

EM 2D-Modellierungen nach der Methode der finiten Elemente (*FEM*), für kontinuierlich veränderliche Leitfähigkeit

Yuguo Li

Institut für Geophysik, Universität Göttingen, 37075 Göttingen, Germany

Shizhe Xu

Institute of Geology and Geophysics, Ocean University of Qingdao, China

In numerischen Modellrechnungen werden traditionell Strukturen mit homogener Leitfähigkeit in jedem Block und scharfen Grenzen betrachtet. Dieses Modell ist unzureichend, wenn die Leitfähigkeit im Medium kontinuierlich variiert.

Für einen geschichteten Halbraum, dessen Schichtleitfähigkeiten linear oder exponential mit der Tiefe variieren, lassen sich Algorithmen zur Bestimmung der magnetotellurischen Übertragungsfunktionen ableiten (Berdicheskiy *et al.* 1974; Mallick, 1970; Kao *et al.*, 1980; Kao, 1981, 1982). Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (*FEM*) wird hier ein Algorithmus zur numerischen Modellierung von elektromagnetischen Feldern in zwei Dimensionen vorgestellt. Der Widerstand zwischen den Blöcken ändert sich dabei nicht sprunghaft, sondern variiert linear. Dies wird durch eine Formfunktion beschrieben. Im folgenden wird zunächst das Modellrechnungsverfahren beschrieben. Anschließend wird die *MT*-Response für einige Modelle berechnet. Die Resultate werden sowohl mit halbanalytischen Lösungen als auch mit Lösungen nach der Methode der finiten Differenzen (*FDM*) verglichen.

1 Randwertproblem

Unter der Verwendung des Zeitfaktors $e^{i\omega t}$ lauten die Grundgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (1)$$

wobei \mathbf{E} und \mathbf{H} die Vektoren des elektrischen bzw. des magnetischen Feldes sind, μ die magnetische Permeabilität, σ die elektrische Leitfähigkeit, ϵ die Dielektrizitätskonstante und ω die Kreisfrequenz. Für zweidimensionale Leitfähigkeitsstruktur lassen sich diese Grundgleichungen in zwei voneinander unabhängige Gruppen aufspalten: *E*-Polarisation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= (\sigma + i\omega\epsilon)E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu H_z \end{aligned} \quad (2)$$

B-Polarisation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu H_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= (\sigma + i\omega\epsilon)E_y \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= (\sigma + i\omega\epsilon)E_z \end{aligned} \quad (3)$$

Aus den obigen beiden Gleichungen ergeben sich Induktionsgleichungen für die Feldkomponenten parallel zur Streichrichtung (*x*-Achse):

$$E\text{-Pol: } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = (\sigma + i\omega\epsilon) E_x, \quad (4)$$

$$B\text{-Pol: } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) = i\omega\mu H_x. \quad (5)$$

Die beiden Ausdrücke lassen sich zusammenfassen in eine einheitliche Formel

$$\nabla \cdot (\tau \nabla u) + \lambda u = 0. \quad (6)$$

Hier bedeuten

$$u = E_x, \quad \tau = \frac{1}{i\omega\mu}, \quad \lambda = -(\sigma + i\omega\epsilon) \quad \text{für } E\text{-Polarisation,}$$

$$u = H_x, \quad \tau = \frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon}, \quad \lambda = -i\omega\mu \quad \text{für } B\text{-Polarisation.}$$

Um diese Gleichung zu lösen, ist es notwendig, Randbedingungen anzugeben.

(1) Außenrandbedingung

Abb. 1 zeigt einen Lösungsbereich, der einen zweidimensionalen inhomogenen Körper enthält. Der obere Rand AB befindet sich im nichtleitenden oberen Halbraum bei E -Polarisation und auf der Erdoberfläche bei B -Polarisation und der untere Rand CD in einem unteren Halbraum mit homogener Leitfähigkeit. Die verbleibenden Ränder AD und BC gehören zu den Normalbereichen links und rechts.

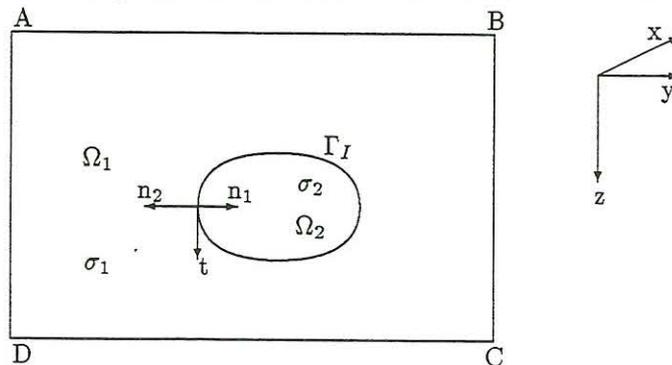


Abb. 1 Lösungsbereich

Da das anomale Feld auf AB verschwinden muß, bleibt das gesamte Feld u dort konstant. Man nehme dann an

$$u = 1 \quad \in AB.$$

Da das von inhomogenen Körpern erzeugte anomale Feld für $z \rightarrow \infty$ auch verschwinden muß, klingt das elektromagnetische Feld unterhalb von CD mit e^{-kz} ab, und es gilt näherungsweise

$$u = u_0 e^{-kz} \quad \in CD, \quad (7)$$

wobei $k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma}$, μ_0 und σ die Vakuumpermeabilität und die homogene Leitfähigkeit des Halbraums unterhalb von CD sind. Mit $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial n}$ und $\frac{\partial u}{\partial z} = -ku$ auf CD ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0 \quad \in CD. \quad (8)$$

Sind der linke Rand AD und der rechte Rand BC von dem inhomogenen Körper genügend weit entfernt, lauten die Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \in AD, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \in BC. \quad (9)$$

(2) Innenrandbedingung

Aus der Stetigkeitsbedingungen der tangentialen Komponente des elektrischen bzw. des magnetischen Feldes

an den Grenzen zwischen den beiden Materialien ergibt sich für das Feld und seine Normalableitungen auf dem Innenrand Γ_I

$$u_1 = u_2, \quad \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \in \Gamma_I. \quad (10)$$

Nach der obigen Diskussion lautet das Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\tau \nabla u) + \lambda u &= 0 && \in \Omega, \\ u &= 1 && \in AB, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \in AD, BC, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku &= 0 && \in CD, \\ u_1 &= u_2, && \in \Gamma_I, \\ \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} && \in \Gamma_I. \end{aligned} \quad (11)$$

2 Variationsaufgabe

Man nehme an, es gäbe nur einen inhomogenen Körper im betrachteten Gebiet (Abb. 1). Um die dem Randwertproblem (11) entsprechende Variationsaufgabe zu formulieren, konstruieren wir folgendes Funktional:

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2} \tau_1 (\nabla u_1)^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 u_1^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{2} \tau_2 (\nabla u_2)^2 - \frac{1}{2} \lambda_2 u_2^2 \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Die Variation dieses Funktionals lautet

$$\begin{aligned} \delta I(u) &= \int_{\Omega_1} \tau_1 \nabla u_1 \cdot \nabla \delta u_1 d\Omega - \int_{\Omega_1} \lambda_1 u_1 \delta u_1 d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \tau_2 \nabla u_2 \cdot \nabla \delta u_2 d\Omega - \int_{\Omega_2} \lambda_2 u_2 \delta u_2 d\Omega \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla \cdot (\tau_1 \nabla u_1 \delta u_1) d\Omega - \int_{\Omega_1} [\nabla \cdot (\tau_1 \nabla u_1) + \lambda_1 u_1] \delta u_1 d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \nabla \cdot (\tau_2 \nabla u_2 \delta u_2) d\Omega - \int_{\Omega_2} [\nabla \cdot (\tau_2 \nabla u_2) + \lambda_2 u_2] \delta u_2 d\Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Durch Einsetzen der Gl. (6) in (12) erhält man nach dem Gauss'schen Satz

$$\begin{aligned} \delta I(u) &= \int_{\Omega_1} \nabla \cdot (\tau_1 \nabla u_1 \delta u_1) d\Omega + \int_{\Omega_2} \nabla \cdot (\tau_2 \nabla u_2 \delta u_2) d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma + \Gamma_I} \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \delta u_1 d\Gamma + \oint_{\Gamma_I} \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \delta u_2 d\Gamma, \end{aligned} \quad (13)$$

wobei $\Gamma = AB + BC + CD + DA$ den Außenrand und Γ_I den Innenrand bedeutet. n_1 sei der Außennormalvektor vom Bereich Ω_1 und n_2 vom Ω_2 und damit $n_1 = -n_2$. Aus der Innenrandbedingung (10) ergibt sich

$$\oint_{\Gamma_I} \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \delta u_1 d\Gamma + \oint_{\Gamma_I} \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \delta u_2 d\Gamma = 0.$$

Das bedeutet also, daß die Variation von $I(u)$ keine Innenrandbedingungen enthält, d. h. die Innenrandbedingung gehört zu der natürlichen Randbedingung. Dies ist auch haltbar, wenn mehrere inhomogene Körper im untersuchten Gebiet existieren. Durch Einsetzen der Außenrandbedingungen (8) und (9) in (13) erhält man

$$\delta I(u) = \oint_{\Gamma} \tau \frac{\partial u}{\partial n} \delta u d\Gamma = - \int_{CD} \tau k u \delta u d\Gamma = -\delta \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma$$

oder

$$\delta[I(u) + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma] = 0.$$

Damit erweist sich das Randwertproblem (11) als äquivalent zu einer Variationsaufgabe der Form

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma, \\ u|_{AB} &= 1, \\ \delta F(u) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

3 Die Methode der finiten Elemente (FEM)

Der Lösungsbereich wird durch $n_y + 1$ vertikale und $n_z + 1$ horizontale Gitterlinien in $n_y \times n_z$ rechteckige Zellen zerlegt (Abb. 2). Dadurch wird das Integral der Gl. (14) umgeschrieben als Summe des Integrals von allen Zellen.

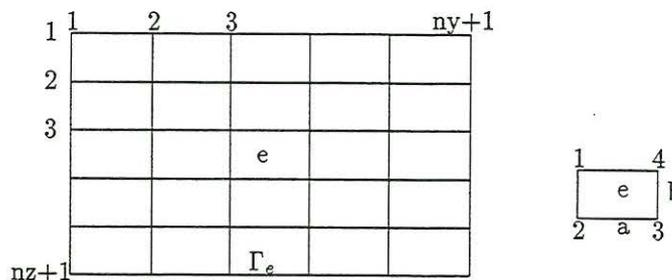


Abb. 2 Diskretisierung vom Lösungsbereich

$$F(u) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega - \sum_{e=1}^{N_e} \int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega + \sum_{CD} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \quad (15)$$

mit

- e : Rechteckelemente mit der Breite a und Höhe b ,
- $N_e = n_y \times n_z$ die Anzahl der Rechteckelemente,
- Γ_e : lineares Geradesegment auf CD .

Wir nehmen an, u , τ und λ in einem Element variieren linear und werden durch folgende Ausdrücke approximiert:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad \tau = \sum_{i=1}^4 N_i \tau_i, \quad \lambda = \sum_{i=1}^4 N_i \lambda_i, \quad (16)$$

mit

- N_i = Formfunktion eines Rechteckelementes e ,
- u_i = Werte von u am Eckpunkt i vom Element e ,
- τ_i = Werte von τ am Eckpunkt i vom Element e ,
- λ_i = Werte von λ am Eckpunkt i vom Element e ,
- $i = 1, \dots, 4$. Indizes der Eckpunkte vom Element e .

Unter Verwendung der Formfunktion nach Gl. (16) bzgl. u und τ und der Substitution in das erste Integral der Gl. (15) erhalten wir

$$\int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega = \int_e \frac{1}{2} \tau \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_{1e} \mathbf{U}_e \quad (17)$$

wobei $\mathbf{U}_e = (u_i)^T$ der aus Funktionswerten u_i ($i = 1, \dots, 4$) gebildet Zeilenvektor und $\mathbf{K}_{1e} = (k_{1ij})$ eine symmetrische 4×4 Matrix ist mit den Elementen

$$\begin{aligned} k_{1ij} &= \int_e \tau \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dydz \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{b}{a} \alpha_{ij} + \frac{a}{b} \beta_{ij} \right) \tau, \end{aligned}$$

worin

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_4)^T$$

und

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{42} \\ \alpha_{33} \\ \alpha_{43} \\ \alpha_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{31} \\ \beta_{41} \\ \beta_{22} \\ \beta_{32} \\ \beta_{42} \\ \beta_{33} \\ \beta_{43} \\ \beta_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen der Gl.(16) in das zweite Integral der Gl. (15) erhält man

$$\int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega = \int_e \frac{1}{2} \lambda \left(\sum_{i=1}^4 N_i u_i \right)^2 dydz = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_{2e} \mathbf{U}_e \quad (18)$$

wobei $\mathbf{K}_{2e} = (k_{2ij})$ wieder eine symmetrische 4×4 Matrix ist mit den Elementen

$$k_{2ij} = \frac{ab}{144} \gamma_{ij} \lambda$$

und

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T,$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{41} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{42} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{43} \\ \gamma_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Der letzte Term auf der rechten Seite von Gl. (15) bezeichnet ein Kurvenintegral für den Rand CD . Wenn die Seite 23 eines Elements auf dem Rand CD liegt, ergibt sich

$$\int_{23} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_{3e} \mathbf{U}_e \quad (19)$$

wobei $\mathbf{K}_{3e} = (k_{3ij})$ eine symmetrische 4×4 Matrix ist mit den Elementen

$$k_{3ij} = \frac{a}{60} \delta_{ij},$$

und

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= 12\tau_2 k_2 + 3\tau_2 k_3 + 3\tau_3 k_2 + 2\tau_3 k_3, \\ \delta_{32} &= 3\tau_2 k_2 + 2\tau_2 k_3 + 2\tau_3 k_2 + 3\tau_3 k_3, \\ \delta_{33} &= 2\tau_2 k_2 + 3\tau_2 k_3 + 3\tau_3 k_2 + 12\tau_3 k_3, \\ \delta_{11} &= \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{41} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{44} = 0.\end{aligned}$$

Der Zeilenvektor U_e wird umgeschrieben in den Vektor U

$$U = (u_1, \dots, u_{nd})^T,$$

wobei $nd = (ny+1) \times (nz+1)$ die Anzahl der Gitterpunkte bedeutet. K_{1e}, K_{2e} und K_{3e} , die symmetrischen 4×4 Matrizen sind, lassen sich auf $\overline{K}_{1e}, \overline{K}_{2e}$ und \overline{K}_{3e} der Ordnung nd erweitern. Danach werden die erweiterten Matrizen in allen Zellen addiert. Daraus ergibt sich

$$F(u) = \frac{1}{2} U^T \left(\sum_{e=1}^{N_e} \overline{K}_{1e} - \sum_{e=1}^{N_e} \overline{K}_{2e} + \sum_{CD} \overline{K}_{3e} \right) U = \frac{1}{2} U^T K U \quad (20)$$

mit

$$K = \sum_{e=1}^{N_e} \overline{K}_{1e} - \sum_{e=1}^{N_e} \overline{K}_{2e} + \sum_{CD} \overline{K}_{3e} \quad \text{als Koeffizientenmatrix.}$$

Die Variation der Gl. (20) lautet

$$\delta F(u) = \delta U^T K U = 0.$$

Somit haben wir ein lineares Gleichungssystem

$$K U = 0 \quad (21)$$

zu lösen. Unter der Berücksichtigung der Randbedingung auf AB werden diese Gleichungen mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst. Die anderen gesuchten Übertragungsfunktionen, z.B. H_y, H_z bei E -Polarisation und E_y, E_z bei der B -Polarisation, sind nach der Spline-Interpolation zu berechnen.

4 Modellbeispiele

Um das Programm zu testen, wählen wir das Modell von COMMEMI als Testmodell (s. Abb. 3). Die Periode beträgt 1s. In der Tabelle 1 stehen die nach FEM berechneten Feldwerte und die Lösungen nach der Methode der finiten Differenzen (FDM) von Weaver. Die Übereinstimmungen ergeben sich auf drei Stellen.

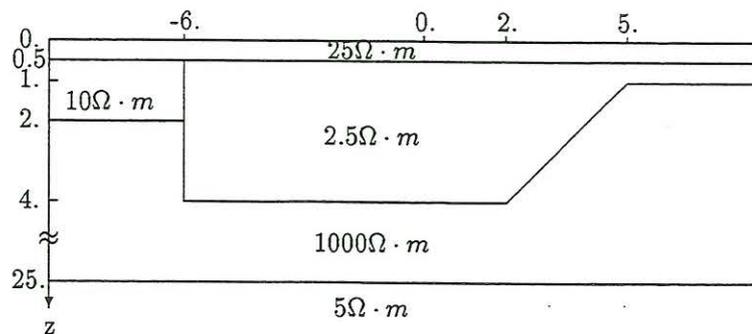


Abb. 3 2-D COMMEMI-Modell

Tabelle 1 Vergleich mit den Ergebnissen von Weaver
 Periode= 1s $z = 0.0$ E -Polarisation

y			-20	-10	-7	-6	-5	0	2	5	8	16
Ex	Re	FEM	1.001	1.030	.948	.863	.789	.738	.728	.734	.749	.722
		FDM	1.001	1.030	.948	.861	.787	.736	.726	.732	.747	.720
	Im	FEM	.004	.059	.151	.158	.164	.200	.197	.116	.033	.008
		FDM	.003	.058	.151	.158	.164	.200	.197	.116	.033	.009
By	Re	FEM	.998	.977	.937	.996	1.038	.993	.985	1.004	1.015	1.010
		FDM	.998	.978	.938	.997	1.038	.992	.984	1.003	1.013	1.008
	Im	FEM	.006	.038	.005	-.027	-.056	-.035	-.042	-.015	.012	-.004
		FDM	.008	.040	.009	-.025	-.053	-.031	-.038	-.011	.014	-.001
Bz	Re	FEM	.002	.017	-.041	-.071	-.027	-.003	-.012	-.018	-.014	-.001
		FDM	.001	.019	-.041	-.083	-.027	-.002	-.012	-.017	-.016	-.001
	Im	FEM	-.001	.025	.071	.074	.053	.004	.001	-.048	-.011	.001
		FDM	-.000	.022	.079	.075	.056	.003	.001	-.051	-.007	-.001
ρ_a	FEM	11.5	12.7	12.0	8.86	6.87	6.77	6.69	6.27	6.24	5.85	
	FDM	11.5	12.7	12.0	8.81	6.84	6.75	6.67	6.25	6.22	5.84	

Die folgende Rechnung betrifft ein 1D-Modell mit Dreischichten: Die erste und die dritte Schichten sind homogene Medien mit dem elektrischen Widerstand ρ_1 und ρ_3 , dazwischen befindet sich eine Übergangsschicht, deren Widerstand von ρ_1 auf ρ_3 linear mit der Tiefe abnimmt (siehe Abb. 4(a)), $\rho_3/\rho_1 = 10^{-3}$ und $h_2/h_1 = 10^3$. In Abb. 4(b) ist der Vergleich mit der analytischen Lösungen dargestellt.

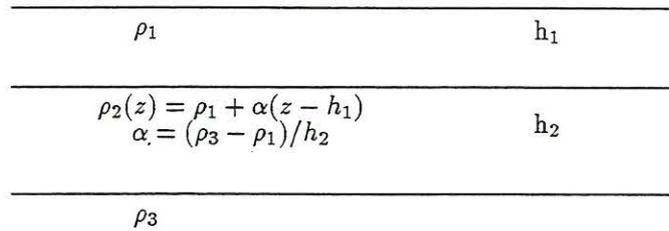
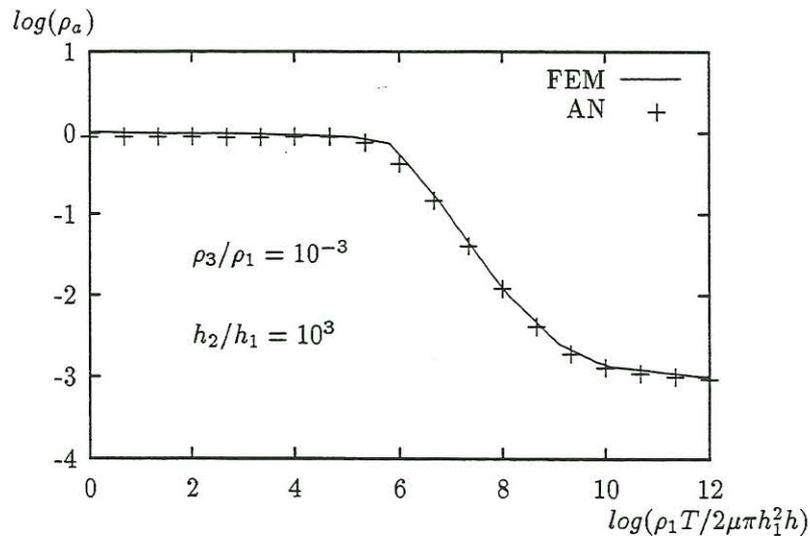
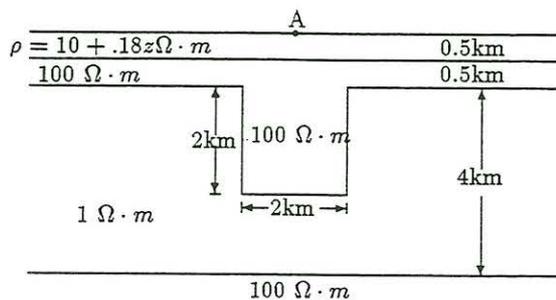


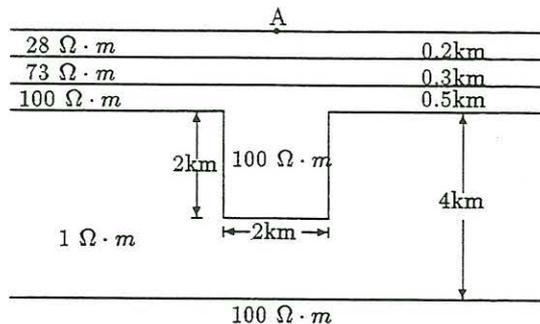
Abb. 4 (a) 1D Modell mit Übergangsschicht



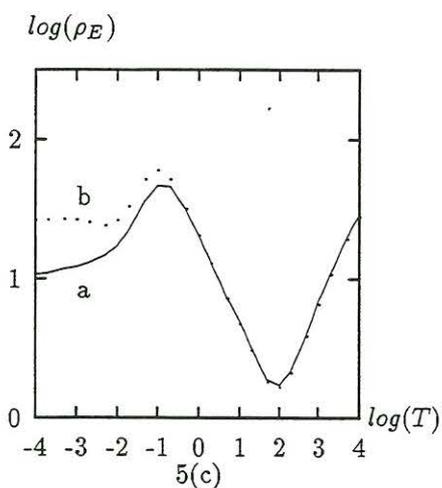
4(b) Vergleich mit den analytischen Ergebnissen



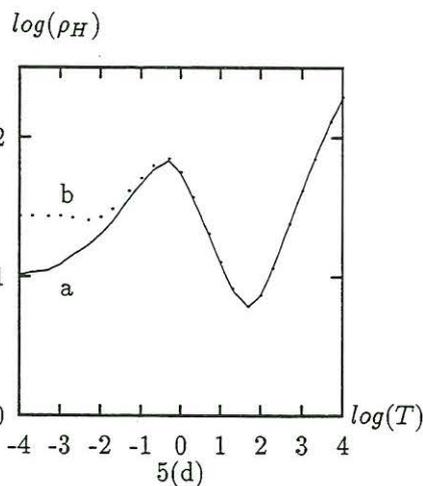
5(a)



5(b)



5(c)



5(d)

Die Abbildung 5 (a) zeigt ein zweidimensionales Modell mit der Deckschicht von 0.5 km Dicke, deren elektrischer Widerstand linear mit der Tiefe zunimmt, und zwar $\rho = 10 + 0.18z \Omega \cdot m$. Die Kurve *a* in Abb. 5(c) und 5(d) stellt die Übertragungsfunktion am Modellmittelpunkt *A* bei *E*- bzw. *B*-Polarization dar. ρ_E und ρ_H steigern an höheren Frequenzen kontinuierlich an. Die Abbildung 5(b) zeigt ein ähnliches Modell, dessen Deckschicht aber homogen ist. Die Kurve *b* stellt die Übertragungsfunktion dieses Modelles dar. An höheren Frequenzen strebt sie gegen den elektrischen Widerstand der ersten Schicht. Die Übertragungsfunktionen der zwei Modelle weichen an höheren Frequenzen voneinander ab, fallen an niedrigen Frequenzen aber miteinander zusammen. Hieraus folgt, daß die Inhomogenität des elektrischen Widerstand in der Nähe der Erdoberfläche großen Einfluß auf die Übertragungsfunktion des höheren Frequenzbereiches hat.

5 Zusammenfassung

Es wird ein *FEM*-Algorithmus zur numerischen Modellierung von elektromagnetischen Feldern in zwei Dimensionen entwickelt. Dabei wird die Leitfähigkeit im Medium als eine lineare Funktion in Bezug auf horizontalen und vertikalen Koordinaten betrachtet und durch eine Formfunktion beschrieben. Die Resultate sind sowohl mit halbanalytischen Lösungen als auch mit *FDM*-Lösungen vergleichbar.

Wir danken Herrn Prof. Dr. U. Schmucker für die Betreuung beim Anfertigen dieser Arbeit und für die Durchsicht des Manuskriptes.

Literatur

- [1] Berdichevskiy, M. I., Dmitriyev, V. I., and Mershchikova, N. A., 1974, *Izv. Akad. Nauk, USSR, series Fiz. Zemli*, no. 6, p. 61-72; Engl. trans, 1974, *Izv. Earth Physics*, no. 6, p. 380-386. Diss. Math.-Nat. Fachb., Univ. Göttingen.
- [2] Kao, D. und Rankin, D., 1980, *Magnetotelluric response on inhomogeneous layered earth*, *Geophysics*, 45(12), 1793-1802.
- [3] Kao, D., 1981, *Magnetotelluric response on vertically inhomogeneous earth*, *J. Geophys. Res.*, V.86, 3027-3038.
- [4] Kao, D., 1982, *Magnetotelluric response on vertically inhomogeneous earth having conductivity varying exponentially with depth*, *Geophysics*, 47(1), 89-99.
- [5] Mallick, K., 1970, *Magnetotelluric sounding on a layered earth with transitional boundary*, *Geophys. Prosp.*, v.18, 738-757.
- [6] Schmucker, U., 1986, 2D-Modellrechnungen: neue Fassung älter Programme, in Protokoll Kolloquium erdmagnetische Tiefensondierung Lerbach bei Köln, 11.-13. March 1986, eds Haak, V. and Homilius, J., 5-44.
- [7] Weaver, J. T., Lequang, B. V., and Fischer, G., 1985, *A comparison of analytic and numerical results for a two-dimensional control model in electromagnetic induction - I. B-Polarization calculation*, *Geophys. J. R. astr. soc.*, 82, 263-277.
- [8] Weaver, J. T., Lequang, B. V., and Fischer, G., 1986, *A comparison of analytic and numerical results for a two-dimensional control model in electromagnetic induction - II. E-Polarization calculation*, *Geophys. J. R. astr. soc.*, 87, 917-948.
- [9] Weaver, J. T., 1986, *Finite difference calculations for COMMEMI*.