

# Schranken für räumliche Mittelwerte der elektrischen Leitfähigkeit im Oberen Mantel

Peter Weidelt

*Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig*

## 1 Einleitung

Mit den jüngsten Bestimmungen der Schmuckerschen Übertragungsfunktion  $c$  durch Nils Olsen verfügen wir für Europa über einen breitbandigen Datensatz, der in seiner Qualität neue Maßstäbe setzt. Die Übertragungsfunktionen sind für einen weiten Periodenbereich, der 3.5 Dekaden von  $T = 3$  h bis  $T = 1$  a. umfaßt, aus Stundenmittelwerten europäischer Observatorien nach der Z:Y-Methode ermittelt worden (Olsen 1997, 1998).

Repräsentativ für datenkompatible 1D-Modelle der elektrischen Leitfähigkeit zeigt Olsen (1997) ein 8 - Schichtmodell und ein Occam-Modell, das eine Norm des Leitfähigkeitsgradienten minimiert. Beide Modelle geben die stabilen Strukturen der Leitfähigkeitsverteilung [niedrige Leitfähigkeit ( $\approx 10^{-2}$  S/m) bis 800 km und darauffolgender Anstieg auf 1-3 S/m] richtig wieder, zeigen aber durch ihre Unterschiede im Detail ein mit der Tiefe deutlich abnehmendes Auflösungsvermögen, da im diffusiven Regime mit den tiefeindringenden langen Perioden auch eine lange Wellenlänge verknüpft ist, die nur eine grobe Abtastung erlaubt.

Die Daten schränken das Leitfähigkeitsmodell nur unzureichend ein und erlauben sicherlich keine zuverlässigen Aussagen über die Leitfähigkeit  $\sigma(z)$  in einem eng begrenzten Tiefenbereich. Es ist jedoch möglich, obere und untere Schranken  $\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2)$  und  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  und für den Mittelwert  $\bar{\sigma}(z_1, z_2)$  der Leitfähigkeit im Tiefenbereich  $z_1 \leq z \leq z_2$  anzugeben (Weidelt 1995),

$$\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2) \leq \bar{\sigma}(z_1, z_2) := \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} \sigma(\zeta) d\zeta \leq \bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2).$$

Die mathematische Grundlage für diese Möglichkeit ist die Tatsache, daß das Inversionsproblem für die integrierte Leitfähigkeit

$$S(z) := \int_0^z \sigma(\zeta) d\zeta$$

im Gegensatz zum Inversionsproblem für  $\sigma(z)$  stabil ('well posed') ist (Berdichevskij & Dmitriev 1992). Die Schranken haben die Eigenschaft, daß alle datenkompatiblen Modelle diese Schranken befolgen müssen. Die Schranken sind naturgemäß umso wertvoller, je schärfer sie sind, d.h. je größer  $\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2)$  und je kleiner  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  ausfällt. Da die Berechnung der Schranken unter Benutzung aller Daten immer noch aufwendig ist, werden in Kapitel 2 mit einer vereinfachten Methode nur sehr konservative weite Schranken konstruiert, die aus der Auswertung einer Folge von Einfrequenz-Problemen folgen. In Kapitel 3 wird als notwendige Ergänzung zu Weidelt (1995) kurz die Struktur der Einfrequenz-Extremalmodelle für MT-Phasen unterhalb von  $45^\circ$  besprochen, da dieser Fall bisher keine Beachtung gefunden hat.

## 2 Einfrequenz-Schranken

Datenbasis sind die in Tabelle 1 angeführten 20 komplexen Übertragungsfunktionen für den Periodenbereich von 3 h bis 121.667 d (=4 Monate). Die von Olsen (1997) darüberhinaus angegebenen Werte für 6 und 12 Monate sind fortgelassen worden, da  $\Re c$  für 6 Monate nicht die erforderliche Zunahme mit der Periode zeigt. Tabelle 1 enthält auch den Radius  $s$  des Fehlerkreises, in dem mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 32% der wahre Wert von  $c$  liegt. Für die Meßdaten ist außerdem die bestpassende 1D-Response als Datensatz  $c^+$  nach Parker (1980) angegeben. Die normierte Abweichung zwischen  $c$  und  $c^+$  wird in der letzten Spalte dargestellt. Die Summe der normierten Abweichungsquadrate ist  $\chi^2 = 39$ , so daß die Daten  $c$  mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 50\%$  als eindimensional angesehen werden können.

$T$ [d]	$c$ [km]		$s$ [km]	$c^+$ [km]		$ c - c^+ /s$
121.667	1532	-547	101	1464	-440	1.26
73.000	1307	-482	68	1305	-427	.81
45.625	1098	-404	74	1169	-378	1.02
33.182	1031	-420	67	1098	-340	1.56
30.000	1012	-311	22	1079	-329	3.15
24.333	988	-309	61	1042	-310	.89
15.000	949	-321	20	962	-280	2.15
10.000	898	-291	11	894	-258	3.02
6.000	826	-232	20	819	-226	.46
3.750	795	-194	20	769	-205	1.41
2.727	763	-234	25	739	-203	1.57
2.000	740	-231	31	707	-210	1.26
1.000	608	-247	23	608	-234	.57
.500	500	-239	25	494	-236	.27
.333	432	-244	20	433	-236	.40
.250	389	-240	17	387	-237	.21
.200	348	-247	18	350	-237	.57
.167	325	-246	19	319	-235	.66
.143	304	-235	20	293	-232	.57
.125	272	-209	20	270	-228	.96

Tabelle 1: Analyseergebnisse von Olsen (1997, 1998). Für die Periode  $T$  in Tagen ist angegeben die gemessene Übertragungsfunktion  $c$ , der Radius  $s$  des Fehlerkreises, in dem 68% aller Werte liegen und  $c^+$  als bestpassende 1D-Übertragungsfunktion ( $D^+$ -Modell von Parker). Die letzte Spalte gibt die normierte Differenz  $|c - c^+|/s$ .

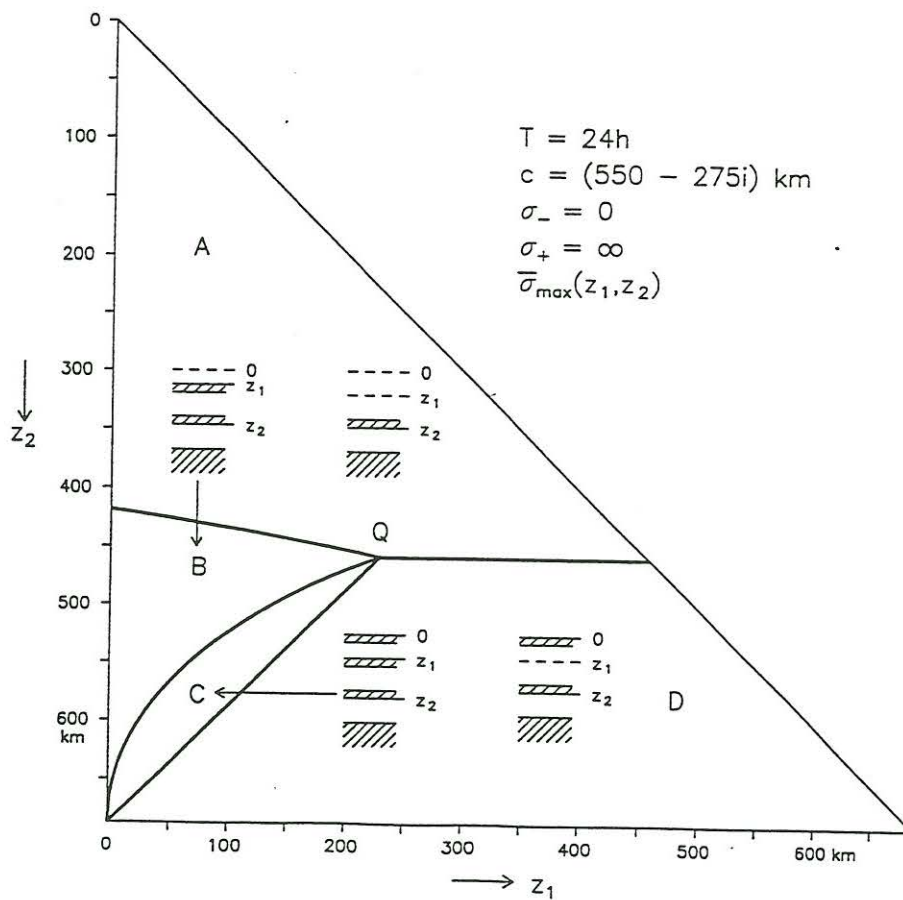


Abb. 1: Struktur der Einfrequenz-Extremalmodelle für  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  im Fall  $g \geq h$ . Die Leitfähigkeit darf zwischen  $\sigma_- = 0$  und  $\sigma_+ = \infty$  variieren. Dargestellt ist die Abhängigkeit der Struktur der Extremalmodelle von den Grenzen des Mittelungsintervalls  $(z_1, z_2)$ .

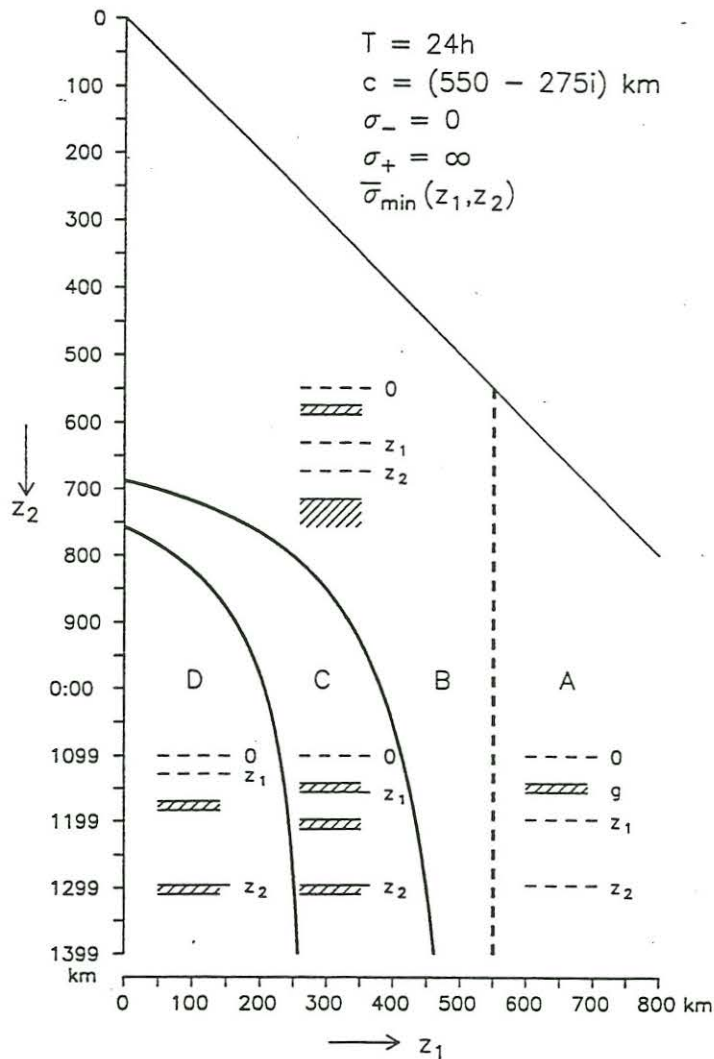


Abb. 2: Struktur der Einfrequenz-Extremalmodelle für  $\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2)$  im Fall  $g \geq h$ . Die Leitfähigkeit darf zwischen  $\sigma_- = 0$  und  $\sigma_+ = \infty$  variieren. Dargestellt ist die Abhängigkeit der Struktur der Extremalmodelle von den Grenzen des Mittelungsintervalls  $(z_1, z_2)$ .

Den möglichen Leitfähigkeiten soll in diesem Kapitel keine *a priori* Beschränkung auferlegt werden, d.h. es soll gelten  $0 \leq \sigma(z) \leq \infty$ . Dann werden im einfachen Fall, daß als Daten Real- und Imaginärteil von  $c$  für nur eine Frequenz vorliegen, in den Extremalmodellen auch nur die erlaubten Grenzwerte angenommen, d.h. die Extremalmodelle bestehen aus einer Folge von Nichtleitern ( $\sigma=0$ ) und idealen Leitern ( $\sigma = \infty$ ) in Form von dünnen Schichten mit endlichem Leitwert  $\tau$  (=Produkt aus Leitfähigkeit und Mächtigkeit). Die Modelle können nach unten durch eine Schicht mit unendlichem Leitwert abgeschlossen werden. Die aktuelle Struktur der Extremalmodelle hängt von  $c$  und den Grenzen des Mittelungsintervalls  $(z_1, z_2)$  ab. Es sei  $c = g - ih$ . Dann ist  $g \geq 0$  und  $h \geq 0$ . Für  $g \geq h$  wird die Struktur der Extremalmodelle ausführlich von Weidelt (1995) diskutiert. Die Daten von Tabelle 1 zeigen, daß dieser Fall für unseren Datensatz realisiert ist. Im Fall  $g < h$  ändert sich die Struktur der Extremalmodelle. Dieser bisher nicht diskutierte Fall wird kurz in Kapitel 3 besprochen.

Für alle möglichen Werte des Paares  $(z_1, z_2)$  mit  $z_1 < z_2$  wird die Struktur der Extremalmodelle für  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  und  $\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2)$  in den Dreiecksdiagrammen von Abb.1 und Abb. 2 dargestellt. Im Fall von  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  wird das Dreiecksdiagramm nach unten durch  $z_2 = z_{2max}$  mit  $z_{2max} = |c|^2/g$  begrenzt. Dabei ist  $z_{2max}$  die Tiefe des mit den Daten verträglichen oberflächennächsten idealen Leiters, d.h. für  $z_2 > z_{2max}$  ist  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2) = \infty$ . Für die Extremalmodelle vom Maximum- und Minimumtyp sind in Abhängigkeit von  $(z_1, z_2)$  jeweils vier verschiedene Modelle möglich. Für ein vorgegebenes Tiefenintervall  $(z_1, z_2)$  wird dabei ein Modell gesucht, das die Daten erfüllt und im vorgegebenen Tiefenintervall möglichst

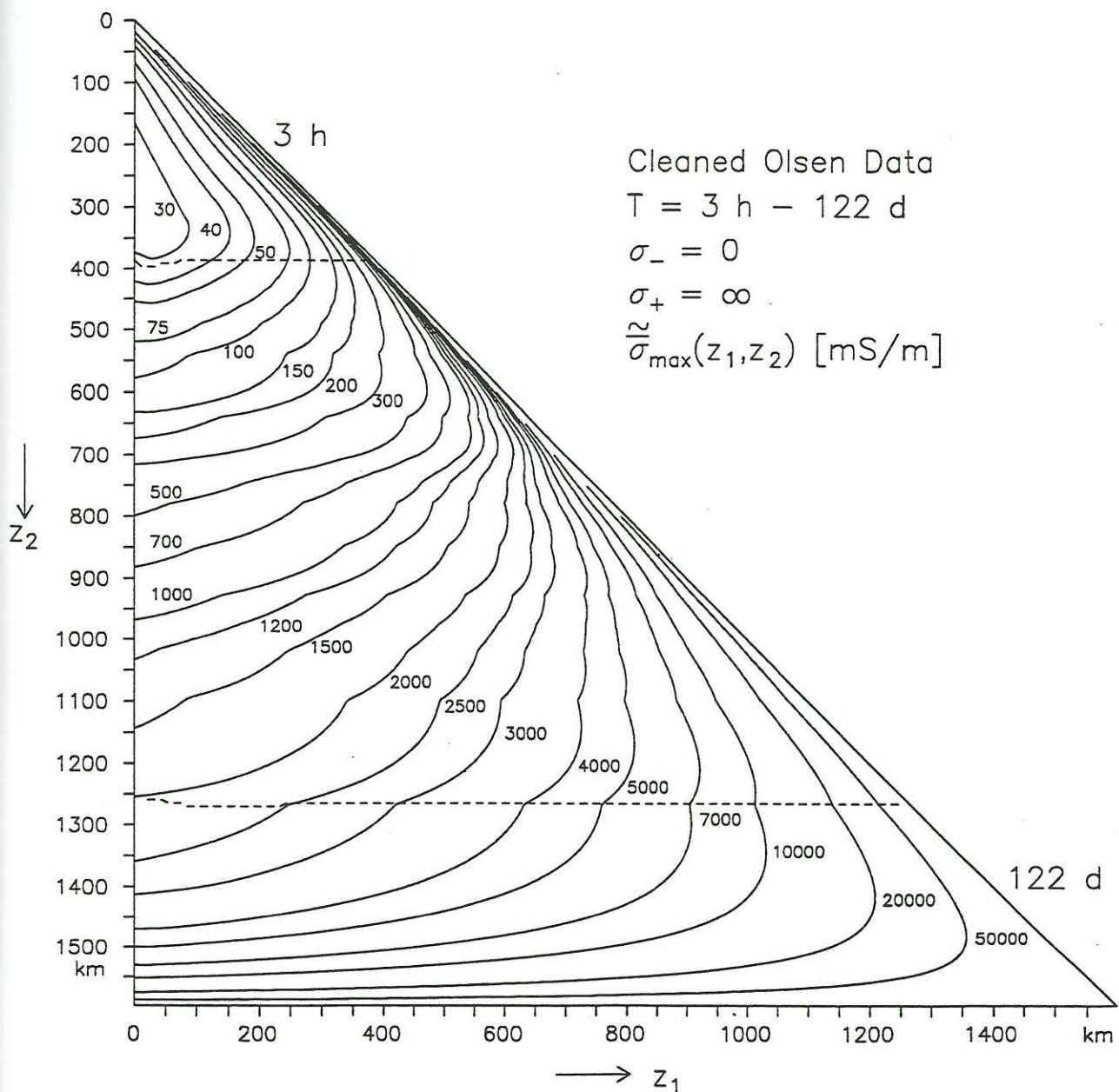


Abb. 3: Konservative obere Schranken für räumliche Mittelwerte der elektrischen Leitfähigkeit im Oberen Mantel aus den Daten von Olsen (1997,1998). Verwendung fanden die aus den Meßdaten abgeleiteten  $c^+$ -Daten ('cleaned data', s. Tabelle 1). Im  $(z_1, z_2)$ -Diagramm abgegrenzt sind die Bereiche, in denen die kürzeste Periode (3 h) und die längste Periode (122 d) die Schranken bestimmen. Zu der letzten Periode gehört  $z_{2\max} \simeq 1600 \text{ km}$ .

viel oder möglichst wenig leitfähiges Material enthält. Die Modelle vom Maximumtyp haben dabei stets eine dünne Schicht bei  $z = z_2^-$ , die noch zum Integrationsintervall gehört. Umgekehrt liegen bei Modellen vom Minimumtyp gutleitende Schichten gerade knapp *außerhalb* des Integrationsintervalls.

In der hier verwendeten vereinfachten Konstruktion der Schranken wird bei vorgegebenem  $(z_1, z_2)$  für jede Periode  $T$  das zugehörige  $\bar{\sigma}_{\max}(z_1, z_2, T)$  und  $\bar{\sigma}_{\min}(z_1, z_2, T)$  bestimmt, und daraus das kleinste Maximum bzw. das größte Minimum als approximative obere Schranke  $\bar{\bar{\sigma}}_{\max}(z_1, z_2)$  bzw. untere Schranke  $\bar{\bar{\sigma}}_{\min}(z_1, z_2)$  ausgewählt,

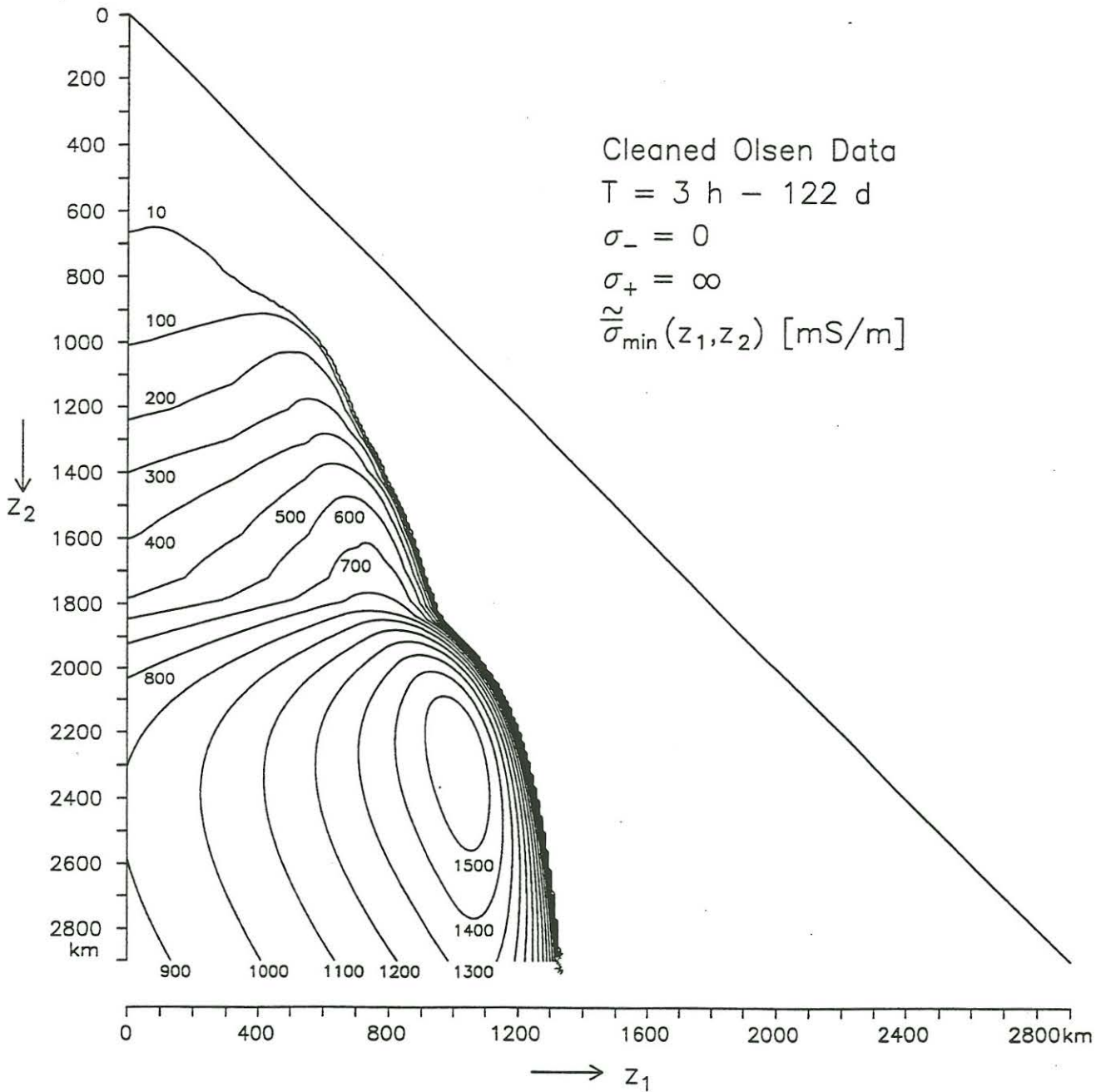


Abb. 4: Konservative untere Schranken für räumliche Mittelwerte der elektrischen Leitfähigkeit im Oberen Mantel aus den Daten von Olsen (1997,1998). Verwendung fanden die aus den Meßdaten abgeleiteten  $c^+$ -Daten ('cleaned data', s. Tabelle 1).

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2) &:= \min_T \bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2, T), \\ \bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2) &:= \max_T \bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2, T).\end{aligned}$$

Abb. 3 wird nach unten durch den oberflächennächsten idealen Leiter für die längste Periode, d.h. durch  $z_{2max} = |c^+|^2/g$  für  $T = 122$  d begrenzt, so daß  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2) \rightarrow \infty$  für  $z_2 \rightarrow z_{2max}$ . Natürlich gilt auch  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2) \rightarrow \infty$  für  $z_1 \rightarrow z_2$  (Diagonale), weil in einem kleinen Tiefenintervall  $z_2 - z_1$  beliebig hohe Leitfähigkeiten mit den Daten kompatibel sein können.

Wie die Physik des zugrundeliegenden Induktionsprozesses erwarten läßt, werden die Schranken in oberflächennahen Bereichen durch die kurzen Perioden und in tiefen Bereichen durch die langen Perioden

bestimmt: Bis zur Tiefe von etwa 380 km wird  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  durch  $T = 3$  h bestimmt (d.h. längere Perioden mit schwächerem Induktionseffekt wären auch mit höheren Leitfähigkeiten kompatibel), unterhalb von 1280 km bis 1600 km wird  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  durch die Periode von 122 d festgelegt (d.h. niedrigere Perioden, die nicht mehr bis in diese Tiefen eindringen, sind in diesem Tiefenbereich auch mit höheren Leitfähigkeiten verträglich). Die im Bereich zwischen 380 km und 1280 km deutlich sichtbaren Diskontinuitäten in der ersten Ableitung der Isolinien kennzeichnen  $(z_1, z_2)$ -Punkte, an denen der  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$ -bestimmende Einfluß von einer Frequenz zur anderen wechselt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind diese Grenzflächen jedoch nicht eingezeichnet worden.

Von besonderem Interesse in  $\bar{\sigma}_{max}$ -Plots sind naturgemäß die Bereiche, in denen besonders kleine Werte der oberen Schranke auftauchen. Der absolut kleinste Wert von 25 mS/m für  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  ergibt sich für  $z_1 = 0$  km,  $z_2 = 280$  km. Größere Schranken wären inkompatibel mit der Drei-Stunden-Periode.

Da das arithmetische Mittel nichtnegativer Zahlen nicht kleiner als das harmonische Mittel ist, gilt für räumliche Mittelwerte von  $\sigma$  und dem spezifischen Widerstand  $\varrho(z) := 1/\sigma(z)$

$$\bar{\varrho} \cdot \bar{\sigma} \geq 1$$

und deshalb mit  $\bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}_{max}$

$$\bar{\varrho} \geq 1/\bar{\sigma} \geq 1/\bar{\sigma}_{max}.$$

Deshalb können aus Abb. 3 auch untere Schranken von  $\bar{\varrho}$  abgelesen. So ist z.B. der mittlere spezifische Widerstand zwischen 0 und 280 km größer als 40  $\Omega$ m.

Die Schranken  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  sind konservativ, weil sich im allgemeinen noch kleinere Schranken ergeben würden, wenn das Extremalmodell zusätzlich zu der die Schranke bestimmenden Periode mit konsistenten Daten weiterer Perioden kompatibel sein müßte.

Für  $\bar{\sigma}_{min}$  (Abb. 4) ist die Einfrequenz-Interpretation besonders konservativ weil sich leitfähige Schichten leicht oberhalb von  $z_1$  und unterhalb von  $z_2$  verstecken können (siehe Abb. 2). Dies Versteckspiel endet erst dann, wenn der Mittlungsbereich hinreichend groß wird und dabei leitfähige Tiefenbereiche umfassen muß. Geophysikalisch relevant sind deshalb Bereiche, in denen  $\bar{\sigma}_{min}$  besonders große Werte annimmt. So zeigt z.B. der Extremalwert von Abb. 4, daß der Mittelwert von  $\sigma$  zwischen  $z_1 = 1020$  km und  $z_2 = 2250$  km den Wert von 1.58 S/m übersteigen muß, weil mit kleineren Mittelwerten die 122-Tage-Periode nicht interpretierbar ist.

Im Gegensatz zu  $\bar{\sigma}_{max}$  bildet bei  $\bar{\sigma}_{min}$  mit  $\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2) > 0$  der Kehrwert keine obere Schranke für  $\bar{\varrho}$ .

Der obige Weg zur Bestimmung von räumlichen Mittelwerten ist der einfachst mögliche Zugang zu dem Problem. Deshalb sind die Ergebnisse aber auch nur von bescheidener geophysikalischer Relevanz. Eine in Arbeit befindliche Behandlung, die den physikalischen Gegebenheiten gerechter wird, hat zwei Modifikationen:

- *Benutzung aller Perioden unter Berücksichtigung der Beobachtungsfehler*

Die Gesamtzahl der zu den  $M$  Perioden gehörenden Daten wird im Rahmen einer vorgegebenen globalen  $\chi^2$ -Schranke interpretiert,

$$\sum_{j=1}^M |c_j - c_j[\sigma]|^2 / s_j^2 \leq B.$$

Dabei ist  $B := \chi_{2M, \alpha}^2$  der Schwellwert, der für  $2M$  Freiheitsgrade mit der Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  überschritten wird und  $c_j[\sigma]$  das theoretische Datum der Leitfähigkeitsverteilung  $\sigma$  zur Periode  $T_j$ .

Die gleichzeitige Berücksichtigung aller Perioden verschärft zwar einerseits die Schranken, andererseits werden aber durch die Vorgabe einer  $\chi^2$ -Schranke die Perioden besonders schlecht angepaßt, die im vorgegebenen Intervall  $(z_1, z_2)$  den Wert von  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  nach oben und den Wert von  $\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2)$  nach unten drücken. In der Praxis kann dadurch der Vorteil der Betrachtung vieler Perioden wieder annulliert werden.

- Benutzung von a priori Schranken  $\sigma_- > 0$  und  $\sigma_+ < \infty$

Durch die Einbeziehung von - möglicherweise tiefenabhängiger - Vorinformation über  $\sigma(z)$  können die Schranken verschärft werden. Doch darf  $\sigma(z)$  von vornherein nicht so stark eingeschränkt werden, daß die Datenanpassung problematisch wird.

### 3 Struktur der Einfrequenz-Extremalmodelle für $g < h$

Der Zusammenhang zwischen  $c = g - ih$  und den magnetotellurischen Übertragungsfunktionen scheinbarer Widerstand  $\rho_a$  und Impedanzphase  $\varphi$  ist mit  $\omega = 2\pi/T$  gegeben durch

$$c = \sqrt{\frac{\rho_a}{\omega\mu_0}} (\sin \varphi - i \cos \varphi).$$

Bei Weidelt (1995) wurde ausführlich die Struktur der Einfrequenz-Extremalmodelle nur für  $g \geq h$  oder  $\varphi \geq 45^\circ$  diskutiert, der - wie aus Tabelle 1 zu entnehmen ist - für globale Übertragungsfunktionen zutrifft und den im Mittel vorhandenen Anstieg der Leitfähigkeit mit der Tiefe signalisiert. Es wurde dabei aber übersehen, daß für den komplementären Fall eines mittleren Leitfähigkeitsabfalls ( $g < h$  oder  $\varphi < 45^\circ$ ) die Struktur der Extremalmodelle zu modifizieren ist. Diese modifizierten Modelle sollen hier kurz skizziert werden.

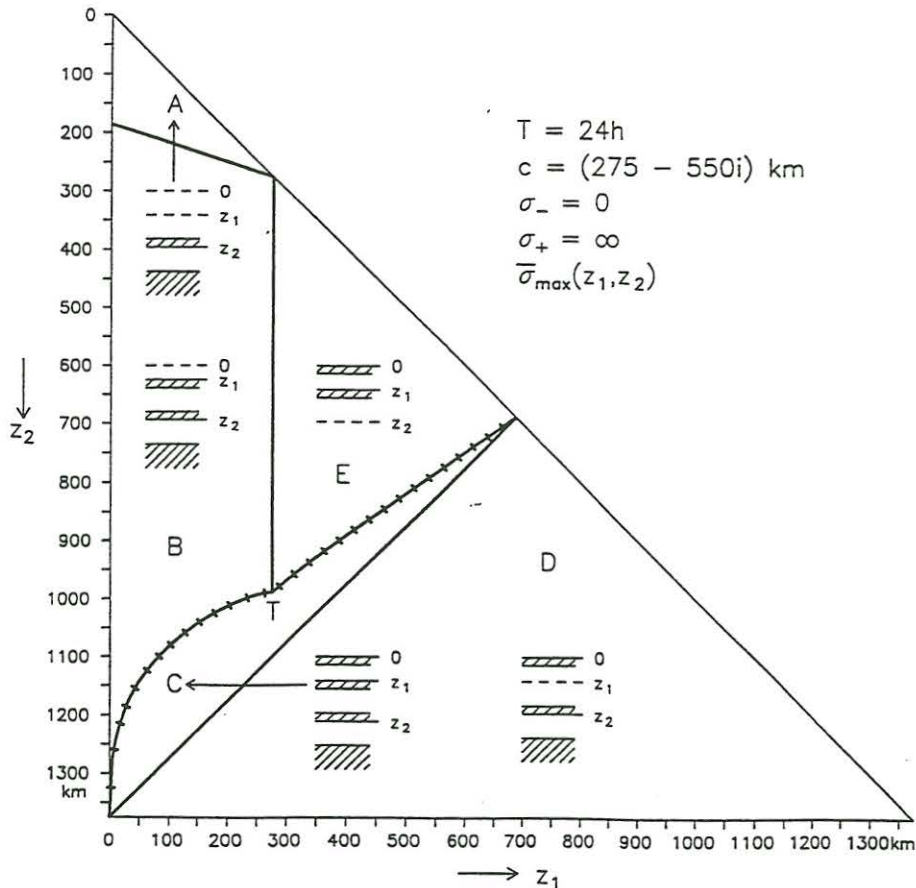


Abb. 5: Struktur der Einfrequenz-Extremalmodelle für  $\bar{\sigma}_{\max}(z_1, z_2)$  im Fall  $g < h$ . Die Leitfähigkeit darf zwischen  $\sigma_- = 0$  und  $\sigma_+ = \infty$  variieren. Dargestellt ist die Abhängigkeit der Struktur der Extremalmodelle von den Grenzen des Mittelungsintervalls ( $z_1, z_2$ ). Die quergestrichelte Grenzlinie markiert eine un stetige Modelländerung zwischen C und B bzw. E.

Abb. 5 zeigt die Struktur der Extremalmodelle von  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  für  $g < h$ , die mit der Struktur der entsprechenden Modelle für  $g \geq h$  in Abb. 1 zu vergleichen ist. Die Struktur der Modelle in den Bereichen *A* bis *D* entspricht sich jeweils. Darüberhinaus enthalten die Extremalmodelle für  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  zwei unerwartete neue Aspekte:

- Es tritt ein weiterer Bereich *E* auf, der sich dadurch auszeichnet, daß die leitfähige dünne Schicht bei  $z = z_2^-$  jetzt fehlt, während diese in allen anderen Bereichen von Abb. 1 und 5 vorhanden ist.
- In den Extremalmodellen von Abb. 1 gehen alle Modelltypen an den Bereichsgrenzen kontinuierlich ineinander über. So taucht z.B. beim Übergang von *B* nach *C* an der Erdoberfläche eine dünne Schicht auf, deren Leitwert sich kontinuierlich von 0 an der Grenze *B* – *C* auf positive Werte im Inneren von *C* erhöht. Im Fall  $g < h$  in Abb. 5 ist die Modelländerung aber unstetig, d.h. das Extremalmodell *B* mit fehlender Oberflächenschicht geht an der quergestrichenen Grenze in ein Modell vom Typ *C* über, wobei sich sämtliche Modellparameter diskontinuierlich ändern. In einem (engen) Bereich zu beiden Seiten der gestrichelten Grenze zwischen *B* und *C* gibt es gleichzeitig Modelle vom Typ *B* und *C*, die alle notwendigen Extremaleigenschaften erfüllen; nur durch einen Vergleich der aktuellen Werte von  $\bar{\sigma}(z_1, z_2)$  für Modell *B* und *C* ist zu entscheiden, wo die Grenze zwischen *B* und *C* anzusiedeln ist. Ein ganz entsprechender unstetiger Übergang ist an der Grenze zwischen *C* und *E* zu finden.

Die durch ausgezogene Linien definierten Grenzen in Abb. 5 sind durch folgende Gleichungen gegeben [s.a. Weidelt (1995)]:

- Grenze *A* – *B*:

$$z_2 = g - x$$

mit  $x$  als einziger positiver Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 + (g - z_1)x^2 + 3h^2x - (g - z_1)h^2 = 0.$$

- Grenze *B* – *E*:

$$z_1 = g$$

- Grenze *C* – *D*:

$$z_1 + z_2 = |c|^2/g = z_{2max}$$

Während sich für die quergestrichenen Grenzen in Abb. 5 keine einfache Gleichung angeben läßt, sind zumindest die Koordinaten des Tripelpunktes *T* einfach bestimmbar. Ist

$$\xi := \frac{g}{h}, \quad \eta := \frac{1 - \xi}{2\xi} \left[ 1 + \xi + \sqrt{1 - \xi + \xi^2} \right],$$

so gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= g, \\ z_2 &= g \frac{\sqrt{1 + \eta^2} - 2\eta - \xi}{(\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^2 - \xi}. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Punkte auf der Diagonalen  $z_1 = z_2$  sind

$$z_1 = z_2 = g \quad \text{und} \quad z_1 = z_2 = |c|^2/(2g).$$

Im Fall  $g < h$  sind im Vergleich zu den Änderungen der Extremalmodelle von  $\bar{\sigma}_{max}(z_1, z_2)$  die Änderungen von  $\bar{\sigma}_{min}(z_1, z_2)$  marginal: Der Bereich *D* in Abb. 2 kann für  $g < h$  nicht mehr auftreten.



## Literatur

- Berdichevskij, M.N. & Dmitriev, V.I., 1992. Magnetotelluric soundings of horizontally uniform media [in Russian], Nedra, Moscow.
- Olsen, N., 1997. Geomagnetic depth sounding with periods between 3 hrs and 1 yr and the electrical conductivity of the deep mantle, in *Proceedings of the Interdisciplinary Inversion Workshop 5*, pp. 38-49, Hrsg. von B.H. Jacobsen, Department of Earth Sciences, Aarhus University.
- Olsen, N., 1998. The electrical conductivity of the mantle beneath Europe derived from C-responses from 3 to 720 hr, *Geophysical Journal International*, **133**, 298-308.
- Parker, R.L., 1980. The inverse problem of electromagnetic induction: Existence and construction of solutions based on incomplete data, *J. Geophys. Res.*, **85**, 4421-4428.
- Weidelt, P., 1995. Bounds on local averages of one-dimensional electrical conductivity distributions, *Geophysical Journal International*, **123**, 683-714.