ergebnisse	66
7.1. Folgerungen aus dem Drehimpulserhaltungssatz und dem Zeitverhalten der Rotationsgeschwindigkeiten und Drehmomente	67
7.2. Bestimmung der Modellparameter für die 30a-Periode	73
7.3. Diskussion der Möglichkeiten eines Außenfeld-einflusses im Periodenbereich um 22a	80
7.4. Die Periodenstruktur der Säkularvariationskoeffizienten und ihr Einfluß auf die Berechnung der Kerndriftgeschwindigkeit	87
7.5. Persistenzverhalten und aperiodische Anteile	93
8. Schlußfolgerungen für zukünftige Arbeiten	100
9. Zusammenfassung	104
Literaturverzeichnis	108
7 Tabellen	
9 Abbildungen	

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole und Indizes

$\underline{A}, \underline{a}$	- Vektoren A und a (Vektoren werden durch Unterstreichen gekennzeichnet)
$\underline{a} \times \underline{b}$	- Vektor- oder Kreuzprodukt
\underline{B}/P	- Vektor/Skala des magnetischen Flusses
C	- Hauptträgheitsmoment
d	- Dicke der Kugelschicht
\underline{E}	- Vektor der elektrischen Feldstärke
\underline{e}	- Einheitsvektor
g_n^m, h_n^m	- Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung des Potentials des Erdmagnetfeldes
\dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m	- Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung der Säkularvariation des Potentials des Erdmagnetfeldes
C_n^m, F_n^m	- Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung für den Innenfeldanteil des Potentials des Erdmagnetfeldes
γ_n^m, σ_n^m	- Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung für den Außenfeldanteil des Potentials des Erdmagnetfeldes
i	- komplexe Zahl $\sqrt{-1}$
K	- Kopplungskonstante des retardierenden Drehmoments der LORENTZkräfte
\underline{L}	- Vektor des Drehmoments der LORENTZkräfte, Kopplungsdrehmoment
P_n^m, Y_n^m	- Kugelfunktionen, Kugelflächenfunktionen
P, Q	- erzeugende Skalare des poloidalen/toroidalen Geschwindigkeitsfeldes
S, T	- erzeugende Skalare des poloidalen/toroidalen Magnetfeldes
$p_1^k/q_1^k/S_1^k/T_1^k$	- Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung von P/Q/S/T nach Kugelflächenfunktionen
T	- Periodenlänge (im Text eindeutig unterscheidbar)
$\left. \begin{matrix} R_c \\ R_s \\ R_E \end{matrix} \right\}$	- mittlerer Radius $\left\{ \begin{matrix} \text{des Kerns} \\ \text{der leitfähigen Mantelschale} \\ \text{der Erde} \end{matrix} \right.$

II

R_m/R_k	- magnetische REYNOLDSzahl des Mantels/Kerns	
S_c	- Kern-Mantel-Fläche	
t	- Zeit	
\underline{u}, u	- Vektor/Skala des Geschwindigkeitsfeldes	
V_A	- ALFVENwellengeschwindigkeit	
W	- ein erzeugender Skalar des Feldes ($\underline{u} \times \underline{B}$)	
\underline{r}/r	- Radiusvektor/Radius	
α	- Parameter des Leitfähigkeitsmodells	
β	- Abklingkonstante	
\int_{ik}	- KRONECKERSymbol	
ϑ	- Kugelkoordinate (Cobreite)	
φ	- Kugelkoordinate (Länge) oder Phasenwinkel	
\mathcal{D}	- magnetische Diffusionskonstante	
Δ	- Variation oder LAPLACEoperator (je nach Zusammenhang)	
\mathcal{L}_n^m	- SCHMIDTscher Normierungsfaktor	
μ	- Permeabilität	
ν	- Frequenz	
ω_m	- } Rotationsgeschwindigkeit {	des Mantels einer Kernschicht einer Kernschicht, aus dem Dipolfeld abgeleitet
ω		
ω_D		
ω^*	- Geschwindigkeit der starren Rotation des Gesamtkerns	
$\tilde{\omega}$	- Flächenelement der Einheitskugel	
$\Delta\omega^{ma}$	- vom retardierenden LORENTZdrehmoment induzierte Mantelrotationsgeschwindigkeitsänderung	
$\Delta\bar{\omega}$	- Differenzrotationsgeschwindigkeit zwischen $\Delta\omega_m$ und $\Delta\omega^{ma}$	
$\sigma_c / \sigma_m / \sigma_A$	- Leitfähigkeit des Kerns/inneren Mantels/äußeren Mantels	
$\tilde{\sigma}$	- Leitfähigkeit des Mantels an der Kern-Mantel-Grenze	
Σ	- Summationszeichen	
$\tau_2, \tau_{0,n}$	- Zeitkonstanten des Magnetfeldes im Mantel	
τ_A	- ALFVENwellenzeitkonstante	

III

- τ_I, τ_c - Zeitkonstanten der Kern-Mantel-Kopplung
 $\phi^{(o)}$ - Potentialfunktion des geomagnetischen Potentialfeldes
 ξ_i - Koeffizienten der Entwicklung von $\omega(\lambda)$ nach LEGENDRESchen Polynomen

Indizes

- m t k i - unten Grad, oben Ordnung der Kugelfunktionsentwicklungen
 n s l j
 mech - mechanisch
 acc - beschleunigend
 t, p - als unterer Index: toroidal, poloidal
 x, y, z - x-, y- und z-Komponente im geozentrischen Koordinatensystem
 +, - - als oberer Index: Außenseite, Innenseite einer geschlossenen Fläche
 m, c, D - Mantel, Kern (außer R_k), Dipol

Einheiten

- G - Gauß
 nT - Nanotesla
 Ω m - Ohmmeter
 Nm - Newtonmeter
 a, s - Jahr, Sekunde

Abkürzungen

- grad_H - horizontaler Gradient ($\text{grad}_H = \text{grad} - e_r \cdot \frac{\partial}{\partial r}$)
 div_H - horizontale Divergenz ($\text{div}_H u = \text{div} u - \frac{1}{r^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right]$)
 Gln. - Gleichung
 i. a. - im allgemeinen
 s. a. - siehe auch

1. Einleitung

Zweck der Behandlung der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung

Für die Erregung der dekadischen Fluktuationen der Erdrotation im Periodenbereich von 10 a bis 100 a gibt es bis heute keine befriedigende theoretische Erklärung (JOCHMANN /27/,...). Die bekannten Vorgänge der Meteorologie, Hydrologie und Gezeiten sind zu ineffektive Prozesse, um die aus den Beobachtungen der relativen Tageslänge (l.o.d.) ermittelten Amplituden zu erzeugen. Ein Vergleich der Variationen des geomagnetischen Feldes mit jenen der Erdrotation und Polbewegung (JOCHMANN /32/, LUCKE et al. /39/, ...) legt die Vermutung nahe, daß die Prozesse im Erdkern einen Einfluß auf das Rotationsverhalten der Erde haben. Die beobachteten Korrelationen zwischen den Variationen des Magnetfeldes und denen der Erdrotation können einerseits der Indikatorwirkung des Magnetfeldes bezüglich solcher Prozesse im fluiden Erdkern und andererseits einer direkten Beeinflussung der Mantelrotation durch die Wirkung des Magnetfeldes auf leitfähige Teile des Mantels zugeschrieben werden. Die Entscheidung darüber hängt wesentlich von der Art und Stärke des entsprechenden Übertragungsmechanismus ab. Die heutzutage als wahrscheinlich angesehenen Hypothesen zu diesen Übertragungsmechanismus sind die topografische und magnetische Kern-Mantel-Kopplung (CUPAL /15/).

Die topografische Kopplung setzt geometrische Unregelmäßigkeiten der Unterfläche des Mantels voraus, die man sich als Kontinent- oder Gebirgsstruktur der Mantelunterfläche vorstellen kann. Ein Vorbeiströmen der fluiden Materie des äußeren Kerns an diesen Unregelmäßigkeiten würde zu mechanischen Kräften auf den Mantel führen, die seinen Bewegungszustand ändern. Über das vertikale und horizontale Ausmaß dieser topografischen Strukturelemente gibt es bisher nur sehr ungenaue Informationen aus geophysikalischen Messungen. Diese Art der Kopplung wird in der vorgelegten Arbeit nicht behandelt.

Das Auftreten gleicher Perioden um 10 a, 20 a, 30 a und 60 a im Rotationsverhalten der Erde und in den Variationen des geomagnetischen Feldes an der Erdoberfläche (BRAGINSKIJ /5/, /7/;

BRAGINSKIJ und FIŠMAN /9/; RIVIN /46/; ...) läßt vermuten, daß eine direkte physikalische Beziehung zwischen dem Magnetfeld und der Mantelbewegung besteht. Eine solche Beziehung wird mit der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung möglich, wenn die Leitfähigkeit des unteren Mantels verschieden von Null angenommen wird. Diese Annahme ist nach heutigem Kenntnisstand begründet (BULLARD /13/, ROCHESTER /47/, MC DONALD /40/, BRAGINSKIJ und FISMAN /8/, BENTON und WHALER /3/, ...). Die elektromagnetische Kopplung von Kern und Mantel führt zu einer gegenseitigen Beeinflussung der Bewegungen beider Körper. Wenn man den Kern als starr rotierenden, mechanisch frei gegen den Mantel beweglichen Körper auffaßt, dann läßt sich die Wirkung der für das Magnetfeld ermittelten LORENTZdrehmomente vollständig berechnen. Diese LORENTZdrehmomente werden im Zusammenhang mit dem Kopplungsproblem auch (magnetische) Kopplungsdrehmomente genannt. Um die Bewegungsgleichung zweier gekoppelter starr um eine gemeinsame Achse im Magnetfeld rotierender Körper benutzen zu können, muß für die praktische Berechnung zunächst die Frage nach einem geeigneten Parameter der Kernrotation beantwortet werden. Seine Werte sollten mit Hilfe einer geophysikalischen Größe ermittelbar sein. Dafür eignet sich vorerst nur das Magnetfeld selbst.

Da der Kern aus hochleitfähiger Materie besteht, muß sich eine Relativrotation des Kerns gegenüber dem Mantel in einer globalen Rotation des geomagnetischen Feldes gegenüber der Erdoberfläche äußern, die beobachtbar ist. Dies folgt aus der Theorie der Feldmitnahme in bewegten leitfähigen Materialien (z.B. MOFFATT /44/), in englischsprachlicher Literatur auch frozen-field-theory genannt. Eine solche globale Felddrehung gegenüber dem Mantel ist wegen ihrer dominierenden Westrichtung i.a. als Westdrift des geomagnetischen Feldes bekannt (z.B. KAUTZLEBEN und WEBERS /37/). Der umgekehrte Schluß von einer im Feld festgestellten Drift seiner Strukturen auf eine mechanische Driftbewegung des Kerns ist nicht eindeutig. Die bekannten Dynamomodelle von KRAUSE und RÄDLER /38/ und CUPAL /14/ erzeugen ebenfalls Driften des Dynamofeldes relativ zur Kernoberfläche. Diese Driften sind jedoch stationär, so daß sich die Frage nach den dekadischen Variationen dieser Größe

damit nicht beantworten läßt. Mit Hilfe der frozen-field-theory (BACKUS /1/) besteht die Möglichkeit, Schätzwerte über eine der Felddrehung äquivalente Kernrotation aus dem Verhalten des geomagnetischen Feldes zu errechnen und sie mit der Mantelrotation zu vergleichen. Es ist möglich, daß ein solcher Vergleich eine Beziehung beider Größen ausweist, die mit dem Drehimpulserhaltungssatz konsistent ist. Damit könnte sowohl der Äquivalenzcharakter dieses Bewegungsmodells eingeschränkt als auch geprüft werden, ob die Behandlung des Kopplungsproblems mit diesem groben Modell sinnvoll ist.

Die frozen-field-theory liefert indessen nur die Randwerte des Geschwindigkeitsfeldes fluider Bewegungen an der Kernoberfläche. Inwieweit diese Randwerte einer mittleren Bewegung des gesamten Kerns, des Außenkerns oder nur dünnen Oberflächenschichten zuordenbar sind, läßt sich anhand der Magnetfeldstruktur nicht eindeutig entscheiden. Daher lassen sich diese Schätzwerte zur Kerndriftgeschwindigkeit vorerst nur als Parameter einer mittleren Rotationsbewegung jener äußeren Kernschichten gegen den Mantel interpretieren, in denen die Feldvariationen des betrachteten Periodenbereiches entstehen. In diesem Fall muß der Drehimpulsaustausch zwischen einer solchen Schicht und dem Mantel stattfinden (ROCHESTER /47/, VESTINE und KAHLE /58/, ROBERTS /51/, ...).

Die Berechnung der Kerndriftgeschwindigkeit an der Stelle der Kernoberfläche wurde im Rahmen der vorgelegten Arbeit durchgeführt und von GREINER-MAI /21/ veröffentlicht. Mit dieser Arbeit wurde zweierlei erreicht: Es wurden entscheidende Argumente für die Behandlung des Kopplungsproblems gefunden und der Parameter des für die Ermittlung der Kopplungsmomente notwendigen Bewegungsmodelles, die Driftgeschwindigkeit kernoberflächennaher Schichten berechnet. Ein ähnlicher Verlauf der Kerndriftgeschwindigkeit wurde erstmals von STIX und ROBERTS /55/ ermittelt, jedoch als Nebenergebnis nicht weiter ausgewertet. Die obige Arbeit /21/ enthält demgegenüber die Ausdehnung der Untersuchungen auf die aus dem Dipolfeld abgeleitete Driftgeschwindigkeit, den Vergleich der beiden Driftgeschwindigkeiten untereinander und mit der Mantelrotationsgeschwindigkeit und die Ermittlung und den Vergleich der Spektren dieser drei Größen. Die Ergebnisse ließen die wei-

tere Behandlung der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung auf der Grundlage dieses Driftmodells aussichtsreich erscheinen. Insbesondere spielte die Feststellung einer signifikanten Periode um 30 a im Verlauf der Kerndriftgeschwindigkeit und der Rotationsgeschwindigkeit des Mantels die ausschlaggebende Rolle. Aus den genannten Betrachtungen wurde folgende Zielstellung für die vorliegende Arbeit abgeleitet:

Zielstellung

Auf der Grundlage des Modells der Drift einer kernoberflächen-nahen Schicht relativ zum Erdmantel und eines geeigneten Leitfähigkeitsgesetzes des Mantels sollten die magnetischen Kopplungsdrehmomente des beobachteten geomagnetischen Feldes berechnet und ihr Einfluß auf die Mantelrotation studiert werden. Es sollte geprüft werden, ob sich für die Modellierung des Zusammenhanges zwischen den Magnetfeldvariationen und denen der Erdrotation das Modell einer starren Relativrotation zwischen Kern und Mantel eignet, wobei den periodischen Variationen beider Größen besondere Aufmerksamkeit zu schenken ist. Aus den Differenzen zwischen den vom beobachteten Magnetfeld bedingten Variationen der Mantelrotation und den tatsächlich beobachteten sollten Aussagen zur Größe jener weiteren Drehmomente abgeleitet werden, die vom Kern ausgehend den Mantel beeinflussen, jedoch keiner Beobachtung zugänglich sind.

Zur Wirkungsweise der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung

Bei der Behandlung der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung wird davon ausgegangen, daß im Erdkern ein Dynamoprozeß stattfindet, der ein Magnetfeld erzeugt. Dieses Magnetfeld überschreitet die Kern-Mantel-Grenze, durchdringt den Erdmantel und wird an der Erdoberfläche beobachtbar. Bezüglich der theoretischen Behandlung des Dynamoprozesses und ihrer Ergebnisse wird auf die Monografien von KRAUSE und RÄDLER /38/ und MOFFATT /44/ verwiesen. Die bisher bekannten Dynamomodelle erzeugen Feldvariationen mit Perioden von mehr als 10^3 a (BRAGINSKIJ /6/, ...) oder stationäre Felder, die in der Lage sind, die hochleitfähigen äußeren Schichten des Erdkerns und den Mantel zu durchdringen.

Die Feldvariationen von weniger als 100 a können daher weder von einem Dynamoprozeß herrühren, noch aus tieferen Schichten des Kerns hervordringen. Sie würden von den hochleitfähigen äußeren Kernschichten zu stark gedämpft. Nach dem heutigen Erkenntnisstand entstehen solche Variationen erst in den äußeren Kernschichten nahe der Kern-Mantel-Grenze durch die Wechselwirkung des bewegten leitfähigen Kernmaterials mit dem stationären oder langperiodischen Dynamofeld. Diese Hypothese wird hier benutzt, um in umgekehrter Weise Schätzwerte zur Größe der Bewegung der Kernmaterie nahe der Kernoberfläche aus den Feldvariationen an der Kern-Mantel-Grenze zu berechnen.

Bekanntlich lassen sich Feldvektoren in einen poloidalen und toroidalen Anteil aufspalten (KRAUSE und RÄDLER /38/, MOFFATT /44/, ...). Eine vollständige Darstellung der Komponenten des Magnetfeldvektors in Kugelkoordinaten und in dieser Weise ist z.B. bei SMYLLIE /53/ gegeben. Das poloidale Feld hat die Eigenschaft, die Grenzen zwischen Leiter und Nichtleiter stetig zu überschreiten und im Nichtleiter als magnetisches Potentialfeld weiterzuexistieren. Das toroidale Feld dagegen verschwindet außerhalb von Leitern, weswegen es nicht beobachtbar ist. Diesen Eigenschaften zufolge ist das geomagnetische Feld an der Erdoberfläche poloidaler Natur. Seine Raum-Zeit-Struktur ist, abgesehen von den hier nicht betrachteten Einflüssen der Kruste und Atmosphäre, durch drei Prozesse bedingt: seine Erzeugung durch den Geodynamo, seine Veränderungen durch die kernoberflächennahen Bewegungen des fluiden Kernmaterials und seine Schwächung infolge des Durchdringens leitfähiger Schichten des Erdmantels. Die Feldschwächung durch den Mantel läßt sich bei Kenntnis der Leitfähigkeitsverteilung des Mantels theoretisch berechnen. Mittels der Lösungen der MAXWELLGleichungen des Mantels ist es dann möglich, das poloidale Feld an der Kern-Mantel-Grenze und im Mantel in Abhängigkeit von den praktisch ermittelten Feldwerten an der Erdoberfläche zu berechnen. Durch die Zeitvariationen dieses Feldes in den leitfähigen Mantelschichten werden Ströme in den Mantel induziert. Die Wechselwirkung des ursprünglichen poloidalen Feldes im Mantel mit diesen Strömen führt zu LORENTZkräften und -drehmomenten, die auf die Mantelbewegung einwirken. Diese Drehmomente werden hier

poloidale Kopplungsdrehmomente genannt.

Da die merklich leitfähigen Mantelschichten ca. 1000 km unter der Erdoberfläche zu Ende sind, ist das toroidale Magnetfeld der Erde keiner direkten Messung zugänglich. Seine Existenz ist für die Erde bisher nur durch die Sätze der Magneto-hydrodynamik und Dynamotheorie begründet. Bei Kenntnis der Randwerte des Geschwindigkeitsfeldes an der Kernoberfläche ist es jedoch möglich, den Randwert des toroidalen Feldes an der Kern-Mantel-Grenze zu berechnen, der durch Wechselwirkung des poloidalen Feldes mit den kernoberflächennahen Bewegungen entsteht. Mit Hilfe der Lösungen der MAXWELLGleichungen des Mantels kann man dann denjenigen Teil des toroidalen Feldes in den leitfähigen Schichten des Mantels berechnen, der durch diesen Randwert bedingt ist. Die dieses toroidale Feld verursachenden Ströme entstehen aus der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $\underline{u} \times \underline{E}$, die stetig in den leitfähigen Mantel übergeht. Für die Berechnung des toroidalen Feldes wird in der vorgelegten Arbeit nur der Potentialanteil dieser elektrischen Feldstärke verwendet. Das entspricht jener quasistationären Näherung, in der die Zeitvariationen des toroidalen Feldes jenen von \underline{u} allein zugeschrieben werden. Auf den Mantel wirkt demzufolge ein weiteres Drehmoment infolge von LORENTZkräften, das nachfolgend toroidales Kopplungsdrehmoment genannt wird. Da im Falle dekadischer Variationen beide im Mantel entstehenden sekundären Strömssysteme der Wechselwirkung des Dynamofeldes mit der kernoberflächennahen Bewegung entspringen, versuchen sie gemäß der LENZschen Regel der Ursache ihres Entstehens entgegenzuwirken, indem sie den Bewegungszustand des Mantels und der Kernmaterie so verändern, daß sich die Bewegungen beider Komponenten im Sinne eines Drehmomentgleichgewichtes aneinander anpassen. Infolgedessen sind die Änderungen der Mantelrotationsgeschwindigkeit und der Kerndriftgeschwindigkeit miteinander gekoppelt. Im Falle eines komplizierteren Systems fluider Bewegungen im oberen Kern erfolgt die Kopplung mit dem Geschwindigkeitsfeld dieses Systems.

Der allgemeine Formalismus zur Berechnung des poloidalen Feldes und des erwähnten Teiles des toroidalen für ein allgemeines Geschwindigkeitsfeld des Kerns wurde von GREINER-MAI

/20/ aufgestellt. Diese Arbeit enthält auch die analytischen Lösungen der Induktionsgleichung des Mantels für periodisch veränderliche Felder und einige spezielle Leitfähigkeitsmodelle des Mantels. Weiterhin wird dort gezeigt, wie der Potentialanteil $w^{(uB)}$ von $\underline{u} \times \underline{B}$ in die Berechnung der Randwerte des toroidalen Feldes eingeht. Ausführungen über die analytische und numerische Berechnung der beiden genannten Arten des LORENTZ-drehmomentes sowie Aussagen über deren periodische Anteile findet man bei GREINER-MAI /22/. In den nachfolgenden Kapiteln werden die Ergebnisse dieser beiden Arbeiten benutzt und durch wesentliche Details und Ableitungen ergänzt. Eine Interpretation dieser Ergebnisse erfolgt im Rahmen der vorgelegten Arbeit.

Die Aufzählung der o.g. Drehmomente ist nicht vollständig. Abgesehen von den Drehmomenten durch die topografische Kern-Mantel-Kopplung fehlen die LORENTZdrehmomente,

- die sich aus kernoberflächennahen Bewegungen ergeben, die in dem benutzten Driftmodell nicht berücksichtigt sind
- die sich aus der Wechselwirkung der kernoberflächennahen Bewegungen mit dem toroidalen Dynamofeld ergeben und
- die dem toroidalen Dynamofeld, das bei nicht verschwindender Mantelleitfähigkeit ebenfalls in den Mantel eindringt, direkt entspringen.

Die durch solche Felder verursachten konstanten Anteile und linearen Trends in den Drehmomenten werden bei der Auswertung der Ergebnisse infolge der Trendkorrektur eliminiert. Die Resultante der anderen Drehmomente wird auf inversem Wege wie folgt bestimmt. Die magnetischen Kopplungsdrehmomente sind Bestandteil der Erregerfunktion der Erdrotationsgleichung. Wenn man die aus dem beobachteten Teil des Magnetfeldes berechneten LORENTZ-drehmomente allein als Erregerfunktion benutzt, erhält man eine Variation der Mantelrotation, die der Wirkung des poloidalen Magnetfeldes entspricht. Die Resultante der nicht berücksichtigten Drehmomente läßt sich dann aus der Differenz zwischen den errechneten und beobachteten Werten der Variationen der Mantelrotationsgeschwindigkeit ermitteln. Die Größe und das Zeitverhalten der unbekanntenen Drehmomente lassen Schlüsse auf die Prozesse im Erdkern zu und bilden die Eingangsgrößen für

die numerische Behandlung erweiterter Modelle der Prozesse im Erdkern in fortführenden Arbeiten.

Vergleich mit den Ergebnissen aus der Literatur

Nach einer Reihe von Arbeiten, die die Kern-Mantel-Kopplung als eine aussichtsreiche Erklärung für den Zusammenhang zwischen den Magnetfeldvariationen und denen der Erdrotation anhand stichprobenhaften Datenmaterials bewiesen (BULLARD /12/, /13/; ROCHESTER /47/, /49/; ROCHESTER und SMYLLIE /50/; BRAGINSKIJ und FIŠMAN /8/; WATANABE und YUKUTAKE /62/; YUKUTAKE /63/; ...), paßte STIX /54/ 1982 die axialen magnetischen Kopplungsdrehmomente durch Variation der Parameter des Leitfähigkeitsmodells des Mantels an die Größenordnung der für die Erzeugung der Variationen der relativen Tageslänge erforderlichen Drehmomente an. Von STIX und ROBERTS /55/ wurde 1984 erstmals eine Zeitreihe der axialen Kopplungsdrehmomente von 1903.5 bis 1975.5 auf der Basis dieses Leitfähigkeitsmodells und fluider zonaler Kernbewegungen berechnet. Diese zuletzt genannte Arbeit war richtungweisend für die hier dargestellten Untersuchungen und ist für die Kennzeichnung des internationalen Standes am besten geeignet. Von STIX und ROBERTS /55/ wurden das Leitfähigkeitsmodell, das Iterationsverfahren zur Lösung der Induktionsgleichung des Mantels und die Einteilung des magnetischen Kopplungsdrehmomentes in einen poloidalen und toroidalen Anteil übernommen. Der Formalismus zur Berechnung der LORENTZdrehmomente wurde im Vergleich zu dieser Arbeit theoretisch in zwei Punkten erweitert:

- Die theoretische Ableitung der Formeln für das Kopplungsdrehmoment wurde für alle Drehmomentkomponenten (axiale, äquatoriale) und für ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld des Kerns ausgeführt (Kap. 2.3.).
- Für das verwendete Modell der Kerndriftbewegung wurden die äquatorialen Komponenten des LORENTZdrehmomentes in Abhängigkeit von den Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung des geomagnetischen Potentialfeldes analytisch dargestellt. STIX und ROBERTS haben die axiale Komponente des Kopplungsdrehmomentes berechnet und dem Verlauf des aus l.o.d.-Werten ermittelten mechanischen Drehmoments gegenübergestellt. Da von o.g.

Autoren ein zonales Geschwindigkeitsfeld benutzt wurde, ist die nullte Ordnung der Entwicklung dieses Feldes nach LEGENDRESohen Polynomen - die starre Rotation - in ihren Ergebnissen mit einbegriffen. Insofern ist das Ergebnis dieser Autoren bezüglich des axialen Kopplungsdrehmomentes von allgemeinerer Natur. Die Verwendung der starren Rotation einer äußeren Kernschicht als Bewegungsmodell bedeutet daher zunächst eine Einschränkung gegenüber dieser Arbeit. Diese Einschränkung ist aus zweierlei Gründen aber kein Rückschritt: (1) Sie wurde u.a. auch aufgrund der Aussagen dieser Autoren gemacht, daß man mit diesem Modell bereits die wesentlichen Charakteristika der Kopplungsdrehmomente erfaßt. (2) Das Modell der Kerndriftbewegung bietet den Vorteil, das einfachste Bewegungsmodell der Erde unter Berücksichtigung des Erdkerns und der magnetischen Kopplung bis zur analytischen Lösung durchzurechnen. Damit war es möglich, andere freie Parameter, wie die Dicke der am Drehimpulsaustausch beteiligten Schicht des oberen Kerns zu ermitteln.

Die vorliegende numerische Behandlung des Kopplungsproblems lieferte eine Reihe neuer Ergebnisse. Diese sind:

- eine Zeitreihe der äquatorialen Komponenten der Kopplungsdrehmomente, die Aussagen zum Einfluß des Magnetfeldes auf die Polbewegung zuläßt
- die Hauptperioden der globalen Größen (Rotationsgeschwindigkeiten, Drehmomente), die eine Behandlung periodischer Anregungen der Erdrotationsschwankungen ermöglichen
- Aussagen zu den Größenrelationen der Komponenten des Kopplungsdrehmomentes, die sich auf eine lange Zeitreihe stützen
- die Berechnung der Kopplungskonstanten K des Rotationsproblems und der Beweis ihrer Konstanz im dekadischen Periodenbereich.

Über die Relationen der Drehmomentkomponenten gab es bisher nur grobe, aus wenigen Felddarstellungen abgeleitete, Schätzungen von ROCHESTER und SMYLLIE /50/, die durch die hier gewonnenen Ergebnisse präzisiert und gesichert werden. Die Kopplungskonstante wurde bisher nur theoretisch geschätzt (ROBERTS /51/). Die Aussage zu ihrer Zeitkonstanz im betrachteten dekadischen Periodenbereich ist für die mechanische Behandlung des Kopplungsproblems sehr wichtig.

Schließlich stellten die Ermittlung der Amplitude eines unbekanntes periodischen Drehmoments für die 30a-Periode und das dafür benutzte Verfahren eine Ausdehnung des Vorschlages von STIX und ROBERTS /55/ auf periodische Variationen dar, aus der Differenz zwischen den LORENTZdrehmomenten und den aus den 1.-o.o.d.-Werten ermittelten Drehmomenten unbekanntes toroidale Kernfelder zu ermitteln.

Die Herkunft der periodischen Variationen des Magnetfeldes ist ein vieldiskutiertes Problem (s. BRAGINSKIJ /7/). Bei der Behandlung der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung wurden diese Variationen als gegeben vorausgesetzt. Es steht jedoch außer Zweifel, daß solche Ergebnisse, wie die zur Periodenstruktur der Säkularvariation, Kerndriftgeschwindigkeit und zu den LORENTZdrehmomenten einen Beitrag zur Klärung dieses Problems geben können. Die in dieser Arbeit berechneten Drehmomente der LORENTZkräfte sind auch ein Maß für die Stärke der Rückwirkungen des Magnetfeldes auf die kernoberflächennahen Bewegungen. Sie können damit als Bestandteil der Dynamik der Säkularvariation angesehen werden. Daher hat die vorgelegte Arbeit in zweierlei Hinsicht Bedeutung: für die Erklärung des Ursprungs der dekadischen Variationen der Erdrotation und für die Modellierung der Erzeugungsmechanismen der Säkularvariation des geomagnetischen Feldes.

2. Theoretische Grundlagen für die Berechnung der Kopplungsdrehmomente der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung

Nach der MAXWELLSchen Theorie führen zeitliche Variationen des magnetischen Flusses \underline{B} in einem ruhenden Leiter oder Bewegungen des Leiters gegen ein Magnetfeld zur Induktion von LORENTZkräften, die ihrer Ursache entgegenwirken. Ist die Ursache eine Zeitvariation des Feldes, so beginnt sich der Leiter so zu bewegen, daß diese Zeitvariation relativ zum Leiter im Mittel verschwindet. Ist die Ursache eine Bewegungsänderung des Leiters, so versuchen die LORENTZkräfte diese Änderung zu verhindern, d.h. die die Bewegungsänderung verursachenden Kräfte zu

kompensieren. Im Falle des leitfähigen Erdmantels ist die relative Permeabilität $\mu_{\text{rel}} = 1$. Die der Dichte der LORENTZkräfte $\mu_0^{-1} (\text{rot } \underline{B} \times \underline{B})$ entsprechenden LORENTZdrehmomente in dem leitfähigen Volumen V_m des Mantels sind mit

$$\underline{L} = \mu_0^{-1} \int_{V_m} \underline{r} \times (\text{rot } \underline{B} \times \underline{B}) \, dV \quad (2.1)$$

gegeben. Wenn das betrachtete Magnetfeld ein Potentialfeld ist ($\text{rot } \underline{B} = 0$), dann verschwinden diese Drehmomente. Ein solches magnetisches Potentialfeld ist das geomagnetische Feld $\underline{B}^{(0)}$ an der Erdoberfläche. Von ihm wird angenommen (z.B. BENTON und WHALER /3/), daß es sich in den Mantel im wesentlichen wie ein magnetisches Potentialfeld fortsetzen läßt und die durch die Mantelleitfähigkeit bedingten Abweichungen $\underline{B}^{(1)}$ davon um eine Größenordnung kleiner sind: $\underline{B} = \underline{B}^{(0)} + \underline{B}^{(1)}$. Im Sinne von $\text{rot } \underline{B}^{(0)} = 0$ kann der durch das magnetische Potentialfeld repräsentierte Anteil allein keinen Beitrag zum LORENTZdrehmoment \underline{L} liefern. Wesentlich für die Existenz eines solchen Drehmoments sind demzufolge zwei sekundäre Prozesse (s. Kap. 1.):

- (1) Die Wechselwirkung zwischen $\underline{B}^{(0)}$ und der oberflächennahen Bewegung der Kernmaterie; sie erzeugt an der Kernoberfläche ein elektrisches Feld $\underline{u} \times \underline{B}^{(0)}$, dessen Tangentialkomponente stetig in den Mantel eindringt. Die vom Potential stammende Komponente $\underline{r} \times \text{grad } W^{(uB)}$ erzeugt nach dem OHMSchen Gesetz $\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}$ einen poloidalen Strom der Dichte $\underline{j}_p^{(1)} = \mu_0^{-1} \cdot \text{rot } \underline{B}_t^{(1)}$ im Mantel. Die Wechselwirkung von $\underline{j}_p^{(1)}$ mit $\underline{B}^{(0)}$ gemäß der Gln. (2.1) führt zu einem LORENTZdrehmoment $\underline{L}_t^{(1)}$ des toroidalen Feldes $\underline{B}_t^{(1)}$.
- (2) Die Zeitvariationen von $\underline{B}^{(0)}$ im Mantel selbst; sie induzieren gemäß der vorausgegangenen Betrachtung ein poloidales Feld erster Ordnung $\underline{B}_p^{(1)}$ in den Mantel, das mit $\underline{B}^{(0)}$ gemäß der Gln. (2.1) ein LORENTZdrehmoment $\underline{L}_p^{(1)}$ des poloidalen Feldes $\underline{B}_p^{(1)}$ erzeugt.

Die Wechselwirkung von Feldern erster und höherer Ordnungen untereinander wird in dieser Arbeit vernachlässigt.

Wenn die Ursache der Zeitänderung von $\underline{B}^{(0)}$ ebenfalls die

Bewegungen des oberflächennahen Kernmaterials sind, so wirken beide Drehmomente (1) und (2) dieser Bewegung entgegen. Das nachfolgend berechnete Kopplungsdrehmoment besitzt dann in Bezug auf die Änderung der Relativbewegung von Kern und Mantel gegenüber dem Feldretardierenden Charakter. Da vorerst kein Modell für die Erzeugung der Bewegungsänderungen vorliegt, werden sie nachfolgend als gegeben behandelt. In dieser kinematischen Betrachtungsweise aber müssen die die Änderung bewirkenden Kräfte oder Drehmomente als willkürliche Terme in die Bewegungsgleichungen des Kern-Mantel-Systems eingeführt werden. Da die retardierenden Drehmomente die Bewegungsänderung nur dämpfen bzw. zum Stillstand bringen, werden jene willkürlich eingeführten sie verursachenden Drehmomente nachfolgend auch als beschleunigende Drehmomente bezeichnet.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich nachfolgend zu lösende Aufgaben:

- (A) die Aufstellung eines Leitfähigkeitsmodells des Mantels und eines Bewegungsmodells des Kerns
- (B) die Berechnung des Magnetfeldes im Mantel und an der Kern-Mantel-Grenze
- (C) die Berechnung der LORENTZdrehmomente aufgrund gegebener Felddarstellungen
- (D) die Ermittlung der Parameter des Bewegungsmodells des Kerns und
- (E) die Berechnung der beschleunigenden Drehmomente aus der Drehmomentbilanz für die kräftefreie Erde.

2.1. Das Leitfähigkeitsmodell des Mantels und das Bewegungsmodell des Kerns

Das Leitfähigkeitsmodell

In dieser Arbeit werden Kern und Mantel als sphärisch-symmetrische Körper mit nachfolgender Leitfähigkeitsverteilung behandelt

$$\sigma_c = \text{const.} \quad r \leq R_c^- \quad (2.2a)$$

$$\sigma_m(r) = \left[\frac{R_c}{r} \right]^\alpha \cdot \sigma_0, R_c^+ \leq r \leq R_G^- \quad (2.2b)$$

$$\sigma_A = 0 \quad r \geq R_G^+ \quad (2.2c)$$

mit

- $\sigma_c / \sigma_m / \sigma_A$ = Leitfähigkeit des Kerns/inneren Mantels/äußeren Mantels
- σ_0 - Mantelleitfähigkeit bei $r = R_c^+ \approx 3480$ km
- R_c - Kernradius
- α - dimensionsloser Parameter
- R_G - äußerer Radius der leitfähigen Mantelschale.

Die Leitfähigkeit des Kerns wird i.a. als konstant angesehen. Der Wert $\sigma_c = 3 \cdot 10^5 \Omega^{-1} m^{-1}$ findet in den Arbeiten zur Dynamotheorie (z.B. KRAUSE und RÄDLER /38/) allgemeine Anerkennung. Im Falle des Leitfähigkeitsgesetzes (2.2b) des Mantels sind analytische Lösungen der Induktionsgleichung möglich (MC DONALD /40/, BRAGINSKIJ und FIŠMAN /8/, STIX /54/, STIX und ROBERTS /55/, GREINER-MAI /20/, ...). Die unbekannt Parameter σ_0 , α und R_G wurden von STIX /54/ unter Berücksichtigung gleicher Abschirmwirkung des Mantels gegenüber den Zeitvariationen des \underline{B} -Feldes für die verschiedenen Parameterwerte σ_0 , α und $R_G - R_c$ an die Behandlung des Kern-Mantel-Kopplungsproblems angepaßt. Damit wurde eine Übereinstimmung der Größenordnungen der magnetischen und der aus Erdrotationsdaten ermittelten (mechanischen) Drehmomente L_z^{mech} erreicht. STIX und ROBERTS /55/ benutzten zur Berechnung der Kopplungsdrehmomente die Parameterwerte

$$\sigma_0 = 3 \cdot 10^3 \Omega^{-1} m^{-1}, \alpha = 30, R_G - R_c = 2000 \text{ km} \quad (2.3)$$

und erzielten damit gute Ergebnisse hinsichtlich der Vergleichbarkeit der axialen Momente $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} . Von BENTON und WHALER /3/ wurden verschiedene Leitfähigkeitsmodelle des Mantels verglichen. Ihren Ergebnissen zufolge gibt es eine Reihe äquivalenter Modelle, deren Unterschiede sich auf die Behand-

lung der Abschirmwirkung des Mantels nicht wesentlich auswirken. Eventuell vorhandene Anisotropien in der Mantelleitfähigkeit sind für die Behandlung der Kern-Mantel-Kopplung unerheblich (GREINER-MAI /22/). Es lag daher nahe, das aus der Literatur entlehnte Leitfähigkeitsmodell (2.2) mit den Parametern (2.3) den nachfolgenden Untersuchungen zugrunde zu legen.

Die Annahme (2.2a) ist nach den Untersuchungen mehrerer Autoren (z.B. MC DONALD /40/) für dekadische Variationen gerechtfertigt. Das Modell (2.2b) liefert für eine Tiefe von 1000 km unterhalb der Erdoberfläche zwar wesentlich kleinere Werte für σ_m als die Tiefensondierungsmessungen (s. BUGHA et al. /10/), diese Leitfähigkeitsunterschiede bei $r \geq R_G$ sind jedoch für das Kopplungsproblem unerheblich (s. z.B. STIX /54/).

Das Bewegungsmodell des Kerns

Es kann als bekannt vorausgesetzt werden, daß der äußere Kern aus fluider inkompressibler Materie besteht. Das allgemeinste Modell des Bewegungszustandes der Kernoberflächenschichten ist dann ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld \underline{u} ($\text{div } \underline{u} = 0$), für das an der Kernoberfläche $r = R_C$ $\underline{u} \cdot \underline{r} = 0$ gilt. Im Kap. 2. wird generell der Formalismus der Aufspaltung von Feldern in poloidale und toroidale Anteile benutzt (s. KRAUSE und RÄDLER /38/). Diese Anteile werden durch den unteren Index p oder t gekennzeichnet. Mit den erzeugenden Skalaren P und Q läßt sich \underline{u} in bekannter Weise darstellen durch:

$$\underline{u} = \underline{u}_p + \underline{u}_t, \quad \underline{u}_p = \text{rot rot } \underline{r} \cdot P, \quad \underline{u}_t = \text{rot } \underline{r} \cdot Q. \quad (2.4)$$

Im Rahmen des genannten Formalismus sind P und Q nach Kugelflächenfunktionen $Y_n^m = P_n^m \cdot e^{im\varphi}$ (P_n^m - Kugelfunktionen) zu entwickeln:

$$P = \sum_{l,k} p_l^k \cdot Y_l^k, \quad Q = \sum_{l,k} q_l^k \cdot Y_l^k. \quad (2.5)$$

Die Koeffizienten dieser Entwicklungen sind Funktionen von r und t. Im Kap. 2.3. wird theoretisch gezeigt, wie die magnetischen Kopplungsdrehmomente von den Koeffizienten p_l^k und q_l^k ab-

hängen. Die Koeffizienten p_1^k und q_1^k sind jedoch nicht bekannt oder aus dem Magnetfeld i.a. (bei unendlichen Reihen der Art (2.5)) nicht eindeutig ableitbar (BACKUS /1/). Für die numerische Berechnung der Drehmomente muß man sich auf ein \underline{u} -Feld mit endlicher Koeffizientenzahl beschränken. Die Anzahl der dann numerisch eindeutig ermittelbaren \underline{u} -Feldparameter hängt von der Länge der vorliegenden Entwicklung des \underline{B} -Feldes nach Kugelfunktionen ab. Das u.g. einparametrische \underline{u} -Feldes bereitet diesbezüglich keine Schwierigkeiten.

Im Rahmen der numerischen Berechnung wurde das \underline{u} -Feld (2.4), (2.5) auf $q_1^0 = \omega \cdot r$ spezialisiert. Alle anderen Koeffizienten sind Null gesetzt worden. Für die Berechnung des LORENTZdrehmoments werden die Werte von \underline{u} an der Kernoberfläche benötigt. In diesem Fall ist

$$\underline{u} = (0, 0, u_\varphi), \quad u_\varphi = \omega \cdot R_c \cdot \sin \vartheta \quad (2.6)$$

das Modell der starren Rotation des Kerns oder einer Kernschicht nahe der Kernoberfläche um die mittlere Rotationsachse, die mit der z-Achse eines mantelfesten Bezugssystems identisch ist. Der Parameter ω ist nach Gln. (2.6) eine Winkelgeschwindigkeit und kann gemäß Kap. 1. als Geschwindigkeit der Relativrotation des Kerns, aber auch von dünnen Oberflächenschichten des Kerns relativ zum Mantel interpretiert werden. Die Modellierung der Bewegungen im fluiden Kern durch rotierende Schichten fluiden Materials ist in der Literatur durchaus üblich (ROBERTS /51/, WATANABE und YUKUTAKE /62/, ...). Der Wahl eines einparametrischen \underline{u} -Feldes der niedrigsten Ordnung liegen die in der Einleitung genannten Gesichtspunkte zugrunde. Darüber hinausgehend ist diese Wahl der Genauigkeit der vorhandenen Felddaten am besten angepaßt.

Das Modell einer starren Rotation der Kernoberflächenschichten gegen den Mantel (Kerndriftmodell) ist ein sehr grobes Modell für die Säkularvariation des geomagnetischen Feldes. Der Formalismus zur Berechnung der Drehmomente wurde zunächst soweit ausgeführt, daß auch beliebige \underline{u} -Felder berücksichtigt werden können, sobald sie aus Felddaten berechenbar sind. Die Rechenergebnisse in den Kap. 5. - 7. zeigen, daß man mit dem

Modell (2.6) bedeutsame Informationen zur Kern-Mantel-Kopplung erhält. Sie zeigen aber auch, daß die festgestellten Diskrepanzen zwischen dem Verhalten von ω und der Mantelrotationsgeschwindigkeit ω_m bereits entscheidend durch diese vereinfachenden Modellannahmen bedingt sein können.

2.2. Die Lösung der Induktionsgleichung des Mantels

2.2.1. Bemerkungen zum allgemeinen Lösungsweg

Der Begriff der "Induktionsgleichung" ist den Standardwerken der Dynamotheorie entlehnt und in den Arbeiten zur Kern-Mantel-Kopplung üblich geworden. Es handelt sich dabei um die aus den MAXWELLGleichungen

$$\text{rot } \underline{E} = - \dot{\underline{B}} \quad , \quad \text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad , \quad \text{div } \underline{B} = 0$$

unter Eliminierung der elektrischen Feldstärke \underline{E} und Benutzung des OHMSchen Gesetzes

$$\underline{j} = \sigma_m \cdot \underline{E}$$

abgeleitete Differentialgleichung für den Vektor des magnetischen Flusses \underline{B} . Für ein mantelfestes Bezugssystem gilt demnach:

$$\text{rot} (\varphi \text{ rot } \underline{B}) = - \dot{\underline{B}} \quad , \quad \text{div } \underline{B} = 0 \tag{2.7}$$

($\varphi = 1 / \mu_0 \cdot \sigma_m$, der Punkt bezeichnet die Ableitung nach der Zeit). Die Lösungen von Gln. (2.7) für periodische Feldvariationen und die Formulierung der Randbedingungen von \underline{B} für das Bewegungsmodell (2.4), (2.5) des Kerns wurden von GREINER-MAI /20/ angegeben. Der dort verwendete Lösungsweg ist in der Dynamotheorie und der Theorie der Kern-Mantel-Kopplung allgemein üblich (KRAUSE und RÄDLER /38/, BULLARD /13/, ROCHESTER und SMYLLIE /50/, ...) und besteht in folgenden Schritten:

- Aufspaltung des \underline{B} -Feldes in einen poloidalen und toroidalen Anteil; die Anteile und die Feldskalare sind durch folgende Gleichungen definiert:

$$\underline{B} = \underline{B}_p + \underline{B}_t \quad , \quad \underline{B}_p = \text{rotrot } \underline{r} \cdot S \quad , \quad \underline{B}_t = \text{rot } \underline{r} \cdot T$$

Mit dieser Definition ist die Bedingung $\text{div } \underline{B} = 0$ automatisch

erfüllt.

- Ableitung der Differentialgleichungen für die erzeugenden Skalare S und T aus Gln. (2.7) nach bekannten Regeln für die Differentialoperatoren (s. z.B. KRAUSE und RÄDLER /38/, S. 166):

$$\frac{1}{\mu_0 \cdot \sigma_m} \left(\Delta T - \frac{1}{r \cdot \sigma_m} \cdot \frac{d \sigma_m}{dr} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rT) \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0 \cdot \sigma_m} \Delta S - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

- Entwicklung der erzeugenden Skalare nach Kugelflächenfunktionen

$$S = \sum S_n^m(r, t) \cdot Y_n^m, \quad T = \sum T_n^m(r, t) \cdot Y_n^m$$

und Ansatz für periodische Lösungen

$$S_n^m(r, t) \rightarrow S_n^m(r) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t}, \quad T_n^m(r, t) \rightarrow T_n^m(r) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t}$$

Diese Operationen führen auf die Differentialgleichungen für die Koeffizienten

$$(S_n^m)'' + \frac{2}{r}(S_n^m)' + (k^2 \cdot r^{-\alpha} - \frac{n(n+1)}{r^2})(S_n^m) = 0 \quad (2.7a)$$

$$(T_n^m)'' + \frac{2+\alpha}{r}(T_n^m)' + (k^2 \cdot r^{-\alpha} - \frac{n(n+1)-\alpha}{r^2})(T_n^m) = 0 \quad (2.7b)$$

$$k^2 = -i \cdot \mu_0 \cdot \sigma_0 \cdot \nu \cdot R_c, \quad (\dots)' = \partial / \partial r, \quad (\sigma_0 \text{ und } \alpha \text{ s. Gln. (2.2b)})$$

vom GAUSSschen Typ. Die analytischen Lösungen dieser Gleichungen sind für verschiedene Spezialfälle von k und α bei GREINER-MAI /20/ angegeben. Den Formalismus für nichtperiodische Felder findet man z.B. bei SMYLLIE /53/ ausgeführt.

Ausschlaggebend für die praktische Berechnung des Magnetfeldes im Mantel ist die Formulierung der Randbedingungen. Von GREINER-MAI /20/ wurde eine Herleitung der vollständigen Randbedingungen für die Skalare S und T an den beiden Grenzflächen des Leitfähigkeitsmodelles (2.2b) angegeben:

- Aus der Stetigkeit der Feldvektoren \underline{B}_p und \underline{B}_t folgte

$$S^+ = S^-, \quad \left[\frac{\partial S}{\partial r} \right]^+ = \left[\frac{\partial S}{\partial r} \right]^- \quad \text{für } r=R_G \quad \text{und } r=R_C \quad (2.8a)$$

$$T^+ = T^- = 0 \quad \text{für } r=R_G \quad (2.8b)$$

$$T^+ = T^- \quad \text{für } r=R_C \quad (2.8c)$$

- Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente $\underline{r} \times \underline{E}$ des elektrischen Feldes \underline{E} bei $r=R_C$ folgte

$$\frac{G_m}{G_c} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rT) \right]^- - \left[\frac{\partial}{\partial r}(rT) \right]^+ = \mu_o \cdot G_m \cdot W^{(uB)} \quad \text{für } r=R_C, \quad (2.8d)$$

wobei $W^{(uB)}$ der Potentialanteil von $\underline{u} \times \underline{B}$ ist. Bei der Herleitung von Gln. (2.8d) wurde von GREINER-MAI /20/ eine freie Konstante, die zu dieser Gleichung hinzuzufügen wäre, zunächst willkürlich Null gesetzt, was der Normierung $\oint W^{(uB)} d\tilde{\omega} = 0$ ($d\tilde{\omega}$ s. Gln. (2.10b)) entspricht. Physikalisch verbirgt sich dahinter, daß die Gesamtladung des Kerns Null gesetzt wurde, was z.B. nach SCHMUTZER /57/ durchaus üblich ist.

Vermittels der Lösungen für das magnetische Potentialfeld und der Vorschrift für die Darstellung poloidaler Felder lassen sich die Koeffizienten des erzeugenden Skalars des geomagnetischen Feldes wie folgt schreiben:

$$s_n^{m(o)} = \frac{R_E}{n} \left[\frac{R_E}{n} \right]^{n+1} \cdot (g_n^m - i \cdot h_n^m) \cdot \lambda_n^m \quad (2.9)$$

(g_n^m, h_n^m - Feldkoeffizienten in SCHMIDT'scher Normierung

λ_n^m - SCHMIDT'scher Normierungsfaktor).

Mit dieser Darstellung läßt sich das magnetische Potentialfeld von $r=R_E$ auf $r=R_G$ extrapolieren. Die beiden Integrationskonstanten der Lösung von Gln. (2.7a) sind mit den Bedingungen (2.8a) für $r=R_G$ ermittelbar. Damit ist das poloidale Feld im Mantel vollständig bekannt und bei $r=R_C^+$ bestimmt. Mit Gln. (2.8a) für $r=R_C$ ist es dann auch auf der Kernseite der Kern-Mantel-Grenze bekannt.

Das Verschwinden der Randwerte (2.8b) von \underline{B}_t ist eine Folge von $\mathcal{G}_A = 0$, woraus $\text{rot } \underline{B}_t = 0$ und nach einem Satz über toroidale Felder (s. KRAUSE und RÄDLER /38/) $\underline{B}_t = 0$ für $r \geq R_G$ folgt. Aus dieser Randbedingung läßt sich ableiten, daß toroidale Felder außerhalb von Leitern nicht existieren. Die Randbedingung (2.8c) läßt sich nur dann nutzen, wenn das toroidale Kernfeld bekannt ist (z.B. aus der Dynamotheorie). In der Randbedingung (2.8d) ist $W^{(uB)}$ der erzeugende Skalar des poloidalen Anteils von $\underline{u} \times \underline{B}$, der dem elektrostatischen Anteil entspricht. Die elektromotorische Kraft $\underline{E} = \underline{u} \times \underline{B}$ entsteht aus Wechselwirkungen des \underline{B} -Feldes mit den Bewegungen des leitfähigen Materials in den Oberflächenschichten des Kerns und führt zu den LORENTZ-drehmomenten des Typs (1) von $\underline{B}_t^{(1)}$. $\underline{E} = \underline{u} \times \underline{B}$ läßt sich darstellen als $\underline{E} = (\underline{u} \times \underline{B})_p + (\underline{u} \times \underline{B})_t$. Da $\underline{u} \times \underline{B}$ kein divergenzfreier Vektor mehr ist (i.a. ist $\text{div } \underline{E} = \rho_e$, ρ_e - Ladungsdichte), muß \underline{E}_p durch zwei erzeugende Skalare dargestellt werden:

$$(\underline{u} \times \underline{B})_p = \underline{r} \cdot \text{grad } W^{(uB)} + \text{grad } W^{(uB)}$$

(s. KRAUSE und RÄDLER /38/, S. 167). Über die Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponente $\underline{r} \times \underline{E}$ bei $r=R_C$ findet $W^{(uB)}$ Eingang in die Randbedingung (2.8d). Wegen $\underline{r} \times \underline{r} = 0$ verschwindet $\text{grad } W^{(uB)}$ aus dieser Bedingung. Die Stetigkeit des Vektors $\underline{r} \times (\underline{u} \times \underline{B})_t$ führte lediglich auf die bekannte Beziehung $\dot{S}^+ = \dot{S}^-$.

Die Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung von $W^{(uB)}$ sind nach KRAUSE und RÄDLER /38/, S. 170, mit

$$W_n^m = -(n(n+1)A_n^m)^{-1} \oint \underline{r} \cdot \text{rot}(\underline{r} \times (\underline{u} \times \underline{B})) \cdot Y_n^{-m} d\tilde{\omega} \quad (2.10a)$$

$$A_n^m = \frac{4\pi (n+|m|)!}{(2n+1)(n-|m|)!} \quad , \quad d\tilde{\omega} = \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad (2.10b)$$

gegeben. A_n^m ergibt sich aus der Normierung der Kugelflächenfunktionen. Von GREINER-MAI /20/ wurde W_n^m für das Geschwindigkeitsfeld (2.4), (2.5) bis auf die ϑ - und φ -Integration ausgerechnet. Zur Demonstration des Zusammenhanges zu \underline{B}_p und \underline{u} wird dieser Ausdruck hier noch einmal aufgeschrieben:

$$W_n^m = -(n(n+1)A_n^m)^{-1} \sum_s \sum_t \sum_l \sum_k s(s+1)(S_s^t)^+ \left(\left[q_1^k \right]^- \right. \\ \left. K_{1sn}^{ktm} + \left[\frac{\partial}{\partial r}(rp_1^k) \right]^- \cdot L_{1sn}^{ktm} \right) \quad (2.11)$$

$$K_{1sn}^{ktm} = \frac{1}{2} (1(1+1) + n(n+1) - s(s+1)) \oint Y_1^k \cdot Y_s^t \cdot Y_n^{-m} d\tilde{\omega} \\ L_{1sn}^{ktm} = \oint \left(\frac{\partial Y_s^t}{\partial r} \cdot \frac{\partial Y_1^k}{\partial \varphi} - \frac{\partial Y_s^t}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Y_1^k}{\partial r} \right) \cdot Y_n^{-m} d\vartheta \cdot d\varphi \quad .$$

Die Übereinstimmung mit dem analogen Ausdruck bei SMYLLIE /53/, S. 176 unten, ist gegeben, wenn man die bei SMYLLIE offensichtlich falsch gesetzte geschweifte Klammer hinter "L:::" schließt und vor "s(s+1)/2b²" wieder öffnet.

Mit der Randbedingung (2.8a) ist W_n^m durch das bekannte poloidale Feld (S_s^t)⁺ bei r=R_c und die Parameter des u-Feldes q₁^k und p₁^k auf der Kernseite der Kern-Mantel-Grenze bestimmt. Die Gln. (2.7b) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Lösung besitzt daher i.a. zwei Integrationskonstanten. Da wegen der Bedingung (2.8b) nur eine Konstante des toroidalen Feldes ermittelt werden muß, genügt es, hierzu die Randbedingung (2.8d) heranzuziehen. Für σ_c → ∞ ist dann

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} (rT) \right]^+ = -\mu_0 \cdot \sigma_m \cdot W^{(uB)} \quad , \quad (2.12)$$

woraus in dieser sogenannten "frozen-field"-Näherung die Berechenbarkeit des toroidalen Feldes bei gegebenem poloidalem Feld und gegebenem u-Feld folgt. Die Bedingung σ_c → ∞ ist nur annähernd erfüllt (σ_c/σ₀ ≈ 10²). Die Näherung (2.12) setzt daher voraus, daß die Größenordnungen der Ableitungen $\left[\frac{\partial}{\partial r} (rT) \right]^-$ und $\left[\frac{\partial}{\partial r} (rT) \right]^+$ etwa gleich sind. Im Kap. 7.2 wird gezeigt, daß diese Näherung für strong-field Dynamomodelle unzulässig ist. Da $\left[\frac{\partial}{\partial r} (rT) \right]^+$ und W^(uB) berechenbar sind, ist Gln. (2.8d) die Grundlage dafür, die Drehmomentwirkung weiterer Felder T⁻ an der Kernoberfläche aus dem Vergleich der nach Gln. (2.12) zu L gewonnenen Resultate mit den Erdrotations-

daten zu berechnen, wenn man die dort ermittelten Differenzen der Wirkung des in Gln. (2.12) gegenüber (2.8d) vernachlässigten Terms zuschreibt.

2.2.2. Eine iterative Methode zur Lösung der Induktionsgleichung des Mantels

Für numerische Zwecke hat es sich als günstig erwiesen, Gln. (2.7) mit einem Näherungsverfahren zu lösen und reelle Größen zu benutzen. Hierzu bot sich das von STIX und ROBERTS /55/ entwickelte und auf die Untersuchungen von BENTON und WHALER /3/ aufbauende Verfahren an. Es entspricht einer iterativen Methode, bei der als Anfangsfeld einer \underline{B} -Feld-Entwicklung nach REYNOLDSZahlen das magnetische Potentialfeld $\underline{B}^{(0)}$ eingesetzt wird. Für die Beschreibung des Näherungsgrades wurden äquivalente REYNOLDSZahlen des Mantels eingeführt:

$$R_m = \mu_0 \cdot \sigma_0 \cdot L \cdot u / \alpha, \quad R'_m = \mu_0 \cdot \sigma_0 \cdot L^2 / \alpha \cdot \tau. \quad (2.13)$$

Die erste REYNOLDSZahl beschreibt den Näherungsgrad des toroidalen Feldes, die zweite den des poloidalen Feldes in Bezug auf die Zeitvariationen des Feldes im Mantel. Die Definition von R_m , R'_m folgt aus einer Skalenbetrachtung der Gln. (2.7). Im Sinne des gewöhnlichen "scaling-law" werden dort die Größen auf ihre Skala oder Größenordnung normiert: \underline{B} wird durch $\underline{B}\underline{B}'$, \underline{u} durch $\underline{u}\underline{u}'$, rot durch $L^{-1}\text{rot}'$, $\partial/\partial t$ durch $\tau^{-1} \cdot \partial/\partial t'$ und η durch $\alpha \cdot \eta_0 \cdot \eta'$ ersetzt, wobei die gestrichelten Größen die auf ihre mittlere räumliche oder zeitliche Dimension normierten Größen sind. η' wurde so gewählt, weil in Gln. (2.7) nicht η selbst, sondern seine Ableitung nach r dominiert. Gln. (2.7) lautet dann

$$\text{rot}' (\eta' \text{rot}' \underline{B}') = - R'_m \cdot \dot{\underline{B}}'$$

In dem Fall, in dem die Variation $\dot{\underline{B}}$ durch elektromotorische Kräfte $\underline{u} \times \underline{B}$ im Kern nahe der Kern-Mantel-Grenze erzeugt wird und seine Skala bei $r=R_C$ durch die von $\text{rot} (\underline{u} \times \underline{B})$ bestimmt ist (frozen-field-Näherung), tritt anstelle von τ die Dimension

L/u, womit auch die erste REYNOLDSzahl definiert ist. Da der Mantel keine fluiden Bewegungen aufweist, für die üblicherweise solche Zahlen definiert werden, wurde das Adjektiv "äquivalente" eingeführt. Das Iterationsverfahren besteht darin, das \underline{B} -Feld durch eine Reihe

$$\underline{B} = \underline{B}^{(0)} + \underline{B}^{(1)} + \dots \quad (2.14)$$

darzustellen, in der sich die Skalen der einzelnen Glieder um die REYNOLDSzahlen R_m oder R'_m unterscheiden. Die Feldanteile sind definiert durch die "Induktionsgleichungen"

$$\text{rot} (\mathcal{V} \text{ rot } \underline{B}^{(0)}) = 0 \quad (2.15a)$$

$$\text{rot} (\mathcal{V} \text{ rot } \underline{B}^{(1)}) = -\dot{\underline{B}}^{(0)} \quad (2.15b)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \text{div } \underline{B}^{(0)} = \text{div } \underline{B}^{(1)} = \dots = \text{div } \underline{B}^{(j)} = 0. \end{array} \quad (2.15c)$$

Aus den Gln. (2.15) folgen die Skalenbeziehungen $B^{(1)} = (R_m, R'_m) \cdot B^{(0)}$, $B^{(2)} = (R_m, R'_m) \cdot B^{(1)} = (R_m, R'_m)^2 \cdot B^{(0)}$ usw., so daß aus Gln. (2.14) für die Skala des Gesamtfeldes

$$B = B^{(0)} \cdot (1 + (R_m, R'_m) + (R_m, R'_m)^2 + \dots)$$

folgt. Für $R_m, R'_m < 1$ ist garantiert (Konvergenz der geometrischen Reihe), daß die Skala oder Größenordnung von \underline{B} ein endlicher Wert ist, wodurch die Konvergenz des Iterationsverfahrens gesichert wird. Daß \underline{B} nach Gln. (2.14) mit den Lösungen der Gln. (2.15) eine Lösung von Gln. (2.7) wird, davon überzeugt man sich durch Aufsummieren der Gln. (2.15) und die Benutzung von Gln. (2.14).

Ein Teil der LORENTZdrehmomente wird vom toroidalen Feld \underline{B}_t erzeugt, das von elektrischen Feldern aus kernoberflächen-nahen Prozessen abgeleitet wird. Für das toroidale Feld ist daher die erste REYNOLDSzahl aus Gln. (2.13) maßgeblich. Für \underline{u} -Felder in der Größenordnung der stationären Kerndriftgeschwindigkeit $|u_\varphi| \approx 0,00035 \text{ ms}^{-1}$ ist die Bedingung $R_m < 1$ für

beliebige Feldstrukturen des Ausmaßes $L=R_c$ erfüllt ($R_m \approx 0,15$), was einen Abbruch der Reihe bei $\underline{B}_t^{(1)}$ rechtfertigt. Die zweite Bedingung $R'_m < 1$ wurde für den Allgemeinfall eingeführt, in dem die Zeitvariationen des \underline{B} -Feldes im Mantel bekannt sind. Im Fall periodischer Variationen ist die Zeitskala die Periodenlänge $T : \tau = T$. Die räumliche Skala L , über die hinweg sich das Feld durch Induktionsprozesse wesentlich ändern kann, ist durch die effektive Dicke L_M der leitfähigen Mantelschicht bestimmt. Nach BRAGINSKIJ /7/ ist L_M für das zugrunde gelegte Leitfähigkeitsmodell kleiner als 250 km, so daß für dekadische Variationen die Bedingung $R'_m < 1$ gut erfüllt ist ($\tau = 10 \dots 100a$).

Für das erste Glied $\underline{B}^{(0)}$ der Reihe (2.14) wird das magnetische Potentialfeld entsprechend der Darstellung (2.9) eingesetzt (s. STIX und ROBERTS /55/). In diesem Fall gilt $\underline{B}^{(0)} = \underline{B}_p^{(0)}$, denn Potentialfelder sind notwendigerweise poloidalener Natur. Ein toroidales Potentialfeld gibt es nicht. Alle toroidalen Felder, die der elektromotorischen Kraft $\underline{u} \times \underline{B}$ in den Kernoberflächenschichten entspringen und deren Randwerte mit Gln. (2.12) auf der Mantelseite der Kern-Mantel-Fläche berechenbar sind, werden in den nächst höheren Ordnungen berücksichtigt, d.h. $\underline{u} \times \underline{B}^{(0)}$ in $\underline{B}_t^{(1)}$, $\underline{u} \times \underline{B}^{(1)}$ in $\underline{B}_t^{(2)}$ usw. STIX und ROBERTS /55/ haben dieses Vorgehen wie folgt begründet: Die Gln. (2.15a) besitzt die zwei Lösungen:

$$\text{rot } \underline{B}_p^{(0)} = 0, \quad \text{rot } \underline{B}_t^{(0)} = -\nabla W^{(0)}. \quad (2.15d)$$

Die erste Gleichung führt auf die Darstellung $\underline{B}_p^{(0)} = -\nabla \phi^{(0)}$, wobei für $\phi^{(0)}$ das geomagnetische Potentialfeld einzusetzen ist. Die zweite Gleichung sagt aus, daß man in der nullten Näherung das toroidale Feld einem Strom $\underline{j}_p^{(0)}$ zuordnen muß, der einem elektrostatischen Potential entspringt: $\underline{j}_p^{(0)} = -\mathcal{G}_m \cdot \nabla W^{(0)} = \mathcal{G}_m \cdot \underline{E}_p^{(0)}$. Für die rechte Seite von Gln. (2.15b) müßten demzufolge $\underline{B}_p^{(0)} = -\nabla \phi^{(0)}$ (für $\underline{B}_p^{(1)}$) und $\underline{B}_t^{(0)} = -\text{rot } \underline{E}_p^{(0)} \equiv 0$ eingesetzt werden. In der benutzten Näherung geht also die Gln. (2.15b) für $\underline{B}_t^{(1)}$ in die Gln. (2.15a) für $\underline{B}_t^{(0)}$ über, d.h., die rechte Seite ist gleich Null. Die Entscheidung darüber, welcher Stufe der Näherung das betrachtete $\underline{B}_t^{(0)}$ oder $\underline{B}_t^{(1)}$, mit dem die Reihe (2.14) beginnt, zuzuordnen ist, hängt nun ausschließlich von der Skala des Feldes ab. Da das toroidale Feld

in der vorgelegten Arbeit nur der elektrischen Feldstärke $\underline{u} \times \underline{B}$, deren Näherung mit $\underline{u} \times \underline{B}^{(0)}$ beginnt, zugeordnet wird, hat $\nabla W^{(0)}$ die Skala von $\underline{u} \times \underline{B}^{(0)}$, d.h., $\underline{u} \cdot \underline{B}^{(0)} \cdot \underline{B}_t^{(0)}$ bzw. $\underline{B}_t^{(1)}$ haben dann die Skala (s. Gln. (2.15d)) $\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \alpha^{-1} \cdot \underline{u} \cdot \underline{B}^{(0)} = R_m \cdot \underline{B}^{(0)}$. Demzufolge beginnt in dem verwendeten Verfahren die Entwicklung des toroidalen Feldes mit der 1. Ordnung. Für $\underline{B}^{(0)}$ gilt demnach $\underline{B}^{(0)} = \underline{B}_p^{(0)} = -\nabla\phi^{(0)}$.

Maßgeblich für das LORENTZdrehmoment erster Ordnung ist $\underline{B}_t^{(1)}$, das mit Gln. (2.15b) ermittelt werden muß. $\underline{B}^{(1)}$ wird während der Ableitung der Formeln für $\underline{I}_p^{(1)}$ durch $\underline{B}^{(0)p}$ ersetzt, so daß eine Lösung der Gln. (2.15b) für $\underline{B}_p^{(1)}$ nicht notwendig ist. Nach den vorangegangenen Festlegungen wird $\underline{B}_t^{(1)}$ mit einer Gleichung des Typs (2.7) ermittelt, bei der die rechte Seite gleich Null ist. Dem entspricht die Gln. (2.7b) für $k=0$. Es ist eine Gleichung vom EULERSchen Typ mit reellen Wurzeln γ der charakteristischen Gleichung. Diese hat die Lösung

$$T_n^m(1) = (C_n^m)_1 \cdot r^{\gamma_1} + (C_n^m)_2 \cdot r^{\gamma_2}$$

($\gamma_{1,2}$ s. Gln. (2.17b)). Die nächsten Schritte bestehen in der Bestimmung der Integrationskonstanten $C_{1,2}$ mit den Randbedingungen (2.8b), (2.12) und in der Berechnung von W_n^m in Abhängigkeit von α und $S_n^m(0)$. Für das Modell (2.6) der starren Rotation galt $q_1^0 = C \cdot r$. Alle anderen Koeffizienten waren Null. In Gln. (2.11) für W_n^m muß daher K_{1sn}^{0tm} berechnet werden. Das ist unter Benutzung von Rekursionsformeln und Normierungsbedingungen für die Kugelfunktionen analytisch ausführbar. Die sich ergebenden Ausdrücke für $T_n^m(1)$ und W_n^m sind von GREINER-MAI /20/, /22/ angegeben worden. Sie lauten:

$$T_n^m(1) = -\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot W_n^m(R_c^+) \frac{\left[\frac{r}{R_c} \right]^{\gamma_1} - \left[\frac{r}{R_c} \right]^{\gamma_2}}{(\gamma_1+1) \left[\frac{R_c}{R_c} \right]^{\gamma_1} - (\gamma_2+1) \left[\frac{R_c}{R_c} \right]^{\gamma_2}} \quad (2.17a)$$

$$= \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot W_n^m(R_c^+) \cdot q_n^{-1}(r)$$

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\alpha+1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4(n(n+1) - \alpha) + (\alpha+1)^2} \quad (2.17b)$$

$$W_n^m(R_c^+) = R_c \cdot \omega \cdot \left[\frac{(n+2)(n+m+1)}{(2n+3)} S_{n+1}^{m(0)}(R_c^+) - \frac{(n-1)(n-m)}{(2n-1)} S_{n-1}^{m(0)}(R_c^+) \right] \quad (2.17c)$$

Die Lösung (2.17a) erfüllt die Randbedingungen (2.8b) und (2.12). Für endliche \mathcal{G}_c ist wegen der Bedingung (2.8d) an der Stelle der Bedingung (2.12) auf der rechten Seite von Gln. (2.17a) der Term $-(\mathcal{G}_c / \mathcal{G}_c) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r T_n^m) \right]^{-1} \cdot q_n^{-1}$ hinzuzufügen. Der Ausdruck für $T_n^m(q)$ läßt sich bei $r=R_c$ mit den Werten für $R_{\mathcal{G}}$ und $\alpha \gg 1$ nach Gln. (2.3) annähern durch ($q_n \approx \alpha$):

$$T_n^m(1) = \mu_0 \cdot \mathcal{G}_c \cdot W_n^m(R_c^+) \cdot \alpha^{-1}, \quad r=R_c. \quad (2.18)$$

In dieser Näherung wurde $T_n^m(1)$ für die numerische Berechnung der toroidalen Drehmomente $\underline{L}_t^{(1)}(n,1)^n$ benutzt. Sie führt auf eine Abhängigkeit der toroidalen Drehmomente $\underline{L}_t^{(1)}$ von \mathcal{G}_c/α bei $R_{\mathcal{G}} \gg R_c$ und $\alpha > n$, d.h., für die Leitfähigkeitsmodelle mit $\mathcal{G}_c/\alpha = \text{const.}$ wird man Kopplungsdrehmomente gleicher Größe erhalten, wenn die voranstehenden Ungleichungen erfüllt sind.

Wie die nachfolgenden Ableitungen der Drehmomentausdrücke im Kap. 2.3. zeigen, benötigt man die poloidale Lösung von Gln. (2.15b), d.h. $S_n^{m(1)}(r)$ dazu nicht. Diese Lösung gibt jedoch Aufschluß über die Zeitkonstante τ_2 des Mantels. Mit den bekannten Definitionen

$$\underline{B}_p^{(1)} = \text{rot rot } \underline{r} \cdot S^{(1)}, \quad S^{(1)} = \sum S_n^{m(1)}(r,t) \cdot Y_n^m$$

folgt aus Gln. (2.15b) mit dem Ansatz für periodische Lösungen

$$S_n^{m(1)}(r,t) = \bar{S}_n^m(r) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t}, \quad S_n^{m(0)}(r,t) = S_n^{m(0)}(r) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t}$$

und $S_n^{m(0)}(r)$ nach Gln. (2.9) die Differentialgleichung

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - n(n+1) \right] \bar{S}_n^m(r) = i \cdot \nu \cdot \mu_0 \cdot \mathcal{G}_m(r) \cdot S_n^{m(0)}(r) .$$

Wie der Operator zeigt, ist die Lösung der homogenen Gleichung die allgemeine Potentiallösung. Mit der WRONSKI-Methode läßt sich die Lösung der inhomogenen Gleichung zu

$$\bar{S}^{\text{inh}} = S_n^{\text{m}(0)} \frac{i \cdot \nu \cdot \mu_0 \cdot R_0}{2n+1} \int_r^{R_0} G_m(r') \left(\frac{r'}{R_0} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{2n+1} \right] dr'$$

bestimmen. Wegen der Randbedingung (2.8a) für S_n^{m} bei $r=R_0$ und $S_n^{\text{m}} = S_n^{\text{m}(0)} + S_n^{\text{m}(1)}$ folgt

$$\left. \frac{\partial S_n^{\text{m}(1)}}{\partial r} \right|_{R_0^-} = 0, \quad S_n^{\text{m}(1)}(R_0^-) = 0.$$

Daher verschwindet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für \bar{S}_n^{m} , und es gilt $\bar{S}_n^{\text{m}} = \bar{S}_n^{\text{inh}}$. $S_n^{\text{m}(1)}(r, t)$ läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$S_n^{\text{m}(1)}(r, t) = i \cdot \nu \cdot \tau_{0,n}(r) \cdot S_n^{\text{m}(0)}(r) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t} \quad (2.19a)$$

$$\tau_{0,n}(r) = \frac{\mu_0}{2n+1} \int_r^{R_0} r' \cdot G_m(r') \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{2n+1} \right] dr', \quad (2.19b)$$

so daß die Gesamtlösung für periodische Felder $S_n^{\text{m}}(r, t) = S_n^{\text{m}(0)} + S_n^{\text{m}(1)}$ lautet:

$$S_n^{\text{m}}(r, t) = S_n^{\text{m}(0)}(r) (1 + i \cdot \nu \cdot \tau_{0,n}) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot t},$$

d.h. für Perioden $T > 2\tilde{\pi} \cdot \tau_{0,n}$

$$S_n^{\text{m}}(r, t) \approx S_n^{\text{m}(0)}(r) \cdot e^{i \cdot \nu \cdot (t + \tau_{0,n})} \quad (2.20)$$

Demzufolge ist $\tau_{0,n}$ die Verzögerungszeit, die Feldvariationen im Mantel erfahren.

Die Wanderungszeit τ_2 von $r=R_c$ bis $r=R_g$ beträgt für gro-
se α -Werte

$$\tau_2 \approx \frac{\mu_0 \cdot \sigma_0 \cdot R_c^2}{\alpha^2} \quad , \quad (2.21)$$

d.h. ca. 1,6 a mit den in Gln. (2.3) angegebenen Daten. Für Pe-
rioden mit $T \lesssim 10$ a sind daher Korrekturen an der Gln. (2.20)
zu erwarten. Dieselbe Zeitkonstante wurde auch von STIX und RO-
BERTS /55/ abgeleitet. Aus diesem Ergebnis folgt, daß die verzö-
gernde Wirkung des Mantels auf dekadische Feldvariationen im
Vergleich von \mathcal{G} und \mathcal{G}_m (Kap. 7.), gemessen an den durch Daten-
fehler bedingten Phasenfehlern von mehr als zwei Jahren, für Pe-
rioden $T > 10$ a eine untergeordnete Rolle spielt. Die Lösung (2.20)
besagt, daß die Felder erster Ordnung in der hier benutzten Nä-
herungsweise im wesentlichen eine Korrektur in Bezug auf das
Phasenverhalten des magnetischen Potentialfeldes im Bereich de-
kadischer Variationen bedingen.

2.3. Die Berechnung der magnetischen Kopplungsdrehmomente für ein allgemeines Geschwindigkeitsfeld der kernoberflächen- nahen Bewegungen

Mit dem im Kap. 2.2.2. entwickelten Näherungsverfahren lassen
sich Drehmomente 1. Ordnung infolge der Wechselwirkung von Fel-
dern 1. Ordnung mit dem Feld $\underline{B}^{(0)} = \underline{B}_p^{(0)}$ nullter Ordnung defi-
nieren. Dabei muß im Auge behalten werden, daß die Felder er-
ster Ordnung durch die in den Mantel induzierten bzw. an der
Kern-Mantel-Grenze erregten Ströme 1. Ordnung erzeugt werden
(s. Einleitung). Nach Gln. (2.1) für das LORENTZdrehmoment
gilt:

$$\underline{L}_p^{(1)} = \mu_0^{-1} \int_{V_m} \underline{r} \times (\text{rot } \underline{B}_p^{(1)} \times \underline{B}^{(0)}) \, dV \quad (2.22a)$$

$$\underline{L}_t^{(1)} = \mu_0^{-1} \int_{V_m} \underline{r} \times (\text{rot } \underline{B}_t^{(1)} \times \underline{B}^{(0)}) \, dV \quad (2.22b)$$

Dieser Aufspaltung entspricht die eingangs von Kap. 2. gemachte Einteilung: $\underline{L}_p^{(1)}$ ist vom Typ (2), $\underline{L}_t^{(1)}$ vom Typ (1). Sie werden nachfolgend entsprechend den sie verursachenden Feldern 1. Ordnung als poloidale und toroidale Kopplungsdrehmomente bezeichnet. Es erweist sich als günstig, in Gln. (2.22b) ein Flächenintegral zu benutzen. Für sphärische Körper gilt nach ROCHESTER /48/ dann:

$$\underline{L}_t^{(1)} = - \mu_0^{-1} \int_{S_c} (\underline{r} \times \underline{B}_t^{(1)}) \cdot \underline{B}_r^{(0)} \cdot dS, \quad (2.22c)$$

worin S_c die Kern-Mantel-Fläche und $B_r^{(0)}$ die radiale Komponente von $\underline{B}^{(0)}$ sind. Diese Formel gilt für sphärische Grenzflächen S_c . Die für elliptische Grenzflächen einzuführenden Korrekturen sind für die reale Kern-Mantel-Fläche jedoch minimal. Mit $\text{rot} \underline{B}_p^{(1)} = \text{rot} \text{rot} \underline{r} \cdot S^{(1)} = \underline{r} \times \text{grad} \Delta S^{(1)}$ (Δ - LAPLACEoperator) und $\underline{B}_r^{(0)} = - \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \underline{r}$ ($\phi^{(0)}$ - Potential von $\underline{B}^{(0)}$) ergibt sich statt Gln. (2.22a)

$$\underline{L}_p^{(1)} = - \mu_0^{-1} \int_{V_m} r \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} (\underline{r} \times \text{grad} \Delta S^{(1)}) dV.$$

Die Induktionsgleichung (2.15b) ergibt für $\Delta S^{(1)}$ (vgl. Kap. 2.1.1.):

$$\Delta S^{(1)} = \mu_0 \cdot \underline{\sigma}_m(r) \cdot \dot{\underline{S}}^{(0)}.$$

Sie zeigt formelmäßig, daß in diesem Iterationsverfahren das poloidale Feld erster Ordnung die Folge der Zeitvariationen des Feldes nullter Ordnung ist. Mit $\underline{r} \times \text{grad} \underline{\sigma}_m(r) = 0$ wird

$$\underline{L}_p^{(1)} = - \int_{V_m} r \cdot \underline{\sigma}_m(r) \cdot \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \cdot (\underline{r} \times \text{grad} \dot{\underline{S}}^{(0)}) dV. \quad (2.23)$$

Aus dieser Gleichung wird ersichtlich, daß sich das poloidale Kopplungsdrehmoment vollständig durch das geomagnetische Feld $\underline{B}^{(0)}$, seine Säkularvariation $\dot{\underline{B}}^{(0)}$ und die Parameter des Leitfähigkeitsmodells ausdrücken läßt, so daß dieser Drehmomentan-

teil entsprechend dem Typ (2) nicht von einem Modell der Kernoberflächenbewegung abhängig ist. Die Aufspaltung des Drehmomentvektors in Komponenten bezüglich eines geozentrischen Koordinatensystems (z.B. ROCHESTER /48/) ergibt in der hier benutzten Schreibweise:

$$L_{p,x}^{(1)} = \int_{V_m} r \cdot G_m(r) \frac{\partial \Phi^{(o)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \dot{S}^{(o)}}{\partial \varphi} \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{\sin \vartheta} + \frac{\partial \dot{S}^{(o)}}{\partial \vartheta} \sin \varphi \right) dV \quad (2.24a)$$

$$L_{p,y}^{(1)} = - \int_{V_m} r \cdot G_m(r) \frac{\partial \Phi^{(o)}}{\partial r} \left(\frac{-\partial \dot{S}^{(o)}}{\partial \varphi} \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{\sin \vartheta} + \frac{\partial \dot{S}^{(o)}}{\partial \vartheta} \cos \varphi \right) dV \quad (2.24b)$$

$$L_{p,z}^{(1)} = - \int_{V_m} r \cdot G_m(r) \frac{\partial \Phi^{(o)}}{\partial r} \frac{\partial \dot{S}^{(o)}}{\partial \varphi} dV \quad (2.24c)$$

mit

$$dV = r^2 \cdot dr \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$\Phi^{(o)} = R_E \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+1} \cdot \lambda_n^m \cdot P_n^m (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \quad (2.25)$$

$$\dot{S}^{(o)} = R_E \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \frac{1}{n} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+1} \cdot \lambda_n^m \cdot P_n^m (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi), \quad (2.26)$$

wobei $\Phi^{(o)}$ das bekannte Potential des $\underline{B}^{(o)}$ -Feldes ist und für $\dot{S}^{(o)}$ eine dementsprechende reelle Darstellung analog der Gln. (2.9) gewählt wurde. g_n^m und h_n^m sind dann die Koeffizienten der bekannten Entwicklung des Säkularvariationsfeldes nach Kugelfunktionen. Nach Ausführung der r-Integration unter Benutzung von Gln. (2.2b) kann die Integration über ϑ und φ mit Hilfe

der Rekursionsformeln von KAUTZLEBEN /35/ auf die bekannten Normierungsintegrale für P_n^m zurückgeführt werden. Aus den Gln. (2.24a) bis (2.24c) und (2.25), (2.26) erhält man:

$$L_{p,x}^{(1)} = -b \cdot \sum A_n \cdot \left[(g_n^m h_n^{m-1} - h_n^m g_n^{m-1}) B_n^{m-1} + (g_n^m h_n^{m+1} - h_n^m g_n^{m+1}) B_n^{m+1} \right] \quad (2.27a)$$

$$L_{p,y} = -b \cdot \sum A_n \cdot \left[(g_n^m h_n^{m-1} + h_n^m g_n^{m-1}) B_n^{m-1} - (g_n^m h_n^{m+1} + h_n^m g_n^{m+1}) B_n^{m+1} \right] \quad (2.27b)$$

$$L_{p,z} = 2b \sum m \cdot A_n \cdot (g_n^m h_n^m - h_n^m g_n^m) \quad , \quad \sum = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \quad , \quad b = 2\hat{n} \cdot G_0 \cdot R_c^5 \quad (2.27c)$$

$$A_n = \frac{n+1}{n(2n+1)(2n+\alpha-1)} \left(\frac{R_E}{R_c} \right)^{2n+4} \cdot \left[1 - (R_c/R_G)^{2n+\alpha-1} \right] \quad (2.27d)$$

$$B_n^{m\pm 1} = \sqrt{ \left[n(n+1) - m(m\pm 1) \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} (1 + \delta_{om}) \\ (1 + \delta_{o,m-1}) \end{array} \right\} } \quad (2.27e)$$

Für die Gln. (2.27a), (2.27b) und (2.27e) gilt für den Index $(m-1) : m \geq 1$.

Die x-Achse ist die äquatoriale Achse in Richtung des Nullmeridians $\varphi = 0$ und die y-Achse die äquatoriale Achse in Richtung $\varphi = 90^\circ$ östlicher Länge vom Erdmittelpunkt aus gesehen. Das Drehmoment $L_{p,z}^{(1)}$ ist identisch mit dem von STIX und ROBERTS /55/ berechneten. Für $L_{p,x,y}^{(1)}$ gibt es bisher keine vergleichbaren Ausdrücke. Wenn die Größe der Drehmomente $L_{p,x,y}^{(1)}$, wie später gezeigt wird, für die Beeinflussung der Polbewegung nicht ausreicht, dann ist nachgewiesen, daß die Polbewegung durch die reinen Zeitvariationen des beobachteten Erdmagnetfeldes im Mantel nicht verändert wird. Weiterhin ist ersichtlich, daß $L_{p,z}^{(1)}$ für rein axialsymmetrische Felder verschwindet und die axialsymmetrischen Anteile von $B^{(0)}$ zu $L_{p,z}^{(1)}$ keinen Beitrag liefern. Schließlich erkennt man an den Gln. (2.27), daß für $\alpha \gg n$ und $R_G \gg R_c$ auch die poloidalen LORENTZdrehmomente annähernd die Abhängigkeit von G_0/α haben.

Mit den Werten für R_0 und α in Gln. (2.3) ist $(R_c/R_0)^{2n+\alpha-1}$ bereits für $n=1$ etwa 10^{-6} und kann für numerische Zwecke weggelassen werden, so daß $\underline{L}_p^{(1)}$ nur über $(R_E/R_c)^{2n+4}$ vom Radius abhängt. Erst bei dünn-schichtigen Leitfähigkeitsmodellen muß der vollständige Ausdruck (2.27d) für \underline{A}_n benutzt werden. Die Summation in den Gln. (2.27a,b) ist vereinfacht worden, indem die für die oberen Indizes übliche Vereinbarung $0 \leq (m+1) \leq n$ angewendet wird.

Zur Berechnung des toroidalen Kopplungsdrehmoments nach Gln. (2.22c) wird die Definitionsgleichung $\underline{B}_t^{(1)} = \text{rot } \underline{T}^{(1)}$ benutzt. Nach wenigen Umformungen erhält man

$$\underline{L}_t^{(1)} = \mu_0^{-1} R_c^4 \int_{\vartheta, \varphi} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \text{grad}_H T^{(1)} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi, \quad (2.28a)$$

worin $\text{grad}_H = \text{grad} - \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r}$ ist und die Felder bei R_c^+ zu nehmen sind. Im geozentrischen Koordinatensystem folgt dann:

$$\underline{L}_{t,x}^{(1)} = \mu_0^{-1} R_c^3 \int \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) d\vartheta \cdot d\varphi \quad (2.28a)$$

$$\underline{L}_{t,y}^{(1)} = \mu_0^{-1} R_c^3 \int \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) d\vartheta \cdot d\varphi \quad (2.28b)$$

$$\underline{L}_{t,z}^{(1)} = -\mu_0^{-1} R_c^3 \int \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \vartheta} \sin^2 \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad (2.28c)$$

Die Kugelfunktionsentwicklung von $W^{(uB)}$ im reellen Zahlenbereich führt auf cos- und sin-Koeffizienten $W_n^{m,c}$ und $W_n^{m,s}$. Diese werden über die Gln. (2.17a) entsprechenden Koeffizienten einer endlichen Reihenentwicklung von $T^{(1)}$ nach Kugelfunktionen zugeordnet. Damit ergibt sich:

$$T^{(1)}(R_c^+) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^j \frac{P_j^k(\cos \vartheta)}{q_j(R_c^+)} \cdot (W_j^{k,c}(R_c^+) \cos k\varphi + W_j^{k,s}(R_c^+) \sin k\varphi) \quad (2.29)$$

Für die ϑ -Integration wurden einige Rekursionsformeln von KAUTZLEBEN /35/ benutzt, um die ursprünglichen Ausdrücke unter den Integralen in solche umzuwandeln, auf die die Normierungsbedingungen anwendbar sind. Die beiden wesentlichen abgeleitete-

ten Rekursionsformeln sind ($j \geq 2$):

$$\frac{\partial P_j^{m-1}}{\partial \vartheta^j} \cos \vartheta \sin \vartheta - (m-1)P_j^{m-1} = -\frac{1}{2j+1} \left[j \cdot P_{j+1}^m + (j+1) \cdot P_{j-1}^m \right] \cdot \sin \vartheta \quad (m \geq 1)$$

und

$$\frac{\partial P_j^{m+1}}{\partial \vartheta^j} \cos \vartheta \sin \vartheta + (m+1)P_j^{m+1} = \left[\frac{(j+1)(j+m)(j+m+1)}{2j+1} P_{j-1}^m + \frac{j(j-m)(j-m+1)}{2j+1} P_{j+1}^m \right] \cdot \sin \vartheta .$$

Die für die Integration in Gln. (2.28c) notwendige Rekursionsformel wurde von ROCHESTER /47/ veröffentlicht. Da im reellen Bereich gearbeitet wird, gilt nachfolgend die Vereinbarung, daß $h_n^0 = 0$, $n \geq 1$ und $W_q^1 = 0$ für $l < 0$. Damit lassen sich die Summationsgrenzen vereinheitlichen. Nach einer aufwendigen Rechnung folgt schließlich:

$$L_{t,x}^{(1)} = \sum_n \left\{ \frac{n-1}{2n-1} \frac{1}{q_{n-1}} \left[(n-m)(n-m-1) (g_n^{m,m+1,c} + h_n^{m,m+1,s}) - (g_n^{m,m-1,c} (1 + \delta_{o,m-1}) + h_n^{m,m-1,s} (1 - \delta_{o,m-1})) \right] + \frac{n+2}{2n+3} \frac{1}{q_{n+1}} \left[(n+m+1)(n+m+2) (g_n^{m,m+1,c} + h_n^{m,m+1,s}) - (g_n^{m,m-1,c} (1 + \delta_{o,m-1}) + h_n^{m,m-1,s} (1 - \delta_{o,m-1})) \right] \right\} \quad (2.30a)$$

$$L_{t,y}^{(1)} = \sum_n \left\{ \frac{n-1}{2n-1} \frac{1}{q_{n-1}} \left[(n-m)(n-m-1) (g_n^{m,m+1,s} - h_n^{m,m+1,c}) + (g_n^{m,m-1,s} (1 - \delta_{o,m-1}) - h_n^{m,m-1,c} (1 + \delta_{o,m-1})) \right] + \frac{n+2}{2n+3} \frac{1}{q_{n+1}} \left[(n+m+1)(n+m+2) (g_n^{m,m+1,s} - h_n^{m,m+1,c}) + (g_n^{m,m-1,s} (1 - \delta_{o,m-1}) - h_n^{m,m-1,c} (1 + \delta_{o,m-1})) \right] \right\} \quad (2.30b)$$

$$L_{t,z}^{(1)} = -2a \sum Z_n \left\{ \frac{(n-1)(n-m)}{(2n-1)q_{n-1}} (g_n^{m_W m, c} + h_n^{m_W m, s}) - \frac{(n+2)(n+m+1)}{(2n+3)q_{n+1}} (g_n^{m_W m, c} + h_n^{m_W m, s}) \right\} \quad (2.30c)$$

mit

$$\sum = \sum_{n=1}^K \sum_{m=0}^n, Z_n = \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{R_E}{R_C} \right)^{n+2} (\lambda_n^m)^{-1}, a = -2 \cdot \pi \cdot G_0 \cdot R_C^3 \quad (2.30d)$$

sowie die zusätzliche Vereinbarung $(m-1) \geq 0$.

Bei der Vereinheitlichung der Summen wurde weiterhin beachtet, daß die entsprechend der Rekursionsformeln ursprünglich bei $n=2$ beginnenden Teilsummen wegen des Faktors $(n-1)$ auch bei $n=1$ beginnen können. Die Summationsgrenzen K und L hängen von denen der Reihenentwicklungen für $T^{(1)}$ und $W^{(uB)}$ ab. Sie werden in praktischen Anwendungsfällen konkretisiert. Die Formel (2.30c) ist mit der Formel (2.24) von ROBERTS /51/ identisch, wenn man ${}^*P_{n,m} = W_n^m R_C^{-1}$, d. h., den Unterschied in den Definitionen des Potentials mit $\underline{u} \times \underline{B}$ beachtet.

Mit Gln. (2.30a-c), (2.11) und $S^{(0)}$ wie in Gln. (2.26) sind die allgemeinsten Ausdrücke für die Darstellung der toroidalen Kopplungsdrehmomente $\underline{L}_t^{(1)}$ des Typs (1) gegeben. Der Zusammenhang zur Kugelfunktionsentwicklung des geomagnetischen Potentialfeldes wird in nachfolgender Konkretisierung auf das \underline{u} -Feld (2.6) noch deutlicher hervorgehoben.

2.4. Die Berechnung der toroidalen Kopplungsdrehmomente für ein Modell der starren Rotation einer Kernoberflächenschicht

Für numerische Analysen wurde das einfache Modell (2.6) zur Berechnung der Randwerte des toroidalen Feldes benutzt. Mit Gln. (2.17c) und der Darstellung von $S^{(0)}$ analog der Gln. (2.26) erhält man:

$$W_n^m \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} = R_c^2 \cdot \omega \cdot \left\{ \frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)} \cdot \left(\frac{R_E}{R_c}\right)^{n+3} \cdot \lambda_{n+1}^m \cdot \begin{bmatrix} g_{n+1}^m \\ h_{n+1}^m \end{bmatrix} - \frac{(n-m)}{2n-1} \cdot \left(\frac{R_E}{R_c}\right)^{n+1} \cdot \lambda_{n-1}^m \cdot \begin{bmatrix} g_{n-1}^m \\ h_{n-1}^m \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.31)$$

wobei die Indizes c oder s die Koeffizienten g_1^m oder h_1^m der eckigen Klammern betreffen. Da $W_1^{0,s} = 0$ ist, lassen sich die Faktoren $(1 - \delta_{0,m-1})$ in Gln. (2.30) formal auf $(1 + \delta_{0,m-1})$ umschreiben, was die Zusammenfassung von Ausdrücken erleichtert. Die Berechnung der Kopplungsdrehmomente aus Gln. (2.30) beläuft sich dann auf umfangreiche aber einfache algebraische Operationen, in deren Ergebnis sich folgende Darstellung ergibt:

$$L_{t,x}^{(1)} = 2\tilde{\pi} \cdot \omega \cdot \zeta_0 \cdot R_c^5 (S_{x,1} - S_{x,2} + S_{x,3} + S_{x,4}) \quad (2.32a)$$

$$L_{t,y}^{(1)} = 2\tilde{\pi} \cdot \omega \cdot \zeta_0 \cdot R_c^5 (-S_{y,1} - S_{y,2} + S_{y,3} + S_{y,4}) \quad (2.32b)$$

$$L_{t,z}^{(1)} = 4\tilde{\pi} \cdot \omega \cdot \zeta_0 \cdot R_c^5 (S_{z,1} + S_{z,2} - 2 S_{z,3}) \quad (2.32c)$$

$$S_{x,1} = \sum B_n B_n^m (g_n^m g_{n+2}^{m-1} + h_n^m h_{n+2}^{m-1}), \quad (m-1) \geq 0 \quad (2.33a)$$

$$S_{x,2} = \sum B_n B_n^m (g_n^m g_{n+2}^{m+1} + h_n^m h_{n+2}^{m+1}) \quad (2.33b)$$

$$S_{x,3} = \sum G_n G_n^m (g_n^m g_n^{m+1} + h_n^m h_n^{m+1}) \quad (2.33c)$$

$$S_{x,4} = \sum G_n G_n^m (g_n^m g_n^{m+1} + h_n^m h_n^{m+1}) \quad (2.33d)$$

$$S_{y,1} = \sum B_n B_n^m (g_n^m g_{n+2}^{m-1} - h_n^m h_{n+2}^{m-1}), \quad (m-1) \geq 0 \quad (2.34a)$$

$$S_{y,2} = \sum B_n B_n^m (g_n^m g_{n+2}^{m+1} + h_n^m h_{n+2}^{m+1}) \quad (2.34b)$$

$$S_{y,3} = \sum G_n G_n^m (g_n^m g_n^{m+1} - h_n^m h_n^{m+1}) \quad (2.34c)$$

$$S_{y,4} = \sum \bar{C}_n \bar{C}_n^m (g_n^m h_n^{m+1} - h_n^m g_n^{m+1}) \quad (2.34d)$$

$$S_{z,1} = \sum \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n+4} \frac{(n+1)^2 (n-1) (n^2 - m^2)}{n(2n-1)(2n+1)^2 q_{n-1}} \cdot \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right] \quad (2.35a)$$

$$S_{z,2} = \sum \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n+4} \frac{(n+1)(n+2) ((n+1)^2 - m^2)}{(2n+1)^2 (2n+3) q_{n+1}} \cdot \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right] \quad (2.35b)$$

$$S_{z,3} = \sum \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n+6} \frac{(n+1)(n+3)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5) q_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_{n+2}^m}{\lambda_n^m} \cdot \left[(g_n^m g_{n+2}^m + h_n^m h_{n+2}^m) \right] \quad (2.35c)$$

$$B_n = \frac{2}{q_{n+1}} \frac{(n+1)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \cdot \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n+6} \quad (2.36a)$$

$$\bar{C}_n = \frac{1}{q_{n+1}} \frac{(2m+1)(n+1)(n+2)}{(2n+1)^2 (2n+3)} \cdot \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n+4} \quad (2.36b)$$

$$C_n = \frac{1}{q_{n-1}} \frac{(2m+1)(n-1)(n+1)^2}{n(2n-1)(2n+1)^2} \cdot \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n+4} \quad (2.36c)$$

$$\bar{C}_n^m = \sqrt{(n-m)(n+m+1)(1 + \delta_{om}^m)} \quad (2.36d)$$

$$B_n^m = \sqrt{(n+m+1)(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(1 + \delta_{o,m-1}^m)}, \quad (m-1) \geq 0 \quad (2.36e)$$

$$\bar{B}_n^m = \sqrt{(n-m+1)(n+m+1)(n+m+2)(n+m+3)(1 + \delta_{om}^m)} \quad (2.36f)$$

$\sum = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n$, ($m \geq 0$ bis auf die Gln. (2.33a), (2.34a) und (2.36e)).

Mit den vorstehenden Formeln lassen sich die Kopplungsdrehmomente vollständig aus dem Erdmagnetfeld, den Parametern des Leitfähigkeitsmodells und der Rotationsgeschwindigkeit ω einer kernoberflächennahen Schicht berechnen. q_n ist Gln. (2.17a) für $r=R_C$ zu entnehmen. Für numerische Zwecke wird die Näherung (2.18) verwendet, d.h. $q_n \approx \infty$. Hierbei wird die Abhängigkeit

der toroidalen Kopplungsdrehmomente von G_0/α besonders deutlich.

Die axialen LORENTZdrehmomente lassen sich mit den Ergebnissen anderer Autoren vergleichen. Für das poloidale Drehmoment und Gln. (2.30c) wurde das bereits getan. ROCHESTER /47/ hat für $G_m = \text{const.}$ einen analogen Ausdruck für $L_{t,z}$ berechnet, wie er aus Gln. (2.35) zu entnehmen ist. Das entspricht dem Fall $\alpha = 0$. In diesem Fall wird $q_{n1} \approx n$. Wenn man für q_{n1} in Gln.(2.35) n einsetzt, so gehen unter Beachtung der Vereinheitlichung der unteren Summationsindizes die Gln. (2.32c) mit (2.35) in die ROCHESTERschen Formeln über. BRAGINSKIJ und FIŠMAN /8/ haben ohne Angabe des Lösungsweges $L_{t,z}^{(1)}$ für das Leitfähigkeitsmodell (2.2b) angegeben. In ihren Differentialgleichungen (Gln. "(7)") ist ein von STIX /54/ festgestellter Fehler enthalten, so daß auf einen weiteren Vergleich verzichtet wird. Bezüglich der äquatorialen LORENTZdrehmomente gibt es keine vergleichbaren Ergebnisse in der Literatur.

Mit Gln. (2.27) und (2.32) bis (2.36) ist man in der Lage, die LORENTZdrehmomente $\underline{L}^{(1)} = \underline{L}_t^{(1)} + \underline{L}_p^{(1)}$ aus praktischen Angaben zum Magnetfeld der Erde und seiner Säkularvariation zu ermitteln, wenn ω bekannt ist. Die \underline{L} -Werte hängen dann nur noch vom Leitfähigkeitsmodell ab, dessen Parameter über die hier benutzten Werte hinausgehend in physikalisch sinnvollen Grenzen variiert werden können.(z.B. unter Beachtung $G_0/\alpha = \text{const.}$ und $\tau_2 = \text{const.}$). Bei der Ableitung der Ergebnisse zur Größe der LORENTZdrehmomente ist dies zu beachten.

3. Die Berechnung der Parameter des Geschwindigkeitsfeldes an der Kernoberfläche

Das Geschwindigkeitsfeld \underline{u} des Kerns kann aufgrund der kinematischen Behandlung des Problems in seinen Parametern q_1^k und p_1^k vorgegeben werden. Durch sukzessives Probieren mit Hilfe wahrscheinlicher Parameterwerte (z.B. mit den Dynamoerregungsbedingungen konsistente) wäre eine Anpassung der berechneten LORENTZdrehmomente (2.30) an solche aus Erdrotationsdaten ermittelten Drehmomente denkbar. Diese \underline{u} -Felder müssen jedoch

auch mit den Variationen des geomagnetischen Feldes konsistent sein. Wenn die Kernleitfähigkeit genügend hoch ist, dann kann in der Gleichung für den magnetischen Fluß \underline{B}^C im Kern (KRAUSE und RÄDLER /38/)

$$\frac{-1}{\mu_0 \cdot \sigma_c} \Delta \underline{B}^C - \text{rot } \underline{u} \times \underline{B}^C + \dot{\underline{B}}^C = 0$$

der durch Diffusion bedingte Anteil $(\mu_0 \cdot \sigma_c)^{-1} \cdot \Delta \underline{B}^C$ gestrichen werden. Die Gleichung reduziert sich dann auf

$$\dot{\underline{B}}^C = \text{rot } \underline{u} \times \underline{B}^C . \quad (3.1)$$

Die Gültigkeit dieser Näherung wird in der Literatur noch diskutiert. Wie BACKUS /1/ zeigte, gilt sie für Variationen des Magnetfeldes nahe an der Kern-Mantel-Grenze, deren räumliche Skala größer als 600 km (entspricht $n \leq 6$) und deren Skala im Zeitbereich nicht größer als einige hundert Jahre ist. Für die hier durchgeführten Schätzungen der LORENTZdrehmomente erster Ordnung sind diese Bedingungen (mit $n \leq 5$ und $10 \text{ a} \leq T \leq 100 \text{ a}$) erfüllt und die durch den Näherungscharakter von Gln. (3.1) entstehenden Abweichungen, gemessen an den Fehlern des Datenmaterials, gering. Die Gln. (3.1) ist als Gleichung der sog. "frozen-field-theory" der Säkularvariation bekannt. Wenn \underline{B}^C er-rechenbar ist, dann läßt sich \underline{u} mit Gln. (3.1) auf inversem Wege bestimmen. Die Schätzung der \underline{u} -Feldparameter erfolgt hier mit der Methode der kleinsten Quadrate. Entsprechend der Gln. (3.1) werden die im tiefen Kerninnern durch Dynamoprozesse erzeugten Felder (Perioden $> 10^3 \text{ a}$) mit den Bewegungen des fluiden Materials in den Kernoberflächenschichten mitgeführt und dadurch deformiert und zeitlich variiert. Kleinskalige Bewegungen, wie sie in einer sehr dünnen Schicht unmittelbar an der Kern-Mantel-Grenze vorkommen könnten, klammert man i.a. aus der Betrachtung aus. Dazu wird angenommen, daß sich das \underline{B} -Feld in radialer Richtung über diese Schicht hinweg wenig ändert, so daß man die untere Fläche dieser Schicht in Bezug auf das Verhalten $\underline{B}(r)$ mit der Kernoberfläche identifizieren kann.

Wie BACKUS /1/ zeigte, sind die Lösungen des inversen Problems zu Gln. (3.1) i.a. nicht eindeutig. Zu dem Vektor $\underline{u} \times \underline{B}$

läßt sich nämlich ein vorläufig willkürlicher Gradient eines skalaren elektrostatischen Potentials hinzuaddieren. Die Willkür läßt sich dabei soweit einschränken, daß man nur gewisse Klassen von Potentialfunktionen zuläßt, die physikalisch sinnvoll sind (BACKUS /1/, MUTH /43/) oder \underline{u} selbst eine physikalische Bedingung auferlegt (z.B. $\underline{u} = \text{"Westdrift"}$ oder $\underline{u} = \text{"Lösung der Navier-Stokes-Gleichung"}$). Für endliche \underline{u} -Feldentwicklungen des Typs (2.4), (2.5) erhält man zwar einen eindeutigen Satz von Koeffizienten p_1^k, q_1^k , dies jedoch im Sinne einer optimalen Approximation. Wenn die Zahl der Parameter q_1^k, p_1^k aufgrund einer physikalischen Tatsache beschränkt ist, dann ergibt sich eine eindeutige Lösung, sofern das numerische Problem eindeutig lösbar ist. Das ist der Fall, wenn die Zahl der freien Parameter des \underline{u} -Feldes kleiner (oder gleich) der Anzahl der verfügbaren Feldkoeffizienten ist. Für das hier behandelte Driftmodell ist das unproblematisch. Im Falle des Driftmodells (2.6) erhält man ein ziemlich grobes Modell der Feldvariationen. Nach bisherigen Untersuchungen (KAHLE et al. /33/; VESTINE et al. /58/, /59/; STIX und ROBERTS /55/; ...) hat die Kern-drift jedoch einen für die Größenordnung des \underline{u} -Feldes repräsentativen Wert, so daß das Gesamtverhalten der Kern-Mantel-Kopplung mit dieser Näherung studiert wurde. Wegen der Existenz einer Berechnungsmethode von \underline{u} -Feldparametern aus dem \underline{B} -Feld und seinen Variationen erweist sich ein Ausprobieren der Parameter als überflüssiger Schritt.

In folgendem wird das \underline{u} -Feld nahe der Kern-Mantel-Grenze ermittelt. Wegen $\underline{u} \cdot \underline{r} = 0$ bei $r = R_C^-$ und $\text{div } \underline{u} = 0$ folgt aus Gln. (3.1) für die radiale Komponente von \underline{B}^C :

$$\dot{B}_r^C = - B_r^C \cdot \text{div}_H \underline{u} - \underline{u} \cdot \text{grad}_H B_r^C = - \text{div}_H (B_r \cdot \underline{u}). \quad (3.2)$$

Wenn man annimmt, daß nahe der Kernoberfläche ($\partial u_p / \partial r$) = 0 gilt, dann folgt aus Gln. (3.2)

$$\dot{B}_r^C = - \underline{u}_t \cdot \text{grad}_H B_r^C. \quad (3.3)$$

Dies ist wie folgt zu zeigen. Wenn man die Formeln (2.5), (2.4) für \underline{u}_p benutzt, dann ist nach gewöhnlichen Umformungen (s.auch

SMYLIE /53/, S. 171):

$$(\underline{u}_p)_r = \sum_{1,k} \frac{l(l+1)}{r} \cdot p_1^k \cdot y_1^k$$

$$(\underline{u}_p)_{\varphi} = \sum_{1,k} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r p_1^k) \right] \cdot \frac{\partial y_1^k}{\partial \varphi}$$

$$(\underline{u}_p)_{\varphi} = \sum_{1,k} \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r}(r p_1^k) \right] \cdot \frac{\partial y_1^k}{\partial \varphi}$$

Mit $u_r = (\underline{u}_p)_r = 0$ verschwinden alle p_1^k und mit $(\partial u_r / \partial r) = -\text{div}_H \underline{u} = 0$ auch $\partial(r p_1^k) / \partial r$, d.h., \underline{u}_p und $B_r^c \cdot \text{div}_H \underline{u}$ verschwinden insgesamt. Die Annahme $(\partial u_r / \partial r) = 0$ scheint nach WHALER /60/ anhand der Felddaten begründbar zu sein. Die Untersuchungen zu dieser Annahme sind jedoch noch nicht abgeschlossen (z.B. MUTH /43/). Sie bedeutet, daß im Kern nahe der Kernoberfläche keine aufsteigenden und absinkenden Materieströmungen existieren. Für die starre Rotation einer kernoberflächennahen Schicht, aber auch für zonale \underline{u} -Felder der Art

$$\underline{u} = (0, 0, u_{\varphi}), \quad u_{\varphi} = R_c \cdot \sin \vartheta \cdot \sum_{l=0}^A \xi_l \cdot P_l(\cos \vartheta) \quad (3.4)$$

ist diese Bedingung durch die Wahl des Modells aus der Betrachtung ausgeklammert. Die Driftgeschwindigkeit ω ist ein spezieller (entarteter) Fall der zonalen Bewegungen und entspricht der Festlegung $l=A=0$ in Gln. (3.4). Für diesen Fall müssen sich für ω nicht die gleichen Werte wie für ξ_0 bei $A > 0$ ergeben. Inwieweit ω dem Wert ξ_0 für $A \rightarrow \infty$ beliebig nahe kommen kann, hängt davon ab, ob es tatsächlich eine starre Rotation einer kernoberflächennahen Schicht im Sinne einer Festkörperbewegung gibt. I.a. stellt ω jedoch die gröbste Näherung einer fluiden Bewegung dar, von der in Gln. (3.4) nur die zonalen Anteile betrachtet werden.

Im Fall zonalen Bewegungen ist die Ermittlung der ξ_l niedrigen Grades möglich (STIX und ROBERTS /55/). Das setzt voraus, daß man die radiale Komponente B_r des \underline{B} -Feldes kennt. Die radiale Komponente eines Feldes gehört ausschließlich zum poloi-

dalen Anteil dieses Feldes. Das magnetische Feld an der Erdoberfläche ist z.B. poloidaler Natur. Wegen der Randbedingung $B_r^C(R_C^-) = B_r(R_C^+)$ ist B_r^C bei R_C^- durch die radiale Komponente des auf die Kern-Mantel-Grenze extrapolierten geomagnetischen Oberflächenfeldes ersetzbar. Es steht nur die Frage, nach welchem Gesetz die Extrapolation erfolgen soll. Nachfolgend wird für $B_r(R_C^+)$ das auf $r=R_C$ nach dem Potentialgesetz (s. $\Phi^{(0)}$ in Gln. (2.25)) extrapolierte magnetische Potentialfeld $B_r^{(0)}$ eingesetzt. Nach den Untersuchungen am Ende des Kap. 2.2.2. bleibt bei dem hier benutzten Leitfähigkeitsmodell dann die Zeitverschiebung τ_2 unberücksichtigt, die das Feld beim Durchgang durch den Mantel erfährt. Obwohl ihr Einfluß nach Kap. 2.2.2. gering ist, sollte sie bei der Auswertung der Ergebnisse beachtet werden.

Zur Bestimmung der Koeffizienten ξ_1 wird das Integral über die Kernoberfläche

$$\oint_{S_C} (\dot{B}_r^{(0)} + \frac{\partial B_r^{(0)}}{\partial \varphi} \cdot \sum_{l=0}^A \xi_1 \cdot P_l)^2 dS ,$$

entsprechend der Methode der kleinsten Quadrate, zum Minimum gemacht. Die Bestimmungsgleichungen für ξ_1 folgen aus der Minimumbedingung zu

$$\sum_{l=0}^A \xi_l \cdot T_{1a} = U_a \quad (3.5a)$$

$$T_{1a} = \oint_{S_C} P_l \cdot P_a \cdot \left(\frac{\partial B_r^{(0)}}{\partial \varphi} \right)^2 \cdot dS \quad (3.5b)$$

$$U_a = - \oint_{S_C} \dot{B}_r^{(0)} \cdot \frac{\partial B_r^{(0)}}{\partial \varphi} \cdot P_a \cdot dS \quad (3.5c)$$

In der Näherung $B_r(R_C^-) = B_r(R_C^+) = B_r^{(0)}(R_C)$ werden die Variationen von $B_r^{(0)}$ optimal durch ein äquivalentes Modell von Bewegungen der kernoberflächennahen Materie erklärt. Demzufolge werden die für die Berechnung des poloidalen Kopplungsdrehmo-

ments benutzten Zeitvariationen von $\underline{B}^{(0)}$ von dem gleichen Prozeß erzeugt, wie die der toroidalen Kopplungsdrehmomente $\underline{L}_t^{(1)}$. Obwohl für die Berechnung der poloidalen Kopplungsdrehmomente kein Bewegungsmodell des Kerns erforderlich war, besteht über die o.g. Erklärung der Variationen von $\underline{B}^{(0)}$ mit der frozen-field-theory theoretisch ein physikalischer Zusammenhang zu den Bewegungen im Kern. Wenn nun das ermittelte spezielle \underline{u} -Feld (2.6) die Säkularvariation $\dot{\underline{B}}^{(0)}$ nur schlecht approximiert, dann enthalten die poloidalen LORENTZdrehmomente im Vergleich zu den toroidalen auch jene Anteile aus Kernbewegungen und anderen Prozessen, die mit dieser speziellen Darstellung von \underline{u} nicht erfaßt werden, denn die poloidalen Drehmomente sind nicht von der Güte dieser Approximation abhängig.

Umgekehrt besteht im Rahmen der Berechnung der \underline{u} -Felder und damit der toroidalen LORENTZdrehmomente die Gefahr, daß die Feldvariationen aus dem Kerninneren durch den Modellzwang einem \underline{u} -Feld zugeschrieben werden, das es in der Realität nicht gibt. Das ist eine der Unsicherheiten der Bestimmung der toroidalen LORENTZdrehmomente aus Bewegungen an der Kernoberfläche. Diese Unsicherheiten der frozen-field-theory sind ein bisher noch nicht gelöstes Problem, an dem international gearbeitet wird. Durch Hinzuziehen weiterer geophysikalischer Informationen, wie der über die Mantelrotationsgeschwindigkeit ω_m , können diese Unsicherheiten eingeschränkt werden.

$B_r^{(0)}$ und $\dot{B}_r^{(0)}$ lassen sich mit $\Phi^{(0)}$ nach Gl. (2.25) darstellen. Damit ergibt sich im Spezialfall $l=0, A=0 \quad \zeta_0 = \omega$ zu:

$$\omega = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n m \cdot \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdot \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n} \cdot (g_n^m h_n^m - h_n^m g_n^m)}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n m^2 \cdot \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdot \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n} \cdot [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2]} \quad (3.6)$$

Wie bereits erwähnt, kann diese Größe als Driftgeschwindigkeit einer kernoberflächennahen Schicht interpretiert werden. Die in ihre Berechnung eingegangenen Näherungen bestehen (a) in dem einfachen Modellsatz (2.6) und (b) in den Annahmen $\zeta_c \rightarrow \infty$

und $B_r^+ = B_r^{(0)}(R_c)$.

Für große A in Gln. (3.4) kann ξ_0 verschieden von ω sein. Diesbezüglich gibt es eine weitere Aussage. STIX und ROBERTS /55/ haben auch für höhere l die Koeffizienten ξ_1 des zonalen -Feldes errechnet. Ihren Ergebnissen zufolge ändert sich ξ_0 mit wachsendem A und l wenig, die Anpassung ("excellence of fit") an das Säkularvariationsfeld wird jedoch besser. Daraus lassen sich zwei Konsequenzen ableiten. Mit ω aus Gln. (3.6) ist man in der Lage, im wesentlichen die Kernbewegungen zu erfassen, die mit einer starren Rotation beschreibbar sind. Zweitens bedeutet das jedoch, daß in dem Kopplungsmodell die Drehmomente $L_t^{(1)}$ solche Variationen des Feldes nicht erfassen, die Koeffizienten höheren Grades zugeordnet sind. Wenn sich die "excellence of fit" wesentlich verbessert, dann sind in dem hier benutzten Modell der Kopplung u.U. weitere Drehmomente 1. Ordnung ausgeklammert, die infolge zonaler Variationen des -Feldes entstehen.

Die Bestimmung höherer -Feldmoden setzt i.a. voraus, daß eine genügende Koeffizientenzahl g_n^m , ... vorliegt. Diese Frage wurde bei STIX und ROBERTS /55/ nicht diskutiert, stellt aber ein mathematisches Problem dar, dem bei der Fortführung der Untersuchungen mit komplizierteren Modellen des -Feldes Beachtung geschenkt werden muß.

Der bisher dargelegte Formalismus zur Berechnung der Driftgeschwindigkeit wurde der Arbeit von GREINER-MAI /21/ entnommen. Diese Arbeit enthält darüber hinausgehend Untersuchungen zur Abhängigkeit des Wertes ω vom Grad der Feldentwicklung des $B^{(0)}$ -Feldes, die numerischen Ergebnisse und die Spektren der Driftgeschwindigkeiten, von denen ein wesentlicher Teil im Kap. 5. vorgestellt wird.

Aus Gln. (3.3) läßt sich eine theoretische Schlußfolgerung in Bezug auf die axialsymmetrischen Anteile von B_r ableiten. Mit der Darstellung der Radialkomponente (vgl. mit u_p, r)

$$(B_r / \dot{B}_r) = \sum_{s,t} \frac{s(s+1)}{r} \cdot (S_s^t / \dot{S}_s^t) \cdot Y_s^t$$

folgt aus Gln. (3.3) nach einer kurzen Rechnung mit bereits benutzten Symbolen und den Definitionen (2.4), (2.5)

$$\dot{S}_n^m = (r(n+1)nA_n^m)^{-1} \cdot \sum_{s,t} \sum_{l,k} s(s+1) \cdot (S_s^t)^+ \cdot (q_l^k)^- \cdot \bar{L}_{sln}^{tkm}$$

mit

$$\bar{L}_{sln}^{tkm} = i \int_{S_c} \left(t \cdot P_s^t \cdot \frac{\partial P_l^k}{\partial \mathcal{L}} - k \cdot P_l^k \cdot \frac{\partial P_s^t}{\partial \mathcal{L}} \right) e^{i(k+t-m)\varphi} \cdot P_n^m \cdot d\mathcal{L} \cdot d\varphi \cdot$$

Die φ -Integration ergibt nur dann nicht Null, wenn $m=k+t$ ist. Das bedeutet, daß im Rahmen der frozen-field-Näherung mit einem axialsymmetrischen toroidalen \underline{u} -Feld ($k=0$) keine Variationen axialsymmetrischer \underline{B}_p -Feldmoden ($m=0, t=0$) erregt werden können ($\bar{L}_{\dots} = 0$). Die starke 52,5 a -Periode von \dot{g}_1^0 in Tab. 7 (1) muß daher ihre Ursache in einer anderen Bewegungsform haben, als sie mit Gln. (3.4) beschrieben werden kann.

4. Numerische Untersuchungen zum Verhalten der Kopplungsdrehmomente und Rotationsgeschwindigkeiten

4.1. Die Ausgangsdaten und ihre Verarbeitung

Für die numerische Berechnung aller hier verwendeten Größen wurden Daten aus der Literatur benutzt. Die Koeffizienten des Säkularvariationsfeldes \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m wurden von HODDER /26/ veröffentlicht. Diese Koeffizienten sind in Zeitabständen von zwei Jahren von 1903.5 bis 1975.5 angegeben. Von 1903.5 bis 1925.5 beträgt der Grad der Feldentwicklung $N=5$, von 1926.5 bis 1975.5 $N=6$. Für die numerische Analyse wurde einheitlich $N=5$ gesetzt. Nach HODDER /26/ ist eine Glättung über drei aufeinanderfolgende Werte in die Berechnung der \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m eingegangen. Die Spektren wurden daher für Perioden $T \geq 4a$ berechnet. Da den Daten vor 1926.5 lückenhaftes Beobachtungsmaterial zugrunde liegt, und zeitliche Überlappungen von Feldentwicklungen (Subperioden von 9a) vorgenommen wurden, sind in den folgenden Kapiteln nur die Perioden $T \geq 15a$ interpretiert und die kürzeren am Rande

behandelt worden. Das war jedoch nicht der alleinige Grund. Die Perioden mit $T \leq 15a$ haben erstens Amplituden innerhalb der Standardabweichung der Spektren, zweitens ergibt eine Überschlagsrechnung zur Amplitudenschwächung infolge der Mantelleitfähigkeit mit dem Leitfähigkeitsmodell (2.2b) und den exakten Lösungen der Induktionsgleichung des Mantels von GREINER-MAI /20/, daß für Perioden mit $T \leq 12,6a$ die Amplitudenschwächung bereits wesentlich wird ($> 10\%$). In fortführenden Arbeiten wird dieser Periodenbereich näher untersucht werden. Die Aussagen sollten außerdem mit Informationen aus Spektren zu Zeitreihen direkt beobachteter Feldwerte (Observatoriumsdaten) gestützt werden. Für die Koeffizienten g_n^m und h_n^m fehlen solche Zeitreihen, wie sie HODDER für \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m berechnet hat. Aus technischen Gründen ist es nicht möglich, in kurzer Zeit ein Programm für die Berechnung solcher Feldentwicklungen zu erstellen. Es wurde daher ein Hilfsmittel benutzt. Die g_n^m und h_n^m wurden durch lineare Interpolation und Zeitintegration aus den \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m ermittelt. Als Startentwicklung für $\underline{B}^{(o)}$ wurde das von BARRACLOUGH et al. /2/ veröffentlichte Feld von 1975.5 verwendet. Dieses Vorgehen stellt eine Unsicherheit der Arbeit hinsichtlich der Daten dar. Sie ist jedoch nicht größer als jene der \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m selbst. Die Zeitvariationen von ω_m und $\underline{L}^{(1)}$ werden hauptsächlich vom Verhalten der \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m bestimmt, so daß die Benutzung interpolierter Werte am Wesen der Ergebnisse nichts ändert (s.a. private Mitteilung von Prof. BRAGINSKIJ). Etwaige Fehler im Niveau der g_n^m , h_n^m (z.B. durch die Wahl des Anfangsfeldes) oder durch Interpolation bedingte Trendanteile werden durch die Trendelimination aus der weiteren Bearbeitung der Resultate entfernt. An der Erarbeitung von Zeitreihen der Feldentwicklungen unter Einbeziehung aller verfügbaren Daten wird in der UdSSR gearbeitet (GOLOVKOV et al. /19/), so daß in den nächsten Jahren präzisere Datenreihen auch für $\underline{B}^{(o)}$ zur Verfügung stehen.

Für den Vergleich mit den Erdrotationsparametern wurden die l.o.d.-Werte von MORRISON und STEPHENSON /42/ verwendet. Aus ihnen wurde für den Zeitraum 1901.5 bis 1975.5 die Änderung der Mantelrotationsgeschwindigkeit ω_m berechnet:

$$\omega_m = \omega_3 - \omega_0 = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_0} \approx -\frac{2\pi}{T_0^2} \cdot \Delta T \quad (4.1)$$

($\Delta T = \Delta l.o.d. = T - T_0$, T - Tageslänge, T_0 - Einheitstag).
 ω_m korrespondiert mit der üblicherweise verwendeten relativen Änderung der Rotationsgeschwindigkeit u_3 über $u_3 = \omega_m / \omega_0$. Aus ω_m wurde das mechanische Drehmoment

$$L_z^{mech} = C_m \cdot \dot{\omega}_m \quad (4.2)$$

(C_m - Hauptträgheitsmoment des Mantels) durch numerische Differentiation ermittelt. Die hier verwendeten Werte von L_z^{mech} entstammen einer privaten Mitteilung von Dr. JOCHMANN. Die numerische Differentiation führt möglicherweise zu Amplitudenfehlern, so daß L_z^{mech} lediglich zur Untersuchung des mittleren Zeitverhaltens weiterverwendet wurde. Für die numerische Interpretation einzelner Perioden wurde das Integral der Bewegungsgleichung (4.2) des Mantels und ω_m selbst benutzt.

Die Driftgeschwindigkeit des Kerns ω und die LORENTZdrehmomente $L_{x,y,z}^{(1)}$ wurden mit Gln. (3.6), (2.27) und den Gln. (2.32) bis (2.36) mit dem FORTRAN-4-Programm MOMENT auf einem Großrechner berechnet.

4.2. Bemerkungen zu den Auswertemethoden und den Fehlergrenzen

Von den Ergebniswerten wurde generell der lineare Trend abgezogen, ehe sie weiterverarbeitet wurden. Die in den Abb. 1 und 2 dargestellten Ergebniswerte sind demzufolge Variationen in bezug auf die in Tab. 4 angegebenen Trends. Für die grafische Darstellung wurden ω und $L_z^{(1)}$ über drei Werte gleitend gemittelt. ω_m und L_z^{mech} sind in der Originalform dargestellt. Die numerischen Analysen erfolgten generell mit den originalen Ergebniswerten aus den Tab. 1 bis 3. Ihre grafische Darstellung wurde von GREINER-MAI /21/, /22/ veröffentlicht. Die Trendelimination ist eine notwendige Voraussetzung für die Spektralberechnung. Sie führt zu einer Unsicherheit bei der Berechnung

hoher Perioden, die mit der Länge des Datenintervalls vergleichbar sind. Dies liegt daran, daß das benutzte Verfahren mit einer Grundperiode $T_g = 1000a$ arbeitet, die wesentlich größer als das Datenintervall $T_d = 72 a$ ist, so daß durch die Trendelimination hohe Perioden gefiltert werden. Im Bereich hoher Perioden lassen sich die Spektren dann vergleichen, wenn die Trends proportional sind. Das ist für C_0 und C_m und C_0 und $L_z^{(1)}$ der Fall. Eine unkritische Extrapolation der linearen Trends führt zu unphysikalischen Werten der betrachteten Größe für $t \gg T_d$. Lineare Trends können nur als grobe Näherung für einen langperiodischen Prozeß oder aperiodischen Verlauf verstanden werden. Sind solche Prozesse mit Perioden im Bereich der Datenintervalllänge vorhanden, so hängt der Trendverlauf von der Länge und dem Anfangszeitpunkt des Datenintervalls ab.

Für die Periodenanalyse wurden das Verfahren von JOCHMANN /29/ und das dazugehörige Rechenprogramm PERIODE verwendet. Das Verfahren läßt sich in drei Schritte einteilen: (1) die Trendelimination, (2) die Berechnung eines Grundspektrums nach den Formeln einer gewöhnlichen FOURIERanalyse, aber mit $T_g \gg T_d$, (3) die Korrektur der Hauptpeaks in bezug auf die im Schritt "(2)" vorausgesetzte Orthogonalität, die mit $T_g \gg T_d$ nicht gegeben ist. Das Verfahren entspricht der Methode der kleinsten Quadrate, wobei durch die Schritte (2) und (3) die Rechnung auf die Bestimmung der Hauptperioden eingeschränkt wird. Die Anzahl der zu korrigierenden Perioden ist durch die Vorgabe einer Amplitudenschwelle EMAX beschränkt, die willkürlich gewählt werden kann. Wird EMAX sehr klein vorgegeben, dann ergeben sich diskrete Spektren (s. GREINER-MAI /21/), in denen einige Peaks zum Rauschpegel gehören. Wenn man die durch Datenfehler bedingten Schwankungen Δx der analysierten Größe x kennt, dann läßt sich der mittlere Amplitudenfehler m_A mit N als Anzahl der Werte von x

$$m_A = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \Delta x \quad (4.3)$$

und der mittlere Periodenfehler m_T (A_x - Amplitude von x)

$$m_T = \frac{T}{2T} \cdot \frac{m_A}{A_x} \quad (4.4)$$

berechnen. Von GREINER-MAI /23/, /24/ wurden die Spektren für $\mathcal{C}\mathcal{S}$ und $L_z^{(1)}$ unter Festsetzung $EMAX = m_A$ nochmals berechnet. Sie sind in Bezug auf das Fehlerniveau realistischer und hier in Abb. 3, 4 dargestellt.

Vom Programm wird die Standardabweichung S_1 der Amplituden ermittelt (s.a. Tab. 6), die ein Maß für die Genauigkeit der Anpassung der entsprechenden FOURIERreihe an den realen Datenverlauf ist. Sie ist in den Abbildungen zu den Spektren als gestrichelte Linie eingetragen. Durch Variation von $EMAX$ kann der minimale Wert von S_1 ermittelt werden. Zur Ermittlung von $\Delta x = \Delta \mathcal{C}\mathcal{S}$ wurden die Standardabweichungen der g_n^m und h_n^m von HODDER /26/ benutzt. Unter Vernachlässigung mutmaßlicher Fehler der g_n^m und h_n^m konnte $\Delta \mathcal{C}\mathcal{S}$ stichprobenweise ermittelt werden: $\Delta \mathcal{C}\mathcal{S} = 0,4 \cdot 10^{-10} \text{s}^{-1}$. Bis auf die Werte um 1910.5 nimmt dieser Wert im Verlaufe der Zeit bis 1975.5 ab. Er führt auf einen mittleren Amplitudenfehler von $0,1 \cdot 10^{-10} \text{s}^{-1}$, der ungefähr gleich S_1 ist (s. Tab. 6). Die Periodenfehler nach Gln. (4.4) betragen dann für die Hauptperioden ($A_x \geq S_1$) von $\mathcal{C}\mathcal{S}$ für $T \approx 50a$ $m_T = \pm 5a$, für $T \approx 30a$ $m_T = \pm 3,4a$, für $T \approx 22a$ $m_T = \pm 1,8a$, für $T \approx 18a$ $m_T = \pm 3a$. Wegen der Struktur des LORENTZdrehmoments $L_z^{(1)} = K \cdot \mathcal{C}\mathcal{S}$ (s. Kap. 5.) kann die Fehlerabschätzung auf das magnetische Kopplungsdrehmoment übertragen werden und liefert $m_A = \pm 2,14 \cdot 10^{17} \text{ Nm}$, wodurch o.g. Perioden gemäß Tab. 6 ebenfalls signifikant sind. Die geschätzten Fehlerniveaus betreffen den Maximalfehler der Größen. Wie anhand der Spektren und ihres Vergleichs mit anderen Zeitreihen von Magnetfelddaten des öfteren ersichtlich ist, liegt der wahrscheinliche Fehler vermutlich bei niedrigeren Werten. Für $\mathcal{C}\mathcal{S}_m$ und L_z^{mech} ist keine Fehlerrechnung erfolgt. Als Fehlermaß ist dort S_1 zu verwenden.

5. Die Ergebnisse der Berechnung der Kerndriftgeschwindigkeit und Kopplungsdrehmomente

5.1. Die Größenordnung und das Zeitverhalten der Rotationsgeschwindigkeiten und Drehmomente

Die Ergebnisse der Berechnung der Kerndriftgeschwindigkeit und der LORENTZdrehmomente sind in den Tab. 1, 2 dargestellt. Die Tab. 3 enthält die Werte der Mantelrotationsgeschwindigkeit ω_m und des Drehmoments I_z^{mech} nach den Gln. (4.1), (4.2). In der Tab. 4 sind die Trendfunktionen angegeben. Wie die Tab. 2 ausweist, wurde auch die aus dem Dipolfeld nach Gln. (3.6), $N=1$, ermittelte Driftgeschwindigkeit ω_D (Dipoldrift) berechnet. Diese Erweiterung des Umfanges der Rechnungen schien von Interesse, weil man der Dipoldrift des öfteren andere Erzeugungsmechanismen zuschreibt, als der globalen Kerndrift (SCHMUTZER /57/, SZETO und SMYLIE /56/). Eine tiefere Interpretation der Dipoldrift ist jedoch fortführenden Arbeiten überlassen worden. Die Abb. 1 enthält die Variationen aller Drehmomentkomponenten gegenüber dem linearen Trend, die Abb. 2 die Rotationsgeschwindigkeiten ω und ω_m . Anhand dieser Ergebnisse lassen sich Aussagen über die Größenrelationen der Variationen der Drehmomentkomponenten gegenüber dem Trend ableiten. Eine einfache Betragsmittelung über die Zeit ergibt (Einheit 10^{17} Nm):

$$\begin{aligned} |\Delta I_x^{(1)}| &= 0,52 & |\Delta I_z^{(1)}| &= 2,56 \\ |\Delta I_y^{(1)}| &= 0,54 & |\Delta I_z^{mech}| &= 2,50 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Daraus folgt:

- (1) Die Variationen der axialen magnetischen Kopplungsdrehmomente haben genau die erforderliche Größe wie die für die Erregung der Variationen der Erdrotation erforderlichen mechanischen Drehmomente.
- (2) Die Variationen der äquatorialen Kopplungsdrehmomente sind um ca. zwei Größenordnungen kleiner, als es für die Erre-

gung der Variationen der Polbewegung erforderlich ist
($2 \cdot 10^{18}$ Nm, s. JOCHMANN /32/).

Diese Drehmomentrelationen stimmen mit den von ROCHESTER und SMYLLIE /50/ für einzelne Felddarstellungen geschätzten überein. Aufgrund dieser Relationen werden die äquatorialen Kopplungsdrehmomente in den nachfolgenden Kapiteln nicht mehr behandelt. Aus Abb. 1b läßt sich ein Hinweis für eine mögliche spätere Interpretation geben. RUNGORN /52/ hat theoretisch nachgewiesen, daß deltaimpulsförmige Drehmomentvariationen der äquatorialen Drehmomente, deren Amplitude vergleichbar mit der Größenordnung von L_z^{mech} sind, in der Lage wären, die beobachteten Variationen der Polbewegung zu erregen. Die Variation von $L_y^{(1)}$ um 1915.5 ist zwar kein Deltaimpuls, könnte jedoch einen solchen im Sinne einer Detektorwirkung anzeigen. Seiner Breite entspricht eine Halbperiode von ca. 10a.

Das zweite Ergebnis ist von Bedeutung für die Modellierung des Kopplungsprozesses und betrifft den Zusammenhang zwischen $L_z^{(1)}$ und \mathcal{C} . Entsprechend der Abb. 1c und 2a, aber auch der Abb. 3c und 4a verhält sich $L_z^{(1)}$ in bezug auf die Variationen der Rotationsgeschwindigkeit \mathcal{C} einer Kernoberflächenschicht wie ein Drehmoment von Reibungskräften:

$$L_z^{(1)}(t) = K \cdot \mathcal{C}(t) \quad (5.2)$$

Der Faktor K wurde mit der Methode der kleinsten Quadrate (a) aus den originalen Zeitverläufen $L_z^{(1)}(t_1)$ und $\mathcal{C}(t_1)$ (b) aus den synthetischen Verläufen (FOURIERSynthese aus Spektromdaten) und (c) aus den Spektren der beiden Größen ermittelt. Mit einer Abweichung von weniger als 1 % zwischen den Ergebnissen der drei Methoden ergab sich:

$$K = 2,03 \cdot 10^{28} \text{ Nms} \quad (5.3)$$

Der Vergleich der Spektren ergibt, daß K im wesentlichen zeitlich konstant ist. Damit kann das Kopplungsproblem in Bezug auf die Felddausbreitung im Bereich dekadischer Variationen wie

ein stationäres behandelt werden. Einschränkungen dazu werden im Kap. 6.3. diskutiert. Nach den Aussagen des Kap. 2. sind die toroidalen Kopplungsdrehmomente vom retardierenden Typ $K \cdot \mathcal{C}$, wobei K quadratische Formen des $\underline{B}^{(0)}$ -Feldes enthält (s. Gln. (2.35)). Der poloidale Anteil von $L_z^{(1)}$ war theoretisch nicht vom Modell des Kerns abhängig. Mit Gln. (5.2) läßt sich das axiale Gesamtdrehmoment der LORENTZkräfte $L_z^{(1)} = L_{t,z}^{(1)} + L_{p,z}^{(1)}$ jedoch als retardierendes Drehmoment in Bezug auf \mathcal{C} klassifizieren. Wenn \mathcal{C} mit der Geschwindigkeit der starren Rotation endlich dicker Kernoberflächenschichten gleichgesetzt werden kann, dann wirkt Gln. (5.2) zufolge das geomagnetische Feld der Änderung von \mathcal{C} entgegen. Falls man die Kopplung ausschließlich der Wirkung von Magnetfeldern zuschreibt, dann müssen die Kräfte, die die Variationen von \mathcal{C} erzeugen, vom toroidalen Anteil des Kernfeldes kommen.

Das dritte Ergebnis betrifft die Zeitverläufe der betrachteten Größen. Der Verlauf von $L_z^{(1)}$ in Abb. 1c ist mit dem von STIX und ROBERTS /55/ (Fig. 6) für zonale Kernrotationen berechneten vergleichbar. Wie die Autoren aus dem Einfluß der verschiedenen ξ_1 (s. Gln. (3.4)) auf $L_z^{(1)}$ folgern, ist die Driftgeschwindigkeit ξ_0 der für die Entstehung und den Verlauf von $L_z^{(1)}$ dominierende Bewegungsparameter. Ein Vergleich der Ergebnisse mit den Parametern der Mantelrotation zur Beurteilung des Kopplungsprozesses ist daher sinnvoll.

Anhand der Gegenüberstellung von \mathcal{C} und \mathcal{C}_m sowie $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} lassen sich erste Schlüsse zum Kopplungsprozeß ziehen. Wenn $\Delta\mathcal{C}$ die Variation der Rotationsgeschwindigkeit einer Schicht des äußeren Kerns in bezug auf einen Anfangszeitpunkt beschreibt, dann müßte entsprechend dem Drehimpulserhaltungssatz für die insgesamt kräftefreie Erde $\Delta\mathcal{C}$ zu $-\Delta\mathcal{C}_m$ proportional sein. Daß eine strenge Korrelation zwischen $\Delta\mathcal{C}$ und $-\Delta\mathcal{C}_m$ nicht besteht, zeigt der Vergleich der Abb. 2a und 2c. Es ist jedoch möglich, durch eine Zeitverschiebung der beiden Verläufe, die physikalisch noch zu begründen ist, eine optimale Anpassung an dieses Modell zu erreichen.

Aus Abb. 1c wird ersichtlich, daß $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} ebenfalls verschiedenes Zeitverhalten aufweisen und die ausgewogene Bilanz in Gln. (5.1) lediglich das mittlere Verhalten betrifft.

Die Differenz zwischen beiden Drehmomenten ist im Mittel nicht gleich Null. Die einfachste physikalische Erklärung dafür folgt aus dem retardierenden Charakter der Drehmomente $L_z^{(1)}$: L_z^{mech} beschreibt die Gesamtheit aller am Mantel angreifenden Drehmomente, $L_z^{(1)}$ jedoch nur jene sich auf eine Änderung von Ω einstellenden Rückwirkungen. Das postulierte Modell des \underline{u} -Feldes erklärt wegen der kinematischen Behandlung des Problems nicht, wie es zu den Variationen der Geschwindigkeitsparameter kommt. Für die Berechnung der Kopplungsdrehmomente konnte es als vorgegeben behandelt werden. Die Differenz zwischen den Drehmomenten $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} gestattet es jedoch, empirisch die Größe jener Kräfte abzuschätzen, die die Variationen des \underline{u} -Feldes bewirken. Nach den im Kap. 1. gemachten Aussagen beruhen diese Differenzen bei Vernachlässigung der topografischen Kern-Mantel-Kopplung auf der Wirkung der Felder, deren Drehmomentwirkung auf den Mantel aufgrund der verwendeten Modelle und Näherungen innerhalb der Modelle nicht berücksichtigt wurde. Aus dem nachfolgend beschriebenen Periodenverhalten ergaben sich Hinweise, welche Perioden für die Ermittlung solcher unbekannteren Drehmomente geeignet sind.

5.2. Das Periodenverhalten der Rotationsgeschwindigkeiten und Drehmomente

Für die Behandlung dekadischer Variationen der Erdrotation und des Magnetfeldes sind die periodischen Anteile der berechneten Größen von Interesse. Wie die Drehmomentbilanz (Gln. (5.1)), aber auch die Zeitverläufe zeigen, ist dies vermutlich der Hauptteil der berechneten Variationen. Es besteht weiterhin die Möglichkeit, daßaperiodische Prozesse vorliegen, die in den Spektren als periodische Variationen erscheinen, so daß die Spektren nur ein mittleres Periodenverhalten ausweisen. Wenn sich der periodische Anteil auf wenige diskrete Frequenzen konzentriert, dann bietet es sich an, für die Bestimmung der Parameter des Modells, das den Zusammenhang zweier geophysikalischer Größen beschreibt, gleichperiodische Oszillationen zu verwenden (JOCHMANN /30/). Um solche Perioden zu

bestimmen, wurden nachfolgende Analysen durchgeführt. Zu den Spektren der globalen Größen \mathcal{C} , $L_{x,y,z}^{(1)}$ und L_z^{mech} gibt es bisher keine äquivalenten Aussagen in der Literatur. Das Spektrum von \mathcal{C}_m ist mit dem der $\Delta l.o.d.$ -Werte bis auf die Maßeinheit identisch. (s. Gln. (4.1)). Diese Spektren sind mit bekannten Größen und Daten bereits früher untersucht worden. Das Verfahren von JOCHMANN /29/ liefert im Vergleich zu vielen anderen jedoch amplituden- und phasentreue Spektren, so daß es sich für die physikalische Interpretation gut eignet. Außerdem wurden die neuesten Daten von MORRISON und STEPHENSON /42/ verwendet. Die Spektren von \mathcal{C} , \mathcal{C}_m , $L_{x,y,z}^{(1)}$ und L_z^{mech} wurden bereits veröffentlicht (GREINER-MAI /21/-/24/). In der vorliegenden Arbeit werden davon jene angegeben, die unter Berücksichtigung der Datenfehler und der Standardabweichung S_1 ermittelt wurden. In den Abb. 3 und 4 sind diese Spektren dargestellt. Die Parameter für die Hauptperioden findet man in Tab. 6. Diese Spektren sind für die Perioden $T \geq 15a$ nahezu diskret und erfüllen damit o.g. Voraussetzung. Aus diesen Ergebnissen lassen sich empirische Aussagen ableiten:

- (1) Wegen der geringen Amplitude ihrer Variationen sollten die äquatorialen Kopplungsdrehmomente am Rande der Diskussion stehen. Es gibt aber eine erwähnenswerte Auffälligkeit: Während das äquatoriale Kopplungsdrehmoment $L_x^{(1)}$ eine annähernd gleichmäßige Peakverteilung aufweist, besitzt das Spektrum von $L_y^{(1)}$ einen Hauptpeak bei $T = 19,6a$, der mit der impulsförmigen Variation in Abb. 1b korrespondiert.
- (2) Aus dem Spektrum der Dipoldriftgeschwindigkeit \mathcal{C}_D läßt sich ablesen, daß die Perioden um 17 ... 19a hauptsächlich Variationen des Dipolfeldes sind. In diesem Bereich liegt auch die bekannte 18,6a-Periode der Mond-Erde-Gezeiten (vgl. 18,2a-Periode von \mathcal{C} in Tab. 6).
- (3) Wie erwähnt, sind die Spektren von \mathcal{C} und $L_z^{(1)}$ nahezu proportional. Das führt auf den retardierenden Typ des Gesamtdrehmoments (vgl. Kap. 5.1.).
- (4) Die vier Hauptpeaks von \mathcal{C} und $L_z^{(1)}$ sind in Tab. 6 aufgezeigt. Vergleicht man diese mit jenen der Spektren von \mathcal{C}_m und L_z^{mech} , dann läßt sich die ca. 30a-Periode in allen betrachteten Größen unter Berücksichtigung des Periodenfeh-

lers von 3,4a (Kap. 4.2.) als gemeinsame Periode feststellen. Sie ist damit die Periode, die für die Bestimmung der Parameter des Kopplungsmodells am geeignetsten ist.

- (5) Die Spektren von \mathcal{C} und $L_z^{(1)}$ weisen einen Hauptpeak bei $T = 22,22a$ auf. Im Spektrum von \mathcal{C}_m gibt es einen dazu analogen Peak bei $T = 23,81a$, dessen Peakhöhe kleiner als S_1 ist, weswegen diese Periode nicht in Relation zur 22,22a-Periode von \mathcal{C} und $L_z^{(1)}$ gesetzt werden kann. Der Umpolzyklus des Sonnenmagnetfeldes beträgt 22a. Daher liegt die Vermutung nahe, daß es sich im Fall der 22,22a-Periode um einen Außenfeldeinfluß handelt. Andererseits gibt es theoretisch berechnete gleichperiodische magnetohydrodynamische Oszillationen des Kerns (BRAGINSKIJ /4/, /5/, /7/). BRAGINSKIJ (private Mitteilung) hält es für wahrscheinlich, daß die 20a-, 30a- und 60a-Variationen magnetohydrodynamische Torsionsschwingungen des Kerns sind. Im Kap. 7.3. wird gezeigt, daß im 20a-Bereich beide genannten Ursachen möglich sind.

Schließlich kann das Auftreten der 22a-Periode unabhängig von den beiden Interpretationsmöglichkeiten auch einem aperiodischen Prozeß im Bereich von 1903 bis 1930 (s. Abb. 1c und 2a) zugeordnet werden.

- (6) Die Spektren von \mathcal{C} und $L_z^{(1)}$ weisen eine 50a-Periode aus. Eine vergleichbare Periode wurde von HIDE /25/ berechnet. Diese Periode hat ein Analogon bei $T = 55,6a$ in \mathcal{C}_m und L_z^{mech} und ließe sich als zweite Periode für die weitere Interpretation im Rahmen der Kern-Mantel-Kopplung verwenden. Im Vergleich zur 30a-Periode ist die Peakhöhe in \mathcal{C}_m jedoch sehr gering, so daß darauf verzichtet wurde.

Das axiale Dipolfeld weist bei $T = 52,6a$ (Tab. 7(1)) den höchsten Peak innerhalb der Spektren der Säkularvariationskoeffizienten auf, der Kap. 3. zufolge nicht mit einem \underline{u} -Feld des Typs (3.4) erklärt werden kann und dessen Zusammenhang zu der gleichperiodischen Variation von \mathcal{C} einer tiefergehenden Untersuchung unterzogen werden sollte. Daher bleibt die 50a-Periode einer der Schwerpunkte fortführender Arbeiten.

- (7) Die 66,7a-Periode von \mathcal{C}_m ist eine bekannte Oszillation

der l.o.d.-Werte des 20. Jahrhunderts. Sie besitzt kein Analogon in $\mathcal{C}\mathcal{S}$ und $L_z^{(1)}$, obwohl sie zu den dominanten Perioden des Spektrums der Säkularvariation gehört (Tab.7). Es besteht die Vermutung, daß sie zwar keine Periode der Kerndriftgeschwindigkeit ist, jedoch über Anteile des zonalen Geschwindigkeitsfeldes höheren Grades an der Kopplung teilnimmt und hier in $\mathcal{C}\mathcal{S}$ oder $L_z^{(1)}$ nicht erscheint, weil diese Anteile nicht berücksichtigt wurden. Da solche Modelle fluider Kernbewegungen hier nicht behandelt werden, kann eine Entscheidung über diese Interpretation erst in nachfolgenden Arbeiten gefällt werden. Auffälligerweise fehlt diese Periode aber auch in $L_z^{\text{mech}} \sim \mathcal{C}\mathcal{S}_m$, so daß eine Filterung dieser Periode durch die Zeitableitung ebenfalls möglich ist. Die mit $\mathcal{C}\mathcal{S}_m$ vergleichbare Größe wäre dann das Zeitintegral von $L_z^{(1)}$.

- (8) Obwohl aus der Betrachtung ausgeklammert, sind die Perioden um 6-8a und 10-12a erwähnenswert. In diesem Teil des Spektrums sind $\mathcal{C}\mathcal{S}$, $\mathcal{C}\mathcal{S}_D$ und $\mathcal{C}\mathcal{S}_m$ höchstwahrscheinlich auch über die Kern-Mantel-Kopplung miteinander korreliert. Außerdem sind die 11a-Perioden wiederum als Sonnenfleckenperioden und die 8,6a-Periode als Gezeitenperiode bekannt.

Damit ergibt sich folgendes empirisches Vergleichsergebnis: Ein Teil der Perioden von $\mathcal{C}\mathcal{S}$ und $\mathcal{C}\mathcal{S}_m$ hängt über die Kern-Mantel-Kopplung zusammen ($T_{\mathcal{C}\mathcal{S}}/T_{\mathcal{C}\mathcal{S}_m}$): 22,2a/23,8a; 30,3a/33,3a; 50a/55,6a; 6 ... 12a. Die 66,7a-Periode von $\mathcal{C}\mathcal{S}_m$ ist vermutlich auch eine Periode der magnetischen Kopplung des Mantels mit komplizierteren Bewegungen fluider Materials im oberen Kern. Zu den Perioden bei ca. 8a, 18a und 20a gibt es zusätzlich dritte Prozesse gleicher Periode wie die Sonnenfleckenaktivität und die Gezeiten, deren Einfluß theoretisch durch erweiterte Modelle beschrieben werden müßte.

6. Theoretische Grundlagen für die Interpretation der Ergebnisse mit einem einfachen Bewegungsmodell des gekoppelten Kern-Mantel-Systems

Der in den vorangegangenen Kapiteln entwickelte Formalismus diente der Berechnung jener globalen Kenngrößen, über die der Einfluß des Magnetfeldes auf die Erdrotation quantitativ beschrieben werden kann. Er wurde anhand einer relativ langen Datenreihe zum Säkularvariationsfeld erprobt. Dieser Teil der Behandlung der Kern-Mantel-Kopplung stellt, auf das verwendete Modell der Bewegung der kernoberflächennahen Schichten bezogen, eine abgeschlossene Stufe der Arbeit dar. Bei der nachfolgenden Interpretation der Ergebnisse muß man die Relation zwischen der Genauigkeit, mit der die vorliegenden Daten die Phänomene erfassen, und der des Modells beachten. Die Interpretation mit den Bewegungsgleichungen des Kern-Mantel-Systems ist darauf gerichtet

- (1) das einfache Modell einer starren Rotation des Kern-Mantel-Systems mit den Rechenergebnissen aus Kap. 5. in Einklang zu bringen und die Parameter dieses Modells zu bestimmen,
- (2) ein vom Modell der Kernbewegung unabhängiges Verfahren der Bestimmung des beschleunigenden Drehmoments zu finden und
- (3) tiefere Untersuchungen vorzubereiten, die sowohl erweiterte Modellvorstellungen als auch Datenreihen erfordern.

Dieser Teil der Arbeit kann nur einen relativen Abschluß finden, der sich auf das Modell einer starren Rotation des Kerns bezieht. Dort, wo dieses Modell zu grob ist, ergeben sich aus der Diskussion Ansatzpunkte für die Fortführung der Arbeiten.

Für die nachfolgenden theoretischen Grundlagen der Interpretation dienten die Arbeiten von JOCHMANN /28/, /30/ als Vorbild. In ihnen wurde aus dem Drehimpulserhaltungssatz für die kräftefreie Erde die Bewegungsgleichung für den Erdkern und -mantel abgeleitet. Der hier verwendete Formalismus wurde weitestgehend diesen Arbeiten angepaßt und durch die Berücksichtigung der Eigenschaften des Magnetfeldes, infolge von Diffusionsprozessen andere Zeitkonstanten zu erzeugen, als sie

die bloße Betrachtung der Mechanik liefert, modifiziert.

6.1. Die Bewegungsgleichungen des starr rotierenden gekoppelten Kern-Mantel-Systems

In folgendem wird angenommen, daß Kern und Mantel starre sphärische Körper sind, die um eine gemeinsame Rotationsachse, auf die ω_m bezogen wird, rotieren. Statt der Rotationsgeschwindigkeit des Kerns wird die Geschwindigkeit ω^* der Relativrotation des Kerns gegen den Mantel eingeführt, was die Interpretation der Driftgeschwindigkeit erleichtert. Im Fall dekadischer Variationen beider Rotationsgeschwindigkeiten können die Trägheitsmomente beider Körper und der Drehimpuls für die Relativbewegung von Erdmassen als konstant angesehen werden. Diese Voraussetzung ist für den Mantel insofern auch physikalisch gerechtfertigt, als bisherige Untersuchungen der bekannten Oberflächenprozesse ergeben haben, daß diese sich im Bereich dekadischer Variationen nicht auf die Mantelrotation auswirken (z.B. JOCHMANN /27/). Für den Kern wird diese Konstanz vorerst postuliert.

Die Gleichungen für die Rotation der kräftefreien Erde unter Berücksichtigung einer Relativrotation zwischen Kern und Mantel und der Wirkung von Kopplungskräften zwischen beiden Körpern lassen sich nach JOCHMANN /28/ dann wie folgt schreiben:

$$C_m \cdot \dot{\omega}_m = L_z, \quad C \cdot \dot{\omega}^* = -L_z, \quad (6.1a, b)$$

worin ω^* die Geschwindigkeit der Relativrotation des Kerns gegenüber dem Mantel ist und L_z die Drehmomente umfaßt, die durch Prozesse an der Kern-Mantel-Grenze entstehen und auf beide Körper wirken. Wegen der Einführung der Relativrotationsgeschwindigkeit ω^* ist es günstiger, in den Bewegungsgleichungen das kombinierte Trägheitsmoment C zu benutzen. Es ergibt sich aus den in den ursprünglichen Bewegungsgleichungen verwendeten Trägheitsmomenten zu

$$C = \frac{C_m \cdot C_c}{C_m + C_c} \quad (6.2)$$

(C_m/C_c - Hauptträgheitsmomente des Mantels/Kerns). Die heute als wesentlich bekannten Drehmomente, die nach Gln. (6.1a,b) eine Kopplung von Kern und Mantel bewirken, sind

- (1) alle LORENTZdrehmomente der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung und
- (2) die mechanischen Drehmomente aus der topografischen Kern-Mantel-Kopplung.

Es wurde in dieser Arbeit vorausgesetzt, daß die zuletzt genannten Drehmomente vernachlässigbar sind, obwohl begründete Ausnahmen für ihre Existenz bestehen (GUPAL /15/, ELTAYEB und HASSAN /18/, ...). Die Bestimmung der Parameter im Kap. 7. erfolgt unter dieser Einschränkung.

$L_z^{(1)}$ wirkt gemäß Kap. 5. in Bezug auf C wie ein Reibungsdrehmoment und demzufolge den Änderungen von C entgegen. Wenn die Driftbewegung der Kernoberflächenschichten mit der Gesamtbewegung des Kerns gleichgesetzt wird, d.h.

$$C\dot{\omega}^* = \dot{C}\omega^* ,$$

dann erhebt sich die Frage nach den antreibenden oder beschleunigenden Drehmomenten L_z^{acc} , die jene Variationen von ω^* entsprechend den Gleichungen (6.1) erzeugen. Aufgrund der Einfachheit des Gln. (6.1) zugrunde liegenden Bewegungsmodells müssen sie als Bestandteil von L_z willkürlich eingeführt werden:

$$L_z = K \cdot \dot{C}\omega^* + I_z^{acc} . \quad (6.3)$$

Man sieht das am besten daran, daß Gln.(6.1) mit Gln. (6.3) für $I_z^{acc} = 0$ lediglich exponentiell abklingende Lösungen liefert, wie es für eine Reibungskopplung ohne antreibende Kraft typisch ist. Die Rückkopplung über $L_z^{(1)}$ tilgt im Verlaufe der Zeit jede zeitlich begrenzte Störung durch ein beschleunigendes Drehmoment. Aufgrund der Verwendung des einfachen Bewe-

gungsmodells für die Berechnung von $\underline{L}_t^{(1)}$ werden in Gln. (6.3) auch die Drehmomente als beschleunigende interpretiert, die von \underline{u} -Feldern höheren Grades herrühren und in bezug auf diese \underline{u} -Felder eigentlich retardierenden Charakter haben. Die Bezeichnung "beschleunigendes Drehmoment" muß daher modellbezogen verwendet werden. Die Unterscheidung zu $\underline{L}_z^{(1)}$ wird sich erst erübrigen, wenn man das Gesamtproblem physikalisch konsistent, d.h. dynamisch unter Einbeziehung der Quellen der Variationen von \underline{u} beschreiben kann.

Für das Modell einer starren Rotation ergibt sich aus den Gln. (6.1) und (6.3)

$$C_m \cdot \dot{\omega}_m - K \cdot \omega^* = L_z^{\text{acc}} \quad (6.4a)$$

$$C \cdot \dot{\omega}^* + K \cdot \omega^* = -L_z^{\text{acc}} \quad (6.4b)$$

sowie die von der Drehimpulserhaltung her bekannte Relation für die kräftefreie Erde:

$$C_m \cdot \dot{\omega}_m = -C \cdot \dot{\omega}^* \quad (6.5)$$

Von JOCHMANN /30/ wurde eine allgemeine Lösung der Gln. (6.4) angegeben. Im Zusammenhang mit der Erklärung der Herkunft dekadischer Variationen der Tageslänge sind periodische Lösungen von Interesse. Wenn man die Zeitabhängigkeit von L_z^{acc} in Form der periodischen Funktion

$$L_z^{\text{acc}} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_a \\ L_0 \cdot \cos \nu(t-t_a) & \text{für } t \geq t_a. \end{cases} \quad (6.6)$$

vorgibt, dann erhält man mit bekannten Integrationsverfahren die Lösungen

$$\omega^* = B \cdot e^{\lambda(t-t_a)} + \frac{L_0}{C(\mu^2 + \nu^2)^{1/2}} \cos [\nu(t-t_a) + \varphi] \quad (6.7a)$$

$$\omega_m = -\frac{C}{C_m} \tilde{B} \cdot e^{\gamma(t-t_a)} - \frac{L_0}{C_m (\gamma^2 + \nu^2)^{1/2}} \cos[\gamma(t-t_a) + \varphi] \quad (6.7b)$$

$$\tilde{B} = \omega_0^* - \frac{\gamma \cdot L_0}{C(\gamma^2 + \nu^2)}, \quad \gamma = -K/C, \quad \varphi = \arctan(\nu / \gamma). \quad (6.7c)$$

ω_0^* ist der Wert von ω^* bei $t=t_a$. Bei der Bestimmung der Integrationskonstanten wurde angenommen, daß entsprechend der Gln. (6.5) auch die Anfangswerte der Drehimpulsrelation $C \cdot \omega_0^* = -C_m \cdot \omega_{m,0}$ genügen. Die beiden Lösungen sind über die Gln. (6.5) voneinander abhängig, worin sich die Kopplung von Kern und Mantel in diesem Modell ausdrückt. Der aperiodische Anteil wird in dem Modell der starren Rotation durch den Drehmomenttyp $L_z^{(1)} = K \cdot \omega^*$ verursacht. Aufgrund dieses Anteils lassen sich die aus den Spektren von ω_m und $\omega \stackrel{!}{=} \omega^*$ ermittelten Amplituden nicht mit denen des periodischen Anteils von Gln. (6.7a,b) für gleiche Perioden vergleichen. L_0 ist daher vorerst nicht aus den Spektren der ursprünglichen Größen ω oder ω_m ermittelbar. Wie Abb. 6 zeigt, kann der aperiodische Anteil wesentliche Beiträge zu den Spektren von ω und ω_m liefern. Er ist daher in der Betrachtung nicht vernachlässigbar.

Nach den Ergebnissen im Kap. 5. ist die Bedingung $\omega = \omega^*$ im allgemeinen nicht mit den Lösungen von Gln. (6.5) konsistent, so daß die Frage nach einer solchen Konsistenz für einzelne Perioden gestellt wurde.

Innerhalb des Bewegungsproblems ist die Interpretation der berechneten Driftgeschwindigkeit ω als Rotationsgeschwindigkeit des Gesamtkerns mit zwei Unsicherheiten behaftet:

- (1) Die Voraussetzung $\omega^* = \omega$ wird durch die berechneten Werte von ω nicht erfüllt. Weder erfüllen die Amplituden von ω und ω_m die für C_c und C_m gültige Relation, noch ist die Phasendifferenz zwischen ω und $\omega_m \pm \pi$.
- (2) ω und ω_m müßten theoretisch aperiodische Anteile enthalten, deren Größe nicht bekannt ist, so daß sich die Spektren von ω und ω_m nicht zur Bestimmung von L_0 benutzen lassen.

Im Kap. 6.2. wird gezeigt, wie man bei der Ermittlung von L_0 beide Unsicherheiten umgehen kann. Im Kap. 6.3. wird geprüft, mit welchen Modifikationen man das Modell einer starren Relativrotation als Äquivalenzmodell für das Verhalten von ω verwenden kann.

6.2. Eine Methode zur Bestimmung des beschleunigenden Drehmoments

Die Existenz eines beschleunigenden Drehmoments folgt unabhängig von der Voraussetzung $\dot{\omega}^* = \dot{\omega}$ aus dem Vergleich des Zeitverlaufs und der Periodenspektren von $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} . Nach den Ausführungen in den Kap. 4.2. und 6.1. ist L_z^{mech} gleich dem theoretischen Drehmoment L_z (vgl. Gln. (4.2) mit (6.1)). Frühere Betrachtungen (GREINER-MAI /23/) zeigten außerdem, daß sich die Variationen von ω_m nicht allein aus der Wirkung von $L_z^{(1)}$ ableiten lassen. Man ist daher gezwungen, ein Differenzdrehmoment einzuführen, das in Bezug auf ω beschleunigenden Charakter hat. Anstelle von Gln. (6.3) ist daher allgemeiner zu schreiben

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{acc} \tag{6.8}$$

und anstelle der Gln. (6.4)

$$C_m \cdot \dot{\omega}_m - L_z^{(1)} = L_z^{acc} \tag{6.9a}$$

$$C \cdot \dot{\omega}^* + L_z^{(1)} = - L_z^{acc} . \tag{6.9b}$$

In dieser Form ist Gln. (6.9b) für die Ermittlung von L_z^{acc} überflüssig, weil sich $\dot{\omega}^* (\neq \dot{\omega})$ nach Gln. (6.5) aus ω_m ergibt und damit keine anderen Informationen enthält als ω_m selbst. Hier wird deutlich, daß die Gln. (6.9b) nicht die Gleichung für die aus dem Feld berechnete Driftgeschwindigkeit einer Kernoberflächenschicht ω ist, sondern die einer mittleren Relativrotation des Gesamtkerns gegenüber dem Mantel, die

$-\dot{\omega}_m$ proportional ist. Für $L_z^{(1)}$ kann in den Gln. (6.9) nach wie vor $K \cdot \dot{\omega}$ gesetzt werden. Dieser Zusammenhang verliert mit $\dot{\omega}^* \neq \dot{\omega}$ i.a. jedoch für den Gesamtkern seine Bedeutung als Reibungsdrehmoment in der $(\dot{\omega} / \dot{\omega}^*)$ -Beziehung und ist lediglich eine Berechnungsvorschrift für $L_z^{(1)}$, die i.a. bei Berücksichtigung fluider Kernbewegungen abgeändert oder erweitert werden müßte.

In Gln. (6.9a) sind sowohl $\dot{\omega}_m^*$ als auch $L_z^{(1)}$ bekannt, so daß Gln. (6.9a) und Gln. (6.8) Berechnungsvorschriften für L_z^{acc} im Sinne einer inversen Aufgabe darstellen. Die differentiellen Größen $\dot{\omega}_m^*$ oder L_z^{mech} sind numerisch jedoch ungenauer bestimmbar, als die integralen (man vergleiche z.B. die 66,7a-Periode von $\dot{\omega}_m^*$ mit dem entsprechenden Periodenbereich von L_z^{mech}). Es bietet sich daher an, die Gln. (6.9a) zu integrieren. Mit dem Ansatz (6.6) erhält man für einen diskreten periodischen Anteil

$$\Delta \bar{\omega} = \Delta \omega_m - \Delta \omega^{ma} = \frac{L_0}{v \cdot C_m} \sin v(t-t_a) + C_0 \quad (6.10a)$$

mit

$$\Delta \omega_m = \omega_m(t) - \omega_m(t_0), \quad \Delta \omega^{ma} = \int_{t_0}^t \frac{1}{C_m} L_z^{(1)}(t') dt' \quad (6.10b)$$

$$C_0 = \frac{L_0}{v \cdot C_m} \sin v(t_a - t_0).$$

$\Delta \omega^{ma}$ kann als Mantelrotationsgeschwindigkeitsänderung interpretiert werden, die durch $L_z^{(1)}$ allein, d.h. durch den beobachteten Teil des Magnetfeldes erregt wird. Der Fall $\Delta \bar{\omega} = 0$ würde demzufolge anzeigen, daß zusätzlich keine beschleunigenden Drehmomente wirken und diese mit in $L_z^{(1)}$ enthalten sind. Mit $\Delta \bar{\omega}$ läßt sich L_0 aus Gln. (6.10a) unabhängig von der Interpretation der Driftgeschwindigkeit $\dot{\omega}$ als Geschwindigkeit der starren Rotation $\dot{\omega}^*$ des Gesamtkerns ermitteln. Dieses Verfahren funktioniert also auch, wenn $L_z^{(1)}$ auf der Grundlage erweiterter \underline{u} -Feldmodelle berechnet wird. Daß damit gleichzeitig der aperiodische Anteil in $\dot{\omega}^*$ für das Modell einer starren Rotation des Gesamtkerns eliminiert wurde, sieht man, wenn man $\Delta \omega^{ma*}$ mit $L_z^{(1)} = K \cdot \dot{\omega}^*$ und $\Delta \bar{\omega}^*$ nach Gln. (6.7a) bildet und

zusammen mit der Lösung (6.7b) $\Delta\bar{\omega}^*$ theoretisch berechnet. Man erhält ebenfalls Gln. (6.10a).

$\Delta\bar{\omega}^{\text{ma}}$ wurde aus den trendkorrigierenden Werten von $L_z^{(1)}$ durch numerische Integration nach Gln. (6.10b) mit $t_0 = 1903.5$ ermittelt und in Tab. 5 dargestellt. Eine grafische Darstellung findet man bei GREINER-MAI /23/. $\Delta\bar{\omega}_m$ läßt sich nach Gln. (6.10b) leicht aus den vorhandenen $\bar{\omega}_m$ -Werten bestimmen, so daß $\Delta\bar{\omega}$ eine numerisch berechenbare Größe ist und einer Periodenanalyse unterzogen werden kann. Für die Ermittlung des spektralen Anteils von Gln. (6.10a) bei $T = 2\pi / \nu$ spielt die Konstante C_0 keine Rolle. Sind $A_{\Delta\bar{\omega}}$ und $\varphi_{\Delta\bar{\omega}}$ die Amplitude und Phase einer Periode T des Spektrums von $\Delta\bar{\omega}$, so folgt

$$L_0 = \nu \cdot C_m \cdot A_{\Delta\bar{\omega}} \quad \text{und} \quad t_a = - \varphi_{\Delta\bar{\omega}} / \nu \quad (6.11)$$

als Gleichung für die Bestimmung von L_0 aus dem Spektrum von $\Delta\bar{\omega}$. Die Berechnung wurde für die allen Größen gemeinsame ca.-30a-Periode im Kap. 7.2. durchgeführt.

Die Interpretation von L_z^{acc} in Bezug auf $\bar{\omega}_m$ wurde offengelassen. Will man jedoch im Bereich der Wirkungen des Magnetfeldes auf die Mantelrotation verbleiben, dann wird L_z^{acc} durch jene toroidalen Kernfelder verursacht, die aus dem tieferen Kerninneren zur Kern-Mantel-Grenze vordringen und nicht durch die Wechselwirkung des beobachteten poloidalen Feldes mit der verwendeten Rotationsbewegung der Kernoberflächenschichten entstehen. Die in $L_z^{(1)}$ berücksichtigbaren toroidalen Felder können mittels eines kompletten Bewegungsmodells der Kernoberflächenschichten aus $\underline{B}_p^{(0)}$ und den Parametern des Bewegungsmodells berechnet werden. Wenn es gelingt, dazu alle wesentlichen Bewegungen des fluiden Materials in den kernoberflächennahen Schichten zu berücksichtigen, dann repräsentiert $L_z^{(1)}$ die gesamte Drehmomentwirkung des beobachtbaren oder poloidalen Teils des Magnetfeldes auf den Mantel. Für die Berechnung von L_z^{acc} würde man dann ein dynamisches Modell der Kernbewegungen benötigen, in das die physikalische Ursache der Änderungen der Bewegungen einbezogen ist. Eine analytische Darstellung von L_z^{acc} enthielte daher weitere, u.U. die Quelle der

Bewegungen betreffende Parameter dieses Modells. Die Gln. (6.9a) führt bei Beibehaltung des Iterationsverfahrens aus Kap. 2.2.2. dann auf eine Integralgleichung des Typs

$$\Delta \bar{\omega}(t) = -\mu_0^{-1} \int_{t_0}^t G_m^{-1} \int_{V_m} \underline{r} \times (\underline{B}^{(0)})_x \operatorname{rot} \underline{B}_t dV dt' , \quad (6.12)$$

in der \underline{B}_t noch durch die Randwerte eines Modells des toroidalen Kernfeldes $\underline{B}_t^- = \underline{B}_t^+$ ($r=R_0$) ausgedrückt werden muß. Mit der obigen Berechnung gemäß dem Ansatz (6.6) wurde das Zeitintegral in Gln. (6.12) gelöst. Ein solcher Ansatz ist physikalisch gerechtfertigt, wenn die Größe $\Delta \bar{\omega}$ diskrete Perioden enthält, was noch bewiesen wird. Mit dieser Methode sind Angaben über die Perioden und Größenordnungen des beschleunigenden Drehmoments möglich, die für die Klassifikation des Typs der Feldmodelle im Kern entscheidend sein können. Eine weiterführende Interpretation von L_z^{acc} nach Gln. (6.12) erfordert dann die Modellierung seiner Erzeugungsmechanismen.

6.3. Zur Interpretation des Verhaltens der Kerndriftgeschwindigkeit mit dem Modell einer starren Rotation

Im Kap. 6.1. wurde der Fall $\omega^* = \omega$ diskutiert. Dabei ergab sich die Schwierigkeit, L_0 nicht aus den Spektren von ω und ω_m ermitteln zu können, weil die Spektren theoretisch einen aperiodischen Anteil enthalten. Diese Schwierigkeit wurde unabhängig von der Interpretation von ω für das Rotationsproblem im Kap. 6.2. umgangen, indem L_0 aus der Differenzrotation $\Delta \bar{\omega}$ ermittelt wurde. Die entscheidende Unsicherheit des Modells der starren Rotation ergibt sich daraus, daß die beiden Rotationsgeschwindigkeiten praktisch nicht über Gln. (6.5) miteinander zusammenhängen, so daß die Lösung (6.7a) nicht das Verhalten der Ergebniswerte zu ω beschreibt, sondern das einer hypothetischen mittleren Kernrotation. Die allgemeine Gültigkeit der Annahme $\omega^* = \omega$ ist aufgrund des heutigen Kenntnis-

standes zum Driftprozeß auch theoretisch nicht zu erwarten. Es besteht jedoch die Möglichkeit, daß eine solche Beziehung annähernd mit dem Modell einer starren Rotation einer Kernschicht konsistent ist, wenn man bestimmte Modifikationen einführt, die das Modell besser an das Magnetfeldverhalten anpassen, als es mit bloßer mechanischer Betrachtung möglich ist (s.a. ROCHESTER /47/, VESTINE und KAHLE /58/, ...). Es ist dadurch möglich, grobe Informationen über die Zeitkonstanten des Kopplungsprozesses und das Ausmaß der Gebiete zu erhalten, in denen sich die Driftprozesse abspielen.

Die Gln. (6.5) ist allgemeiner Natur. Mit der Identifikation $\omega^* = \omega$ sind an sich alle Größen in ihr bekannt, so daß sich mit dieser Gleichung der Identifikationsgrad überprüfen läßt. Anhand der Größenordnungen von ω und ω_m ist ersichtlich, daß mit der Interpretation von ω als Rotationsgeschwindigkeit für C nicht mehr der Wert des Gesamtkerns eingesetzt werden kann. Diese Interpretation zwingt zu einem Schichtmodell mit kleinerem C. Ein solches Modell ist aber physikalisch möglich, weil der Außenkern ein fluider Körper ist und damit ein Drehimpulsaustausch, der nur die oberen Kernschichten erfaßt, denkbar wird. Die Größe C wird dann zum freien Parameter der Gln. (6.5) und läßt sich aus den Daten zu ω und ω_m ermitteln. Im Unterschied zum theoretischen Wert wird sie nachfolgend mit C^1 bezeichnet.

Von C^1 hängt die Zeitkonstante τ_I dieses Modells der Kopplung

$$\tau_I = -1/\gamma = C^1/K \quad (6.13)$$

ab. Sie geht in die Berechnung der Phase $\varphi = \arctan(-\gamma \cdot \tau_I)$ und des aperiodischen Anteils ein. Es muß betont werden, daß die Größen ω und C^1 hier Parameter des Äquivalenzmodells sind, das die sich im oberen Kern abspielenden magnetohydrodynamischen Prozesse ersatzweise durch eine starre rotierende Kugelschale beschreibt. Wie die Verläufe von ω und ω_m zeigen, kann C^1 nur als optimaler Parameter dieses Äquivalenzmodells ermittelt werden. Es bleibt vorerst offen, ob C^1 zeitabhängig angesetzt werden muß. Für die nachfolgenden Untersuchungen wurde C^1

als konstant angenommen. G^1 ist für verschiedene Perioden verschieden, so daß eine Behandlung als zeitabhängige Funktion naheläge. Diese Zeitabhängigkeit kann jedoch auch vom Magnetfeldverhalten in den äußeren Kernschichten vorgetäuscht sein. Im Rahmen des hier benutzten Modells läßt sich diese Frage nicht entscheiden.

In dem Modell der starren Rotation wurde weiterhin nicht berücksichtigt, daß sich die Felder in endlichen Zeiten ausbreiten und die Drehmomente verzögert wirksam werden. Wenn man die Ausbreitung der Felder im Mantel in das Modell mit einbezieht, dann erhält man das Ergebnis von ROBERTS /51/. In diesem Fall muß τ_I durch $\tau_c = (\tau_I)^{2/3} \cdot (\tau_2)^{1/3}$ (τ_2 s. Gln. (2.21)) ersetzt werden. Auf die von ROBERTS /51/ gegebene umfangreiche Ableitung wird hier aus Platzgründen verzichtet. φ in Gln. (6.7c) ändert sich ab in $\varphi_c = \arctan(-\nu \cdot \tau_c)$. φ oder φ_c sind die Phasenverschiebungen von ω und ω_m gegenüber L_z^{acc} , wenn dieses Drehmoment an beiden Körpern gleichzeitig wirksam wird. Sie erscheinen jedoch nicht als Phasenunterschied zwischen ω und ω_m , der entsprechend Gln. (6.7) $\pm \pi$ betragen müßte, was nicht der Fall ist. Wenn man jedoch annimmt, daß sich die aus einer Änderung $d\omega$ von ω ergebenden Feldstörungen bei $r = R_c$ mit endlicher Geschwindigkeit in den Kern hinein ausbreiten, so wird die Änderung der Oberflächenbewegung zwar sofort angezeigt, die Rückkopplung dieser auf die darunter liegenden Schichten jedoch erst allmählich wirksam.

Die Mantelreaktion hängt über $\tau_I = G/K$ auch von der Trägheit der von der Rückkopplung erfaßten Kernmaterie ab. In der Übergangsphase, die durch τ_I charakterisiert wird, etabliert sich das an der Kopplung beteiligte Kernträgheitsmoment bis zu seinem stationären Wert erst nach und nach. Bei dieser Art Wechselwirkung zwischen Mantelrotation und Kernbewegung wird die Änderung $d\omega$ der Oberflächenbewegung des Kerns sofort, die des Mantels aber verspätet angezeigt. Das erklärt ein "Vorlaufen" von ω vor ω_m . Für die Herausbildung der angekoppelten Kernschicht spielen die magnetohydrodynamischen Prozesse im oberen Kern eine Rolle. Diese Prozesse können mit einem kinematischen Bewegungsmodell und stationärer Betrachtung der elektromagnetischen Verhältnisse nicht mehr erfaßt werden. Im Modell der

starrten Relativrotation wird ihrer Wirkung die Zeitverschiebung zwischen den Variationen von C° und C_m° zugeschrieben, die sich in diesem Modell nur durch eine empirische Zeitkonstante t_1 in den Phasen berücksichtigen läßt.

Das Modell der starren Rotation des Gesamtkerns mit C° als Geschwindigkeit der Relativrotation zwischen Kern und Mantel ist für die Interpretation des Zusammenhanges von C° und C_m° ungeeignet. Das ist aus den Ergebnissen des Kap. 5. abzulesen. Im Kap. 6.2. wurde eine Methode gefunden, das beschleunigende Drehmoment unabhängig von dieser Interpretation zu berechnen. C° läßt sich jedoch als Parameter der Relativrotation einer starren Kernschale gegen den Mantel auffassen. Dazu mußte das Modell einer starren Rotation in den zwei genannten Punkten modifiziert werden, woraus sich zwei freie Parameter C^1 und t_1 ergaben, die nachfolgend zusammen mit L_0 ermittelt werden.

7. Interpretation der Ergebnisse

In folgendem werden die Parameter des im Kap. 6. aufgestellten Modells ermittelt. Nicht alle bisher gewonnenen Informationen sind dazu geeignet. Einige davon werden daher Gegenstand fortführender Arbeiten sein. Aus dem Zeitverhalten der Größen lassen sich genäherte Aussagen zum Trägheitsmoment C^1 der an der Kopplung beteiligten Massen gewinnen. Wie im Kap. 6.3. gezeigt wurde, ist es physikalisch möglich, C° einer endlich dicken Schicht nahe der Kernoberfläche zuzuordnen, in der sich differentielle Rotationen und andere Bewegungen des fluiden Materials abspielen, deren summarische Wirkung hier durch eine starre Rotation der Schicht beschrieben wird. Infolge dieser Interpretation von C° wird C^1 zum Parameter dieses Äquivalenzmodells.

Aus dem Periodenverhalten der Größen lassen sich nach Kap. 6.2. Aussagen zur Größenordnung periodisch variierender beschleunigender Drehmomente dieses Modells gewinnen. Es liegt aufgrund der Ergebnisse der Periodenanalysen nahe, hierzu die ca. 30jährige Periode zu benutzen. In der Berechnung der dazu notwendigen Größe $\Delta\bar{\omega}^{\circ}$ wurde die Zeitverschiebung t_1 einbezo-

gen, die im Kap. 6.3. diskutiert wurde. Wie der Vergleich zu vorangehenden Arbeiten (GREINER-MAI /23/) zeigte, werden damit auch die Doppelpeaks aus dem Spektrum von $\Delta\bar{\omega}$ beseitigt, die auf Überlagerungen benachbarter Perioden hinwiesen. Das in Abb. 5 angegebene Spektrum von $\Delta\bar{\omega}$ weist indessen eine sehr klare Periodenbildung aus. Andererseits wird durch dieses Vorgehen die von der Kernbewegung unabhängige Methode zur Bestimmung des beschleunigenden Drehmoments aus Kap. 6.2. mit einer Modifikation versehen, die für das Modell der starren Rotation eingeführt wurde. Das im Kap. 7.2. ermittelte L_0 bezieht sich daher streng genommen auf das Modell der starren Rotation einer Kernschicht.

Schließlich sind jene Perioden zu diskutieren, die sich widersprüchlich zu diesem Modell der Kern-Mantel-Kopplung verhalten. Das sind die 18,2 ... 18,5a-Periode und die 22a-Periode in den Spektren von ω und $L_z^{(1)}$, die in den Spektren der mechanischen Größen nicht signifikant nachweisbar waren, und die 66,7a-Periode von ω_m , die in den Spektren von ω und $L_z^{(1)}$ fehlte. Für die Beschreibung dieser Unterschiede sind entweder umfangreichere Zeitreihen oder kompliziertere Modelle nötig. Die an die vorgelegte Arbeit anschließenden Untersuchungen werden beides berücksichtigen müssen.

7.1. Folgerungen aus dem Drehimpulserhaltungssatz und dem Zeitverhalten der Rotationsgeschwindigkeit und Drehmomente

Der Gleichheit der Mittelwerte von $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} zufolge (s. Gln. (5.1)) sind beschleunigende Drehmomente zu erwarten, die im Mittel periodisches Verhalten zeigen und etwa die gleiche Größenordnung haben wie $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} . Die ausgewogene Bilanz dieser beiden Drehmomente ist auch durch die Wahl des Leitfähigkeitsgesetzes und seiner Parameter α und σ_0 bedingt. Wie früher bemerkt wurde, sind jedoch für Modelle mit $\sigma_0/\alpha = \text{const.} = 100$ und $\alpha \gg n$, $R_\sigma > R_c$ keine wesentlichen Änderungen zu erwarten. Zunächst werden die Mantelrotationsgeschwindigkeit ω_m und die Driftgeschwindigkeit ω des Kerns verglichen. Nach Kap. 3. spielte die Leitfähigkeit des Mantels bei

der Berechnung von ω insofern eine Rolle, als sie eine Verzögerungszeit zwischen den Variationen der Feldwerte bei $r=R_C$ und denen bei $r=R_E$ bewirkt. Das würde eine Verzögerung der Variationen von ω gegenüber denen von ω_m erklären. Wenn man die Ergebnisse des Vergleiches lokaler Verläufe der Feldintensität mit denen der l.o.d.-Werte betrachtet (LUCKE et al./39/, JOCHMANN /32/, ...), dann stellt man jedoch fest, daß die Variationen des Feldes jenen der Erdrotation vorauslaufen, statt ihnen zu folgen. Weniger ausgeprägt, besteht dieses Verhalten auch zwischen ω und ω_m (Abb. 2). Das Modell der starren Rotation (s. Gln. (6.7)) erklärt dieses Verhalten nicht, denn die Phasenverschiebung φ bzw. φ_C betrifft auch bei Berücksichtigung der Mantelleitfähigkeit in φ_C nur die Zeitzuordnung von ω , ω_m zu L_z^{acc} . Nach den im Kap. 6.3. entwickelten Vorstellungen muß man die Felddausbreitung mit endlichen Geschwindigkeiten im Kern beachten, um die formal eingeführte Zeitverschiebung t_1 zwischen ω und ω_m zu erklären. Nach einer Idee von ROBERTS /51/ würde dann eine bei $r=R_C$ auftretende Störung des Drehmomentengleichgewichts (mit mechanischer oder elektromagnetischer Ursache), die eine Änderung $\delta\omega$ von ω herbeiführt, zunächst eine sehr dünne Oberflächenschicht des fluiden Kerns erfassen. Wegen der verschwindend geringen Trägheit dieser Schicht reagiert die Kernoberflächenbewegung sofort auf die Störung. Diese sofortige Änderung bewirkt ihrerseits eine Feldstörung δB , die allmählich in den Kern eindringt. Der Erdmantel mit seiner großen Trägheit reagiert verzögert auf δB bzw. $\delta\omega$. Das erklärt zunächst ein "Vorlaufen" von $\omega(t)$ vor $\omega_m(t)$, was sich anhand der Resultate zu beiden Größen als Vorlaufen nachprüfen lassen muß, sofern die Information über die Störung $\delta\omega$ schneller durch den Mantel durchgeht, als der Mantel auf diese Störung reagiert ($\tau_2 < \tau_I$). Hierbei kann die Ungleichung $\tau_2 < \tau_I$ überprüft werden.

Eine weitere nachprüfbare Beziehung ergibt sich aus folgender vereinfachter Betrachtung. Der Mantel wirkt infolge seiner Leitfähigkeit auf die Änderung von ω wie eine "Induktionsbremse", die entweder diese Änderung tilgt oder zumindest einen neuen stationären Zustand von ω herbeizuführen versucht. Die Zeit, in der dieser Bremsvorgang vonstatten geht, ist für

die kräftefreie Erde durch die Trägheit des Mantels selbst und die der mit der Kopplung erfaßten Kernmassen bedingt. Bei Vernachlässigung der Feldausbreitung im Mantel wird sie durch $\tau_I = C^1/K$ beschrieben, wobei C^1 dem stationären Fall zugeordnet werden muß. Durch welchen Vorgang aber wäre C_c^1 im Falle eines fluiden Körpers bestimmt? Die von der Änderung $\delta\omega$ ausgehende Feldstörung breitet sich ebenfalls in den Kern hinein aus. Dadurch (Kopplung innerhalb des Kerns) "backt" immer mehr Kernmaterie an die dünne sich in ihrem Bewegungszustand ändernde Kernoberflächenschicht an und macht die Bewegung mit. Während dieses "Anbackens" wächst also C^1 über das Anwachsen von C_c^1 an. Dieser Vorgang dauert so lange, wie $L_z^{(1)}$ braucht, um die Störung der Kern-Mantel-Relativbewegung bis zum Erreichen des stationären Zustands (zwischen Änderung der Mantelbewegung und dem "Anbacken" von Kernmaterie) auszugleichen. Wenn V_A die Geschwindigkeit der Ausbreitung der Feldstörung im Kern ist und τ_I andererseits das Maß für die Dauer des Anbackens, dann ergibt sich als Schichtdicke d der angekoppelten Schicht $d = V_A \cdot \tau_I$. Ist andererseits die Dicke d aus anderen Überlegungen bekannt, so kann man mit dieser Beziehung V_A ermitteln, d.h. die Zeitkonstante der Feldausbreitung τ_A für die Schicht gegebener Dicke d , so daß als nachprüfbare Beziehung ($\tau_A = V_A^{-1} \cdot d$)

$$\tau_I = \tau_A \quad (7.1)$$

folgt. V_A ist weniger durch die Zerfallszeit τ_z^c der Felder im Kern bestimmt ($\tau_z^c = (0,5 \dots 1,0) \cdot 10^4 a$), sondern hängt mit der Geschwindigkeit der Ausbreitung periodischer Felder in strömenden hochleitfähigen Materialien zusammen (s. MOFFATT /44/). Ein Maß für diese Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die ALFVÉNwellengeschwindigkeit (s. ROBERTS /51/):

$$V_A = \frac{|B_r^{(0)}|}{\sqrt{\mu_0 \cdot \rho_k}} \quad (7.2)$$

(V_A - ALFVÉNwellengeschwindigkeit, d - Dicke der Schicht, ρ_k - Dichte der Schicht, $B_r^{(0)}$ - Feldstärke der radialen Komponenten des magnetischen Potentialfeldes bei $r=R_c$).

Mit dem mittleren Dichtewert $\rho_K = 10,62 \cdot \text{g cm}^{-3}$ und einem Feldstärkenwert $|B_r^{(0)}| = 2,21 \text{ G}$, wie er durch Extrapolation des Feldes von 1975.5 (BARRACLOUGH et al. /2/) auf $r=R_c$ erhalten wird, ergibt sich

$$V_A = 0,19 \text{ cm s}^{-1} . \quad (7.3)$$

τ_A ergäbe sich dann als ALFVENwellenwanderungszeit für die Schicht der Dicke d und müßte ungefähr gleich τ_I sein. Für den Vergleich von ω mit ω_m muß beachtet werden, daß die Änderung von ω in der ersten Phase des instationären Prozesses aufgrund der großen Mantelträgheit über ω_c erfolgt ($\omega = \omega_c - \omega_m$), während die Änderung von ω_m erst in der Endphase des instationären Prozesses in (dem betragsmäßig größeren) ω sichtbar wird. In dieser Endphase ist das koppelnde Drehmoment $L_z^{(1)}$ aber schon wesentlich kleiner geworden. Aufgrund der Mantelträgheit kann die Mantelbewegung dann durchaus noch etwas länger in der Übergangsphase verbleiben, so daß für die Zeitverschiebung t_1 zwischen ω und ω_m $t_1 \gtrsim \tau_I, \tau_A$ erwartet wird. Damit ergeben sich als nachprüfbare Beziehungen:

$$\tau_I > \tau_2 \quad , \quad \tau_I \approx \tau_A \quad , \quad t_1 \gtrsim \tau_I, \tau_A .$$

Bei der Bestimmung von t_1 werden G^1 und der Drehimpulssatz in integraler Form verwendet. Man muß daher wieder auf den Modellcharakter dieser Zuordnung bzw. Zeitverschiebung t_1 hinweisen. In Wirklichkeit erfolgt die hier anhand zweier stationärer Zustände umständlich beschriebene Rückkopplung nach dynamischen Gesichtspunkten. Ohne magnetohydrodynamische Behandlung des Problems, der lediglich τ_A entliehen wurde, wird man keine genauere theoretische Beschreibung der Zeitverschiebung erhalten. Solche Untersuchungen werden auf spätere Arbeiten vertagt. Die numerischen Betrachtungen zu τ_A in diesem Kapitel und Kap. 7.2. zeigen allerdings, daß man mit dem verwendeten Modell bereits gute Ergebnisse erzielen kann.

Nach Gln. (6.5) folgt

$$G_m \cdot \Delta \omega_m = - G \cdot \Delta \omega \quad , \quad (7.4)$$

wobei man $\Delta\omega_m$ und $\Delta\omega$ auf den gleichen Anfangszeitpunkt beziehen muß. In erster Näherung kann man von Gln. (7.4) bereits ohne die Berücksichtigung der Zeitverschiebung einen Schätzwert \bar{C} von C ermitteln, indem man die quadratischen Mittelwerte beider Größen vergleicht:

$$\frac{C_m}{\bar{C}} = \sqrt{\frac{\sum_i [\Delta\omega(t_i)]^2}{\sum_i [\Delta\omega_m(t_i)]^2}} \quad (7.5)$$

Der voroptimierte Wert \bar{C} wird weiter unten im Rahmen der Bestimmung von t_1 benötigt. Aus den trendkorrigierten Daten von $\omega_m(t_i)$ und $\omega(t_i)$, bezogen auf $t_o = 1903.5$, ergibt sich nach Gln. (7.5) mit $C_m = 7,12 \cdot 10^{37} \text{ kgm}^2$

$$\bar{C} = 2,478 \cdot 10^{36} \text{ kgm}^2 \quad (7.6)$$

Der theoretische Wert für den Gesamtkern beträgt $C=8,09 \cdot 10^{36} \text{ kgm}^2$ ($C_c = 9,13 \cdot 10^{36} \text{ kgm}^2$), so daß nur etwa ein Drittel des Gesamtträgheitsmoments am Drehimpulsaustausch beteiligt ist. Mit dem Wert (7.6) von \bar{C} wird ω_m auf die Größenordnung von ω umgerechnet. Einen optimalen Wert C^1 erhält man, wenn man die Zeitverschiebung t_1 ermittelt, bei der Gln. (7.4) am besten erfüllt ist, und hinterher C^1 mit Gln. (7.4) nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Um ohne großen mathematischen Aufwand zu diesem Ziel zu gelangen, ermittelt man im ersten Schritt die Zeit t_j , bei der gemäß Gln. (7.4) die Größe \bar{S}

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{N_j} \left(\frac{C_m}{\bar{C}} \cdot \Delta\omega_m(t_i) + \Delta\omega(t_i+t_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^{N_i} \left(\frac{C_m}{\bar{C}} \cdot \Delta\omega_m(t_i) \right)^2 + \left(\Delta\omega(t_i) \right)^2} \quad (7.7)$$

zum Minimum wird. Der Nenner wurde als Bezugsgröße eingeführt, weil der Zähler durch die sukzessive Verkleinerung der Wertezahl mit wachsendem t_j ebenfalls minimiert wird. \bar{S} wurde für die 21 Werte des Intervalls $(-20a, 20a)$ mit $\Delta t_j = 2a$ berechnet und in Abb. 7 dargestellt. Das absolute Minimum wird bei $t_1 = -10a$ erreicht, d.h., daß den zu t_i ermittelten $\Delta \omega_m$ -Werten um 10 Jahre früher liegende Werte von $\Delta \omega(t_i)$ zugeordnet werden müssen, um Gln. (7.4) optimal zu erfüllen. Wie die Abb. 7 zeigt, sind in den Grenzen der Genauigkeit der Daten auch kleinere Zeitverschiebungen bis $t_1 = -6a$ möglich. Später wird für die 30a-Periode $-t_1 = 6a$ erhalten.

Unter Berücksichtigung der Zeitverschiebung $t_1 = -10a$ liefert die Methode der kleinsten Quadrate, angewendet auf Gln. (7.4), einen Wert von

$$C^1 = 2,17 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

der in den Grenzen der Genauigkeit der Daten mit \bar{C} annähernd übereinstimmt und zu C in der Relation $C^1 = 0,27 \cdot C$ steht. Das Trägheitsmoment der betrachteten Kernschicht ist dann $C_C^1 = 2,24 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Nach den Berechnungsformeln für das Trägheitsmoment einer homogenen Kugelschicht des Kerns mit dem äußeren Radius $r = R_C = 3485 \text{ km}$ würde diesem Wert C^1 eine Schichtdicke d^1 von

$$d^1 = 190 \text{ km}$$

und damit eine Zeitkonstante $\tau_A \approx 3,2a$ entsprechen. Der Wert von $\tau_I = \frac{C^1}{K}$ beträgt ca. $3,4a$ und stimmt gut mit τ_A überein. Es gilt die vermutete Relation $t_1 > \tau_I, \tau_A$.

Schließlich ist die eingangs erwähnte Bilanz der Drehmomente von Interesse. Aus der Drehimpulserhaltung für die Gesamterde ergab sich für das Modell einer starren Rotation des Kern-Mantel-Systems mit hypothetischem beschleunigenden Drehmoment in Kap. 6.:

$$L_Z^{\text{acc}} = L_Z^{\text{mech}} - L_Z^{(1)} \quad (7.8)$$

Die Interpretation der numerisch ermittelbaren Differenzen (7.8) als beschleunigende Drehmomente ist nicht zwingend, wenn man auf die Modellvorstellung einer starren Rotation verzichtet. L_z^{acc} kann z.B. auch Anteile von Drehmomenten der topografischen Kopplung enthalten. Dabei bleibt die Gln. (7.8) richtig. Die Zeitverschiebung $t_1 = -10a$ eingerechnet, erhält man als Mittelwert der nach Gln. (7.8) mit den Ergebniswerten der vorausgegangenen Berechnungen ermittelten Variationen von L_z^{acc}

$$\left| L_z^{\text{acc}} \right| = 3,7 \cdot 10^{17} \text{ Nm.}$$

Das mittlere beschleunigende Drehmoment ist etwas größer als das mittlere retardierende magnetische Kopplungsdrehmoment und das resultierende mechanische Drehmoment (Gln. (5.1)), was für eine magnetische Reibungskopplung im Rahmen des benutzten Modells spricht, bei der die erregende Kraft größer als die Reibungskraft und die Resultante sein muß.

Resümierend kann festgestellt werden, daß das Verhalten der Driftgeschwindigkeit ω , der Rotationsgeschwindigkeit ω_m des Mantels und der Drehmomente $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} im Zeitbereich eine Beschreibung der Prozesse durch ein äquivalentes Modell der starren Rotation einer Kernoberflächenschicht mit $L_z^{(1)}$ als rücktreibendes und L_z^{acc} als beschleunigendes Drehmoment zuläßt. Die Entstehungsursache des letzteren kann wegen der kinematischen Behandlung des Kopplungsproblems jedoch nicht aus dem benutzten Modell abgeleitet werden.

7.2. Bestimmung der Modellparameter für die 30a-Periode

Der Vergleich periodischer Anteile in geophysikalischen Prozessen mit gleichperiodischen Oszillationen der Parameter der Erdbewegung zur Bestimmung von Parametern der Bewegungsgleichung wird von JOCHMANN /30/ bereits erfolgreich angewendet, so daß es nahe liegt, sich dieser Methode auch im Fall der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung zu bedienen. Aus den Spek-

tren von ω und ω_m lassen sich demzufolge die Parameter t_1 und C^1 auch für einzelne Perioden ermitteln. Unter der Annahme einer periodischen Anregung der Variationen der Kern- Mantel-Bewegung sind weiterhin die Amplituden der dazu erforderlichen gleichperiodischen beschleunigenden Drehmomente berechenbar. Für diese Rechnungen benötigt man eine Periode, die in beiden Spektren signifikant vorhanden ist und von der Länge der Datenreihe her auch signifikant nachweisbar war. Die Periode, die diesem Anspruch genügt, ist die 30a-Periode. Die nachfolgende Bestimmung o.g. Parameter für diese Periode kann als Muster für andere Periodenbereiche angesehen werden, für die eine solche Auswertung sicherlich auch möglich ist, wenn erweitertes Datenmaterial zugrunde gelegt werden kann.

Das Periodenanalysenverfahren von JOCHMANN /29/ liefert amplituden- und phasentreue Spektren. Es ist damit für die Auswertung gut geeignet. Für die einzelnen Perioden T mit signifikanten Amplituden A und den Phasen φ , die sich auf den Anfangszeitpunkt t_0 der Analyse beziehen, kann die Darstellung eines periodischen Anteiles der Größe $f(t)$

$$f(t) = A \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{T} (t-t_0) + \varphi \right] \quad (7.9)$$

verwendet werden. T , A und φ sind für die Größen ω und ω_m in Tab. 6 für die Hauptperioden ($A \geq S1$) angegeben. Aus Tab. 6 ist ersichtlich, daß die Periode bei 30a für ω_m nicht exakt mit jener von ω übereinstimmt. Aus der Fehlerbetrachtung (s. Kap. 4) für ω wird ersichtlich, daß der Periodenfehler für die 30a-Periode von ω 3,4a beträgt. Somit liegt die Periodendifferenz $\Delta T = T_{\omega_m} - T_{\omega} = 3a$ innerhalb dieser Grenze. Man kann daher beide Perioden miteinander identifizieren und sie nachfolgend als 30a-Periode bezeichnen. Das Hinzufügen einer Konstante zu $f(t)$ hat keinen Einfluß auf die Spektren. Im Gegensatz zum erfolgten Vergleich von $\Delta\omega_m$ und $\Delta\omega$ im Zeitbereich im Kap. 7.1. kann man hier die Größen ω_m und ω (Tab. 2, 3) bzw. ihre Spektren (Tab. 6) benutzen, um Gln. (7.4) anzuwenden. Aus Gln. (7.4) läßt sich infolge der bisherigen Bemerkungen mit A_m , φ_m bzw. A_ω , φ_ω als Amplituden und Phasen

der Periode T für \mathcal{C}_m bzw. \mathcal{C} folgern:

$$C = C_m \cdot \frac{A_m}{A_{\mathcal{C}\mathcal{C}}} \quad (7.10)$$

und (das Minuszeichen in Gln. (7.4) bedeutet im Periodenbereich eine Phasenverschiebung um $\pm \tilde{\eta}$)

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_\omega \pm \tilde{\eta} \quad (7.10a)$$

Wie die Werte für \mathcal{F} in Tab. 6 zeigen, ist diese Phasenbeziehung nicht erfüllt. Den Betrachtungen in den Kap. 6.3. und 7.1. zufolge ist der Drehimpulserhaltungssatz in der Form der Gln. (7.4) nur dann optimal erfüllt, wenn man eine Zeitverschiebung t_1 einführt und zwar so, daß den Werten von \mathcal{C}_m um t_1 früher liegende von \mathcal{C} zugeordnet werden. Außerdem wurden unterschiedliche Anfangszeitpunkte für die Analysen verwendet, für \mathcal{C}_m $t_0^1 = 1901.5$ und für \mathcal{C} $t_0^2 = 1903.5$. Damit besteht zwischen den Phasen ohnehin eine Verschiebung von $(2\tilde{\eta}/T) \cdot 2a$. Wenn man t_1 bereits mit dem in Kap. 7.1. ermittelten Vorzeichen berücksichtigt, was hier $t_1 > 0$ bedeutet, dann hat der periodische Anteil von Gln. (7.4) für die Periode T die Gestalt:

$$C_m \cdot A_m \cdot \sin\left(\frac{2\tilde{\eta}}{T}(t-t_0^1) + \varphi_m\right) = C \cdot A_\omega \cdot \sin\left(\frac{2\tilde{\eta}}{T}(t-t_0^2-t_1) + \varphi_\omega \pm \tilde{\eta}\right),$$

woraus die Gln. (7.10) und statt Gln. (7.10a) die Gleichung für die Bestimmung von t_1 folgt:

$$t_1 = \frac{T}{2\tilde{\eta}} \left[\pm \tilde{\eta} - (\varphi_m - \varphi_\omega) \right] - (t_0^2 - t_0^1) \quad (7.11)$$

Mit den A - und φ -Werten für die 30a-Periode aus Tab. 6 folgt aus Gln. (7.10) und (7.11)

$$C^1 = 2,942 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx \frac{1}{3} C$$

$$t_1 = 6a \pm n \cdot T \quad (n=1(1)n) \quad .$$

Wie im Kap. 7.1. lassen sich dann die folgenden Modellkonstanten errechnen:

$$C_c^1 = 3,07 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad d^1 = 275 \text{ km}, \quad \tau_A = 4,59 \text{ a.}$$

In diesem Fall ist t_1 nahezu gleich $\tau_A + \tau_2$, d.h. größer als τ_I und τ_A . ROBERTS /51/ hat abgeleitet, daß nur im Fall $\tau_A' = \frac{R}{V} < \tau_I'$ der Kern wie ein starr rotierender Körper behandelt werden kann. Für $\tau_A' > \tau_I'$ führt die Ankopplung mit der oberen Kernschicht zu einer raschen Änderung von ω im oberen Kern, während der sich die Mantelrotation allmählich ändert. τ_A' beträgt für den Gesamtkern ca. 58a, τ_I' etwa 12,6a, so daß die ROBERTSsche Betrachtung sowohl zu einem Schichtmodell zwingt als auch die Zeitverschiebung t_1 erklärt. Eine Vorstellung über den dabei stattfindenden Kopplungsprozeß wurde am Anfang des Kap. 7.1. entwickelt. Für die Ankopplung einer Schicht müßte nach Gln. (7.1) $\tau_A \approx \tau_I$ gelten. Mit $\tau_I = 4,23a$ gemäß Gln. (6.13) ist diese Beziehung ausreichend bewiesen. Die Dämpfungskonstante des Modells γ^1 für C^1 beträgt dann $-1/4,23a$ bzw. $-6.67 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$. Damit kann das Zeitverhalten des aperiodischen Anteils der Lösungen (6.7a), (6.7b) besser eingeschätzt werden. Wenn man bei der Berechnung der Amplitude \tilde{B} des aperiodischen Anteils nach Gln. (6.7c) für γ^1 obigen Wert, für $v^2 = 2\pi/T$ mit $T=30a$, für L_0 den Mittelwert von L_z^{acc} aus Kap. 7.1. und für ω_o^* den maximalen Wert des Verlaufes $\omega(t)$, aus Abb. 2 einsetzt, erhält man mit o.g. C^1 für $-(C^1/C_m) \cdot B \cdot e^{+\gamma^1 t}$ die folgende Darstellung des aperiodischen Anteils von ω_m :

$$\omega_m^{\text{ap}} = -4,13 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} \cdot \exp(-(t-t_a)/4,23a).$$

Diese Funktion klingt relativ schnell ab, ist aber in der Lage, ein nicht vernachlässigbares Spektrum zu erzeugen. In Abb. 6 ist dieses Spektrum mit $t_a = 1903,5$ aufgezeigt. Es enthält nahezu alle Perioden, die in ω und ω_m zu finden sind, u.a. auch eine 30a-Periode, deren Amplitude fast 80 % der 33,3a-Periode von ω_m beträgt. Natürlich spielen in diesem Testbeispiel die Wahl von $t_a = 1903,5$, die unterschiedlichen Periodenlängen und die angenommenen Größen zur Berechnung von \tilde{B} (insbesondere ω_o^*) eine große Rolle, so daß die Spektren der Abb. 3 und 6 nicht einfach subtrahiert werden können, um den periodischen Anteil zu erhal-

ten. Diese Rechnung zeigt aber prinzipiell, daß man den aperiodischen Anteil vorerst nicht vernachlässigen kann. L_0 kann daher den theoretischen Amplituden $A_m \cdot C_m \cdot (\gamma^2 + \nu^2)^{1/2}$ bzw.

$A_{\omega} \cdot C \cdot (\gamma^2 + \nu^2)^{1/2}$ aus Gln. (6.7a) nicht gleichgesetzt werden.

Der aperiodische Anteil entsteht durch den Typ K.c des L0-RENTZdrehmoments $L_z^{(1)}$. Diesem Gedanken folgend, wurde im Kap. 6.2. abgeleitet, daß die Differenzrotationsgeschwindigkeit $\Delta\bar{\omega}$ den aperiodischen Anteil nicht mehr enthält und somit geeignet ist, L_z^{acc} aus dem Spektrum von $\Delta\bar{\omega}$ zu bestimmen. Die Werte von $\Delta\omega^{ma}_z$ sind in Tab. 5 aufgezeigt. Die Spektren von $\Delta\omega^{ma}$ und $\Delta\omega_m$ sind von GREINER-MAI /23/ 1986 veröffentlicht worden. Von JOCHMANN /30/ wurden diese Ergebnisse benutzt, um L_0 abzuschätzen. Diese Schätzungen wurden ohne die Einbeziehung von Zeitverschiebungen durchgeführt, so daß das Ausbreitungsverhalten der magnetischen Felder in der weiteren Interpretation von L_0 berücksichtigt werden müßte. Gemäß Kap. 6.2. sind die Ergebnisse zu L_0 von einem Modell der Kernbewegung nicht unmittelbar abhängig. Inzwischen wurde $\Delta\bar{\omega}$ mit der soeben ermittelten Zeitverschiebung t_1 in $\Delta\omega^{ma}$ neu berechnet und einer Periodenanalyse unterzogen. Das Ergebnis dieser Analyse ist in Abb. 5, die Parameter der Hauptperioden sind in Tab. 6 dargestellt. Mit $A_{\Delta\bar{\omega}} = 0,97 \cdot 10^{-12} s^{-1}$ für $T=34,5a$ wird L_0 nach Gln. (6.11) zu

$$L_0 = 4,00 \cdot 10^{17} \text{ Nm} \tag{7.12}$$

berechnet (s.a. KAUTZLEBEN et al. /36/). Der Wert L_0 stimmt mit dem in Kap. 7.1. geschätzten Mittelwert von L_z^{acc} überein. Er ist in Konsistenz mit dem Modell der Reibungskopplung größer als die Amplituden von $L_z^{(1)}$ und L_z^{mech} für die gleichen Perioden (Tab. 6). Aus der Phase von $\Delta\bar{\omega}$ (Tab. 6) läßt sich nach Gln. (6.11) $t_a = -24a$ ermitteln. L_z^{acc} setzt demnach um $24a$ früher ein als $t_0 = 1903,5$, worauf $\Delta\bar{\omega}$ bezogen wurde. In dieser Zeit ist der aperiodische Anteil der Lösung (6.7) abgeklungen. Man müßte daher für L_0 mit den Formeln $L_0 = A_m \cdot C_m \cdot [(\gamma^1)^2 + \nu^2]^{1/2} = A_{\omega} \cdot C \cdot [(\gamma^1)^2 + \nu^2]^{1/2}$ einen ähnlichen Wert erhalten. Mit den Amplituden von ω und ω_m aus Tab. 6 erhält man für die 30a-Periode $L_0 = 3,44 \cdot 10^{17}$ Nm. Dieser Wert ist innerhalb der Standardabweichung der Spektren mit (7.12) identisch. Das beweist die

gute Konsistenz dieses einfachen Modells einer starr mit ω -rotierenden Schale des Kerns für die 30a-Periode.

Theoretisch ließen sich gleichwertige Ergebnisse auch mit Gln. (6.8) ermitteln. Aufgrund der Fehler der differentiellen Größen wurde L_z^{mech} jedoch nur für den Vergleich des mittleren Verhaltens im Zeitbereich benutzt.

Der im obigen Verfahren mit $\Delta\bar{\omega}$ ermittelte Wert (7.12) bildet die Inhomogenität der Integralgleichung des Typs (6.12) für eine analytische Beschreibung der Prozesse, die zur Erzeugung solcher Drehmomente führen und in dieser Arbeit nicht mehr behandelt werden. JOCHMANN /30/ hat auf dem Gebiet der Polbewegung gezeigt, daß unter Hinzuziehen weiterer geophysikalischer Informationen eine Lösung solcher Integralgleichungen möglich ist. Damit ist der Weg abgesteckt, auf dem die Interpretation solcher Zusammenhänge zwischen dem Magnetfeld der Erde und ihrem Rotationsverhalten fortgeführt werden kann.

Wenn man beschleunigende Drehmomente ausschließlich magnetischer Natur betrachtet, erlaubt das hier gewonnene Ergebnis bereits eine Aussage zum Typ der Felder, die ein solches Drehmoment erzeugen können. Bezieht man das toroidale Kernfeld \underline{B}_t^c in die Randbedingung (2.8d) ein, dann erzeugt es nur dann LORENTZ-Drehmomente gleicher Größenordnung oder Skala, wie \underline{B}_t^+ , wenn der Term

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_c} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} (rT) \right]^- \quad (7.13)$$

der Randbedingung (2.8d) die gleiche Skala hat, wie der für die Berechnung von $L_z^{(1)}$ bereits benutzte Term

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (rT) \right]^+$$

von \underline{B}_t^+ auf der Mantelseite der Kern-Mantel-Grenze. Die Größenordnung des letzteren ist durch den rechts in Gln. (2.8d) stehenden Ausdruck $\mu_0 \cdot \sigma_m \cdot W^{(uB)}$ bestimmt. Die Skala von $W^{(uB)}$

ist nach Gln. (2.10a) $R_c u B_p$ (u - Skala des \underline{u} -Feldes, B_p - Skala des \underline{B}_p -Feldes). Damit der Term (7.13) diese Skala hat, muß T^- bzw. \underline{B}_t^c die Skala $\mu_0 \cdot \mathcal{G}_c \cdot R_c u B_p = R_k B_p$ haben. R_k ist die magnetische REYNOLDSzahl des Kerns. Sie ist sehr viel größer als 1. Setzt man für u die Skala der Westdriftgeschwindigkeit $\mathcal{C}_p \cdot R_c$ mit ca. $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1} \cdot R_c$ und $\mathcal{G}_c = 3 \cdot 10^5 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ein, so ist $R_k \approx 230$. Die Beziehung

$$B_t^c = R_k \cdot B_p^c$$

(B_t^c - Skala des \underline{B}_t^c -Feldes) ist typisch für den sogenannten strong-field-Dynamo. Er erzeugt toroidale Felder, die, wie soeben berechnet wurde, um Größenordnungen größer als die poloidalen Felder sind, und beruht in bisher bekannten Modellen auf starker differentieller Rotation, die im Kerninnern mit dem \underline{B}_p -Feld und einer turbulenten Strömung wechselwirkt (s. $\omega \omega$ - Dynamo von KRAUSE und RÄDLER /38/). Da Dynamomodelle nur Schwingungen mit Perioden $T > 10^3 \text{ a}$ erzeugen (z.B. BRAGINSKIJ /6/), muß es sich im Fall der dekadischen Variationen um einen ähnlichen Mechanismus handeln, der zu kurzperiodischen Störungen des Dynamofeldes führt. Die Berücksichtigung der LORENTZkräfte in den Dynamogleichungen führt auf instationäre Lösungen. BRAGINSKIJ /5/ hat 1970 magnetohydrodynamische Torsionsschwingungen des Kerns mit Perioden von 30 a berechnet (s.a. BRAGINSKIJs Übersicht über die Erzeugung kurzperiodischer Variationen des Magnetfeldes der Erde /7/). Allerdings mußte auch BRAGINSKIJ einen willkürlichen Parameter, die negative Viskosität, in die magnetohydrodynamischen Gleichungen einführen, um die Quelle der Torsionsschwingungen zu modellieren. Die numerische Bestimmung solcher Parameter tiefergehender Modelle ist Aufgabe fortführender Arbeiten.

7.3. Diskussion der Möglichkeit eines Außenfeldeinflusses
im Periodenbereich um 22a

Im Kap. 5. wurde in den Spektren von ω und $L_z^{(1)}$ eine starke 22,22a-Periode festgestellt. In den Spektren von ω_m und $\Delta\bar{\omega}$ gibt es dazu einen ähnlichen, aber kleineren Peak bei 23,8a, dessen Amplitude innerhalb der Standardabweichung liegt. Bei einer magnetischen Ankopplung von Kern und Mantel in diesem Periodenbereich würde die Relation beider Peaks im Widerspruch zu jener für die 30a-Periode und damit zur Kern-Mantel-Kopplung stehen. Nach der im Kap. 7.2. auf die 30a-Periode angewendeten Methode erhält man aus dem Vergleich von ω und ω_m bei Gleichsetzung der beiden Perioden die Parameter ($T \approx 23a$)

$$\left. \begin{array}{l} c^1 = 0,474 \\ c_c^1 = 0,477 \end{array} \right\} \times 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad d^1 = 37 \text{ km}, \quad t_1 = -8,85a.$$

Die negative Zeitverschiebung t_1 zeigt, daß man die beiden Perioden nicht wie die 30a-Periode über den Drehimpulssatz in Relation setzen kann. Es gibt außerdem Anhaltspunkte dafür, daß beide Perioden verschiedenen Ursprungs sind. Sie sind im ω -Spektrum nicht trennbar, liefern jedoch in dem ohne Zeitverschiebung berechneten Spektrum von $\Delta\bar{\omega}$ (vgl. $\Delta\omega_m$ und $\Delta\omega^{ma}$ bei GREINER-MAI /23/) zwei dicht benachbarte Peaks, von denen der kleinere bei $T=22,22a$ und der größere bei $T=23,8a$ liegt. Ohne die Berücksichtigung der Zeitverschiebung würde sich demzufolge für $T=22,22a$ aus $\Delta\bar{\omega}$ ein L_0 von $0,65 \cdot 10^{17}$ Nm ergeben, für $T=23,8a$ jedoch $L_0 = 2,15 \cdot 10^{17}$ Nm. Im hier angegebenen Spektrum von $\Delta\bar{\omega}$ in Abb. 5 verschwindet die 22,22a-Periode ganz, wie es für aperiodische Prozesse typisch ist, die der retardierenden Wirkung von $L_z^{(1)}$ entspringen. Daher sind zwei Vermutungen naheliegend, die in gleicher Weise für den 20a-Periodenbereich des Säkularvariationsfeldes auch international diskutiert werden:

- (a) die 22,22a-Periode ist Ausdruck eines aperiodischen Prozesses, der der 23,8a-Periode in dem Spektrum von ω überlagert ist und bei Berücksichtigung einer Zeitverschiebung in

$\Delta\bar{\omega}$ eliminiert wird, und/oder

(b) die 22,22a-Periode ist die Folge des Einflusses der Sonnenaktivität.

Im Kap. 7.3. wird die Hypothese (b) behandelt, die Hypothese (a) im Kap. 7.5.

Wegen der Gleichheit der 22a-Periode von ω zur Länge des Umpolzyklus des Sonnenmagnetfeldes wurde im Kap. 5.2. erwogen, daß es sich um einen Außenfeldeinfluß handelt. In folgendem wird dazu gezeigt:

- (1) Wenn die Außenfeldvariationen eine mit denen des Innenfeldes vergleichbare Größe haben und Driftcharakter besitzen, dann sind sie in ω nachweisbar.
- (2) Unabhängig von den Voraussetzungen von (1) dürfen Außenfeldvariationen keinen sichtbaren Einfluß auf ω_m über eine magnetische Kopplung zum Mantel haben.

Eine Folgerung daraus ist, mit Hilfe der Kern-Mantel-Kopplung Perioden des Außenfeldes von denen des Innenfeldes zu trennen, wenn die Voraussetzungen von (1) erfüllt sind. ω spielt dabei die Rolle des Detektors, ω_m die des Kriteriums. Anhand der Aussagen zur Größenordnung des Außenfeldes lassen sich die Behauptungen (1) und (2) beweisen. Inwieweit die erste Voraussetzung von (1) erfüllt ist, bleibt in dieser Arbeit unbeantwortet. Die Umkehrung der Schlußweise, daß Perioden von ω , die nicht in ω_m enthalten sind, notwendigerweise Außenfeldvariationen sind, ist nicht eindeutig. Wie das Spektrum von $\Delta\bar{\omega}$ (Abb. 5) zeigt, würde man bei alleiniger Verwendung dieser Größe die Frage nach einem Außenfeldeinfluß gar nicht stellen, die nach der 23,8-a-Periode aber mit der Kern-Mantel-Kopplung beantworten können. Die Voraussetzungen von (1) sind sehr einschneidend, so daß ihre Erfüllung zweifelhaft erscheint.

Zunächst soll die in (1) aufgestellte Behauptung bewiesen werden. In den Berechnungen von ω und $L_z^{(1)}$ sind die Feldkoeffizienten und die der Säkularvariation des Erdfeldes bei $r=R_E$ benutzt worden. Bei der Extrapolation auf die Kern-Mantel-Grenze wurde angenommen, daß der Außenfeldanteil dabei unerheblich ist. Die benutzten Koeffizienten sind nach MAUERSBERGER et al. /41/, S. 127,

$$g_n^m = C_n^m + \gamma_n^m, \quad h_n^m = F_n^m + \zeta_n^m, \quad (7.14)$$

wobei C_n^m und F_n^m die Koeffizienten des Innenfeldes und γ_n^m und ζ_n^m die des Außenfeldes sind. MAUERSBERGER et al. /41/, S.150, zitierten Werte der γ_n^m und ζ_n^m in der Größenordnung von wenigen Prozent der g_n^m - und h_n^m -Werte. Für die Koeffizienten der Variationen des Außenfeldes $\dot{\gamma}_n^m$ und $\dot{\zeta}_n^m$ gibt es keinerlei derartige Aussagen. Solange der Mechanismus der Erzeugung der Außenfeldvariationen nicht bekannt ist, muß die Frage, ob sich die Koeffizienten proportional zur Feldstärke verhalten, offengelassen werden. Sie können daher zur Feldstärke des Außenfeldes in anderer Relation stehen als die des Innenfeldes zur Innenfeldstärke. Die nach MAUERSBERGER et al. /41/ (erste Tabelle auf Seite 150) interpolierten Werte zeigen, daß sie in der Größenordnung derer des Innenfeldes liegen können. Die Fehler in der Bestimmung des Außenfeldes sind jedoch größer, so daß mit den bekannten Angaben keine direkten Untersuchungen möglich sind. Um die nachfolgenden Betrachtungen numerisch stützen zu können, wird der Einfachheit halber angenommen, daß

$$C_n^m = 0,99 \cdot g_n^m, \quad \gamma_n^m = 0,01 \cdot g_n^m, \quad F_n^m = 0,99 \cdot h_n^m, \quad \zeta_n^m = 0,01 \cdot h_n^m \quad (7.15)$$

gilt. Die Variationen $\dot{\gamma}_n^m$ und $\dot{\zeta}_n^m$ können nur durch willkürliche Annahmen quantifiziert werden. Unter der Voraussetzung, daß die für die Berechnung von \mathcal{G} benutzte Darstellung des Feldes die des Innenfeldes ist, wurde Gln. (3.6) abgeleitet. Diese Interpretation des $\underline{p}^{(o)}$ -Feldes und seiner Variationen geschah nach internationalem Usus, was für die Feldkoeffizienten durchaus richtig, für die Koeffizienten des Säkularvariationsfeldes aber nicht begründet ist. Wenn man annimmt, daß sich die Variationen beider Feldanteile an der Erdoberfläche additiv überlagern, so folgt mit

$$\dot{g}_n^m = \dot{C}_n^m + \dot{\gamma}_n^m \quad \text{und} \quad \dot{h}_n^m = \dot{F}_n^m + \dot{\zeta}_n^m$$

sowie der Annahme $g_n^m \approx C_n^m$ und $h_n^m \approx F_n^m$:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_i + \Delta\mathcal{C}' \quad (7.16a)$$

mit

$$\mathcal{C}_i = \frac{\sum A_n (G_n^m \dot{F}_n^m - F_n^m \dot{G}_n^m) \cdot m}{\sum A_n ([G_n^m]^2 + [F_n^m]^2) \cdot m^2} \quad (7.16b)$$

$$A_n = \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{2n+1}, \quad \sum = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \quad (7.16c)$$

$$\Delta\mathcal{C}' = \frac{\sum A_n (G_n^m \cdot \ddot{\sigma}_n^m - F_n^m \cdot \ddot{\gamma}_n^m) \cdot m}{\sum A_n ([G_n^m]^2 + [F_n^m]^2) \cdot m^2} \quad (7.16d)$$

Wenn \mathcal{C} tatsächlich nach Gln. (3.6) berechnet wird, hängt der von den Variationen des Außenfeldes bedingte Anteil $\Delta\mathcal{C}'$ von \mathcal{C} (\mathcal{C}_i - Anteil von den Innenfeldvariationen) nur vom Verhältnis der beiden Variationen ab. Damit ist die Behauptung (1) bewiesen. Die Nachweisbarkeit von Außenfeldvariationen in \mathcal{C} folgt demnach aus der Voraussetzung von (1) und der Behandlung als Innenfeldvariationen bei der Extrapolation zur Kern-Mantel-Grenze.

Die nachgewiesene Detektorwirkung von \mathcal{C} ist damit erklärt. Dieser Nachweis erstreckt sich aber auf alle periodischen Variationen. Deshalb muß auch gezeigt werden, warum eine Periode des Außenfeldes nicht in \mathcal{C}_m oder I_z^{mech} erscheint, also im Modell nicht an der Kern-Mantel-Kopplung teilnimmt (Behauptung (2)).

Die eine Erklärung liegt auf der Hand. Das Außenfeld ist aufgrund seiner geringen Feldstärke und seinem Extrapolationsverhalten für eine magnetische Kopplung unwirksam. Bei richtiger Berücksichtigung des Außenfeldes muß sein Anteil an der Driftgeschwindigkeit infolge der Extrapolation auf $r=R_C$ abnehmen. Um dies analytisch zu zeigen, wird der Anteil der Variationen des Außenfeldes an der aus dem Gesamtfeld berechneten Driftgeschwindigkeit \mathcal{C}^E des Kerns bei $r=R_C$ nach dem richtigen Extrapola-

tionsgesetz ermittelt. Die radiale Komponente des Gesamtfeldes hat bei $r=R_c$ die Gestalt:

$$B_r^{(o)} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{R_c}\right)^{n+2} \cdot (n+1) (C_n^m \cos m\varphi + F_n^m \sin m\varphi) \cdot \lambda_n^{m,m} - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_c}{R_E}\right)^{n-1} \cdot n \cdot (Y_n^m \cos m\varphi + G_n^m \sin m\varphi) \cdot \lambda_n^{m,m} \quad (7.17)$$

$\dot{B}_r^{(o)}$ wird berechnet, indem man in Gln. (7.17) die Koeffizienten durch ihre Zeitableitungen ersetzt. Nach dem Konzept der frozen-field-theory (s. Kap. 3.) läßt sich die Driftgeschwindigkeit des Gesamtfeldes als Parameter einer Kernrotation berechnen (ω^E), von der nur der durch das Innenfeld bedingte Anteil die mechanische Oberflächenbewegung beschreibt. Die Rechnungen ergeben unter der Voraussetzung von Gln. (7.14) und (7.15) sowie der Annahme, daß die \dot{Y}_n^m - und \dot{G}_n^m -Werte in den Grenzen der Werte für die Koeffizienten des Gesamtfeldes bleiben:

$$\omega^E = \omega_i + \Delta\omega^a \quad (7.18a)$$

mit ω_i siehe Gln. (7.16b) und

$$\Delta\omega^a = - \frac{\left(\frac{R_c}{R_E}\right) \sum_{m=0}^n \frac{m(n+1)}{2n+1} (C_n^m \dot{G}_n^m - F_n^m \dot{Y}_n^m)}{\sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{R_c}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdot ([C_n^m]^2 + [F_n^m]^2) m^2} \quad (7.18b)$$

Bei der Herleitung wurden alle Terme gestrichen, die wegen Gln. (7.15) von geringer Größe sind.

Der durch die Außenfeldvariationen in Wirklichkeit bedingte Anteil (7.18b) ist wesentlich kleiner als der mit Hilfe des Extrapolationsgesetzes für das Innenfeld berechnete $\Delta\omega^a$ (Gln. (7.16d)). Um einen Schätzwert für $\Delta\omega^a$ anzugeben, wurde $\dot{G}_n^m = \dot{h}_n^m$ und $\dot{Y}_n^m = \dot{g}_n^m$ (oberste Grenze) gesetzt. Für die Dar-

stellung des Feldes 1975.5 nach BARRACLOUGH et al. /2/ und mit Gln. (7.15) ergibt sich

$$\omega_i \approx 1,01 \cdot \omega \quad \text{und} \quad \Delta\omega^a \approx -0,01 \cdot \omega$$

mit ω nach Gln. (3.6), so daß der in ω^g vom Außenfeld bedingte Anteil nur 1 % ausmacht. Er dürfte in den Spektren nicht mehr feststellbar sein. Das Verhältnis bleibt gleich, wenn man unter Berücksichtigung der Additivität der Koeffizienten andere Annahmen macht. Würde man im Extrapolationsverhalten des Gesamtfeldes den Außenfeldanteil richtig berücksichtigen können, dann dürfte er selbst unter den Voraussetzungen von (1) nicht mehr für die Driftgeschwindigkeit wirksam werden. Die Feststellung der typischen Periodenlänge von 22a und die Differenz zwischen den Spektren von ω und ω_m bei $T=22a$ sind also ein Argument dafür, daß diese Periode eine Außenfeldperiode sein kann.

Das Verhalten des LORENTZdrehmomentes $L_z^{(1)}$ ist von den zwei Größen K und ω bestimmt. K ist entsprechend Gln. (2.35a) bis (2.35c) von den quadratischen Formen der Feldkoeffizienten abhängig. Der Innenfeldanteil macht unter Beachtung von Gln. (7.15) mehr als 98 % des K -Wertes aus, der mit g_n^m und h_n^m berechnet wird. Die hierbei gedachte Separation des Außenfeldes ändert K also nicht wesentlich. Das zu diskutierende Verhalten von $K \cdot \omega$ ist daher maßgeblich von ω bestimmt. Die 22a-Periode erscheint in $L_z^{(1)}$ infolge der Benutzung von ω anstelle von ω^g . L_z^{mech} vereint dagegen alle im Innenfeldanteil erzeugten Drehmomente, dürfte theoretisch also nur die von ω_i bedingten Variationen des retardierenden Drehmoments $L_z^{(1)}$ beinhalten. L_z^{mech} aber bestimmt die Variationen von ω_m . Damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen.

Das Außenfeld für sich genommen ist nicht annähernd in der Lage, aufgrund von LORENTZdrehmomenten die Mantelrotation zu beeinflussen. Hierbei kämen vornehmlich LORENTZdrehmomente des poloidalen Typs zur Wirkung. Wegen der Koeffizientenrelationen (7.15) würden jene Drehmomente um 10^{-2} kleiner sein als die für das Innenfeld berechneten. Außerdem erfährt das Außenfeld beim Durchgang durch den Mantel die besagte Schwächung infolge der Extrapolation mit $(r/R_p)^{n-1}$, was diese Relation noch ungün-

stiger macht. Die Variationen des Außenfeldes müßten die des Innenfeldes um mehr als zwei Größenordnungen übertreffen, um dies wieder auszugleichen. Das ist unwahrscheinlich.

Die 23,8a-Periode von ω_m weist in diesem Fall entweder auf einen zusätzlichen Innenfeldeffekt hin, was dem berechneten L_0 -Wert zufolge dem Wirken eines strong-field-Mechanismus entspräche, oder sie ist das Ergebnis der Wirkung eines Prozesses auf der Erdoberfläche, der eine Beziehung zur Magnetfeldvariation als Detektor dieses Prozesses hat. Im Fall eines Innenfeldeffektes kann es sich wieder um eine Periode der theoretisch berechneten magnetohydrodynamischen Torsionsschwingungen (BRAGINSKIJ /5/) oder der bekannten MAC-Wellen (BRAGINSKIJ /4/) handeln, unter denen auch eine 20a-Periode berechnet wurde. Es gibt weitere Hinweise aus der Literatur, die die Existenz sowohl einer Innen- als auch einer Außenfeldperiode mit benachbarten Peaks bei $T=20a$ bejahen (PETROVA und BURLATSKAJA /45/). Die Trennung von Innen- und Außenfeldanteilen erweist sich als schwieriges numerisches Problem. Bei den Datenfehlern, wie sie für die Driftgeschwindigkeit hier ausgewiesen wurden, ist die Trennung eines solchen Doppelpeaks innerhalb des Spektrums von ω nicht möglich. Mit der Kern-Mantel-Kopplung eröffnet sich jedoch ein indirekter Weg, den 23,8a-Peak von ω_m einer Innenfeldvariation zuzuordnen, deren separater Nachweis in ω nicht möglich ist.

Ein Argument für eine äußere Ursache ist die Feststellung dieser Periode in den Schwankungen des Luftdrucks nach JOCHMANN /31/. Auch hier wird ein Zusammenhang zur Sonnenfleckenaktivität vermutet. Allerdings sind die Amplituden so gering, daß ein Einfluß auf die Mantelrotation fraglich ist. Schließlich äußerte RIVIN /46/ den Gedanken, daß die Sonnenaktivität einen Einfluß auf das Verhalten des Magnetfeldes des Erdkerns haben kann. In all diesen Fällen bleibt der Mechanismus unklar, mit dem die Sonnenaktivität einen solch sichtbaren Durchgriff auf die Erzeugungsmechanismen der Säkularvariation im Kern und der Oberflächenprozesse auf der Erde haben könnte.

Die Voraussetzung von Behauptung (1) läßt sich vorerst nicht prüfen. Damit bleibt die Schwierigkeit der Interpretation der 22a-Periode von ω bestehen. Der Äquivalenzcharakter der frozen-

field-Modelle der Säkularvariation (Kap. 3.) läßt die Interpretation als Außenfeldeinfluß zu, die Kern-Mantel-Kopplung beschränkt diese Interpretationsmöglichkeit jedoch auf seine Nachweisbarkeit in ω und schließt eine solche für ω_m aus. Die Frage, ob die 22a-Periode eine Außenfeldperiode ist, ließe sich besser beantworten, indem man Außen- und Innenfeldanteile trennt und ω mit dem Innenfeld berechnet, was z.Z. nicht möglich ist. Solange es daher eine andere äquivalente physikalische Interpretation gibt, die den Unterschied zwischen ω und ω_m in diesem Periodenbereich auch erklärt, muß man beide Richtungen weiterverfolgen und nach Argumenten gegen die Gleichwertigkeit äquivalenter Interpretationsmöglichkeiten suchen. Daß man dem Innenfeld eine Kerndrift zuordnen konnte, ergab sich physikalisch unter der Voraussetzung einer hohen Leitfähigkeit des Kerns und der Möglichkeit einer Relativbewegung zwischen Kern und Mantel. Für das Außenfeld entfällt die erste Voraussetzung völlig. Außerdem kann sein Einfluß vorwiegend nur über die poloidalen LORENTZdrehmomente erfolgen, die der vorausgegangenen Betrachtung zufolge viel zu klein sind. Daß Außenfeldvariationen sowohl die erforderliche Stärke haben als auch zur Driftstruktur des Feldes beitragen, bleibt vorerst wenig wahrscheinlich, so daß nach wie vor nach einer anderen Interpretation gesucht werden muß.

Im Kap. 7.5. werden Untersuchungen zur Hypothese (a) gemacht, die weiteren Aufschluß über die Natur der 22a-Periode geben. Sie werden u.a. auch zeigen, wie wichtig eine weitere Verdichtung aller greifbaren Informationen zum Magnetfeld vor 1940 ist, um solche Fragen, wie die nach dem Ursprung der 22a-Periode zu klären.

7.4. Die Periodenstruktur der Säkularvariationskoeffizienten und ihr Einfluß auf die Berechnung der Kerndriftgeschwindigkeit

Bisher wurden zwei von vier Hauptperioden in ω und $L_z^{(1)}$ (Tab.6) untersucht. Die Amplitude der 18a-Periode ist mit der Standardabweichung vergleichbar, kann aber noch als nachgewiesen be-

trachtet werden. Sie wird in späteren Arbeiten zum Verhalten des Dipolfeldes näher untersucht werden. Die kleineren Perioden wurden gemäß Kap. 4.2. und 5.2. vorerst aus der Betrachtung zur Kern-Mantel-Kopplung ausgeklammert. Ihre Existenz läßt sich nur im Zusammenhang mit gleichen Perioden in den Observatoriumszeitreihen als gegeben aufrechterhalten. Nach den Aussagen des Kap. 5.2. besteht für die 50a-Periode wegen ihres Auftretens als Hauptperiode von \dot{g}_1^0 (Tab. 7(1)) möglicherweise ein Zusammenhang zu einem nichtaxialsymmetrischen \underline{u} -Feld, der in fortführenden Arbeiten untersucht werden müßte.

Es besteht nun noch die Frage, inwieweit eine Erklärung der Unterschiede in den Spektren von ω und ω_m bei $T=66,7a$ möglich ist. Die Perioden um $T=60a$ sind als Hauptperioden des Säkularvariationsfeldes bekannt (z.B. GOLOVKOV et al. /19/). Deshalb ist es wichtig, zu erklären, warum sie in ω und $L_z^{(1)}$ nicht nachgewiesen werden. Für diese Untersuchungen spielten zwei wesentliche Unterschiede zu ihrem bisherigen Nachweis in den Magnetfelddaten ein Rolle. Im Gegensatz zu den häufig analysierten Feldwerten an der Erdoberfläche, in denen die 60a-Perioden bisher festgestellt wurden, sind die hier benutzten Größen erstens zusammengesetzte Größen globaler Art und beziehen sich zweitens auf die Kern-Mantel-Grenze. Dem ersten Punkt zufolge lassen sich die Spektren der Ausgangsgrößen \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m nicht linear in jene von ω transformieren. Dabei spielen auch die Trends eine Rolle. Periodische Variationen werden stets in Bezug auf einen konkreten Trend festgestellt. Bei der Bildung von ω wird neben der Struktur der periodischen Anteile auch die Trendstruktur gegenüber der der Koeffizienten verändert.

Die Untersuchung des zweiten Punktes führt zu der Aussage, daß die Perioden der \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m um 60a aufgrund ihrer Verteilung auf den Grad n und die Ordnung m und der Extrapolation des Feldes zur Kern-Mantel-Grenze bei der Berechnung von ω unterdrückt werden. Sie gehören damit zu den Feldvariationen, die keiner globalen Kerndriftgeschwindigkeit zugeordnet werden können. Nicht jede periodische Variation des Magnetfeldes muß gleichzeitig eine Periode einer hochspezialisierten Größe, wie der von ω , sein. Schließlich bleibt eine Unsicherheit hinsichtlich ihres Nachweises wegen des ungünstigen Verhältnisses zwi-

schen der Periodenlänge (62,5a - 66,7a) und der Länge des Datenintervalls (72a) bestehen, die nur durch Verwendung längerer Zeitreihen ausgeräumt werden kann.

Die Verteilung der Perioden in der Säkularvariation des Oberflächenfeldes auf den Grad n und die Ordnung m der Koeffizienten ξ_n^m und h_n^m verändert sich bei der Extrapolation des Feldes auf $r=R_c$. Das ist bereits daran erkennbar, daß Feldanteile unterschiedlichen Grades n mit unterschiedlichem Gewicht $(R_E/R_c)^{2n}$ in die Berechnung der Kerndrift eingehen. Für die Untersuchung dieses Zusammenhanges wurden die 35 Spektren der Koeffizienten ξ_n^m und h_n^m ($N=5$) berechnet. Wegen der großen Anzahl der Spektren mußte auf eine grafische Darstellung verzichtet werden. Die Hauptperioden sind in Tab. 7 dargestellt. Dieses Ergebnis kann auch für Folgeuntersuchungen genutzt werden. Die Tab. 7 zeigt, daß, wie es für die Variationen der Geschwindigkeit globaler Driften zu erwarten ist, alle in ω , ω_D und $L_z^{(1)}$ nachgewiesenen Perioden auch in diesen Spektren enthalten sind. Darüber hinausgehend ist die bekannte 60a-Periode des Magnetfeldes als Hauptperiode bei $T=58,8a$, $T=62,5a$ und $T=66,7a$ aufgelöst vertreten. Damit ist anhand neuester Daten bewiesen, was in der Literatur (BRAGINSKIJ /7/, GOLOVKOV et al. /19/ und die dort zitierte Literatur) mehrfach vorgefunden wurde: Die 66,7a-Periode von ω_m ist auch in der Säkularvariation des Oberflächenfeldes mit vergleichbarer Stärke vertreten. Der Widerspruch zwischen den Spektren von ω und ω_m für diesen Periodenbereich kann zwei Ursachen haben. Entweder ist diese Periode nicht in der Driftgeschwindigkeit des Kerns enthalten, ist also einer Feldvariation mit anderer Morphologie zuzuordnen, die ebenfalls zur Kopplung beiträgt, oder die Berechnung von ω entspricht aufgrund einer ungünstigen Datenstruktur im betreffenden Zeitraum einer Filterung dieser Periode mit dem benutzten Analyseverfahren.

Eine physikalische Erklärung dieses Widerspruchs setzt voraus, daß das Fehlen der 60a-Periode in ω sicher nachgewiesen ist. Da keine längeren Zeitreihen mit der erforderlichen Datendichte zur Verfügung standen, wurde versucht, diese Voraussetzung anhand von Untersuchungen zur Struktur von ω plausibel

zu machen. Ihr eigentlicher Beweis ist in Bezug auf das vorhandene Datenmaterial mit der Berechnung des Spektrums von ω bereits erfolgt.

Bei der Betrachtung der Tab. 7 fällt auf, daß die 60a-Perioden auf niedrige Grade der Feldentwicklung (Dipol, Quadrupol) konzentriert sind, so daß sie gegenüber \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m bereits in $B_r^{(o)}(R_E)$ mit geringerem Gewicht $(n+1)$ als die Feldkoeffizienten höheren Grades erscheinen. Zusätzlich werden sie bei der Extrapolation zur Kern-Mantel-Grenze weniger verstärkt als die auch in höheren Graden auftretenden 20a-, 30a- und 50a-Perioden. Bei der Bildung von ω nach Gln. (3.6) wirkt die Bewichtung mit $m \leq n$ in der gleichen Richtung, so daß seitens der zeitkonstanten Gewichte m und n und des Faktors $(R_E/R_C)^{2n}$, mit denen die \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m in ω eingehen, bereits eine Erklärung zu erwarten ist. Für die quantitative Erfassung dieses Einflusses wurde Gln. (3.6) anders aufgeschrieben:

$$\omega = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (\dot{G}_n^m \dot{H}_n^m - \dot{H}_n^m \dot{G}_n^m) \quad (7.19a)$$

mit

$$(\dot{G}_n^m, \dot{H}_n^m) = \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdot m \cdot (\dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m) \quad (7.19b)$$

$$(\dot{G}_n^m, \dot{H}_n^m) = (\dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m) / \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_E}{R_C}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdot m^2 \left[(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2 \right] \right). \quad (7.19c)$$

Um den Einfluß der Bewichtung mit m , n und $(R_E/R_C)^{2n}$ zu untersuchen, werden die Koeffizienten (7.19c) zunächst als konstante und gleiche Gewichte angenommen. Die Spektren der Größen \dot{G}_n^m und \dot{H}_n^m in Gln. (7.19b) sind dann ein Maß dafür, wie die Perioden von \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m in die Berechnung von ω eingehen. Die ihnen zugeordnete spektrale Energie $E(T_i)$ mit

$$E^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \left[(\dot{G}_n^m)^2 + (\dot{H}_n^m)^2 \right] \quad (7.20)$$

vermittelt einen Eindruck von der unter o.g. Voraussetzung zu erwartenden Amplitudenverteilung. Bei ihrer Berechnung wurden benachbarte Perioden zusammengefaßt, so daß nachfolgend von Periodenbereichen gesprochen wird. E ist für die betrachteten Periodenbereiche in Abb. 8 eingetragen. In dieser Verteilung sinkt die Amplitude der 60a-Perioden relativ zu der der 20a-, 30a- und 50a-Perioden weit herunter, müßte im Spektrum von ω aber mindestens einen Peak liefern, der mit dem 18a-Peak vergleichbar ist.

Eine weitere Einflußgröße im Zusammenhang zwischen den Spektren der \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m und ω sind die Gewichte (7.19c). Diese Gewichtsfunktionen hängen sowohl von der räumlichen als auch von der zeitlichen Struktur des Feldes ab. Wenn man sich die Größe der Koeffizienten \dot{g}_n^m und \dot{h}_n^m in anerkannten Kugelfunktionsentwicklungen des Feldes in Abhängigkeit von n ansieht, so stellt man fest, daß bei gleichem Grad n die Bewichtung für die verschiedenen Periodenbereiche untereinander wieder zur Benachteiligung der 60a-Perioden gegenüber den 20a-, 30a- und 50a-Perioden führt. Eine weitere Unterdrückung der 60a-Perioden gegenüber Abb. 8 aufgrund der Feldstruktur wäre also begründbar.

Schließlich wirken infolge der Zeitabhängigkeit der \dot{g}_n^m , \dot{h}_n^m die G_n^m und H_n^m auf die periodischen Anteile von \dot{G}_n^m und \dot{H}_n^m in Gl. (7.19a) als zeitabhängige Amplituden. Sie verursachen dadurch Periodenverschiebungen in ω gegenüber den Spektren der \dot{G}_n^m und \dot{H}_n^m . ω hat in Bezug auf die Abhängigkeit von letzteren eine wesentlich kompliziertere Zeitstruktur als die der linearen Abhängigkeit im Falle zeitkonstanter Gewichte. Die mathematische Struktur der Abhängigkeit der Driftgeschwindigkeit von \dot{g}_n^m , \dot{h}_n^m macht also den Mechanismus des Verschwindens der hohen Perioden gegenüber den Spektren von \dot{g}_n^m , \dot{h}_n^m als Folge der konkreten räumlichen und zeitlichen Feldstruktur verständlich.

Der Unterschied zwischen ω und ω_m bei T=66,7a kann nicht durch unterschiedlichen Trendbezug verursacht werden, da lt. Tab. 4 die Trends beider Größen proportional sind. Die Spektren beider Größen sind bezüglich der Trendelimination vergleichbar, so daß der Unterschied bei T=66,7a in Bezug auf die benutzte Datenreihe als nachgewiesen akzeptiert werden muß. Es erhebt

sich die Frage, ob sich dann die Gleichperiodizität der Variationen von ω_m und einiger \dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m bei $T=66,7a$ mit der Kern-Mantel-Kopplung erklären läßt.

Wenn die 66,7a-Periode keiner Variation der Geschwindigkeit der globalen Kerndrift entspricht, dann kann sie durch einen räumlich begrenzten Prozeß verursacht werden. Der Zusammenhang dieser Periode zu den Zentren der Säkularvariation ist bekannt und wurde u.a. von BRAGINSKIJ und FIŠMAN /9/ theoretisch untersucht. Die Periodenstruktur des Säkularvariationsfeldes in Tab. 7 liefert weitere Argumente dazu. Nach Tab. 7 ist die 66,7a-Periode eine Periode des Nichtdipolfeldes, besitzt hauptsächlich Quadrupolstruktur (\dot{g}_2^2, \dot{h}_2^1), ist in \dot{g}_3^2, \dot{g}_5^1 und \dot{h}_5^3 schwächer vertreten und in den anderen Koeffizienten gar nicht. Als dominante Periode einer Driftgeschwindigkeit kernoberflächennaher Schichten müßte sie in allen Koeffizienten erscheinen und symmetrisch auf \dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m gleichen Grades und gleicher Ordnung verteilt sein. Dagegen fehlt sie für $n=4$ ganz. Offensichtlich weisen diese Verhältnisse auf eine kompliziertere Struktur als die einer globalen Drift hin.

Wie GREINER-MAI /21/ zeigte, hat der Verlauf $\omega(N)$ für $N=2$ ein überragendes Maximum. Das Quadrupolfeld für sich genommen führt demzufolge zur höheren Driftgeschwindigkeit nach Gln. (3.6), während sich bereits für $N \geq 3$ $\omega(N)$ auf einen niedrigeren Wert einstellt, um den es fluktuiert. Für $N=4$ hat $\omega(N)$ ein Minimum. $\omega(N)$ zeigt demzufolge das gleiche Verhalten, wie die Verteilung der Amplituden der 66,7a-Perioden auf den Grad n (Tab. 7). Demzufolge wäre die auf $n=2$ konzentrierte Periode nicht nur die Variation eines räumlich begrenzten Prozesses schlechthin, sondern beschreibt möglicherweise einen räumlich begrenzten Driftprozeß. Solche Felddriften können mit zonalen u-Feldern höheren Grades in Zusammenhang gebracht werden. Die 66,7a-Periode wäre dann deshalb nicht in den LORENTZdrehmomenten enthalten, weil dort aufgrund des einfachen Modells die ξ_1, ξ_2, \dots aus Gln. (3.4) nicht berücksichtigt sind. Diese Periode ist dann auch höchstwahrscheinlich eine Periode der Kern-Mantel-Kopplung, die sich jedoch mit dem einfachen Modell der starren Rotation kernoberflächennaher Schichten nicht mehr beschreiben läßt. Es erscheint aussichtsreich, in einem der

nächsten Schritte das Modell der Kern-Mantel-Kopplung auf die Berücksichtigung zonaler Geschwindigkeitsfelder auszudehnen. Damit ist eine Richtung der Fortführung im Fall der hohen Perioden gegeben. Die Variationen im 20a- und 30a-Periodenbereich sind gleichmäßiger auf die Koeffizienten unterschiedlichen Grades verteilt, wie es für das Driftmodell der Säkularvariation typisch ist.

Wie bei BRAGINSKIJ /7/ erwähnt, ist auch für die 60a-Periode ein aperiodischer Prozeß nicht auszuschließen. In diesem Fall spielt die Trendelimination eine Rolle beim Vergleich mit ω_m , wenn die Größen infolge des Kopplungsprozesses gegeneinander Zeitverschiebungen aufweisen. Für ω_m wurde die 66,7a-Periode von JOCHMANN (private Mitteilung) in der 300a-Zeitreihe der l.o.d.-Werte als nicht persistent und auf das 20. Jahrhundert beschränkt nachgewiesen. Untersuchungen dieser Art sind mit den vorhandenen Magnetfelddaten vorerst nicht und mit ähnlicher Qualität in den nächsten Jahren überhaupt nicht möglich. Aus der Vermutung eines aperiodischen Prozesses ergäbe sich eine zweite Untersuchungsrichtung dieses Periodenbereiches, für die Daten vor 1900 erforderlich sind. Die nachfolgend ausgeführten Persistenzuntersuchungen können ein solches Verhalten wegen der Kürze der Zeitreihen für die hohen Perioden nicht beweisen. Die Untersuchungen zu diesen Perioden lassen sich mit dem vorhandenen Datenmaterial vorerst nicht abschließen.

7.5. Persistenzverhalten und aperiodische Anteile

In den vorangegangenen Kapiteln wurde vorausgesetzt, daß die mit der Periodenanalyse ermittelten Hauptperioden periodische Variationen der analysierten Größen sind. Von der FOURIERanalyse her ist bekannt, daß jeder beliebige in einem endlichen Zeitintervall beschränkte Kurvenverlauf in periodische Anteile zerlegt werden kann. Die in ω und ω_m festgestellten Perioden können daher auch Ausdruck äquivalenter aperiodischer Prozesse sein, wie sie u.a. im Kap. 6.1. beschrieben wurden. Setzt man die Kriterien für die Nachweisbarkeit einer bestimmten Periode als erfüllt voraus, dann führt das Analyseergebnis im

Fall aperiodischer Anteile jedoch zu unterschiedlichen Ergebnissen, wenn man die Anfangs- und Endpunkte der Zeitreihen variiert. Damit sind aperiodische Prozesse am Persistenzverhalten der Perioden bei Variation der Länge der Zeitreihen zu erkennen. Sofern diese Anteile durch die im Kap. 6.1. beschriebene Rückkopplung bedingt sind, spielen sie bei der Ermittlung der Parameter C^1 , t_1 und L_0 keine Rolle. Mit dem Spektrum von $\Delta\overline{G}$ in Abb. 5 und Tab. 6 ist indirekt bewiesen, daß sowohl die 18,2a-Periode als auch die 22a-Periode von \overline{G} Ausdruck eines solchen Prozesses bzw. der Rückkopplung von LORENTZkräften auf eine Änderung von \overline{G} zuzuordnen sind, während die 23,8a-Periode und die 66,7a-Periode als periodische Variationen ausgewiesen wurden. Der Ansatz (6.6) periodischer beschleunigender Drehmomente ist zunächst willkürlich, entspricht jedoch weitestgehend dem Spektrum von $\Delta\overline{G}$. Außerdem erfolgt, wie die Betrachtungen im Kap. 6.3. zeigten, die Rückkopplung über die kompliziertere Wirkung von LORENTZkräften im fluiden äußeren Kern. Dort bedingten sie, daß zumindest in den instationären Übergangsphasen C^1 eine Zeitfunktion ist, so daß in solchen Phasen andere Verläufe der aperiodischen Prozesse auftreten, als sie in der Lösung (6.7) für die aus magnetischer Sicht stationäre Behandlung der Kopplung vorkommen. Es lag daher nahe, die Variationen von $\overline{G}(t)$ einer direkten Untersuchung auf aperiodische Anteile hin zu unterziehen, den Zeitbereich, in dem sie stattfinden, näher einzugrenzen und direkt nachzuweisen, daß die starke 22a-Periode von \overline{G} mit dem aperiodischen Verhalten in Zusammenhang steht.

Ein solcher aperiodischer Prozeß wird nach Abb. 1 und 2 im Zeitintervall von 1903.5 bis 1929.5 vermutet. Dazu wurde eine Serie von Spektren mit verkürzten Zeitreihen berechnet. Die erste Serie (1903.5-1929.5/39.5/49.5/59.5/69.5) enthält den vermuteten aperiodischen Prozeß. Wenn er auf die erste Zeitreihe beschränkt bleibt, dann müssen die übrigen Zeitreihen Spektren ausweisen, in denen sich die Perioden mit $T < 26a$, die zum aperiodischen Prozeß gehören, in ihrer Peakhöhe fortlaufend verringern. In der zweiten Serie (1909.5-/1919.5-/1929.5-/1939.5-1975.5) wird der aperiodische Anteil, wenn er auf das erwähnte Intervall beschränkt ist, fortlaufend abgeschnitten, so daß die

durch ihn verursachten Perioden in den Spektren 1929.5 - x nicht mehr auftreten dürfen (Abb. 9b). Schließlich wurde die erste Serie mit $\varphi(t_i) \stackrel{!}{=} 0$ für $t_i > 1929.5$ wiederholt, um die durch die Verlängerung der Zeitreihe bedingte Peakveränderung quantitativ zu erfassen (Abb. 9c). Alle Zeitreihen wurden auf der Basis des Trends von φ (Tab. 4) analysiert. Das Ergebnis bestätigt obige Vermutungen:

- (1) Die 22a-Periode erscheint nicht mehr in den Zeitreihen 1929.5/39.5 - 1975.5 und nur mit einem schwachen Peak in den Zeitreihen 1909.5/19.5 - 1975.5. Der Verlauf von φ vor 1909.5 ist damit bestimmend für den Nachweis dieser Periode. Daher haben die Fehler der Koeffizienten \hat{g}_n^m und \hat{h}_n^m in den ersten drei Zeitpunkten ein für die Feststellung der 22a-Periode entscheidendes Gewicht.
- (2) Die Zeitreihen 1903.5 - x enthalten die 22a-Periode in der für ihre Erzeugung durch einen aperiodischen Prozeß typischen Weise bis auf eine Ausnahme: In der Zeitreihe 1903.5 - 1939.5 erscheint sie nach Abb. 9a gar nicht, müßte aber das Verhalten gemäß Abb. 9c zeigen. In diesem Intervall tritt statt dessen die ca. 18a- und 30a-Periode mit besonders hoher Amplitude auf. Dieses Ergebnis kann die Folge der Überlagerung des aperiodischen Prozesses mit den in der Zeitreihe 1939.5-1975.5 nachgewiesenen periodischen Variationen sein, die sich aufgrund der Kürze der Zeitreihe bei Hinzunahme desjenigen Bereichs auswirkt, in dem keiner der beiden Typen von Variationen dominiert.
- (3) Die ca. 18a-Periode verhält sich in Abb. 9a ab dem Intervall 1903.5-1929.5 analog wie die 22a-Periode (vgl. Abb. 9c), zeigt aber Periodenverschiebungen. In der zweiten Serie (19xx-1975.5) ist sie im Intervall 1909.5-1975.5 die zweitstärkste Periode und liegt in den übrigen Spektren dieser Serie innerhalb der Standardabweichung. Sie repräsentiert damit ebenfalls einen aperiodischen Prozeß. Im Intervall 1939.5-1975.5 erscheint nur noch die in der Dipoldriftgeschwindigkeit (Abb. 4b) nachgewiesene 17,2a-Periode, so daß auch hier eine Überlagerung aperiodischer und periodischer Anteile wahrscheinlich ist, die in der Serie 1903.5-xx zu Periodenverschiebungen führt.

Die beiden genannten Perioden zeigten einerseits ein Verhalten wie es für den vermuteten aperiodischen Prozeß erwartet wurde. Die Abweichungen davon weisen andererseits ein gewisses Zufallsverhalten auf.

- (4) Die 30a-Periode erscheint in der ersten Serie erst im Intervall 1903.5-1939.5 und klingt dann wie die 22a-Periode ab. Offensichtlich erscheint der aperiodische Prozeß im ersten Intervall als 22a- und im zweiten als 30a-Periode sowie in den Zeitreihen, die ihn mehrfach vollständig überlappen mit allen drei Perioden.

In der zweiten Serie x-1975.5 verhält sich die 30a-Periode umgekehrt. In dem Intervall 1939.5-1975.5, in dem die Daten geringere Fehler haben und $N=6$ ist, erreicht sie die ungefähre Stärke, in der sie mit der Gesamtzeitreihe nachgewiesen wurde. Es ist daher möglich, daß, wie das Spektrum von $\Delta\overline{\omega}$ indirekt beweist, die 30a-Periode eine periodische Variation ist, der ein aperiodischer Prozeß überlagert ist, welcher ebenfalls eine 30a-Periode im betrachteten Zeitintervall erzeugen kann (s. beispielsweise Abb. 6).

- (5) Die Perioden um 10 ... 12a sind offensichtlich persistente Perioden von ω . Die 50a-Periode ist in den Teilzeitreihen nicht mehr exakt nachweisbar. Wie Abb. 9c im Vergleich zu den Abb. 9a und 9b zeigt, kann das Entstehen hoher Perioden ebenfalls dem aperiodischen Prozeß zugeschrieben werden.

Damit kann der aperiodische Verlauf auf den Zeitraum von 1903.5-1929.5 lokalisiert werden. Der Vergleich der durch die Werte dieses Intervalls bedingten Anteile in dem Spektrum von ω mit dem Spektrum von $\Delta\overline{\omega}$ macht die Aussage wahrscheinlich, daß die 22a-Periode, die 18a-Periode, ein Teil der 30a-Periode und ggf. die 50a-Periode einem aperiodischem Verlauf von ω zuordenbar sind, der durch Rückkopplung des Magnetfeldes auf die Änderung der Relativbewegung zwischen Kern und Mantel unter Berücksichtigung endlicher Feldausbreitungsgeschwindigkeiten in beiden Körpern entsteht. Für das Modell der starren Rotation und elektromagnetisch stationäre Verhältnisse sind dieser Verlauf mit den Lösungen (6.7a,b) und ein Beispiel der durch ihn verursachten Perioden in Abb. 6 gegeben. Der Ver-

gleich von Abb. 6 und Abb. 9c zeigt, daß der aperiodische Anteil der Lösung (6.7a,b) noch nicht die Struktur besitzt, die das reale Verhalten beschreiben würde. Daher kann der aperiodische Anteil, ohne die vorausgegangene Ermittlung von L_0 zu beeinflussen, auch anders verlaufen, als es diese Lösung ausweist. Wenn sich beispielsweise die Felder im oberen Kern in endlichen Zeiten ausbreiten, so müßten streng genommen C und \mathcal{G} zeitabhängig vorgegeben werden; denn in diesem Fall werden die oberen Kerngebiete nach und nach von den koppelnden Feldern erfaßt. In diesem Fall aber ändern sich die Lösungen der Gln. (6.4) mit $L_z^{(1)} = K \cdot \omega^*$ und $L_z^{acc} = L_c$ für $t \geq t_a$ auf:

$$\omega^* = \omega_0^* \exp \left(-K \int_{t_0}^t \frac{dt'}{C(t')} \right) - \left(\exp \left[-K \int_{t_0}^t \frac{dt'}{C(t')} \right] \right) \cdot \int_{t_0}^t \frac{L_c(t'')}{C(t'')} \cdot \exp \left[K \int_{t_0}^{t''} \frac{dt'}{C(t')} \right] dt'' \quad (7.21)$$

$$\omega_m = - \left[\frac{C(t) \cdot \omega^*(t)}{C_m} - \frac{C(t_0) \cdot \omega^*(t_0)}{C_m} \right] + \int_{t_0}^t \frac{\dot{C}(t')}{C_m} \cdot \omega^*(t') dt' \quad (7.22)$$

d.h., daß eine einfache Proportionalität von $\Delta \omega_m$ zu $-\Delta \omega^*$ bereits theoretisch nicht mehr zu erwarten ist. Das bedeutet erstens, daß die Spektren von ω_m und ω^* nicht die gleichen Perioden enthalten müssen, und zweitens, daß nach wie vor die Gln. (6.9a) mit $L_z^{(1)} = K \cdot \omega^*$ gilt, so daß wegen $C_m = \text{const.}$ auch in diesem Fall das Spektrum von

$$\Delta \omega = \frac{1}{C_m} \int_{t_0}^t L_z^{acc}(t') dt'$$

die durch Rückkopplung über $L_z^{(1)}$ entstandenen Perioden nicht enthält und für periodische beschleunigende Drehmomente deren Periodenverhalten ausweist. Diese beiden Aussagen sind mit dem

Verhalten der 22a-Periode konsistent. $C(t)$ muß durch die Behandlung magnetohydrodynamischer Prozesse im oberen Kern ermittelt werden, was in dieser Arbeit nicht mehr vorgesehen war. Dieses Modell würde dann an die Stelle des für die Berechnung von C^1 und t_1 benutzten Modells der starren Rotation treten.

Eine zweite Möglichkeit bestände darin, aperiodische Verläufe von L_z^{acc} anzunehmen. Die Spektren in Abb. 6 und Abb. 5 zeigen, daß dafür eine einfache Abklingfunktion, wie sie der aperiodische Verlauf in Gln. (6.7a,b) aufweist, nicht geeignet ist. Die Spektren von ω_m^{ad} und $\Delta\bar{\omega}$ unterscheiden sich stark. Eine weitere Möglichkeit besteht in einem Rechteckimpuls der Art $\Theta(t)$, dem eine periodische Funktion überlagert ist:

$$L_z^{\text{acc}} = L_0 \cdot \cos \gamma(t-t_a) + L_1 \cdot \Theta(t), \quad (7.23)$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < t_a, t > t_b \\ 1 & t \in [t_a, t_b] \end{cases} .$$

Dieser Ansatz führt mit $\gamma = -K/C$ auf die Lösungen

$$\omega^* = \left(\tilde{B} + \frac{L_1}{K} \right) \cdot e^{\gamma(t-t_a)} - \frac{L_1}{K} + \frac{L_0}{C \cdot \sqrt{\gamma^2 + \nu^2}} \cos \left[\gamma(t-t_a) + \varphi \right] \quad (7.24a)$$

$$\omega_m = -\frac{C}{C_m} \cdot \omega^* \quad \text{für } t \in [t_a, t_b] \quad \text{und}$$

$$\omega^* = \left(\tilde{B} + \frac{L_1}{K} \right) \cdot e^{\gamma(t-t_a)} - \frac{L_1}{K} \cdot e^{\gamma(t-t_b)} + \frac{L_0}{C \sqrt{\gamma^2 + \nu^2}} \cdot \cos \left[\gamma(t-t_a) + \varphi \right] \quad (7.24b)$$

$$\omega_m = -\frac{C}{C_m} \cdot \omega^* \quad \text{für } t > t_b$$

mit \tilde{B} aus Gl. (6.7c). Dieses Modell kann noch durch Festlegung verschiedener Einsatzzeitpunkte für L_0 und L_1 erweitert werden. Die Lösungen (7.24) haben den Mangel, daß die gleichen aperiodischen Anteile auch in ω_m enthalten sind. Demzufolge müßten die aperiodischen Prozesse auch in ω_m eine 22a-Periode verursachen. Außerdem müßte das Spektrum von $\Delta\omega$ einen Anteil enthalten, der einer Sägezahnkurve entspricht. Dieser Anteil wäre schwer von den periodischen Anteilen zu trennen. Das Modell enthält bereits zu viele Parameter, um es in eindeutiger Weise an die Daten anzupassen. Eine getrennte Ermittlung von L_0 und L_1 ist nicht ohne weiteres möglich. Trotzdem zeigt dieses Beispiel, daß es eine Vielzahl äquivalenter Beschreibungsmöglichkeiten für den Verlauf von ω gibt, die ihn qualitativ approximieren.

Wesentlich für die vorangegangene Auswertung der Spektren sind die drei Aussagen, daß

- (A) das besprochene Periodenverhalten das mittlere Periodenverhalten der behandelten Größen beschreibt,
- (B) es gerechtfertigt war, für die Ermittlung periodischer beschleunigender Drehmomente vorerst nur die 30a-Periode zu benutzen
- (C) die Interpretation der 22a-Periode von ω als äquivalenter Ausdruck eines aperiodischen Prozesses infolge der Feldrückwirkung auf das Kern-Mantel-System wahrscheinlicher ist als die eines Außenfeldeinflusses.

Anhand der Untersuchungen zur 22a-Periode und 30a-Periode (vgl. Abb. 9a und 9c) ist erkennbar, daß der Nachweis der Perioden gegen Störungen der Werte des Datenintervalls anfällig ist. Um zu beweisen, ob die 66,7a-Periode ein periodischer oder aperiodischer Prozeß ist, benötigt man längere Zeitreihen. Für die Untersuchung aller Perioden wäre es daher günstig, wenn man die Zeitreihe auf Werte vor 1900 erweitern könnte.

Die hier benutzten Modelle der starren Rotation und die dafür ermittelten Parameter beschreiben das mittlere Zeit- und Periodenverhalten der untersuchten Prozesse entsprechend der vorgegebenen Näherung der Felder. Das Modell ist der Genauigkeit

der Daten angepaßt und liefert in dieser Näherung Ergebnisse, die das mittlere Verhalten der beobachteten Prozesse physikalisch plausibel beschreiben. Im Kap. 7. wurden Perioden angegeben, auf die das Modell nicht mehr anwendbar war (22a-, 66,7a-Periode). Es wurden Wege gezeigt, auf denen eine Klärung der damit verbundenen Probleme möglich ist. Die darüber hinausgehend beobachteten Abweichungen bewegen sich im Rahmen der relativ hohen Streuung der Daten. Es ist vorerst nicht zu entscheiden, ob sich darin ein physikalisch begründeter Zufallsprozeß äußert oder eine einfache Fehlerstreuung vorliegt.

8. Schlußfolgerungen für zukünftige Arbeiten

Die vorgelegte Arbeit enthält Ergebnisse, die mit dem einfachen Modell einer starren Relativrotation zwischen Kern und Mantel und der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung den wesentlichen Zusammenhang der mittleren Zeitvariationen von ω und ω_m und jenen für die 30a-Periode erklären. Einige Beobachtungsergebnisse verhalten sich jedoch widersprüchlich zu diesem Modell. Diese Widersprüche wurden darauf zurückgeführt, daß in dem verwendeten Berechnungsmodell für die LORENTZdrehmomente und in den Bewegungsgleichungen des Kern-Mantel-Systems die Fluidität des Kerns und der magnetohydrodynamische Charakter der Prozesse unberücksichtigt blieben. Die wesentliche Schlußfolgerung aus den Ergebnissen für zukünftige Untersuchungen war, daß man mit Berücksichtigung jener Prozesse die Erscheinungen beschreiben kann, die mit dem Modell der starren Rotation nicht erfaßt werden konnten. In den Kap. 7.3. bis 7.5. wurden drei Hypothesen anhand der vorangegangenen Rechenergebnisse darauf untersucht, ob sie sich für eine Erklärung dieser Widersprüche eignen. Der Beweis dieser Hypothesen mit entsprechenden physikalischen Modellen der Kernbewegung wurde zum Gegenstand fortführender Arbeiten erklärt. In folgendem werden der Inhalt dieser Hypothesen und die Schlußfolgerungen für die Fortführung der Arbeiten noch einmal zusammengefaßt.

- (1) Die 22a-Periode ist Ausdruck eines äquivalenten aperiodischen Prozesses infolge der Rückwirkung der an der Kopplung

beteiligten LORENTZdrehmomente auf die Bewegung der kernoberflächennahen Schichten.

Im Kap. 6.1. wurde anhand des Modells der starren Rotation bewiesen, daß der Typ $K \cdot \omega$ des Kopplungsdrehmoments solche aperiodischen Prozesse zu erzeugen vermag. Der theoretische Verlauf dieses aperiodischen Prozesses und die durch ihn verursachten spektralen Anteile stimmen quantitativ jedoch nicht mit dem realen Zeitverlauf von ω und ω_m überein. Im Kap. 7.5. wurde bewiesen, daß die 22a-Periode einem aperiodischen Prozeß im Zeitraum von 1903.5 bis 1929.5 zuordenbar ist. Schließlich wurde dort theoretisch gezeigt, daß bei Berücksichtigung endlicher Ausbreitungszeiten der koppelnden Felder im Kern die Differenzen zwischen ω und ω_m bei dieser Periode keinen Widerspruch zur Kern-Mantel-Kopplung darstellen.

In der Fortführung der Arbeiten muß ein Kopplungsmodell aufgestellt werden, das diese Felddausbreitung quantitativ berücksichtigt. Nach den Untersuchungen im Kap. 7.5. lassen sich die 18a-Periode und ein Teil der 30a-Periode ebenfalls einem aperiodischen Prozeß zuordnen.

- (2) Die 66,7a-Periode von ω_m wird durch die LORENTZdrehmomente erzeugt, die infolge toroidaler Felder aus der Wechselwirkung des poloidalen Feldes mit zonalen oder anderen fluiden Bewegungen in kernoberflächennahen Schichten entstehen.

Mit den Ergebnissen zu dem Spektrum von ω wurde bewiesen, daß diese Periode keine Periode der Driftgeschwindigkeit kernoberflächennaher Schichten ist und daher im Modell der starren Rotation einer Kernschicht nicht erfaßt wird. Mit der Berechnung der Spektren der Säkularvariationskoeffizienten wurde bewiesen, daß diese Periode dennoch zu den Hauptperioden des geomagnetischen Feldes gehört. Ihre Konzentration auf die Variationen weniger Feldkoeffizienten bestimmter Ordnung und bestimmten Grades beweist ihren Charakter als Schwingung oder Variation komplizierter Feldstrukturen. Wegen der Kürze des Datenintervalls im Vergleich zur Periodenlänge ist nicht zu entscheiden, ob es sich in bezug auf die Zeitstruktur um einen aperiodischen Prozeß oder eine persistente Variation handelt.

Die Untersuchung des Einflusses dieser Periode auf die Kern-Mantel-Kopplung muß darin bestehen, sie in den Parametern einer kernoberflächennahen Bewegung höheren Grades nachzuweisen, die von dieser Bewegung erzeugten toroidalen Kopplungsdrehmomente zu errechnen und damit o.g. Hypothese zu beweisen oder zu widerlegen.

Aus dem Vergleich von L_z^{mech} und $\dot{\omega}_m$ ergibt sich eine Möglichkeit, die 66,7a-Periode als Periode der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung zu interpretieren, ohne daß sie in $\dot{\omega}$ oder $L_z^{(1)}$ erscheinen muß. Die starke 66,7a-Periode von $\dot{\omega}_m$ in Abb. 4 ist in $L_z^{\text{mech}} \sim \dot{\omega}_m$ ebenfalls nicht mehr vorhanden. Dies deutet darauf hin, daß man möglicherweise eine solche Periode im Zeitintegral von $L_z^{(1)}$, d.h. bei $K=\text{const.}$ im Zeitintegral von $\dot{\omega}(t)$ feststellen kann. Demzufolge wäre die 66,7a-Periode sowohl keine Periode des gekoppelten Kern-Mantel-Systems für die Rotation einer Kernschicht als Festkörper, als auch eine Periode integraler Größen, für deren Diskussion es dieser Annahme nicht bedarf. Von diesen Größen wurde hier nur $\Delta\bar{\omega}$ behandelt, welches in der Tat eine starke nahezu 60jährige Periode aufweist. Die 30a-Periode würde demnach jener stationären Kern-Mantel-Schwingung entsprechen, für die die betrachtete Kernoberflächenschicht (ersatzweise) wie ein Festkörper behandelt werden kann. Die fortführenden Untersuchungen sollten sich also auch mit den Relationen zwischen den integralen und differentiellen Größen im Periodenbereich befassen.

Die dritte Hypothese zum Einfluß der Sonnenaktivität bei $T=22a$ wurde vorerst in den Hintergrund gedrängt und wird den Betrachtungen der Kap. 7.3. und 7.5. zufolge als wenig wahrscheinlich angesehen.

Neben den ausgeführten beiden Hypothesen gibt es noch eine Reihe von Anhaltspunkten für die Erklärung anderer Perioden (10a, 17 ... 18a), die ebenfalls eine Fortführung der Untersuchungen zur Kopplung rechtfertigen.

In der vorgelegten Arbeit wurden die Grundlagen für die Weiterführung erarbeitet. Der Beweis o.g. Hypothesen erfordert eine Erweiterung hinsichtlich des Bewegungsmodells des Kerns und der

Behandlung des Kopplungsproblems mit einem Modell, das die hydromagnetischen Prozesse im Kern berücksichtigt. Aus der hier ausgeführten theoretischen Behandlung des Kopplungsproblems läßt sich eine Vorstellung über die Fortführung der theoretischen Arbeiten entwickeln.

- (I) Erweiterung des Berechnungsmodells für die Berechnung der retardierenden LORENTZdrehmomente (Erweiterung im Rahmen kinematischer Modelle)
- Erweiterung auf die Berechnung toroidaler LORENTZdrehmomente für fluide zonale Rotationen in den kernoberflächennahen Schichten.
Wegen der Beschränkung der Länge der Kugelfunktionsentwicklungen des Erdmagnetfeldes ist dies nur für fluide Bewegungen niedrigen Grades (z.B. q_2^0 , q_3^0) sinnvoll. Mit dieser Erweiterung wird erhofft, die 66,7a-Periode des Magnetfeldes durch ein Geschwindigkeitsfeld zu modellieren.
 - Erweiterung auf fluide Bewegungen anderer Symmetrie
Mit einer solchen Modellierung der Säkularvariation lassen sich zu einem gewissen Grade auch räumlich begrenzte Bewegungen (z.B. Wirbel) in den Oberflächenschichten des Kerns und ihre Auswirkung auf die Mantelrotation berücksichtigen.
- (II) Erweiterung des Bewegungsmodells für die Beschreibung des Kopplungsprozesses (Erweiterung auf dynamische Behandlung)
Sowohl für die Modelle der Säkularvariation des geomagnetischen Feldes als auch für die Behandlung des Kopplungsproblems auf der Grundlage komplizierter Strukturen der kernoberflächennahen Bewegungen ist es notwendig, für die Beschreibung der Prozesse im Kern die NAVIER-STOKES-Gleichung mit der LORENTZkraft und die MAXWELLGleichungen zu verwenden. Die Berücksichtigung beider Gleichungen führt bekanntlich auch zur Beschreibung der Ausbreitungsprozesse des Feldes in fluiden Medien durch hydromagnetische Wellen (ALFVÉNwellen). Die Betrachtung zu den Zeitkonstanten in den Kap. 7.1. und 7.2. beweisen, daß dieser Weg aussichtsreich ist, ggf. auf eine einfache Darstellung der Zeitabhängigkeit von

C^1 und damit zu einer analytisch berechenbaren Lösung der Gln. (7.21) führt.

Zur Lösung dieser Probleme und der Interpretation wurden in den vorausgegangenen Untersuchungen zwei Hilfsmittel erarbeitet. Erstens: Für die Aufstellung solcher Modelle und die Verringerung der Anzahl unbekannter Parameter in ihnen spielen vereinfachende Annahmen zur Feldsymmetrie eine Rolle. Man wird sich daher genau mit der realen Feldstruktur beschäftigen müssen. Die Periodenanalyse der Säkularvariationskoeffizienten in Tab. 7 liefert dazu eine empirische Basis. Zweitens: Im Kap. 6.2. wurde eine Methode erarbeitet, um die Drehmomente unbekannter Prozesse im Kern auf inversem Wege zu bestimmen, ohne diese Prozesse modellieren zu müssen. Damit existieren bereits quantitative Aussagen über die Periodenstruktur und Größenordnung der Drehmomente, die sich theoretisch aus den erweiterten Modellen ergeben werden.

(III) Erweiterung des Datenmaterials

Für die Sicherung der Aussagen zu den hohen Perioden und die genauere Lokalisierung des aperiodischen Verlaufes vor 1930 sind Erweiterungen der Daten zum Magnetfeld notwendig. Hierzu gibt es drei Möglichkeiten: durch Hinzuziehen neuer Daten nach 1975.5, durch Berücksichtigung der Daten vor 1903.5, die an nichtäquidistanten Stützstellen und teilweise lückenhaft vorliegen und durch Berücksichtigung von Observatoriumswerten und Feldentwicklungen aus anderen Literaturbezügen als den hier verwendeten.

9. Zusammenfassung

Mit dieser Arbeit wurde eine Reihe von Fortschritten bei der Behandlung des Kern-Mantel-Kopplungsproblems erzielt. Die konsequente Behandlung dieses Problems beanspruchte drei theoretische Zweige der Geophysik. Das ist die Theorie der Mantelinduktion - sie wird für die Berechnung der Magnetfelder im Erdmantel und an der Kern-Mantel-Grenze benötigt - das ist die

Theorie der Säkularvariation - mit ihr wurden die Erzeugungsmechanismen dekadischer Variationen des Magnetfeldes an der Kernoberfläche modelliert und die Parameter kernoberflächennaher Bewegungen invers aus dem geomagnetischen Feld ermittelt - und das ist die Theorie der Erdrotation als Teilgebiet der Kreiseltheorie. Mit der letzteren wurden die beobachteten Korrelationen zwischen den Variationen der Mantelrotationsgeschwindigkeit und denen der Driftgeschwindigkeit kernoberflächennaher Schichten als physikalischer Zusammenhang interpretiert. Der physikalische Mechanismus der wechselseitigen Beeinflussung beider Bewegungen ist die magnetische Kern-Mantel-Kopplung. Ihre Behandlung erforderte die Berechnung der durch das Magnetfeld erzeugten Kopplungsdrehmomente. Für die Berechnung solcher LORENTZdrehmomente werden ihre Definitionen in der MAXWELLtheorie, die Lösungen der Induktionsgleichung des Mantels auf der Grundlage eines geeigneten Leitfähigkeitsmodells und die Parameter des Bewegungsmodells des Kerns benutzt. In der Literatur wurde ein Formalismus gefunden und hier verwendet, der die Herleitung analytischer Darstellungen der Komponenten des LORENTZdrehmomentes in Abhängigkeit von den Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung des geomagnetischen Feldes, der Driftgeschwindigkeit kernoberflächennaher Schichten und der Parameter des Leitfähigkeitsmodells erlaubte. Die Berechnung der LORENTZdrehmomente und Driftgeschwindigkeit des Kerns und der Interpretation ihres Zeitverhaltens mit den Bewegungsgleichungen des gekoppelten Kern-Mantel-Systems stellen die beiden Hauptteile der Arbeit dar.

Um den Formalismus numerisch rechenbar zu gestalten, wurden einige vereinfachende Annahmen gemacht. Für die Lösung der Induktionsgleichung wurde in Anlehnung an die Literatur ein sich in die störungstheoretische Behandlung solcher Gleichungen einzuordnendes Iterationsverfahren verwendet und seine Konvergenzbedingungen formuliert. Für die Fälle, in denen die Bedingungen schlechter als ausgeführt erfüllt sind, liegen exakte, vom Autor veröffentlichte Lösungen vor. Sie kamen bisher nicht zur Anwendung. Für die Beschreibung der Kernbewegungen wurde das einfachste Modell verwendet: die starre Rotation einer kernflächennahen Schicht relativ zum Erdmantel. Dieses

Modell hat den Vorteil, die Erdrotationsgleichungen für ein starr rotierendes Kern-Mantel-System benutzen zu können und die Gleichungen bis zur analytischen Lösung auszuintegrieren. Das erlaubte, die Wirkung der berechneten Kopplungsdrehmomente und die durch sie erzeugten aperiodischen Anteile in ω_m numerisch zu studieren und ein Verfahren aufzustellen, mit dem man Drehmomente berechnen kann, die sich aus unbekanntem Anteil des Kernfeldes ergeben. Das ist bisher der einzige Zugang zur Bestimmung toroidaler Kernfelder, die aus dem Dynamo-prozeß entstehen.

In der vorliegenden Arbeit wurde unter Ausnutzung bisheriger Ergebnisse und Verfahren anderer Autoren eine Reihe von Fortschritten bei der Behandlung des Kern-Mantel-Kopplungsproblems erzielt. Die bisher bekannten theoretischen Abhandlungen hierzu wurden quantitativ erweitert

- durch die geschlossene Darstellung aller Komponenten des LORENTZdrehmomentes für ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld des Kerns
- durch die analytische Berechnung der äquatorialen Komponenten dieses Drehmomentes in Abhängigkeit von den Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung des geomagnetischen Potentialfeldes und
- durch die Einbeziehung der Bewegungsgleichungen des starr rotierenden Kern-Mantel-Systems zur Ermittlung des Einflusses der axialen Komponente des LORENTZdrehmomentes auf die Variationen der Mantelrotation sowie der Berechnung der beschleunigenden Drehmomente.

Die numerische Berechnung der äquatorialen Drehmomentkomponenten erlaubte es, sich auf das Erdrotationsproblem und die weitere Behandlung der axialen Drehmomente zu konzentrieren. Der Verlauf letzterer wurde anhand eines anerkannten Datensatzes zum geomagnetischen Säkularvariationsfeld über einen Zeitraum von 72a studiert. Bis zur Berechnung der Drehmomente läuft dieser die axiale Komponente betreffende Zweig der vorgelegten Arbeit parallel zu den Untersuchungen von STIX und ROBERTS /55/. Die Aussagen zum Einfluß des Magnetfeldes auf die Polbewegung, der numerische Beweis des Typs $K \cdot \omega$ des axialen Kopplungsdrehmomentes mit konstantem K anhand einer langen Datenreihe, die

Ermittlung diskreter Perioden in den Variationen der Kerndriftgeschwindigkeit und der LORENTZdrehmomente und die Interpretation des mittleren Zeitverhaltens und der 30a-Periode mit Hilfe des Bewegungsmodells des magnetischen gekoppelten Kern-Mantel-Systems sind quantitative Erweiterungen gegenüber den zitierten Arbeiten.

Aus dem widersprüchlichen Verhalten der 22a-Periode von ω und der 66,7a-Periode von ω_m zum verwendeten Bewegungsmodell der starren Rotation einer Kernschicht wurde die Hypothese erarbeitet, daß diese Perioden mit Hilfe erweiterter Modelle der magnetischen Kern-Mantel-Kopplung physikalisch interpretierbar sind. Wie die Untersuchung zur Raum-Zeit-Struktur dieser Variationen zeigte, wäre es dazu erforderlich, das Modell der kernoberflächennahen Bewegung auf die Berücksichtigung fluidier Bewegungen komplizierter Struktur und die Bewegungsgleichung des Kern-Mantel-Systems durch die Einbeziehung der NAVIER-STOKES-Gleichung zu erweitern. Der Beweis dieser Hypothese ist Aufgabe fortführender Arbeiten.

Damit erscheint die magnetische Kern-Mantel-Kopplung als umfassendste und aussichtsreichste Erklärung für den Zusammenhang zwischen den dekadischen Variationen der Erdrotation und denen des Magnetfeldes. Wie die Arbeit zeigt, ist ihre Behandlung geeignet, auch Informationen über die Prozesse im Erdinneren aus den Beobachtungsdaten zu beiden Größen invers zu ermitteln.

Literaturverzeichnis

- /1/ BACKUS, G.E.: Kinematics of the geomagnetic secular variation in a perfectly conducting core. *Phil. Trans. R. Soc. London A* 263 (1969), 239-266.
- /2/ BARRACLOUGH, D.R.; HARWOOD, J.M.; LEATON, B.R. und MALLIN, S.R.C.: A model of the geomagnetic epoch 1975. *Geoph. J. R. astr. Soc.* 43 (1975), 645-659.
- /3/ BENTON, E.R. und WHALER, K.A.: Rapid diffusion of the poloidal geomagnetic field through the weakly conducting mantle: a perturbation solution. *Geoph. J. R. astr. Soc.* 75 (1983), 77-100.
- /4/ BRAGINSKIJ, S.I.: Magnitnye volny v âdre zemli. *Geom. i. Aeron.* VII (1967), 1050-1060.
- /5/ BRAGINSKIJ, S.I.: Magnitogidrodinamičeskie krutit'nye kolebaniâ v zemnom âdre i variacij dliny sutok. *Geom. i. Aeron.* X (1970), 3-12.
- /6/ BRAGINSKIJ, S.I.: O spektre kolebanij gidromagnitnogo dinamo zemli. *Geom. i. Aeron.* X (1970), 221-233.
- /7/ BRAGINSKIJ, S.I.: Short-period geomagnetic secular variation. *Geoph. Astroph. Fluid Dyn.* 30 (1984), 1-78.
- /8/ BRAGINSKIJ, S.I. und FIŠMAN, V.M.: Elektromagnitnoe vzaimodejstvie âdra i mantii pri êlektroprovodnosti, sosredotočenoj vblizi granicy s âdrom. *Geom. i. Aeron.* XVI (1976), 907-913.
- /9/ BRAGINSKIJ, S.I. und FIŠMAN, V.M.: 60-letnie variacii geomagnitnogo polâ i elektroprovodnost' mantii. *Geom. i. Aeron.* XVII (1977), 916-926.
- /10/ BUCHA, V.: Magnetic field and the processes in the Earth's interior. *Academia, Prague* 1983.
- /11/ BUCHA, V.; JAKUBKOVA, I. und PICK, M.: Resonance frequencies in the Sun's motion. *Studia geoph. et geod.* 29 (1985), 107-111.
- /12/ BULLARD, E.C.: The magnetic field within the Earth. *Proc. Roy. Soc. A* 197 (1949), 433-453.
- /13/ BULLARD, E.C.: Electromagnetic induction in a rotating sphere. *Proc. Roy. Soc. A* 199 (1949), 413-443.
- /14/ CUPAL, I.: Assymetry in a nearly symmetric dynamo. *Studia geoph. et geod.* 24 (1980), 28-38.
- /15/ CUPAL, I.: Theory of the Earth's magnetic field. In: BUCHA, V. /10/, Kap. III.

- /16/ CURRIE, R.G.: Magnetic shielding properties of the Earth's mantle. *J. Geoph. Res.* 72 (1967), 2623-2633.
- /17/ COURTILLOT, V. und Le MOUËL, J.L.: Geomagnetic secular variation impulses. *Nature* 311 (1984), 709
- /18/ ELTAYEB, I.A. und HASSAN, M.H.A.: On the effects of a bumpy core-mantle interface. *Phys. Earth Plan. Int.* 9 (1979), 239-254.
- /19/ GOLOVKOV, V.P.; ZAK, A.N.; ZVEREVA, T.I. und TURMINA, L.O.: Programmyi kompleks "Sferičeskij garmoničeskij analiz geomagnitnyh dannyh". III. Allunionskon-greß zu Fragen des Geomagnetismus, Jalta, UdSSR, 3.-7.2.1986.
- /20/ GREINER-MAI, H.: Theoretische Betrachtungen zum Verhalten des Magnetfeldes in einem sphärischen Erdmodell. *Astron. Nachr.* 307 (1986), 201-208.
- /21/ GREINER-MAI, H.: Westward drift of the Earth's core and the Earth's rotation. *Gerlands Beitr. Geophysik* 95 (1986), 341-354.
- /22/ GREINER-MAI, H.: The influence of the electromagnetic core-mantle coupling torques on Earth's rotation. *Astron. Nachr.* 308 (1987), 17-26
- /23/ GREINER-MAI, H.: Electromagnetic core-mantle coupling and the Earth's rotation. *Gerlands Beitr. Geophysik* 96 (1987), 230-238
- /24/ GREINER-MAI, H.: Der Einfluß der Magnetfeldvariationen auf die Erdrotation. *Vermessungstech.* 36 (1988), 19-21.
- /25/ HIDE, R.: Free hydromagnetic oscillations of the Earth's core and the theory of the geomagnetic secular variation. *Trans. R. Soc. London A* 259 (1966), 615-650.
- /26/ HODDER, B.M.: Geomagnetic secular variation since 1901. *Geoph. J. R. astr. Soc.* 65 (1981), 763-776.
- /27/ JOCHMANN, H.: Die Erdrotation als zyklischer Vorgang und Indikator zyklischer Vorgänge am Erdkörper. *Z. geol. Wiss.* 12 (1984), 197-205
- /28/ JOCHMANN, H.: Basic relations for the interpretation of variations of the length of day and polar motion. *Papers in honour of ANTAL TARCZY-HORNOCH 85*, Sopron, Hungary 1985.
- /29/ JOCHMANN, H.: Eine Methode zur Ermittlung periodischer Anteile. *Vermessungstech.* 34 (1986), 18-21.

- /30/ JOCHMANN, H.: Excitation functions, a mean to determine global geophysical properties of the Earth. International Symposium "Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets". Prague, CSSR, 1986.
- /31/ JOCHMANN, H.: The evidence of Sun spot cycles in air pressure variation. Gerlands Beitr. Geophysik 95 (1986), 228-233.
- /32/ JOCHMANN, H.: Possible relations between temporal variations of the geomagnetic field intensity and parameters of the Earth's rotation. HHI-Report 21 (1987), 47-50.
- /33/ KAHLE, A.B.; BALL, R.H. und VESTINE, E.H.: Comparison of estimates of surface fluid motions of the Earth's core for various epochs. J. Geoph. Res. 72 (1967), 4917-4925.
- /34/ KAHLE, A.B.; VESTINE, E.H. und BALL, R.H.: Estimated surface motions of the Earth's core. J. Geoph. Res. 72 (1967), 1095-1108.
- /35/ KAUTZLEBEN, H.: Kugelfunktionen. In: FANSELAU, G.: "Geomagnetismus und Aeronomie", Band I, Ergänzungsband, Leipzig 1965.
- /36/ KAUTZLEBEN, H.; GREINER-MAI, H. und JOCHMANN, H.: An interpretation of the 30-years period in fluctuations of the geomagnetic field and the length of day. Vortrag auf der 19. Generalversammlung der IUGG, Kanada, Vancouver BC August 1987 (Symposium U4).
- /37/ KAUTZLEBEN, H. und WEBERS, W.: Models of the main field. In: BUCHA, V. /10/.
- /38/ KRAUSE, F. und RÄDLER, K.-H.: Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Akademie-Verlag Berlin, 1980.
- /39/ LUCKE, O.; THIELE, E. und WAGNER, F.C.: Die Rotation der Erde und die Säkularvariation des erdmagnetischen Hauptfeldes. Abh. d. Geomagnet. Inst. Potsdam, Nr. 27 (1961), 111-130.
- /40/ MC DONALD, K.L.: Penetration of the geomagnetic secular field through a mantle with variable conductivity. J. Geoph. Res. 62 (1957), 117-141.
- /41/ MAUERSBERGER, P.; LUCKE, O.; LAUTERBACH, R. und FRÖHLICH, F.: Über das aus dem Erdinnern stammende Magnetfeld. In: FANSELAU, F.: "Geomagnetismus und Aeronomie", Band III, Berlin 1959.
- /42/ MORRISON, L.V. und STEPHENSON, F.R.: Secular and decade

fluctuations in the Earth's rotation: 700BC-AD. Sun and planetary system. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Boston, Lancaster 1982, 173-178.

- /43/ MUTH, L.A.: Can core surface velocities be determined from geomagnetic field model? Developments towards a comprehensive theory. Symposium of Stellar and Planetary Magnetism. Budapest, Hungary, August 1980.
- /44/ MOFFATT, K.H.: Magnetic field generation in electrically conducting fluid. Cambridge University Press 1978.
- /45/ PETROVA, G.N. und BURLATSKAJA, S.B.: Secular variations and reversal processes. In: BUCHA, V. /10/.
- /46/ RIVIN, U.R.: Vozmožnyj istočnik neprilivnyh fluktuacij skorosti sutočnogo vrašenia zemli s $20 \leq T \leq 100$ let. Geom. i Aeron XXV (1985), 833-836.
- /47/ ROCHESTER, M.G.: Geomagnetic westward drift and irregularities in the Earth's rotation. Phil. Trans. R. Soc. London A 252 (1960), 531-555.
- /48/ ROCHESTER, M.G.: Geomagnetic core-mantle coupling. J. Geoph. Res. 67 (1962), 4833-4836.
- /49/ ROCHESTER, M.G.: Perturbations in the Earth's rotation and geomagnetic core-mantle coupling. J. Geom. Geol. 20 (1968), 387-402.
- /50/ ROCHESTER, M.G. und SMYLIE, D.E.: Geomagnetic core-mantle coupling and the Chandler wobble. Geoph. J. R. astr. Soc. 10 (1965), 289-315.
- /51/ ROBERTS, P.H.: Electromagnetic core-mantle coupling. J. Geom. Geol. 24 (1972), 231-259.
- /52/ RUNCORN, S.K.: The role of the core in irregular fluctuations of the Earth's rotation and the excitation of the Chandler wobble. Phil. Trans. R. Soc. London A 306 (1982), 261-272.
- /53/ SMYLIE, D.E.: Magnetic diffusion in a spherically-symmetric conducting mantle. Geoph. J. R. astr. Soc. 9 (1965), 169-184.
- /54/ STIX, M.: On electromagnetic core-mantle coupling. Geoph. Astroph. Fluid Dyn. 21 (1982), 303-313.
- /55/ STIX, M. und ROBERTS, P.H.: Time-dependent electromagnetic core-mantle coupling. Phys. Earth Plan. Int. 36 (1984), 49-60.
- /56/ SZETO, A.K.M. und SMYLIE, D.E.: Coupled motions of inner core and possible geomagnetic implications. Phys.

Earth Plan. Int. 36 (1984), 27-42.

- /57/ SCHMUTZER, E.: Investigations of the influence of the global magnetic field of the Earth on the motion of the solid core. (Declination, westward drift, northward drift etc.). Gerlands Beitr. Geophysik 87 (1978), 455-468.
- /58/ VESTINE, E.H. und KAHLE, A.B.: The westward drift and geomagnetic secular change. Geoph. J. R. astr. Soc. 15 (1968), 29-37.
- /59/ VESTINE, E.H.; BALL, R.H. und KAHLE, A.B.: Nature of surface flow in the Earth's central core. J. Geoph. Res. 72 (1967), 4927-4936.
- /60/ WHALER, K.A.: Geomagnetic secular variation and fluid motion at the core surface. Phil. Trans. R. Soc. London A 306 (1982), 235-246.
- /61/ WEBERS, W.: Geomagnetic time series - mathematical modeling and physical contents. HHI-Report 21 (1987), 71-74.
- /62/ WATANABE, H. und YUKUTAKE, T.: Electromagnetic core-mantle coupling associated with changes in the geomagnetic dipole field. J. Geom. Geol. 26 (1975), 153-173.
- /63/ YUKUTAKE, T.: The effect of change in the geomagnetic dipole moment on the rate of the Earth's rotation. J. Geom. Geol. 24 (1972), 19-47.

T A B E L L E N

Tabelle 1 : Berechnete Komponenten des magnetischen
Kopplungsmoments (Maßeinheit 10^{17} Nm)

Epoche	L_x	L_y	L_z
1903.5	3,2043	0,0755	-8,0590
5.5	1,6698	3,1278	-4,4084
7.5	2,7773	1,2404	-10,1230
9.5	2,8816	0,6557	-13,7363
11.5	3,1638	0,5544	-20,1955
1913.5	3,8165	0,6458	-23,0221
15.5	2,8472	3,5432	-23,7539
17.5	2,3002	5,4789	-28,8710
19.5	2,3620	2,9154	-20,1248
21.5	2,4850	1,3648	-14,0336
1923.5	2,8247	0,5983	-16,1249
25.5	2,5744	1,0898	-13,7320
27.5	3,5772	-0,7480	-5,8220
29.5	3,7601	0,8985	-16,6877
31.5	3,0491	0,8703	-13,7543
1933.5	2,2362	1,5209	-9,0203
35.5	2,2248	0,6034	-11,0801
37.5	2,9086	0,5487	-11,7830
39.5	3,0431	0,0120	-11,6325
41.5	3,3543	-0,1454	-14,7139
1943.5	2,3928	-0,9424	-10,7110
45.5	1,6556	-0,4304	-8,0183
47.5	0,4916	-0,7085	-8,0913
49.5	0,9695	-1,1413	-8,0911
51.5	1,3237	-0,5717	-10,4528
1953.5	2,6314	-0,1993	-14,2520
55.5	1,2061	-0,2935	-11,0242
57.5	1,5137	0,4202	-12,6430
59.5	1,4292	0,6929	-11,7155
61.5	1,7387	-0,2789	-11,7980

**Tabelle 1 : Berechnete Komponenten des magnetischen
 Kopplungsmomentes (Maßeinheit 10^{17} Nm)
 -Fortsetzung-**

Epoche	L_x	L_y	L_z
1963.5	1,2099	-0,5942	-12,0821
65.5	0,6771	-0,7578	-12,4360
67.5	0,1789	-0,8225	-10,4857
69.5	-0,0257	-1,0836	-9,3562
71.5	-0,5969	-1,0930	-8,5559
1973.5	-0,2002	-0,9480	-10,1596
75.5	-0,1391	-0,3952	-8.8661

Tabelle 2 : Berechnete Werte der globalen Driftgeschwindigkeit des Kerns ω und der Dipoldrift ω_D (Maßeinheit 10^{-10} s^{-1})

Epoche	ω	ω_D	Epoche	ω	ω_D
1903.5	-0,359	0,236	1953.5	-0,616	-0,230
5.5	-0,198	0,437	55.5	-0,465	-0,364
7.5	-0,460	0,142	57.5	-0,543	-0,226
9.5	-0,625	-0,040	59.5	-0,505	-0,192
11.5	-0,926	-0,245	61.5	-0,501	-0,561
1913.5	-1,060	-0,275	1963.5	-0,520	-0,487
15.5	-1,116	0,312	65.5	-0,541	-0,467
17.5	-1,373	0,325	67.5	-0,456	-0,347
19.5	-0,944	0,257	69.5	-0,356	-0,380
21.5	-0,653	0,507	71.5	-0,367	-0,405
1923.5	-0,751	0,240	1973.5	-0,442	-0,365
25.5	-0,638	0,398	75.5	-0,381	-0,318
27.5	-0,224	-0,111			
29.5	-0,775	-0,091			
31.5	-0,632	-0,034			
1933.5	-0,400	-0,090			
35.5	-0,492	-0,098			
37.5	-0,525	-0,167			
39.5	-0,517	-0,202			
41.5	-0,655	-0,361			
1943.5	-0,455	-0,523			
45.5	-0,329	-0,347			
47.5	-0,336	-0,318			
49.5	-0,330	-0,388			
51.5	-0,443	-0,231			

Tabelle 3 : Aus l.o.d.-Werten berechnete mechanische Drehmomente L_z^{mech} (Maßeinheit 10^{17} Nm) und Mantelrotationsgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_m$ (Maßeinheit 10^{-12} s^{-1})

Epoche	L_z^{mech}	$\dot{\varphi}_m$	Epoche	L_z^{mech}	$\dot{\varphi}_m$
1901.5	1,006	-3,031	1930.5	-0,732	0,160
2.5	1,392	-3,115	31.5	-0,582	0,084
3.5	0,491	-3,107	32.5	-0,946	0,059
4.5	-0,968	-2,989	33.5	-1,719	0,051
5.5	-1,869	-2,863	34.5	-3,006	0,067
6.5	-1,719	-2,930	35.5	-4,358	0,000
7.5	-1,676	-3,006	36.5	-5,709	-0,067
8.5	-1,526	-3,073	37.5	-5,924	-0,185
9.5	-0,045	-3,124	38.5	-4,787	-0,396
1910.5	2,872	-3,174	39.5	-3,092	-0,657
11.5	5,383	-3,250	1940.5	-1,762	-0,918
12.5	6,262	-3,275	41.5	-1,075	-1,053
13.5	6,219	-3,048	42.5	-0,475	-1,103
14.5	5,897	-2,678	43.5	0,169	-1,137
15.5	6,284	-2,459	44.5	0,748	-1,187
16.5	6,498	-2,307	45.5	0,942	-1,187
17.5	4,653	-1,979	46.5	0,899	-1,137
18.5	3,666	-1,726	47.5	0,899	-1,095
19.5	3,602	-1,482	48.5	0,899	-1,053
1920.5	3,323	-1,246	49.5	0,942	-1,010
21.5	3,580	-1,271	1950.5	1,049	-0,968
22.5	3,280	-1,078	51.5	1,135	-0,926
23.5	4,052	-0,825	52.5	0,791	-0,884
24.5	6,112	-0,783	53.5	-1,612	-0,834
25.5	6,477	-0,682	54.5	-3,135	-0,775
26.5	4,181	-0,472	55.5	-3,135	-0,724
27.5	0,963	-0,152	56.5	-1,397	-0,749
28.5	-1,354	0,185	57.5	1,285	-1,128
29.5	-1,676	0,295	58.5	0,598	-1,154

Tabelle 3 : Aus l.o.d-Werten berechnete mechanische Drehmomente L_z^{mech} (Maßeinheit 10^{17} Nm) und Mantelrotationsgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_m$ (Maßeinheit 10^{-12}s^{-1})

- Fortsetzung -

Epoche	L_z^{mech}	$\dot{\varphi}_m$	Epoche	L_z^{mech}	$\dot{\varphi}_m$
59.5	-1,397	-1,103	1970.5	-0,539	-2,282
1960.5	-4,272	-1,002	71.5	1,607	-2,442
61.5	-6,310	-0,918	72.5	1,542	-2,635
62.5	-6,374	-1,095	73.5	0,620	-2,568
63.5	-4,787	-1,297	74.5	-1,032	-2,290
64.5	-2,920	-1,617	75.5	0,234	-2,265
65.5	-2,298	-1,861			
66.5	-2,105	-2,029			
67.5	-2,942	-1,996			
68.5	-3,457	-2,088			
69.5	-2,706	-2,248			

Tabelle 4 : Trendfunktionen der Verläufe der Drehmomente und Rotations- bzw. Driftgeschwindigkeiten : $f(t) = A + B \cdot t$

Größe	A	B	t_0
$L_x^{(1)}$	$4,067 \cdot 10^{17} \text{ Nm}$	$-0,0531 \cdot 10^{17} \text{ Nm/a}$	1903
$L_y^{(1)}$	$2,168 \cdot 10^{17} \text{ Nm}$	$-0,0465 \cdot 10^{17} \text{ Nm/a}$	1903
$L_z^{(1)}$	$-15,94 \cdot 10^{17} \text{ Nm}$	$0,0891 \cdot 10^{17} \text{ Nm/a}$	1903
L_z^{mech}	$2,503 \cdot 10^{17} \text{ Nm}$	$-0,0631 \cdot 10^{17} \text{ Nm/a}$	1901
\mathcal{G}	$-0,742 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$	$0,00486 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}/\text{a}$	1903
\mathcal{G}_D	$0,241 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$	$-0,0103 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}/\text{a}$	1903
\mathcal{G}_m	$-1,94 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$	$0,0125 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}/\text{a}$	1901

(t_0 - Anfangszeitpunkt der linearen Regression)

Tabelle 5 : Die vom LORENTZmoment $L_z^{(1)}$ erzeugte Änderung
 der Mantelrotationsgeschwindigkeit $\Delta\omega^{ma}$
 (Maßeinheit $10^{-12} s^{-1}$)

Epoche	$\Delta\omega^{ma}$	Epoche	$\Delta\omega^{ma}$
1903.5	0,000	1953.5	0,222
5.5	0,848	55.5	0,232
7.5	1,088	57.5	0,163
9.5	1,160	59.5	0,127
11.5	0,938	61.5	0,079
1913.5	0,583	1963.5	0,011
15.5	0,187	65.5	-0,081
17.5	-0,443	67.5	-0,094
19.5	-0,693	69.5	-0,065
21.5	-0,682	71.5	-0,008
1923.5	-0,771	1973.5	-0,031
25.5	-0,762	75.5	-0,004
27.5	-0,411		
29.5	-0,549		
31.5	-0,564		
1933.5	-0,378		
35.5	-0,291		
37.5	-0,244		
39.5	-0,197		
41.5	-0,295		
1943.5	-0,223		
45.5	-0,040		
47.5	0,131		
49.5	0,295		
51.5	0,347		

Tabelle 6 : Hauptperioden der Drift- bzw. Rotationsgeschwindigkeiten und Drehmomente (T-Periode in a, A-Amplituden, φ -Phasen in Grad, S1-Standardabweichungen der Amplituden) gemäß $f(t) = A \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} t + \varphi)$

Größe	T	A	φ	S1	Maßeinheit von A, S1
ω_D	41,67	12,76	265	4,80	$10^{-12} s^{-1}$
	26,32	8,07	155		
	17,24	13,91	80		
	14,49	5,87	50		
	8,55	5,16	270		
	7,35	5,12	162		
	5,29	6,45	305		
4,95	5,62	248			
ω_S	50,00	14,05	147	10,38	$10^{-12} s^{-1}$
	30,30	13,30	79		
	22,22	21,02	58		
	18,18	8,92	54		
ω_m	66,67	1,38	253	0,19	$10^{-12} s^{-1}$
	55,56	0,28	21		
	33,33	0,55	163		
	23,81	0,14	349		
	14,29	0,10	334		
$\Delta\omega$	62,50	1,62	277	0,36	$10^{-12} s^{-1}$
	34,48	0,97	241		
	23,81	0,33	168		
	13,00	0,17	46		

Tabelle 6 : -Fortsetzung-

Größe	T	A	φ	S1	Maßeinheit A,S1
$L_x^{(1)}$	66,67	0,33	245	0,35	$10^{17}Nm$
	24,39	0,47	330		
	16,13	0,54	265		
	13,89	0,52	233		
	10,53	0,49	223		
	7,30	0,37	134		
	6,71	0,37	114		
	4,46	0,37	308		
$L_y^{(1)}$	52,63	0,56	354	0,48	$10^{17}Nm$
	19,61	0,84	175		
	15,15	0,60	87		
	12,82	0,51	34		
$L_z^{(1)}$	47,62	2,84	137	2,11	$10^{17}Nm$
	30,30	2,74	84		
	22,22	4,38	57		
	18,52	1,87	67		
L_z^{mech}	55,56	1,60	353	0,58	$10^{17}Nm$
	28,57	3,36	216		
	17,24	0,57	199		
	14,93	0,90	151		
	10,99	0,89	53		
	9,43	0,64	333		
	8,20	0,91	113		
6,67	1,08	229			

Tabelle 7(1) : Hauptperioden der Spektren der Säkularvariationskoeffizienten nach HODDER /26/
 (A-Amplituden in nT/a, φ -Phasen in Grad,
 S1-Standardabweichungen der Amplituden in
 nT/a) gemäß $f(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$

Koeffizient	T	A	φ	S1
$\dot{\xi}_1^0$	58,82	1,53	224	1,77
	52,63	9,68	345	
	23,26	1,55	211	
$\dot{\xi}_1^1$	50,00	1,12	76	0,90
	30,30	2,47	352	
	21,74	1,12	305	
	17,24	2,56	246	
\dot{h}_1^1	62,50	6,09	220	1,34
	26,32	2,52	17	
	16,67	2,04	297	
	11,91	1,44	16	
	8,20	1,91	49	
$\dot{\xi}_2^0$	28,57	1,18	79	1,01
	19,61	2,38	321	
	15,63	2,89	274	
	12,99	1,59	238	
	10,75	1,97	151	
	8,55	1,36	27	
	7,69	1,60	316	
	6,90	1,58	222	
	4,00	1,11	41	

Tabelle 7(2) : Fortsetzung von Tab. 7(1)

Koeffizient	T	A	φ	S1
$\overset{\circ}{g}_2$	52,63	0,77	33	0,79
	24,39	2,75	122	
	19,61	1,36	92	
	15,63	1,06	60	
	8,00	0,86	202	
$\overset{\circ}{h}_2$	66,67	8,66	74	1,66
	45,46	1,64	134	
	20,83	2,33	277	
	16,95	1,38	234	
$\overset{\circ}{h}_2$	66,67	7,70	69	1,45
	37,04	1,47	161	
	16,39	1,95	76	
$\overset{\circ}{h}_2$	58,82	2,89	239	1,10
	27,80	3,23	36	
	17,86	1,29	173	
	12,20	1,71	295	
$\overset{\circ}{g}_3$	76,92	2,68	300	1,46
	27,03	2,89	238	
	20,00	3,60	198	
	15,87	3,40	138	
	10,10	3,14	287	
	9,17	2,53	264	
	8,26	1,41	229	
$\overset{\circ}{g}_3$	34,48	1,38	145	0,75
	22,22	0,88	35	
	16,95	1,03	331	
	13,89	0,90	269	
	9,80	0,84	95	

Tabelle 7(3) : Fortsetzung von Tab. 7(2)

Koeffizient	T	A	φ	S1
$\overset{\cdot 1}{g}_3$	7,52	0,82	311	0,75
	6,80	1,11	269	
	5,88	0,82	26	
	5,35	1,21	267	
	4,41	0,82	267	
$\overset{\cdot 2}{g}_3$	66,67	3,70	248	0,91
	32,26	1,28	280	
	13,89	1,18	292	
$\overset{\cdot 3}{g}_3$	58,82	4,58	33	1,08
	30,30	1,66	260	
	19,61	2,31	214	
	16,39	1,30	197	
	7,09	1,31	100	
$\overset{\cdot 1}{h}_3$	45,46	2,72	45	0,84
	23,81	0,95	170	
	16,67	0,85	62	
	13,51	1,10	151	
	8,20	0,85	86	
$\overset{\cdot 2}{h}_3$	55,56	1,01	86	0,75
	34,48	1,80	57	
	22,22	1,22	68	
	5,21	0,98	89	
$\overset{\cdot 3}{h}_3$	47,62	2,08	96	0,88
	21,74	2,35	69	
	17,54	1,04	78	

Tabelle 7(4) : Fortsetzung von Tab. 7(3)

Koeffizient	T	A	φ	S1
\cdot_0 ξ_4	50,00	2,34	151	0,96
	30,30	1,45	86	
	21,28	2,95	40	
	16,95	1,73	11	
	13,33	1,44	227	
	9,90	1,50	96	
	9,01	1,02	71	
	\cdot_1 ξ_4	30,30	1,62	
21,74		2,74	236	
16,13		1,13	151	
12,99		1,50	24	
7,94		1,45	178	
7,09		1,13	85	
6,37		0,98	317	
\cdot_2 ξ_4	55,56	1,23	189	0,71
	25,00	0,79	41	
	20,00	1,41	47	
	15,63	1,08	33	
	6,99	0,67	279	
	5,46	1,05	287	
	4,00	0,75	234	
\cdot_3 ξ_4	62,50	2,53	235	0,84
	16,95	2,05	330	
	14,09	1,10	264	
	8,20	1,01	41	
\cdot_4 ξ_4	62,50	1,33	274	0,84
	27,03	3,17	282	
	21,28	1,63	259	
	6,17	0,92	272	

Tabelle 7(5) : Fortsetzung von Tab. 7(4)

Koeffizient	T	A	φ	S1
	71,43	1,99	78	0,71
$\overset{\circ}{h}_4$	35,71	1,27	112	
	19,61	1,12	14	
	14,29	1,43	51	
	7,25	0,82	355	
	4,61	1,16	247	
$\overset{\circ}{h}_4$	47,62	3,48	69	0,83
	23,26	0,78	133	
$\overset{\circ}{h}_4$	47,62	1,00	269	0,68
	30,30	1,86	241	
	22,73	1,43	218	
$\overset{\circ}{h}_4$	71,43	2,26	88	0,87
	31,25	2,74	64	
	24,39	1,71	57	
	11,11	1,55	186	
$\overset{\circ}{g}_5$	71,43	1,74	254	0,75
	38,46	1,10	337	
	23,81	0,84	240	
	14,71	0,68	150	
	10,42	1,09	294	
	5,44	0,77	274	
	5,16	0,98	268	
$\overset{\circ}{g}_5$	66,67	1,19	250	0,78
	20,00	1,44	32	
	14,71	0,90	244	
	12,50	1,00	186	
	6,90	0,79	212	

Tabelle 7(6) : Fortsetzung von Tab. 7(5)

Koeffizient	T	A	φ	S1
$\cdot 2$ g_5	47,62	2,98	77	0,82
	19,61	0,93	159	
	6,76	0,98	76	
	5,78	0,96	161	
	5,35	1,25	89	
$\cdot 3$ g_5	71,43	1,95	255	0,71
	40,00	0,71	323	
	10,10	0,88	280	
	5,44	0,76	252	
	5,13	0,87	231	
$\cdot 4$ g_5	47,62	0,78	214	0,76
	29,41	1,50	165	
	22,22	0,84	140	
	10,87	0,76	45	
$\cdot 5$ g_5	52,63	1,12	161	0,62
	21,28	0,78	40	
	8,26	0,61	72	
$\cdot 1$ h_5	33,33	1,41	278	0,65
	14,71	1,04	220	
$\cdot 2$ h_5	22,22	1,01	30	0,67
	15,15	1,09	54	
$\cdot 3$ h_5	66,67	1,43	64	0,65
	8,62	0,88	6	
$\cdot 4$ h_5	43,48	1,38	297	0,66
$\cdot 5$ h_5	47,62	1,02	276	0,59
	9,80	0,68	167	
	8,33	0,63	273	
	5,41	0,65	5	

AB B I L D U N G E N

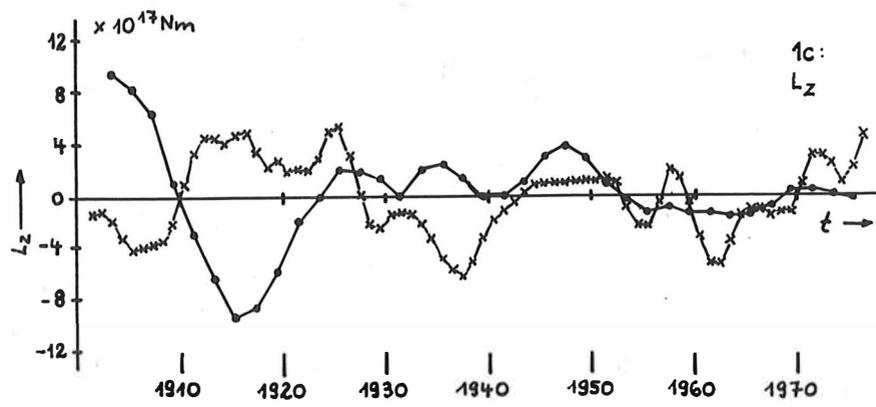
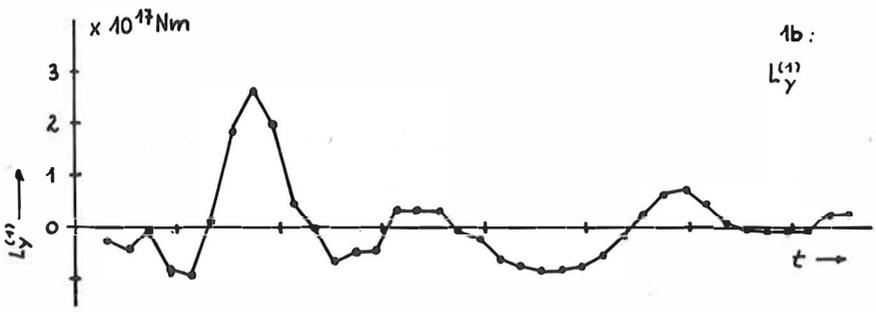
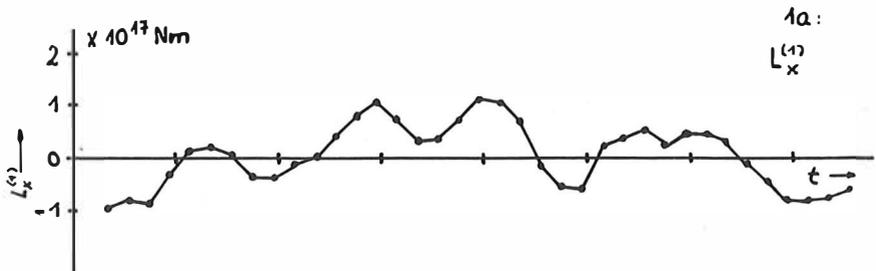


Abb. 1 : Variationen der Drehmomente im Vergleich zum linearen Trend (\bullet $L_{\dots}^{(1)}$, \times L_z^{mech})

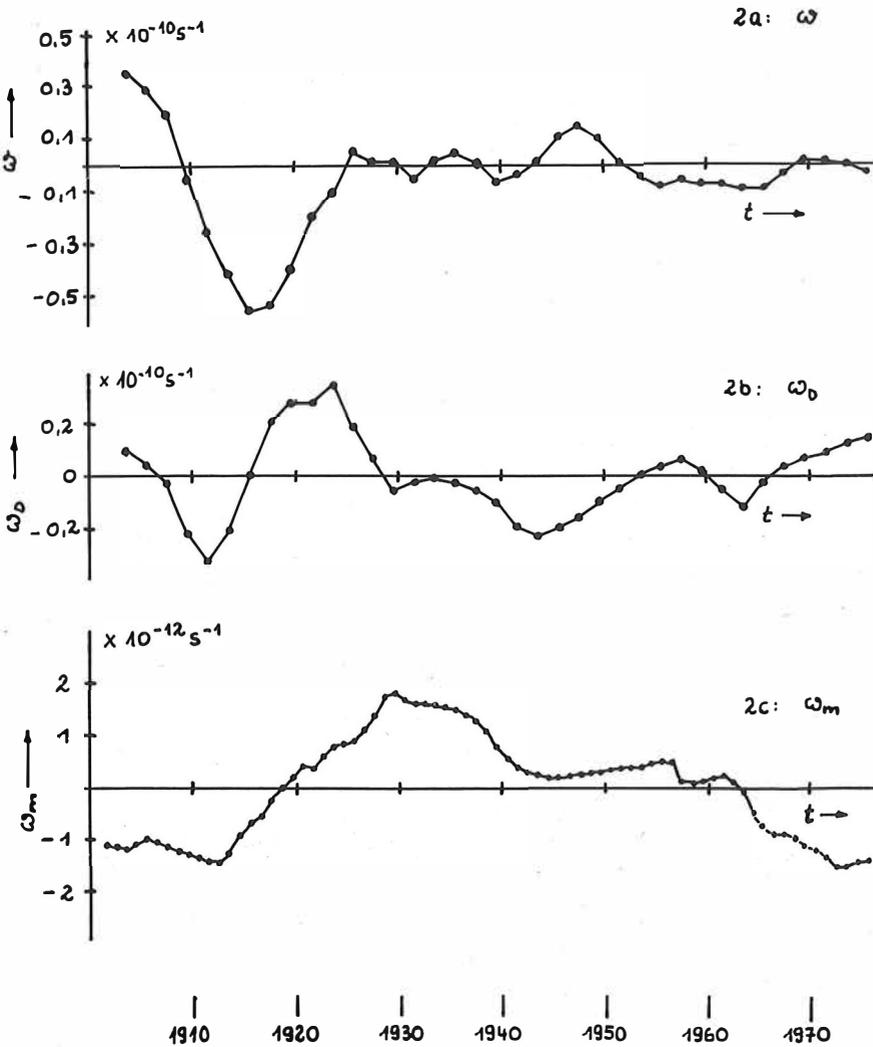


Abb. 2 : Variationen der Kerndriftgeschwindigkeit ω , der Dipoldriftgeschwindigkeit ω_D und der Erdrotationsgeschwindigkeit ω_m im Vergleich zum linearen Trend

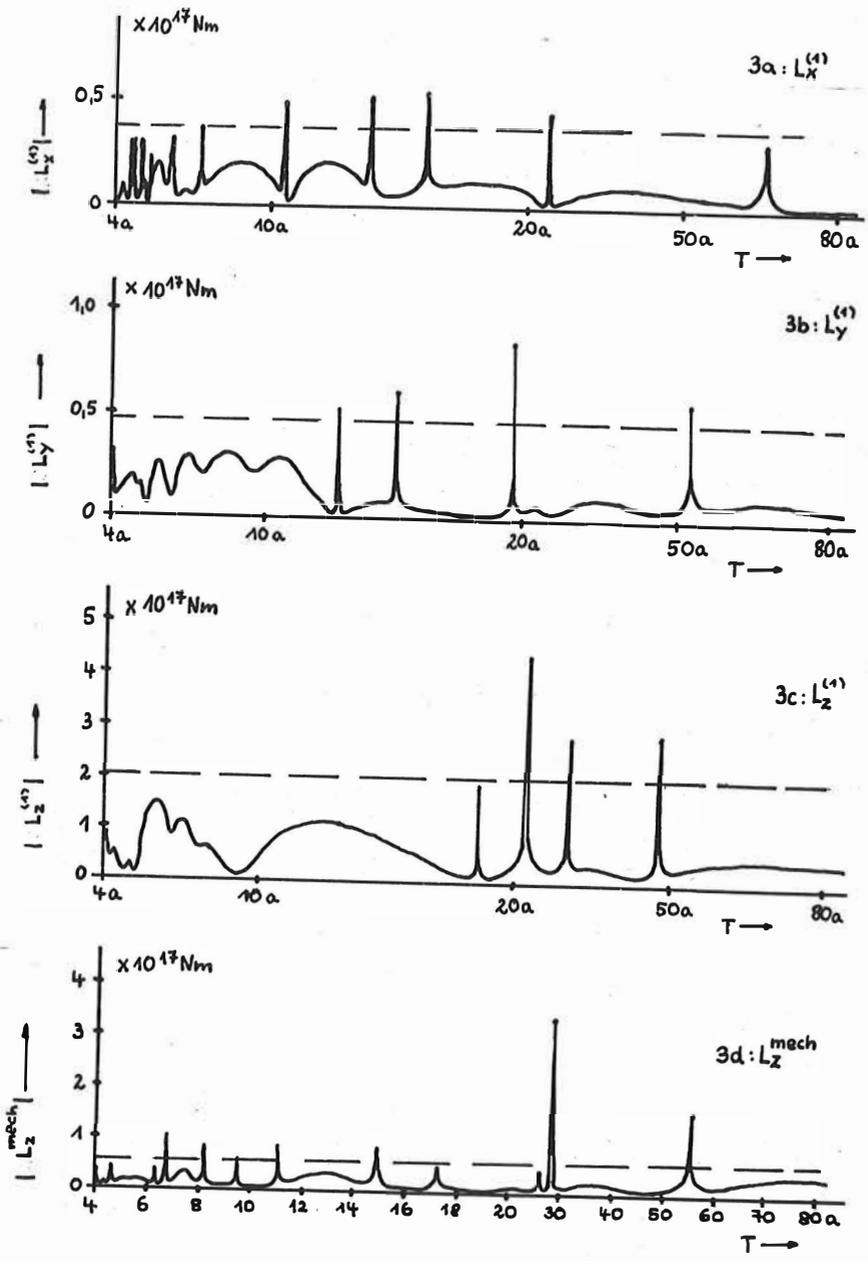


Abb. 3 : Periodenspektren der Drehmomente $L^{(1)}$ und L_z^{mech}

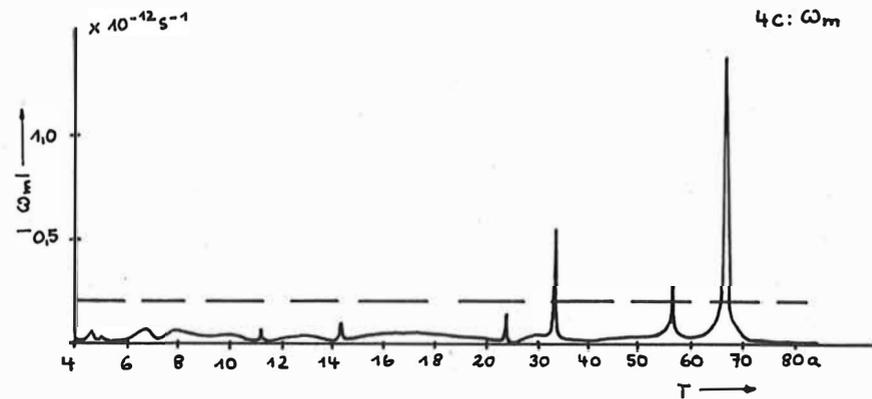
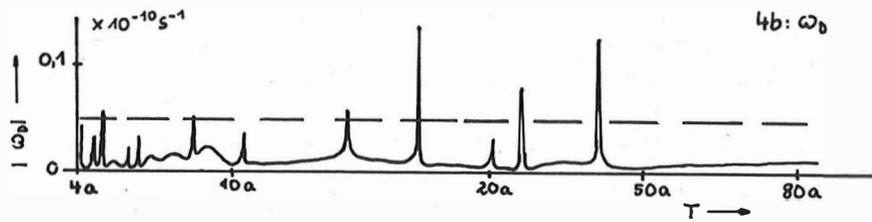
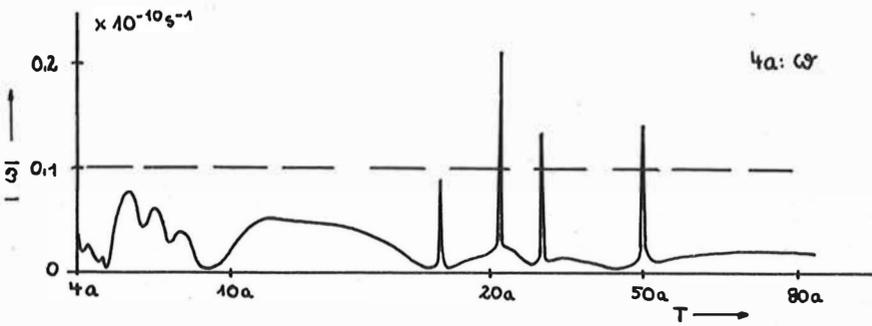


Abb. 4 : Periodenspektren der Kerndriftgeschwindigkeit ω_c , der Dipoldriftgeschwindigkeit ω_D und der Mantelrotationsgeschwindigkeit ω_m

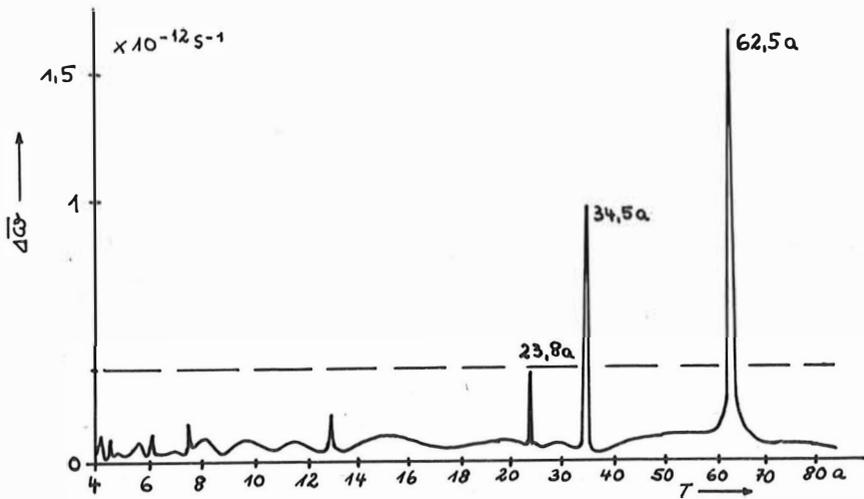


Abb. 5 : Periodenspektrum der Differenzrotationsgeschwindigkeit $\Delta\bar{\omega} = \Delta\omega_m - \Delta\omega^{ma} = \Delta\omega_m - C_m^{-1} \cdot \int_{t_0}^t L_z^{(1)} dt'$

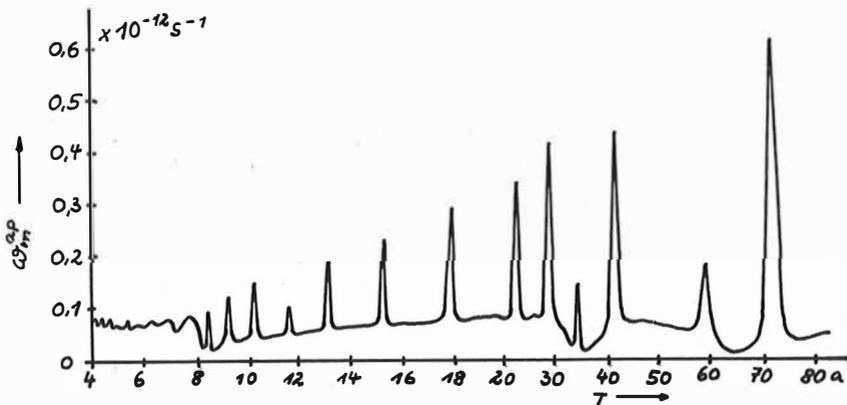


Abb. 6 : Periodenspektrum der aperiodischen Funktion

$$\omega_m^{ap} = -4,13 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} \cdot \exp(-t/4,23a) \text{ von } \omega_m$$

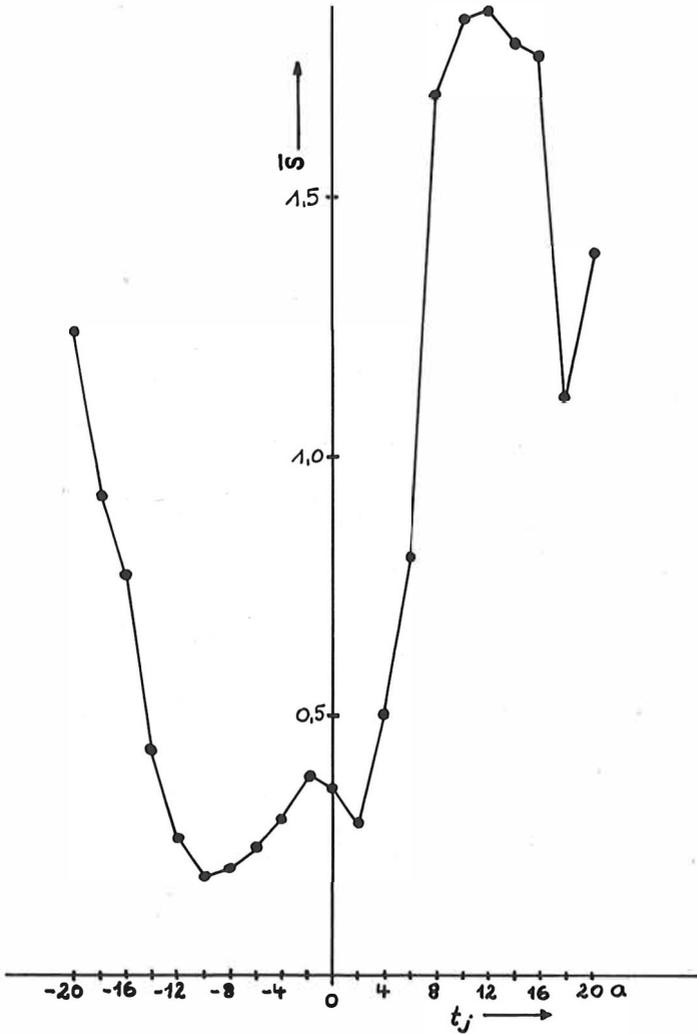


Abb. 7 : Anpassungsfunktion \bar{S} (Gln. (7.7)) in Abhängigkeit von der Verschiebung t_j der Verläufe $\Delta\omega(t_i)$, $\Delta\omega_m(t_i)$

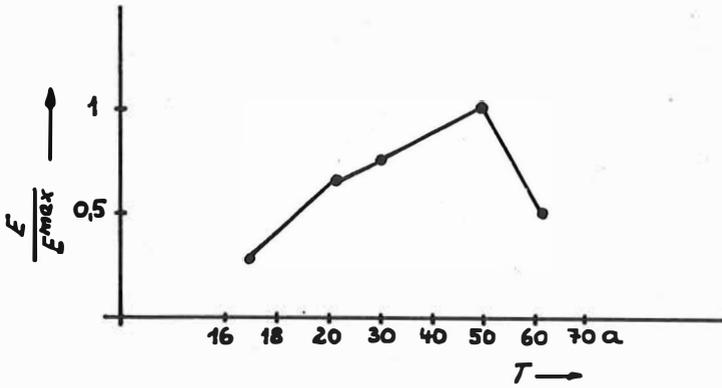


Abb. 8: Verteilung der relativen Energie von \dot{G}_n^m und \dot{H}_n^m (Gln. 7.20) auf die Periodenbereiche

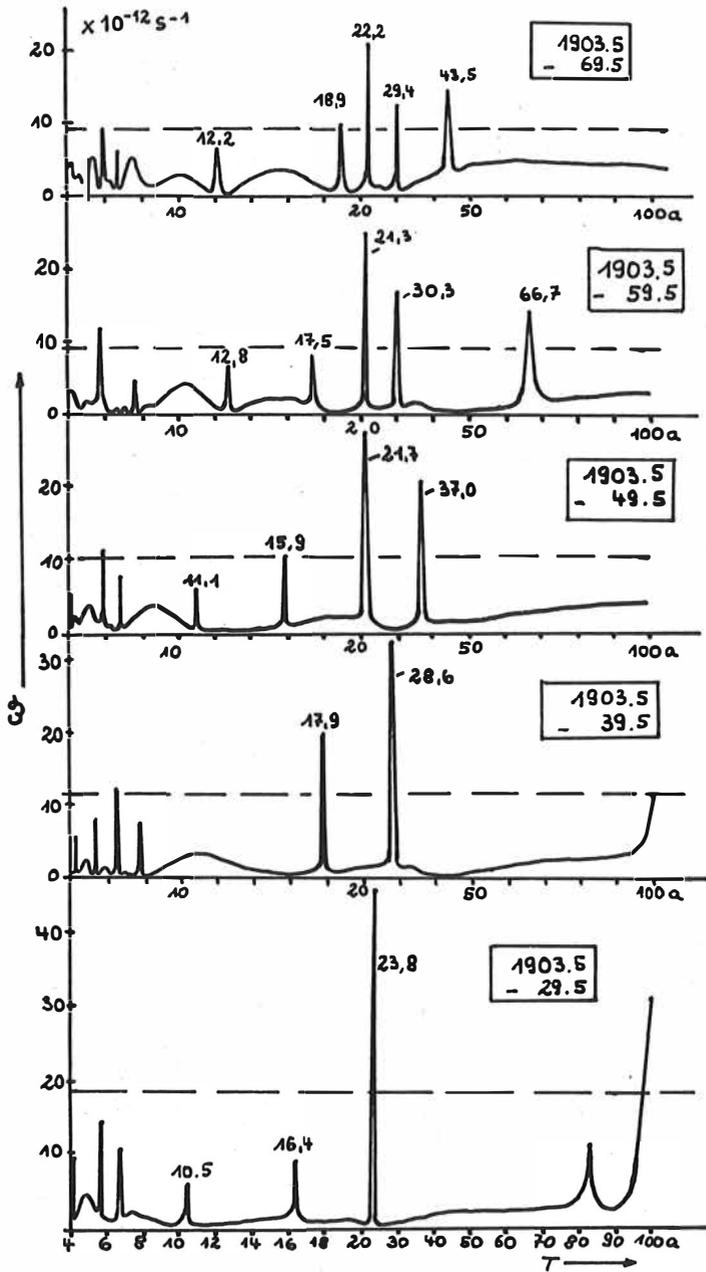


Abb. 9a : Periodenspektren der Kerndriftgeschwindigkeit G für die Teilzeitreihen 1903.5-I

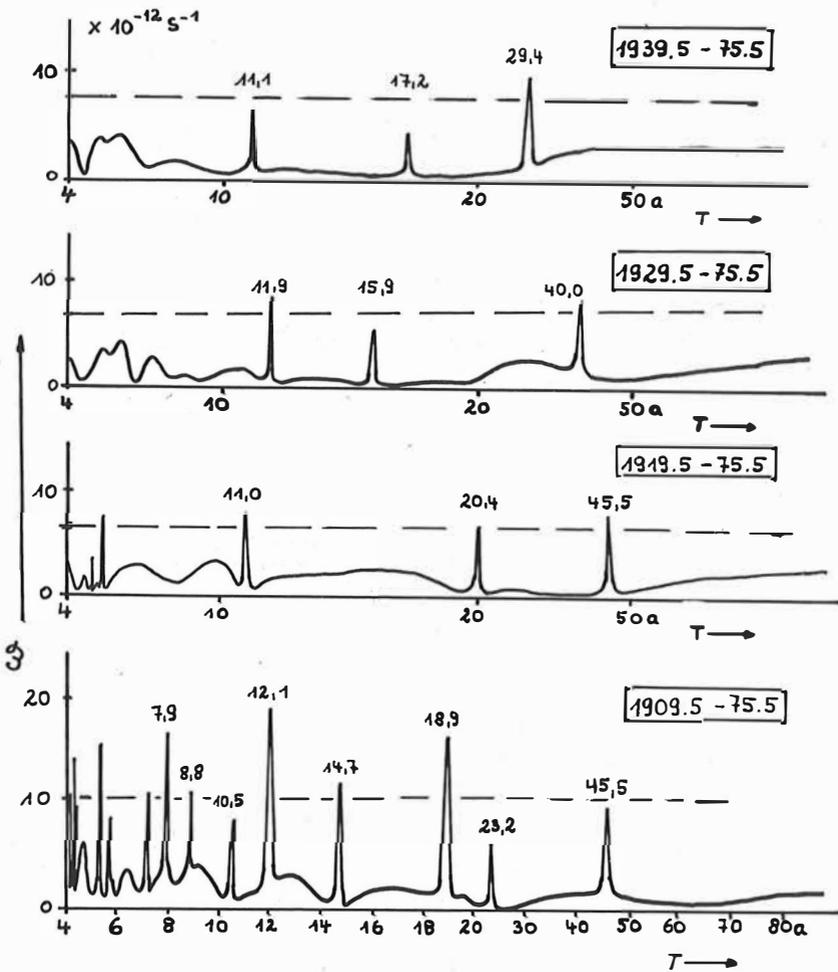


Abb. 9b: Periodenspektren der Kerndriftgeschwindigkeit ω für die Teilzeitreihen x-1975.5

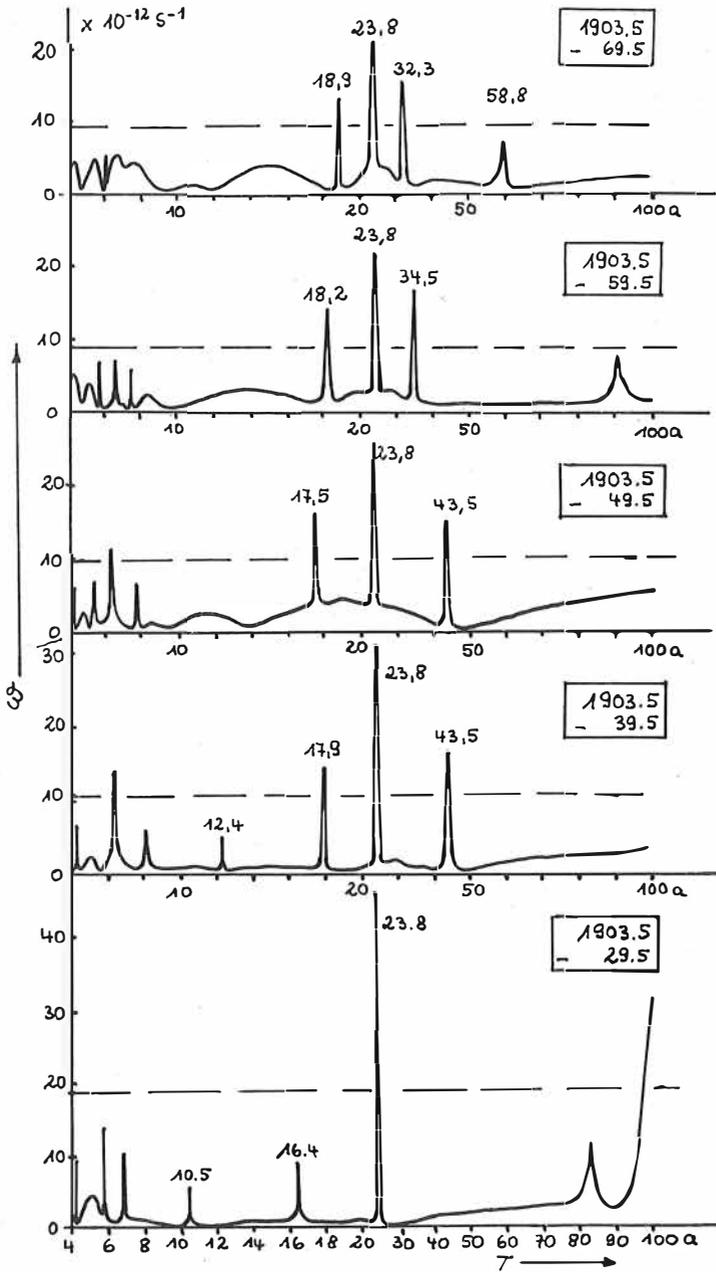


Abb. 9c: Periodenspektren der Kerndriftgeschwindigkeit ω für die Teilzeitreihen 1903.5-x mit $\omega(t_i)=0$ für $t_i > 1929.5$

