Die Korrektur der $2D$-Topographie für B-Polarisation mittels der Methode der Randelemente(REM)

Shizhe Xu
Institute of Geology and Geophysics, Ocean University of Qingdao, China
Yuguo Li
Institut für Geophysik, Universität Göttingen, 37075 Göttingen, Germany

1 Einleitung

Der topographische Einfluß auf die Meßgrößen in der Magenetotellurik wird betrachtet. Durch die Arbeiten von Xu *et al.*(1985), Wannamaker *et al.*(1986) und Chouteau *et al.*(1988) zur $2D$-Modellierung von Topographien wurde erkannt, daß der Topographie-Effekt bei der B-Polarisation sehr viel größer ist als bei der E-Polarisation. Deshalb beschränken wir unsere Betrachtung auf die B-Polarisation.
Zur $2D$-Modellierungen des Topographie-Effekts wird die Methode der Randelemente(REM) angewandt. Diese hat den Vorteil , daß nur der Rand der Topographie diskritisiert wird, daß die Gestalt der Topographie genau modelliert werden kann, und daß die Parametereingabe sehr einfach ist.
Die MT-Übertragungsfunktionen für einen homogen geschichteten Halbraum unterhalb der irregulären Topographie werden mit Hilfe der Methode der finiten Elemente(FEM) berechnet und mit den Ergebnissen von der REM korrigiert. Die Pseudosektionen der korrigierten Übertragungsfunktionen stellen grundlegend den Charakter des Response des homogen geschichteten Modells dar.

2 Die Methode der Randelemente(REM)

Abb. 1 zeigt eine zweidimensionale Topographie. Γ bedeutet die Linie der Topographie und Γ_∞ den Halbkreis mit unendlichem Radius im Untergrund. n sei der Außennormalvektor vom Bereich Ω. Das folgende Koordinatensystem wird benutzt: Streichen der Topographie in x-Richtung, Topographieverlauf in der $y-z-$Ebene.

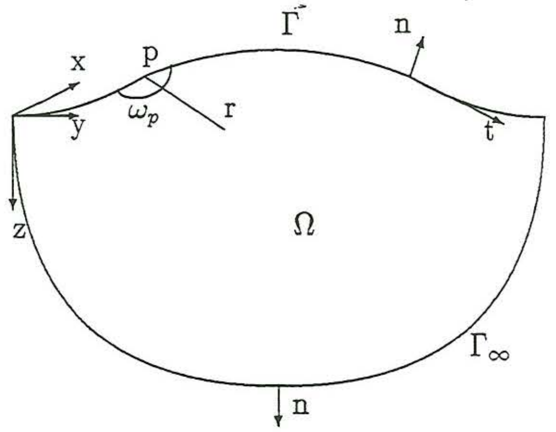


Abb. 1 Bereich und Rand

Unter der Verwendung des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ lautet die Induktionsgleichung

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0. \qquad \in \Omega \tag{1}$$

Dabei steht u für $H_x, k^2 = i\omega\mu\sigma$. Hier sind ω, μ und σ die Kreisfrequenz, die magnetische Permeabilität und die homogene elektrische Leitfähigkeit im Bereich Ω. Bei B-Polarisation sind $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ oberhalb von Γ werden gleich Null zu setzen, und es gilt

$$u = 1 \qquad \in \Gamma. \tag{2}$$

Weil das durch die Topographie verursachte anomale Feld auf Γ_∞ verschwindet, lautet dort das elektromagnetische Feld

$$u = e^{ikz} \qquad \in \Gamma_\infty. \tag{3}$$

Die Induktionsgleichung (1) und die Randbedingungen (2) und (3) bilden das Randwertproblem für B-Polarisation. Dieses lösen wir mit der REM.
Mittels der Green'schen Formel

$$\int_\Omega (u \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 u) d\Omega = \oint_{\Gamma+\Gamma_\infty} (u\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial u}{\partial n}) d\Gamma \tag{4}$$

kann das obige Randwertproblem in eine Integralgleichung umgewandelt werden. Hier ist $\phi = -\frac{1}{4}N_0(kr)$ die fundamentale Lösung der Gleichung (1). N_0 und r sind die Bessel'sche Funktion der Null-Ordnung der zweiten Art und der Abstand von einem bestimmten Punkt p bis zu einer beliebigen Stelle in Ω. ϕ erfüllt

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\delta(p). \tag{5}$$

Dabei ist $\delta(p)$ die Dirac-Funktion, deren Zentrum in p liegt.
Durch Einsetzen der Gl. (1) und (5) in Gl. (4) erhält man

$$\int_\Gamma \phi \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \frac{\omega_p}{2\pi} u_p + \int_\Gamma u \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} (u\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial u}{\partial n}) d\Gamma \tag{6}$$

Hier sind u_p und ω_p der Wert von u im Punkt p und der Winkel, den der Bereich Ω dort einschließt (vgl. Abb. 1) .
Da $u, \frac{\partial \phi}{\partial n}$ auf Γ und $u, \frac{\partial u}{\partial n}, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial n}$ auf Γ_∞ bekannt sind, ist die rechte Seite von Gl. (6) bestimmt und kann mit der Gauß'schen Integralformel berechnet werden. Deshalb wird die Gleichung (6) umgeschrieben in

$$\int_\Gamma \phi \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = c_p \qquad p \in \Gamma, \tag{7}$$

wobei

$$c_p = \frac{\omega_p}{2\pi} u_p + \int_\Gamma u \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} (u\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial u}{\partial n}) d\Gamma$$

ist. Γ wird durch n Knoten in $n-1$ Segmente zerlegt(Abb. 2). Dadurch wird das Integral der Gl. (7) umgeschrieben als Summe des Integrals von allen Elementen

$$\int_\Gamma \phi \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \sum_{\Gamma_e=1}^{n-1} \int_{\Gamma_e} \phi \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = c_p. \tag{8}$$

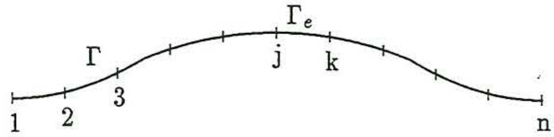


Abb. 2 Diskretisierung der Topographie

Wir nehmen an, $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf einem Element Γ_e variiert linear und läßt sich damit

$$\frac{\partial u}{\partial n} = N_j(\frac{\partial u}{\partial n})_j + N_k(\frac{\partial u}{\partial n})_k \qquad (9)$$

approximieren. Hier sind $(\frac{\partial u}{\partial n})_j$ und $(\frac{\partial u}{\partial n})_k$ der Wert von $\frac{\partial u}{\partial n}$ am Punkt j und k, N_j und N_k die Formfunktion der linearen Interpolation.
Durch Einsetzen der Gl. (9) in (8) und nach der Integralberechnung mit Hilfe des Gauß'schen Verfahrens erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} D_{pj} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_j = c_p. \qquad (10)$$

Dabei sind D_{pj} die Koeffizienten, die mit der Verteilung der Knoten und N_0 in Beziehung stehen. Für jeden Knoten erhält man eine solche Gleichung. Wir haben ein lineares Gleichungssystem für alle Knoten

$$\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{C}. \qquad (11)$$

Es ist $\mathbf{D}= (D_{pj})$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}=[(\frac{\partial u}{\partial n})_j]^T$, $\mathbf{C}= (C_p)^T$, $j, p = 1, \cdots, n$.

Nach Lösen der Gl. (11) ist $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der Topographieline bestimmt. Durch Einsetzen der tangentialen Kompenente des elektrischen Feldes $E_t = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}$ in die Berechnungsformel der scheinbaren spezifischen Widerstände erhalten wir

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{E_t}{H_x}\right|^2 = \frac{1}{\omega\mu_0\sigma^2}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2. \qquad (12)$$

Da $Z = \frac{E_t}{H_x} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}$ die Impedanz auf Γ ist, haben wir als Formel für die Phase der Impedanz

$$\phi = tan^{-1}[\frac{Im\,(\frac{\partial u}{\partial n})}{Re\,(\frac{\partial u}{\partial n})}]. \qquad (13)$$

In Abb. 3 werden die *MT*-Übertragungsfunktionen in ihrem Verhalten über den Bergkamm dargestellt. Dabei fällt auf, daß in ρ_a und in der Phase für die untere Hangkante und die Bergspitze entgegengesetzte Extremwerte existieren.

3 Die Korrektur der Topographie und ein Beispiel hierzu

Mit Hilfe eines Verzerrungsvektors kann der Einfluß der Topographie auf das induzierte elektromagnetische Feld korrigiert werden (Chouteal *et al.*1988) . Ähnlich wie in der Geoelektrik definieren wir die Korrektur mit der Formel

$$(\rho_a)_{cor} = \frac{(\rho_a)_{obs}}{\frac{(\rho_a)_{top}}{\rho_0}} \qquad (14)$$

Hier bedeutet $(\rho_a)_{obs}$ den durch Topoigraphie und inhomogenem Körper im Untergrund verursachten scheinbaren spezifischen Widerstand, $(\rho_a)_{top}$ den durch Topographie verursachten scheinbaren spezifischen Widerstand, $(\rho_a)_{cor}$ den korrigierten scheinbaren spezifischen Widerstand und ρ_0 den elektrischen Widerstand des homogenen Halbraumes.
Die Korrekturformel für die Phase der Impedanz ist leicht abzuleiten

$$\Phi_{cor} = \Phi_{obs} - \Phi_{top} + \frac{\pi}{4}. \qquad (15)$$

Hier bedeutet Φ_{obs} die durch Topographie und inhomogenen Körper verursachte Phase der Impedanz, Φ_{top} die durch Topographie verursachte Phase und Φ_{cor}die korrigierte Phase.

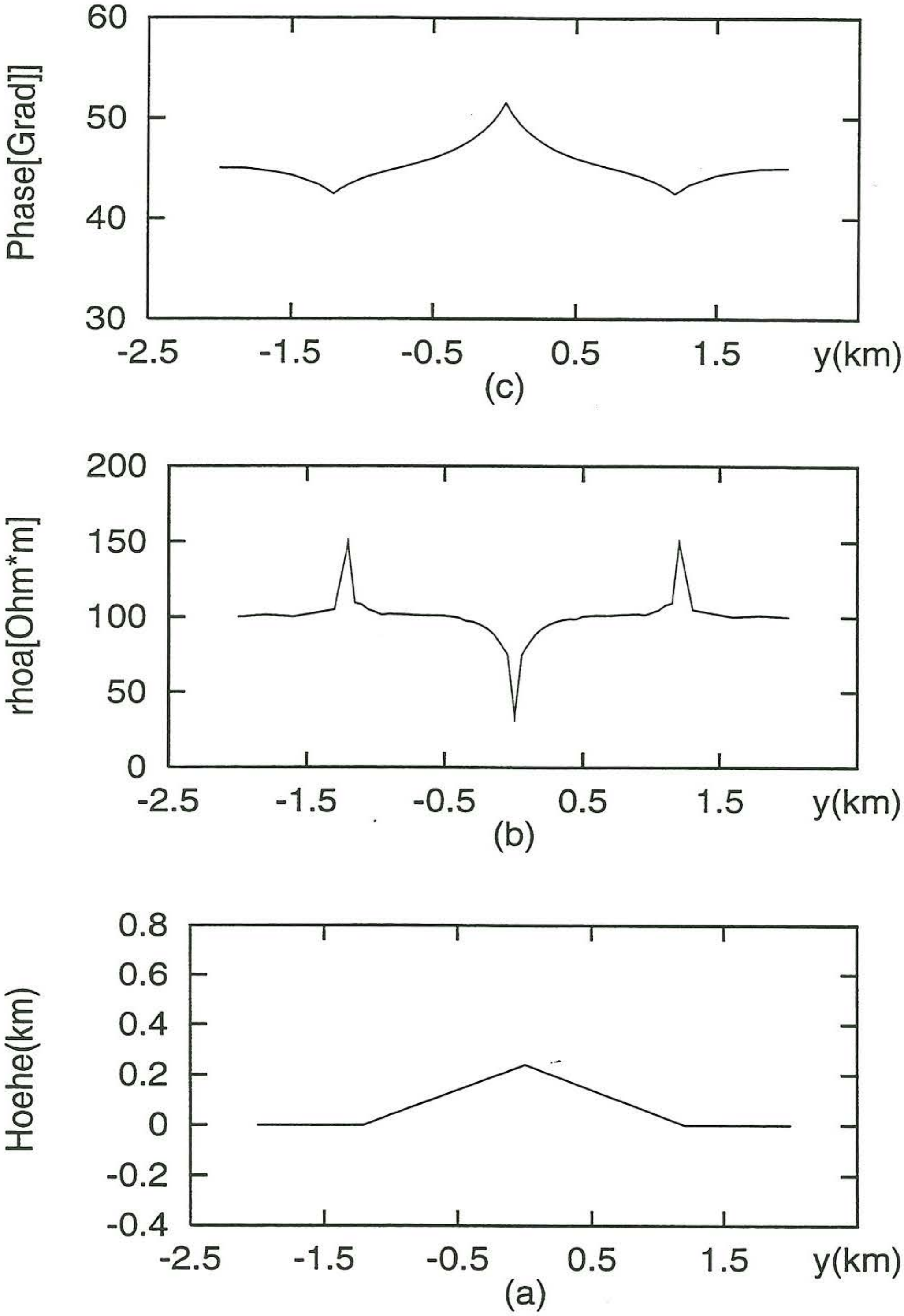


Abb. 3 $2D$-Darstellung der Übertragungsfunktion ,die als Ergebnissen einer REM-Modellierung
($\rho = 100\Omega \cdot m$ bei der Frequenz 100 H_z)
(a) Topographieverlauf (b) ρ_a (c) ϕ

Das Verfahren zur Durchführung der Korrektur von MT-Daten lautet folgendermaßen:

- Berechnung der scheinbaren spezifischen Widerstände und der Phase für ein $2D$-Modell mit irregulärer Topographie mit der FEM;
- Berechnung der scheinbaren spezifischen Widerstände und der Phase für die Topographie mit der REM;
- Korrektur nach (15) und (16).

Die o.g. Schritte wiederholen sich, bis man die Daten für alle Frequenzen korrigiert hat . Bei der Bearbeitung von Felddaten entfällt der erste Schritt, da $(\rho_a)_{obs}$ bereits vorliegen.
Wir geben das folgende Beispiel: Das Modell in Abb. 4(a) zeigt einen Graben, dessen Breite $1200m$ beträgt. Darunter ist ein $1D$-Modell mit Dreischichten, $\rho_1 = 100\Omega \cdot m, \rho_2 = 2\Omega \cdot m, \rho_3 = 100\Omega \cdot m$. Abb. 4(b) ist die Pseudosektion des von der Topographie und dem geschichteten Medium erzeugten scheinbaren spezifischen Widerstandes. In Abb. 4(b) sieht man die Verzerrung durch die Topographie. Nach Anwendung der Korrektur wird die Verzerrung grundlegend entfernt. Die Isolinien des scheinbaren spezifischen Widerstandes (Abb. 4(c)) entsprechen denen des $1D$-Modells. Abb. 4(d), und 4(e) sind die Pseudosektionen der Phase.

4 Zusammenfassung

- Mit Hilfe der REM läßt sich eine Korrektur der Topographie für die $B-$Polarisation durchführen;
- Durch die Topographiekorrektur wird die Verzerrung in dem scheinbaren spezifischen Winderstand und der Phase entfernt.
- Die Korrekturformeln für den scheinbaren spezifischen Widerstand und die Phase werden angegeben.

Wir danken Herrn Dr. J. Stoll und Prof. Dr. U. Schmucker für die Durchsicht des Manuskriptes.

Literatur

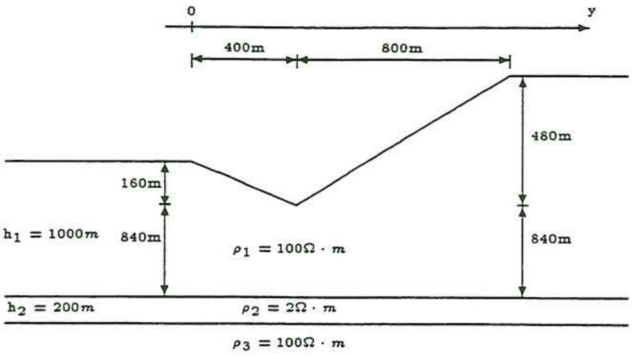
[1] Chouteau,M. und Bouchard,K.,1988, *Two-dimensional terrain correction in magnetotelluric surveys* , Geophysics,53(6),854-862.

[2] Wannamaker,P. E.,Stodt,J. A. und Kijo,L.,1986,*Two-dimension topographical in magnetotellurics modeled using finite elements*,geophysics,51(11),2131-2144.

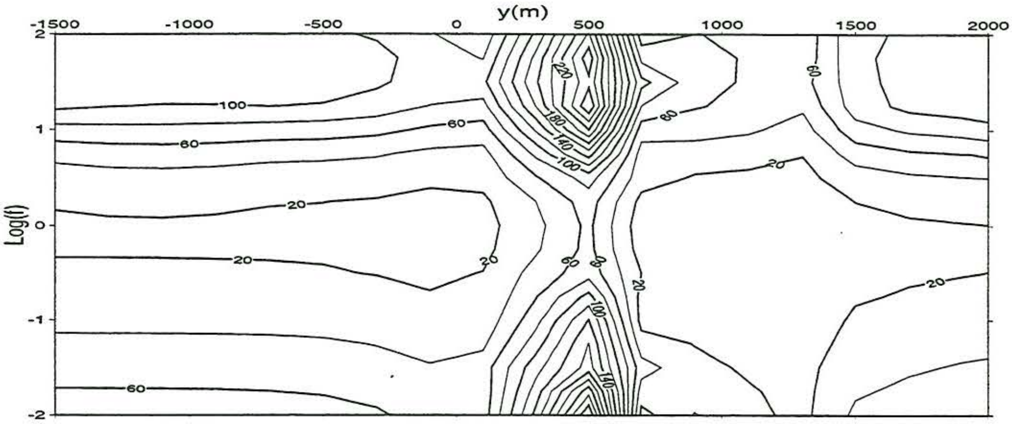
[3] Xu,S. Z. und Zhao,S. K.,1985, *Topographie-Effekts in Magetotellurik*(in Chinesisch), Nordwestliche Zeitschrift für Seismik,7(4), 157–167.

[4] Xu,S.Z. und Zhao,S.K.,1987, *2-D magnetotelluric modeling by boundary element method*, J. Geomag. Geoelectr.,39(11),677-698.

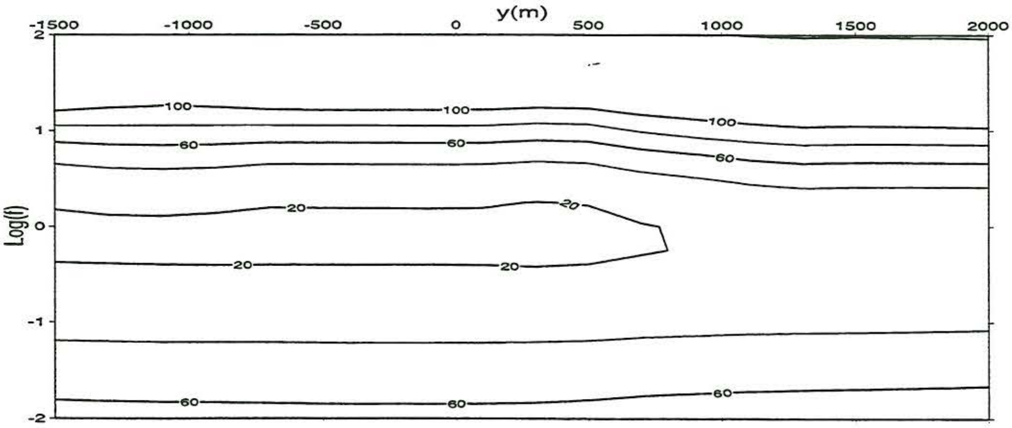
[5] Xu,S. Z.,1994, *The boundary element methode in Geophysics*, Beijing, Science Press (in Chinesisch).



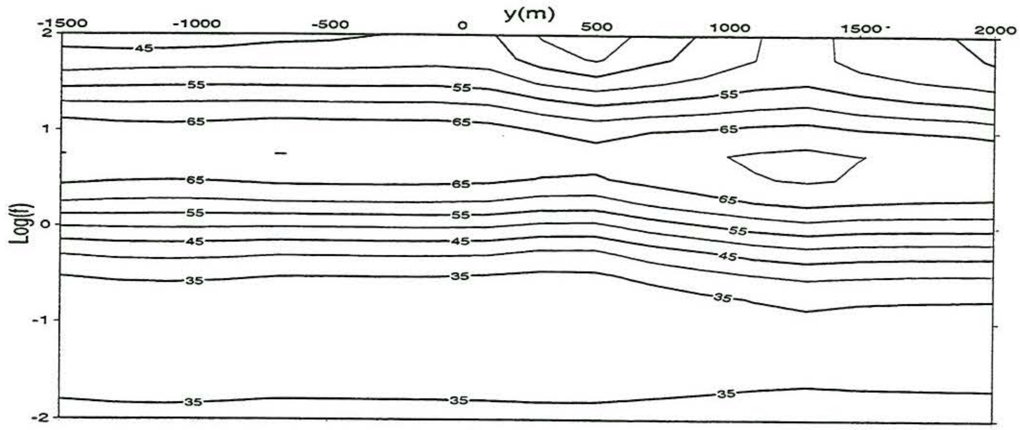
4(a) Topographieverlaufe



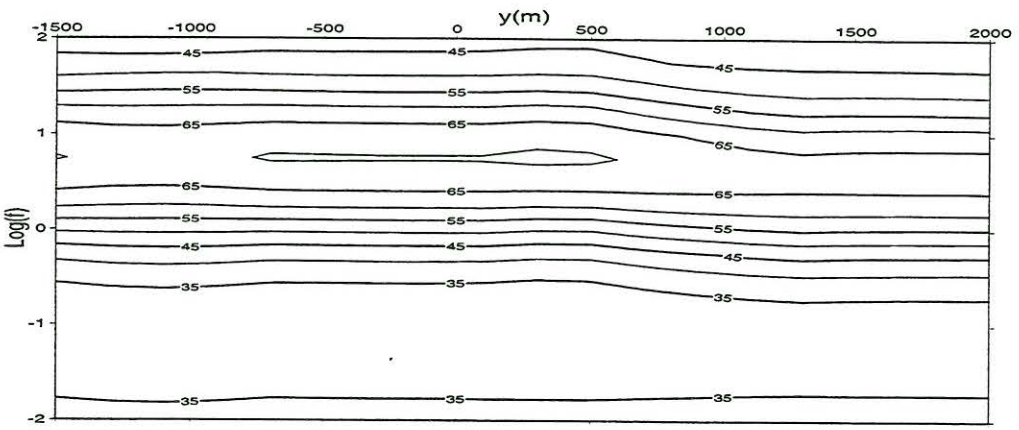
4(b) ρ_a ohne Korrektur



4(c) korrigierte ρ_a



4(d) Phase ohne Korrektur



4(e) korrigierte Phase

Abb. 4 Pesudosektion der Übertragungsfunktionen