

EM 3D-Vorwärtsmodellrechnungen nach der Methode der Finiten Elemente

Yuguo Li

Institut für Geophysik, Universität Göttingen

1 Einleitung

3D-Modellrechnungen haben erst in den letzten Jahren eine größere Bedeutung erlangt, da die hierfür benötigten Rechen- und Speicherkapazitäten erst nach den jüngsten Fortschritten in der Computertechnologie zur Verfügung stehen. In den meisten Fällen wurde hier die Integralgleichungsmethode benutzt (z.B. Ting & Hohmann, 1981; Wannamaker *et al.*, 1984; Wannamaker, 1991). Die Erweiterung der Methode der Finiten Differenzen (FDM) auf 3D-Modellrechnung wurde von Mackie *et al.* (1993) erfolgreich durchgeführt. 3D-Modellierungen bei anisotropen Leitfähigkeitsstrukturen wurden zuerst von Xiong *et al.* (1986) behandelt. Mittels der Methode der Finiten Differenzen entwickelte Weidelt (1996) einen Algorithmus zur 3D-Modellierung mit beliebiger anisotropen Leitfähigkeitsverteilung.

Mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (FEM) wird in diesem Aufsatz ein Algorithmus zur numerischen Modellierung von elektromagnetischen Feldern in drei Dimensionen vorgestellt. Im folgenden wird zunächst das Modellrechnungsverfahren beschrieben. Anschließend wird die MT-Response für einige Modelle berechnet. Die Resultate werden sowohl mit der Lösung der Integralgleichungsmethode (IGM) als auch mit der Lösung der FDM verglichen.

2 Induktionsgleichung

Ein dreidimensionales Modell ist in Abb. 1 dargestellt. Der Einfachheit halber befindet sich der anomale Bereich hier in einer einzelnen Schicht der Normalstruktur, die aus $N + 1$ Schichten bestehen und deren unterste Schicht sich nach unten unendlich ausdehnen soll. Die Richtungsabhängigkeit der Leitfähigkeit ist sowohl für die Normalstruktur als auch für den anomalen Bereich zugelassen.

Der anomale Leitfähigkeitstensor für den anomalen Bereich ist gegeben durch die Differenz

$$\underline{\underline{\sigma_a}}(x, y, z) = \underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) - \underline{\underline{\sigma_n}}(z) \quad (1)$$

bezüglich der Normalstruktur.

Durch den anomalen Leitfähigkeitstensor $\underline{\underline{\sigma_a}}$ werden die anomalen Feldanteile bewirkt:

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E} - \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{H}_a = \mathbf{H} - \mathbf{H}_n. \quad (2)$$

Dabei stehen \mathbf{E} und \mathbf{H} für das elektrische bzw. magnetische Gesamtfeld, \mathbf{E}_n und \mathbf{H}_n für den zu dem normalen Leitfähigkeitstensor $\underline{\underline{\sigma_n}}$ gehörenden normalen Feldanteil.

Für das Normalfeld \mathbf{E}_n gilt die Gleichung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_n) = i\omega\mu_0\underline{\underline{\sigma_n}}\mathbf{E}_n, \quad (3)$$

die analytisch zu berechnen ist.

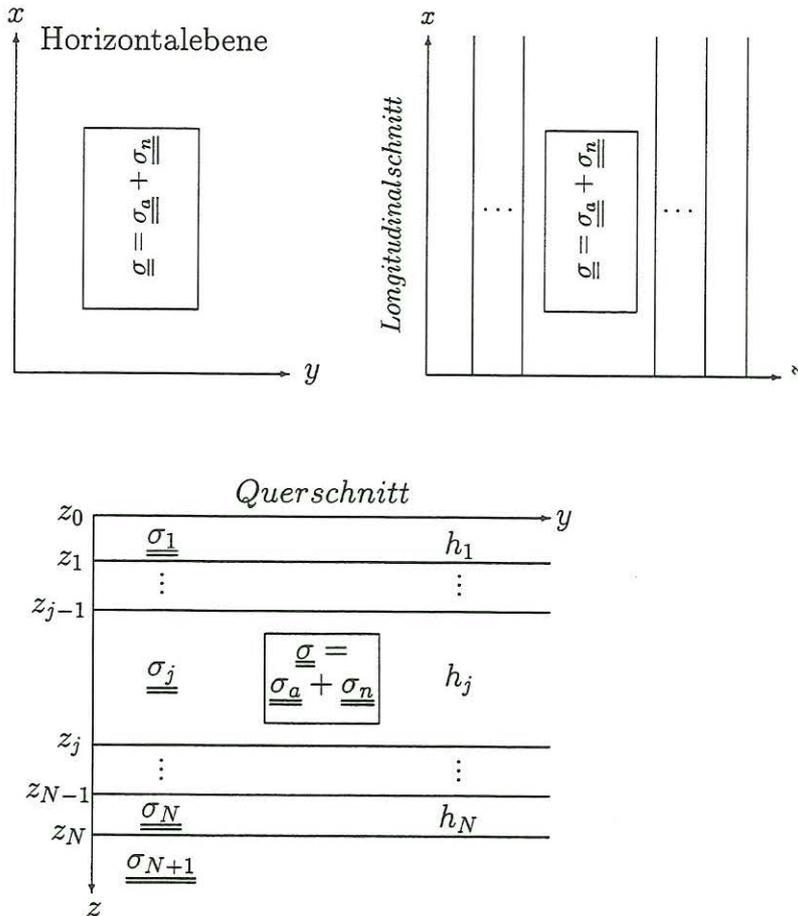


Abb. 1 3D Inhomogenität in einer Normalstruktur. Die Richtungsabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit ist sowohl für die Normalstruktur als auch für den anomalen Bereich zugelassen.

Für das anomale Feld \mathbf{E}_a gilt die Gleichung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_a) - i\omega\mu_0 \underline{\sigma} \mathbf{E}_a = i\omega\mu_0 \underline{\sigma}_a \mathbf{E}_n, \quad (4)$$

die mit numerischen Verfahren, z.B. der Methode der Finiten Elemente, behandelt werden kann. Die Gleichung der gewichteten Residuen Eine numerische Lösung der Induktionsgleichung (4) gelingt mit der Methode der Finiten Elemente. Nach dem Verfahren der gewichteten Residuen formulieren wir die partielle Differentialgleichung (4). Dazu wird sie mit einer beliebigen Variation $\delta \mathbf{E}_a$ multipliziert, und dann über den Lösungsbereich Ω integriert:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_a) - i\omega\mu_0 \underline{\sigma} \mathbf{E}_a) \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega = i\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\sigma}_a \mathbf{E}_n \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega. \quad (5)$$

Mit Hilfe der GAUSS'schen Formel läßt sich diese Gleichung umformen in

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \delta \mathbf{E}_a \cdot \nabla \times \mathbf{E}_a d\Omega - i\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\sigma} \mathbf{E}_a \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega + \oint_{\Gamma} \nabla \times \mathbf{E}_a \times \delta \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ = i\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\sigma}_a \mathbf{E}_n \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Dabei ist Γ die Oberfläche vom Bereich Ω , und \mathbf{n} der Außennormalvektor von Ω .

3 Die Methode der Finiten Elemente (FEM)

Der Lösungsbereich Ω wird in kleine Hexaeder mit jeweils stückweise konstantem Leitfähigkeitstensor zerlegt, so daß die Gleichung (6) umgewandelt wird in

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \nabla \times \delta \mathbf{E}_a \cdot \nabla \times \mathbf{E}_a d\Omega - i\omega\mu_0 \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E}_a \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \oint_{\Gamma_e} \nabla \times \mathbf{E}_a \times \delta \mathbf{E}_a \cdot n d\Gamma \\ = i\omega\mu_0 \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}}_a \mathbf{E}_n \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei ist e der Elementindex, n_e die Anzahl der Hexaderelemente, Ω_e das Volumen für Element e und Γ_e die Oberfläche.

Die Randbedingungen müssen nun berücksichtigt werden. Auf den Oberflächen der Innenelemente sind die tangentialen elektrischen Feldkomponenten kontinuierlich. Während der Integration wird jede Oberfläche zweimal in der entgegengesetzten Richtung durchschritten, weshalb die Summe der Integration über die Innenelementoberflächen gleich Null gesetzt wird. Da auf der Außenoberfläche des Bereiches Ω die DIRICHLET'sche Bedingung gilt, muß die Variation $\delta \mathbf{E}_a$ auch verschwinden. So, das Flächenintegral in (7) verschwindet. Deshalb vereinfacht sich die Gl. (7) zu

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \nabla \times \delta \mathbf{E}_a \cdot \nabla \times \mathbf{E}_a d\Omega - i\omega\mu_0 \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E}_a \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega = i\omega\mu_0 \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}}_a \mathbf{E}_n \cdot \delta \mathbf{E}_a d\Omega. \quad (8)$$

Das normale und anomale Feld, \mathbf{E}_n und \mathbf{E}_a , und die Feldvariation $\delta \mathbf{E}_a$ können im x, y, z -Koordinatensystem formuliert werden. Wir verdeutlichen dies durch die Beziehungen

$$\mathbf{E}_n^T = (E_{nx}, E_{ny}, E_{nz}), \quad \mathbf{E}_a^T = (E_{ax}, E_{ay}, E_{az}), \quad \delta \mathbf{E}_a^T = (\delta E_{ax}, \delta E_{ay}, \delta E_{az}).$$

Wir nehmen an, daß alle drei Feldkomponenten in einem Element e lineare Funktionen der kartesischen Koordinaten x, y und z sind und approximiert werden können durch folgende Ausdrücke

$$E_{ax} = \sum_{i=1}^8 N_i E_{ax,i}, \quad E_{ay} = \sum_{i=1}^8 N_i E_{ay,i}, \quad E_{az} = \sum_{i=1}^8 N_i E_{az,i}, \quad (9)$$

$$E_{nx} = \sum_{i=1}^8 N_i E_{nx,i}, \quad E_{ny} = \sum_{i=1}^8 N_i E_{ny,i}, \quad E_{nz} = \sum_{i=1}^8 N_i E_{nz,i}. \quad (10)$$

Hier sind $E_{ax,i}, E_{ay,i}$ und $E_{az,i}$ anomale x, y, z -Feldkomponenten im i -ten Elementeckpunkt ($i = 1, \dots, 8$) in globalen Koordinaten. $E_{nx,i}, E_{ny,i}$ und $E_{nz,i}$ sind normale Feldkomponenten im i -ten Elementeckpunkt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die normalen Feldkomponenten $E_{nx,i}, E_{ny,i}$ und $E_{nz,i}$ bereits bekannt sind, welche mit analytischen Algorithmen berechnet werden können. N_i sind die Formfunktionen für das Hexaderelement, und werden wie folgt definiert:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 1, \dots, 8). \quad (11)$$

Hier sind ξ_i, η_i und ζ_i die Koordinaten des Eckpunkts i in lokalen Koordinaten. Unter Verwendung der Gl. (9)~(11) werden die Integrale in (8) berechnet. Schließlich erhält man ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{E}_a = \mathbf{F}. \quad (12)$$

Darin ist \mathbf{K} eine komplexe, symmetrische und dünn besetzte Matrix der Ordnung $3n_d$ (n_d ist die Anzahl der Elementknoten), \mathbf{F} eine Konstanzvektor der Ordnung $3n_d$. Unter der Berücksichtigung der Außenrandbedingungen lassen sich diese Gleichungen nach der Methode der konjugierten Gradienten lösen.

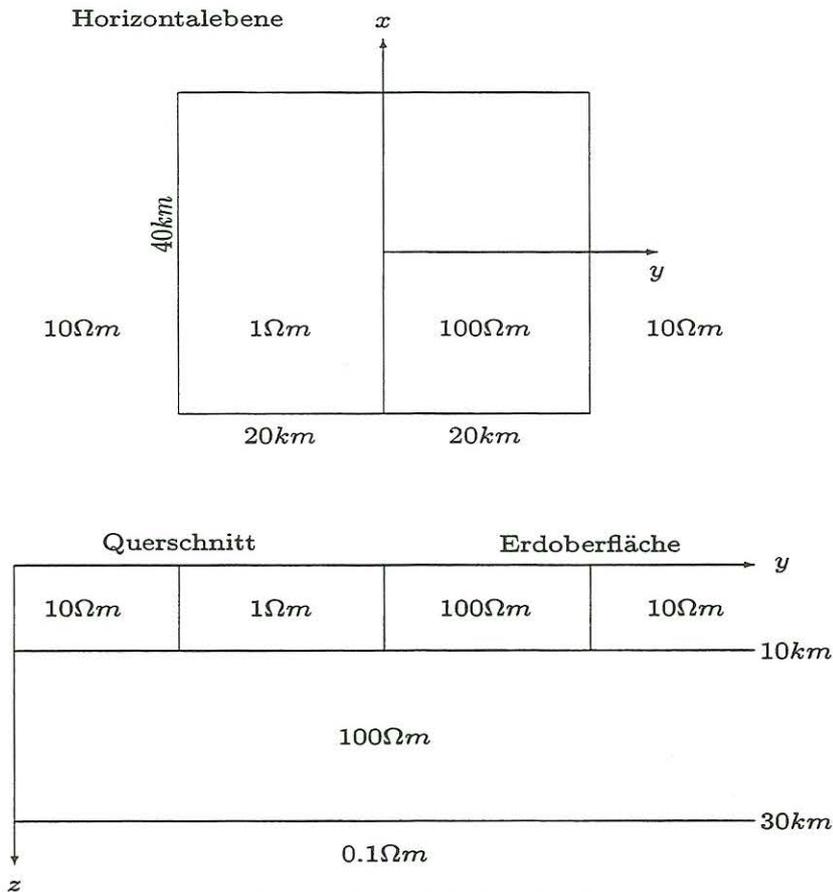


Abb. 2 3D COMMEMI-Modell

4 Numerische Test

Die hier beschriebene FEM für 3D Fall wurde mit einem dreidimensionalen COMMEMI-Modell verglichen. Das Modell ist in Abb. 2 dargestellt. Die gewählte Periode beträgt $T = 10\text{s}$. Für die Vorwärtsrechnung wurde das Modell in 24 Blöcke in x -Richtung, 38 Blöcke in y -Richtung und 23 Blöcke in z -Richtung unterteilt. In Abb. 3 sind der scheinbare Widerstand und die Phase nach der FEM mit der Lösung der FDM von Mackie *et al.* (1993) zusammen mit der Lösung der Integralgleichungsmethode von Wannamaker (1991) dargestellt. ρ_{xy} und ρ_{yx} sind fast identisch. Die Phase ϕ_{xy} zeigt auch eine volle Übereinstimmung, aber in ϕ_{yx} gibt es eine kleine Differenz im Bereich der Leitfähigkeitskontrasten und oberhalb des nichtleitenden Blockes.

Bei der Modellierung wurden 20976 Quader und 23400 Knoten durch Rauggitter mit einer Anzahl von $25 \times 39 \times 24$ Gitterlinien erzeugt. Da an jedem Knoten 3 Feldkomponenten zu bestimmen sind, gibt es insgesamt 70200 Unbekannte, d.h. es sind 70200 Gleichungen zu lösen. Die komplexe Koeffizientenmatrix besitzt $70200 \times 70200 \approx 4,9 \times 10^9$ Elemente. Auch für heutige, leistungsstarke Computer stellt die Speicherung solcher Arrays ein kaum zu bewältigendes Problem dar. In meinen Programmen werden nur die von Null verschiedenen Elemente der unteren Hälfte der Koeffizientenmatrix gespeichert, das etwa der Anzahl von $2,7 \times 10^6$ entspricht. Die Modellierung wurde auf der Alpha-Workstation des Rechenzentrums Göttingen durchgeführt. Es braucht etwa 24 Minuten CPU-Zeit für jede Frequenz und zwei Polarisationen.

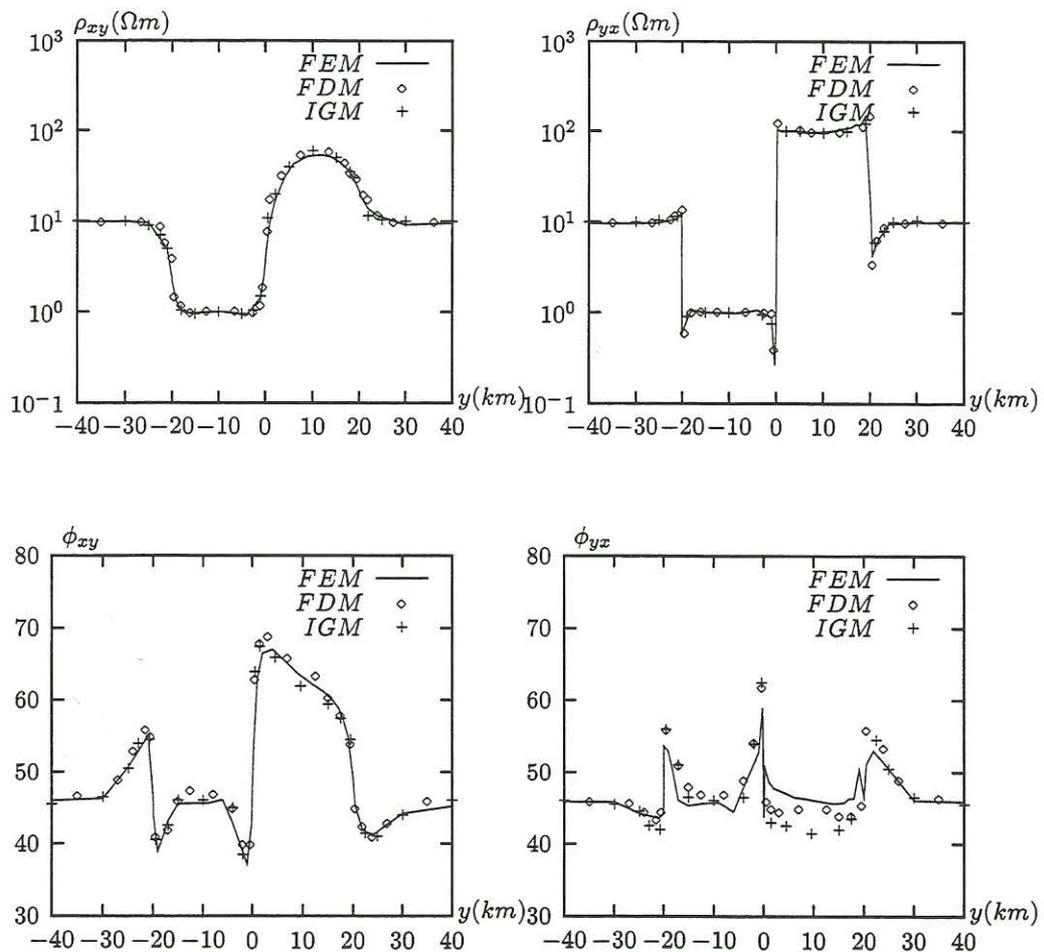


Abb. 3 Scheinbarer Widerstand (oben) und Phase (unten) für die Periode $T = 10s$ für ein COMMEMI-Modell (Abb. 2). Durchgezogene Linie: Ergebnisse dieser Arbeit nach der FEM; Diamanten: Ergebnisse nach der Methode der Finiten Differenzen (FDM) von Mackie *et al.* (1993); Kreuze: Ergebnisse nach der Integralgleichungsmethode (IGM) von Wannamaker (1991).

5 Ein anisotropes Modell

Abb. 4 zeigt einen Quader, der bis an die Oberfläche reicht, mit einfallender Anisotropie in einem isotropen homogenen Halbraum von $1000\Omega m$. Der Quader hat die Dimensionen $20(x) \times 10(y) \times 10(z) km$. Die Hauptachse x' des Leitfähigkeitstensors verläuft horizontal und liegt parallel zur x -Achse. Die Hauptachsen y' und z' fallen mit α_d bzw. $\alpha_d + 90^\circ$ bezüglich der y -Achse ein. Die Hauptwiderstände des anisotropen Quaders sind $\rho_{x'}/\rho_{y'}/\rho_{z'} = 100/10/100\Omega m$. Auf einem Profil entlang der y -Achse bei $x = 0$ werden die magnetotellurischen Übertragungsfunktionen für eine Periode $1s$ für verschiedene Winkel α_d berechnet. Sie sind in Abb. 5 dargestellt. Der scheinbare Widerstand ρ_{xy} ist von α_d unabhängig. Die ρ_{xy} -Kurven für verschiedene α_d fallen miteinander zusammen. Aber ρ_{yx} ist stark von α_d abhängig. Der Einfluß der Anisotropie ist deutlich erkennlich.

6 Zusammenfassung

- Es wird ein Algorithmus zur Modellierung elektromagnetischer Felder in 3D Leitfähigkeitsstrukturen mit beliebiger Anisotropie entwickelt;

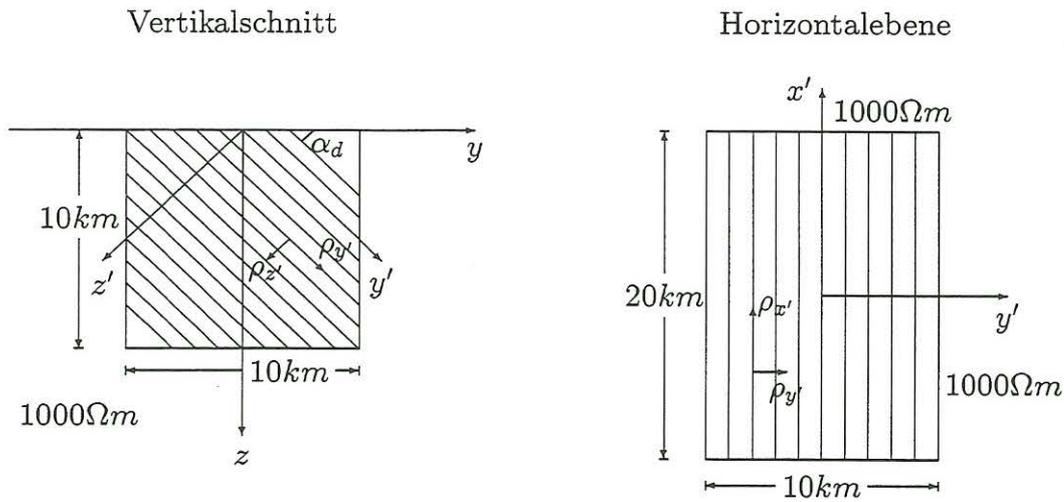


Abb. 4 Ein 3D Körper mit einfallender Anisotropie in einem isotropen Halbraum mit $\rho_0 = 1000\Omega m$. Der Widerstandstensor des Körpers wird zugeordnet mit den Hauptwerten $\rho_{x'}/\rho_{y'}/\rho_{z'} = 100/10/100\Omega m$ und mit α_d als einfallender anisotroper Winkel.

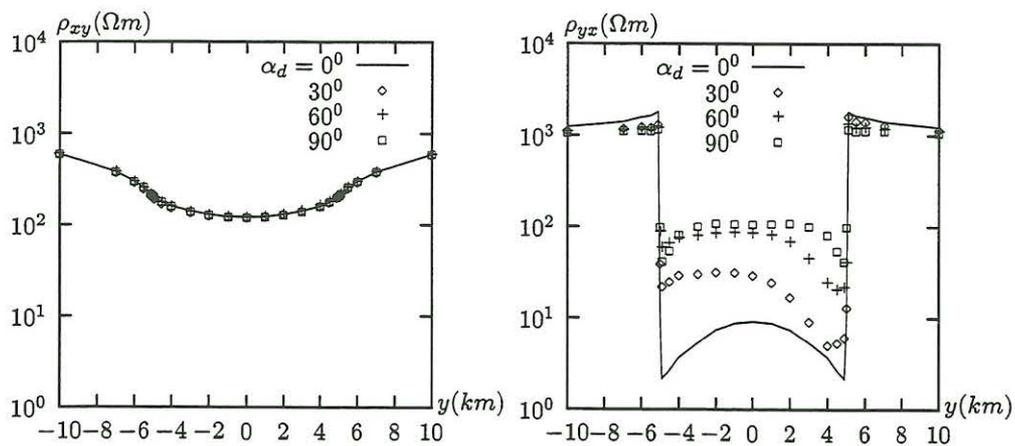


Abb. 5 Scheinbarer Widerstand für verschiedene Winkel α_d bei einer Periode $T = 1s$ vom einfallenden anisotropen Modell (Abb. 4).

- Resultate werden sowohl mit der Lösung der Integralgleichungsmethode als auch mit der Lösung der Methode der Finiten Differenzen verglichen;
- Speicherbedarf wird stark dadurch reduziert, daß nur die von Null verschiedenen Matrixelemente in und unterhalb der Diagonale gespeichert werden;
- Rechenzeit ist akzeptierbar (etwa 24 Minuten CPU-Zeit auf Alpha-Workstation mit einer Diskretisierung von $25 \times 39 \times 24$ Gitterlinien);
- Der Einfluß der Anisotropie ist erkennbar.

Ich danke Herrn Prof. Schmucker und Herrn Dr. Stoll für wertvolle Hinweise.

Literatur

- [1] Li, Y., 2000. *Numerische Modellierungen von elektromagnetischen Feldern in 2- und 3-dimensionalen anisotropen Leitfähigkeitsstrukturen der Erde nach der Methode der Finiten Elemente*, Ph.D. thesis, in Vorbereitung.
- [2] Mackie, R.L., Madden, T.R. & Wannamaker, P.E., 1993. Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations - Theory and comparisons to integral equation solutions, *Geophysics*, **58**, 215-226.
- [3] Schwarz, H.R., 1991. *Methode der finiten Elemente*, Teubner Verlag, Stuttgart.
- [4] Ting, S.C. & Hohmann, G.W., 1981. Integral equation modeling of three-dimensional magnetotelluric response, *Geophysics*, **46**, 182-197.
- [5] Wannamaker, P.E., Hohmann, G.W. & SanFilipo, W.A., 1984. Electromagnetic modeling of three-dimensional bodies in layered earths using integral equations, *Geophysics*, **49**, 60-74.
- [6] Wannamaker, P.E., 1991. Advances in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations, *Geophysics*, **56**, 1716-1728.
- [7] Weidelt, P., 1996. Elektromagnetische Induktion in dreidimensional anisotropen Leitern, in *Protokoll Koll. erdmagnetische Tiefenforschung Burg Ludwigstein*, edited by Bahr, K. & Junge, A., 60-73.
- [8] Xiong, Z., Lou, Y. Wang, S. & Wu, G., 1986. Induced-polarization and electromagnetic modeling of a three-dimensional body buried in a two-layer anisotropic earth, *Geophysics*, **51**, 2235-2246.