

Bayessche Inversion mit Markovketten: Näherung der dünnen Platte für vertikale magnetische Dipole

Stefan Sineux^(1,2), Michel Menvielle⁽²⁾

⁽¹⁾ Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig

⁽²⁾ Centre d'étude des Environnements Terrestre et Planétaires,
F - 94107 St.-Maur-des-Fossés

1 Einleitung

Die Bayessche Inversion mit Markovketten hat sich in den Arbeiten von Grandis (1994), Grandis et al. (1998) und Menvielle & Roussignol (1995) als geeignetes Mittel der elektromagnetischen Tiefenforschung für den Fall einer homogenen Quelle erwiesen. In diesem Beitrag soll der Stand der Arbeiten zur Umsetzung dieser Methode für vertikale magnetische Dipole als Quellen erläutert werden. Zu diesem Zweck wird zunächst der theoretische Hintergrund der Bayesschen Inversion mit Markovketten dargestellt, bevor dann anhand des daraus resultierenden Algorithmus und eines synthetischen Beispiels die Eigenschaften der Methode erläutert werden.

Als direktes Problem wird der Algorithmus nach Vasseur & Weidelt (1977) verwendet. Betrachtet wird ein räumlich begrenzter lateraler heterogener 2D-Bereich innerhalb eines bekannten 1D-Schichtenmodells, für den die Näherung der dünnen Platte erfüllt ist (Abb. 1).

Die Lösung des direkten Problems läßt sich nach Vasseur & Weidelt auf die Integralgleichung

$$\underline{E}_s(\underline{r}_0) = \underline{E}_{ns}(\underline{r}_0) - i\omega\mu_0 \int_{r \in S} (\tau_a(r) \underline{G}_s(\underline{r}_0, r) \cdot \underline{E}_s(r)) dS \quad \underline{r}_0 \in S \quad (1)$$

zurückführen, zu deren Lösung der heterogene Bereich in quadratische Abschnitte unterteilt wird. Das Gleichungssystem, das dadurch entsteht, wird iterativ nach Gauß-Seidel gelöst. Für Details soll an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen werden.

Die Parameter des Modells sind die Leitwerte der einzelnen Zellen, als Daten werden die z-Komponenten des normierten induzierten Magnetfeldes an verschiedenen Punkten der Oberfläche berechnet.

Der Bayessche Inversionsansatz erfordert ein a priori-Wissen, das durch eine a priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Parametern des Modells beschrieben wird; die Lösung der Inversion wird durch ein a posteriori Gesetz über den Parametern ausgedrückt.

Indem die Zahl der möglichen Leitwerte, die jede Zelle des heterogenen 2D-Bereichs annehmen kann, begrenzt wird, werden die a priori- und a posteriori-Gesetze diskretisiert.

Die Markovkette beruht darauf, daß der betrachtete Bereich mehrfach durchlaufen wird und daß jeweils der Leitwert für eine bestimmte Zelle aktualisiert wird, wobei die Leitwerte der anderen Zellen als bekannt vorausgesetzt werden. Bei jedem Schritt wird das direkte Problem mit dem Algorithmus nach Vasseur & Weidelt vollständig gelöst. Ein Vorteil dieses Ansatzes liegt darin, daß es nicht notwendig ist, das Gleichungssystem zu linearisieren. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette nach den verschiedenen Leitwerten, die invariant sind und die über die empirischen Übergangswahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden können, sind das a posteriori-Gesetz für die betrachtete Zelle bei festem Leitwert der anderen Zellen.

Damit kann nach Abschluß der Inversion jeder Zelle des heterogenen 2D-Bereichs eine Wahrscheinlichkeit für einen der vorgegebenen Leitwerte zugeordnet werden.

2 Theorie

Grundsätzlich zielt die Lösung des inversen Problems darauf ab, ein Modell zu finden, dessen theoretische Antwort so nah wie möglich bei den beobachteten Werten liegt. Die Differenz zwischen den beobachteten und den mit einem gegebenen Modell berechneten Daten wird durch eine Abstandsfunktion abgeschätzt, das Modell, das letztlich ausgewählt wird, minimiert diese Funktion. Für einen statistischen Ansatz

wird dadurch eine Wahrscheinlichkeit für das Modell definiert, je kleiner der Abstand ist, desto wahrscheinlicher ist das Modell.

Um das Problem der Nichteindeutigkeit von Lösungen eines inversen Problems zu überwinden, werden dem gesuchten Modell Randbedingungen auferlegt, wodurch die Lösung auf eine bestimmte Klasse von Modellen beschränkt wird. Außerdem hängt die Lösung von der gewählten Abstandsfunktion ab.

Im Bayesschen Kontext besteht das inverse Problem darin, das vorhandene Wissen über die Parameter des Modells durch die Verarbeitung der beobachteten Daten zu aktualisieren. Statistisch wird das a priori- und das a posteriori-Wissen durch a priori- und a posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Parametern des Modells ausgedrückt. Das inverse Problem wird gelöst, indem ein a posteriori-Gesetz über den Parametern bestimmt wird, wobei das a priori-Gesetz, das die Auswahl einer Klasse von Modellen ausdrückt, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Daten bekannt sind. Die Abstandsfunktion wird entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Daten gewählt.

Im allgemeinen Fall ist die direkte Berechnung des a posteriori-Gesetzes praktisch unmöglich, da darin Summen über die große Zahl möglicher Modelle eingehen. Außerdem kann es analytisch nur dann ausgedrückt werden, wenn das direkte Problem linear ist und wenn Daten und Parameter gaußverteilt sind.

In unserem Fall wird daher für die Lösung des inversen Problems eine numerische Abschätzung des a posteriori-Gesetzes über den Parametern benötigt. Diese wird mittels einer Markovkette vorgenommen, deren invariante Wahrscheinlichkeit gleich dem a posteriori-Gesetz über den Parametern ist.

Die Lösung des inversen Problems erfordert zunächst, daß das direkte Problem gelöst wird. Sei F die Funktion des direkten Problems, die die Berechnung der Observablen y für ein Modell x ermöglicht. Vorausgesetzt, daß der Fehler ε nur durch Meßfehler bedingt ist, gilt:

$$y = F(x) + \varepsilon \quad (2)$$

Die a posteriori-Wahrscheinlichkeit für den Parametervektor X , den Wert x anzunehmen, wobei die Observablen y gegeben sind, läßt sich mit der Formel von Bayes berechnen. Bezeichnet man mit $P(X = x / Y = y)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von X , unter der Voraussetzung, daß Y bekannt ist, lautet sie:

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(Y = y / X = x)P(X = x)}{\sum_x P(Y = y / X = x)P(X = x)} \quad (3)$$

Dabei ist $P(X = x)$ das a priori-Gesetz der Parameter. Im folgenden wird $P(X = x)$ mit $g(x)$ und $P(Y = y / X = x)$ mit $f(y / X = x)$ bezeichnet. Der Wert y des Zufallsvektors Y entspricht den beobachteten Daten. Da y während der Inversion nicht modifiziert wird, kann Y von nun an in den Wahrscheinlichkeitsgesetzen weggelassen werden.

Wir betrachten nun ein System mit einer gewissen Anzahl möglicher Zustände, das sich mit der Zeit stochastisch entwickelt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt kann der Zustand des Systems durch die Zufallsvariable X beschrieben werden, deren Werte x Elemente aus dem Raum der möglichen Zustände E sind.

Bei dem System handelt es sich um einen Markovprozeß, wenn seine zukünftige Entwicklung zu jedem Zeitpunkt nur von seinem gegenwärtigen Zustand abhängt. Das heißt, daß ein Markovsches System nur mittelbar über seinen gegenwärtigen Zustand von seiner Vergangenheit abhängt.

Markovketten sind eine spezielle Klasse von Markovprozessen; mit den Eigenschaften, daß (i) E endlich und abzählbar ist und (ii) die sukzessiven Zeitpunkte ihrer Entwicklung durch ganze Zahlen bezeichnet werden können. Eine Folge $[X^{(n)}; n = 0, 1, 2, \dots, N]$ von Zufallsvariablen mit Werten aus einem endlichen oder abzählbaren Raum ist dann eine Markovkette, wenn der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $n+1$, $X^{(n+1)}$, nur über seinen Zustand zum Zeitpunkt n , $X^{(n)}$ von seiner Vergangenheit abhängt.

Das Verhalten der Markovkette wird durch den Satz ihrer Übergangswahrscheinlichkeiten charakterisiert:

$$P_n(x, x') = P(X^{(n+1)} = x' / X^{(n)} = x) \quad \text{mit } x, x' \in E \quad (4)$$

Falls (i) die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht vom Zeitpunkt n abhängen, (ii) E endlich ist und (iii) jeder mögliche Zustand von irgendeinem anderen erreicht werden kann, ist die Kette eine homogene ergodische aperiodische Markovkette, und es existiert genau eine Wahrscheinlichkeitsverteilung Π über E , die für die Markovkette invariant ist. Strebt n gegen unendlich, verhält sich die ergodische Markovkette so, daß der

durchschnittliche Bruchteil der Zeit, zu der sie sich im Zustand \mathbf{x} ($\mathbf{x} \in E$) befindet, gegen die invariante Wahrscheinlichkeit von \mathbf{x} , $\Pi(\mathbf{x})$ strebt.

Nun soll der Fall betrachtet werden, daß durch die Bayessche Inversion L Parameter bestimmt werden sollen. Wir nehmen an, daß es für jeden Parameter x_l ($l = 1, 2, \dots, L$) des Modells \mathbf{x} nur M_l mögliche Werte $\Theta_{l,i}$ ($i = 1, 2, \dots, M_l$) gibt. Die Wahl der möglichen Werte $\Theta_{l,i}$ drückt ein a priori-Wissen über die Parameter aus. Nach dem Gesetz von Bayes (Gleichung 3) ist dann der Grenzwert der a posteriori-Wahrscheinlichkeit, daß der Parameter x_l den Wert $\Theta_{l,i}$ annimmt:

$$P(X_l = \theta_{l,i} / y) = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in E_{l,i}} f(y/\mathbf{X} = \mathbf{x}) g(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x} \in E} f(y/\mathbf{X} = \mathbf{x}) g(\mathbf{x})}, \quad (5)$$

mit E als dem Raum der möglichen Bilder und $E_{l,i}$ als dem Raum der Bilder \mathbf{x} , für die $x_l = \Theta_{l,i}$. X_l ist die zufällig ausgewählte Komponente Nummer l des Zufallsvektors \mathbf{X} .

Die Normierungskonstante, die im Nenner der Gleichung 4 auftaucht, ist schwer zu berechnen, da sie eine Summe über den gesamten Raum der möglichen Bilder ist, dessen Dimension das Produkt $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \dots \cdot M_L$ ist.

Hingegen ist es einfach, die bedingte Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, daß $X_l = \Theta_{l,i}$, wenn alle anderen Parameter und die Daten gegeben sind:

$$P(X_l = \theta_{l,i} / X_k = x_k, k \neq l; y) = \frac{f(y/\mathbf{X} = \mathbf{x}^{(l,i)}) g(\mathbf{x}^{(l,i)})}{\sum_{j=1}^{M_l} f(y/\mathbf{X} = \mathbf{x}^{(l,j)}) g(\mathbf{x}^{(l,j)})} \quad (6)$$

mit $\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(l,j)} \in E$ und $x_k^{(l,j)} = x_k \forall k \neq l; x_l^{(l,j)} = \Theta_{l,j}$.

Die Normierungskonstante in Gleichung 6 ist eine Summe über die M_l möglichen Werte $\Theta_{l,i}$ der l -ten Komponente x_l des Modells \mathbf{x} . Vorausgesetzt, daß M_l nicht zu groß wird, wird ihre Berechnung möglich.

Gegeben sei nun ein Algorithmus, der den Parameterwert für die Komponente x_l aktualisiert, indem entsprechend dem Wahrscheinlichkeitsgesetz aus Gleichung 6 der neue Wert per Zufallsversuch aus der Menge der möglichen Werte $\Theta_{l,i}$ gezogen wird.

Zum einen kann die zu aktualisierende Komponente x_l durch einen Zufallsversuch aus der gleichverteilten Menge der L Komponenten von \mathbf{x} ausgewählt werden. Die Folge von Modellen, die man dadurch erhält, ist eine homogene Markovkette, da die Wahrscheinlichkeit eines Bildes $\mathbf{X}^{(n+1)}$ nur von dem vorhergehenden Bild $\mathbf{X}^{(n)}$ abhängt und sich nicht beim n -ten Schritt ändert. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_n(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ lauten:

$$P_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{L} P(X_l = z_l / X_k = x_k, k \neq l, y) \quad \text{für } x_k = z_k, k \neq l; \quad P_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \text{ sonst.} \quad (7)$$

Es kann gezeigt werden, daß diese Markovkette ergodisch ist und daß ihre invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung Π die a posteriori-Wahrscheinlichkeit aus Gleichung 3 ist.

Andererseits kann das zu aktualisierende Element deterministisch ausgewählt werden, was dazu führt, daß die Folge von Bildern, die man erhält, keine homogene Markovkette mehr darstellt. Die Bildfolge $\mathbf{X}^{(v)}$ jedoch, die man nach jedem Durchlaufen v aller Elemente erhält, bleibt eine ergodische Markovkette. Ihre invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung Π ist wiederum die a posteriori-Wahrscheinlichkeit aus Gleichung 3. Das invariante Wahrscheinlichkeitsgesetz der Markovkette kann über die beobachtete Bildfolge abgeschätzt werden. Bezeichnet man mit $P(\bullet, \bullet)$ die Übergangswahrscheinlichkeit der Kette $\mathbf{X}^{(n)}$ und mit $(\mathbf{X}^{(n)})^{(l,j)}$ die Bilder, für die gilt:

$$\left[\mathbf{X}^{(n)} \right]_k^{(l,j)} = X_k^{(n)} \quad \text{für } k \neq l \text{ und} \quad \left[\mathbf{X}^{(n)} \right]_l^{(l,j)} = \theta_{l,j},$$

wird der Grenzwert für das l -te a posteriori Gesetz $\Pi_l(\Theta_{l,i})$ nach N Schritten der Markovkette abgeschätzt durch:

$$\Pi_i^{(N)}(\theta_{l,j}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P[\mathbf{X}^{(n)}, [\mathbf{X}^{(n)}]^{(l,j)}] \quad (8)$$

Auf diese Weise können entweder der Mittelwert für $\Pi^{(N)}$ oder der Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit aus $\Pi^{(N)}$ Schätzwerte für den Parameter x_l sein.

3 Umsetzung in einen Inversionsalgorithmus

Aus der in Abschnitt 2 dargestellten Theorie läßt sich ein Algorithmus ableiten, der in Abb.3 schematisch gezeigt wird. Die einzelnen Schritte sollen nun am Beispiel einer dünnen Platte mit 3x3 Zellen erläutert werden.

Die Leitwerte der Zellen der dünnen Platte werden in einen Parametervektor \mathbf{X} sortiert (Abb.2):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau_l : \text{Leitwerte} \quad l = 1, \dots, L : \text{Zelle} \quad L : \text{Zahl der Zellen}$$

Für die Lösung des inversen Problems wird ein a priori-Wissen vorausgesetzt. Hier nehmen wir an, daß der Leitwert in den Zellen nur fünf verschiedene diskrete Werte annehmen kann, die alle gleich wahrscheinlich sind (z.B. für eine logarithmische Skala $\tau_1 = 0.031S$, $\tau_2 = \tau_n = 0.1S$, $\tau_3 = 0.316S$, $\tau_4 = 1S$, $\tau_5 = 3.162S$; Darstellung für eine bestimmte Zelle siehe Abb.4a), wodurch die Zahl der möglichen Modelle beschränkt wird. Der Raum E wird dann gebildet durch alle möglichen Kombinationen dieser fünf Leitwerte.

Ziel ist es, durch die Verarbeitung der Information, die in den Observablen enthalten ist, das a priori-Wissen zu aktualisieren und für jede Zelle eine a posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erhalten (mögliches Ergebnis für eine bestimmte Zelle siehe Abb.4b).

Für die Abstandsfunktion sieht man die elektromagnetischen Observablen als Zufallsvariablen an, die gaußverteilt sind. Die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungen y , vorausgesetzt, daß der Parametervektor \mathbf{X} den Wert \mathbf{x} annimmt; beträgt dann:

$$f(y / \mathbf{X} = \mathbf{x}) = C \exp\{-\chi^2(\mathbf{x}, y)\} = C \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n_F} \frac{|y_i - [F(\mathbf{x})]_i|^2}{2\sigma_i^2}\right\} \quad (9)$$

mit n_F : Zahl der Beobachtungen.

Ausgehend von einem beliebigen Startvektor (Initialisierung, Beispiel siehe Abb.5a) wird für die erste Zelle ($l=1$) jeder mögliche Parameterwert ausprobiert, wobei die Leitwerte in den anderen Zellen konstant bleiben, und das direkte Problem M_L -mal (im Beispiel fünfmal) gelöst. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden nach

$$P(X_l = \theta_{l,i} / X_k = x_k, k \neq l; y) = \frac{\exp[-\chi^2(\mathbf{x}^{(l,i)}, y)]}{\sum_{j=1}^{M_l} \exp[-\chi^2(\mathbf{x}^{(l,j)}, y)]} \quad (10)$$

berechnet (vgl. Gleichung 6; Abb.6a). Sie dienen zur Ermittlung des neuen Wertes von X_l (im Beispiel: X_1) per Zufallsversuch (Abb.6b). Dieser Schritt wird in regelmäßiger Reihenfolge für jede Zelle des Inversionsbereichs wiederholt (Abb.5b), wobei die Übergangswahrscheinlichkeiten abgespeichert werden. Am Ende einer Iteration wurde für jede Zelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet und der Leitwert aktualisiert.

Diese Schleife wird N -mal wiederholt, die Menge aller Ergebnisse für den Parametervektor \mathbf{X} am Ende jeder vollständigen Iteration bilden dann die ergodische Markovkette $\mathbf{X}^{(v)}$ (Abb.5c zeigt $\mathbf{X}^{(1)}$). Indem der Mittelwert der N Wahrscheinlichkeitsverteilungen genommen wird, die man jeweils beim l -ten Schritt einer Iteration erhalten hat, läßt sich für jede Zelle l nach Gleichung 8 ein a posteriori-Gesetz empirisch berechnen, das gegen das invariante Gesetz der Kette für die l -te Komponente des Parametervektors \mathbf{X} strebt. Damit ist ein Kriterium für das Ende des Inversionsprozesses gegeben: Das Ziel der Inversion ist erreicht, sobald sich das a posteriori-Gesetz stabilisiert.

4 Synthetisches Beispiel

Zum Test des Programms und zur Veranschaulichung der Eigenschaften der Bayesschen Inversion mit Markovketten wird ein synthetisches Beispiel herangezogen. Der Einfachheit halber betrachten wir einen homogenen Halbraum mit einer dünnen Platte an der Oberfläche (Abb.7). Für einen 5x5-Bereich, der eine leitende Anomalie enthält, werden mit Hilfe des direkten Problems an jedem Mittelpunkt einer quadratischen Gitterzelle die z-Komponenten des normierten induzierten Magnetfeldes für vier verschiedene Dipolpositionen berechnet. (Abb.8). Diese Daten werden dann mit einem Rauschen von 1% unterlegt. Für die Inversion wird nur der Imaginärteil der Daten verwendet, da die numerische Genauigkeit, mit der er vom direkten Problem berechnet wird, besser ist als für den Realteil. Abb.9 zeigt die so erhaltenen synthetischen Observablen für die Dipolposition (1.25m, 10.5m).

Als a priori-Wissen wird eine logarithmische Skala von 80 gleichwahrscheinlichen, diskreten Leitwerten zwischen 0.05S und 2S vorgegeben. Das a priori-Gesetz, das nun durch die Inversion unter Verwendung der synthetischen Daten aktualisiert wird, entspricht damit qualitativ dem aus Abb.4a, nur daß hier natürlich jedem Wert eine a priori-Wahrscheinlichkeit von $g(x) = 1/80$ zugeordnet wird. Da die Startkonfiguration beliebig ist, wird ein Parametervektor ausgewählt, der für jede Zelle den normalen Leitwert τ_n annimmt.

Im Verlauf der Inversion zeigt der mittlere Fehler (Abb.10) für das aktuelle Modell ein für Markovketten typisches Phänomen. Zwar hängt nicht das Ergebnis der Inversion vom Startvektor ab, dafür kommt es aber für die ersten Iterationen zu einer sogenannten "Warm-Up"-Phase mit größeren Abweichungen. Daher vernachlässigt man im Beispiel bei der Berechnung der empirischen Mittel der Übergangswahrscheinlichkeiten die ersten 10 Iterationen (Abb.11). Danach befindet sich die Markovkette in einem stationären Zustand, und der mittlere Fehler oszilliert um einen Mittelwert herum. Das asymptotische Verhalten der Kette in Richtung der korrekten Lösung liegt also nicht etwa darin, daß eine Schranke für den Fehler unterschritten wird. Vielmehr kann die Inversion abgebrochen werden, sobald sich das empirisch berechnete a posteriori-Gesetz nicht mehr wesentlich ändert. Im Beispiel wurde das a posteriori-Gesetz auf Grundlage der Iterationen Nr.11-30 (Abb.12) berechnet - ein Vergleich mit den durchschnittlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Iterationen Nr.11-40 (Abb.13) ergab nur unwesentliche Abweichungen.

Abb.12 zeigt, daß sich die Mittelwerte bzw. die Maxima der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für alle Zellen recht genau den Sollwerten annähern, die durch durchgezogene helle Striche gekennzeichnet sind. Es ist darauf hinzuweisen, daß es sich dabei nach wie vor um diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen handelt. Der Eindruck kontinuierlicher Verteilungen entsteht nur durch die Dicke der Striche.

Bei einem Bayesschen Ansatz kann der Vergleich zwischen a priori- und a posteriori-Gesetz als Indiz dafür dienen, wieviel Information in den Daten enthalten ist. Hier liegt also durch die Verwendung von vier Dipolen und Meßwerten an jeder Stelle des heterogenen Bereichs ausreichend Information vor, um ein gutes Ergebnis zu erhalten. Versuche mit weniger Dipolen und entsprechend weniger Daten zeigen flachere a posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilungen und eine langsamere Konvergenz.

5 Ausblick

Mit synthetischen Beispielen wie dem gezeigten konnte bisher nachgewiesen werden, daß sich die Methode der Bayesschen Inversion mit Markovketten auf die Näherung der dünnen Platte für vertikale magnetische Dipole als künstliche Quellen anwenden läßt. Dabei sind die Dipolpositionen jeweils fest gewesen, und an jedem Mittelpunkt einer Gitterzelle lag eine Messung vor. Zur Umsetzung in die Praxis muß es möglich sein, die Inversion von Daten durchzuführen, die mit einer bewegten Quelle gewonnen wurden, und die an unregelmäßig verteilten Meßpunkten gemessenen Daten auszuwerten. Ersteres steht vor der Anwendung in der Hydrogeologie, letzteres wäre z.B. der Fall in der Planetenerkundung, stellt man sich eine Quelle auf einer Landeinheit vor und einen Empfänger auf einem Rover.

6 Literatur

- Grandis, H., 1994. Imagerie électromagnétique Bayésienne par la simulation d'une chaîne de Markov, *Doctorat d'Université, Université Paris VII*.
- Grandis, H., Menvielle, M. & Roussignol, M., 1998. Bayesian Inversion with Markov chains: the MT 1-D case, submitted to *Geophys. J. Int.*
- Menvielle, M. & Roussignol, M., 1995. Imagerie électromagnétique Bayésienne, *Comité National Français de Géodésie et de Géophysique, Rapport Quadriennal 1991-1994*, 177-190.
- Vasseur, G. & Weidelt, P., 1977. Bimodal electromagnetic induction in non-uniform thin sheets with an application to the northern Pyrenean induction anomaly, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **51**, 669-690.

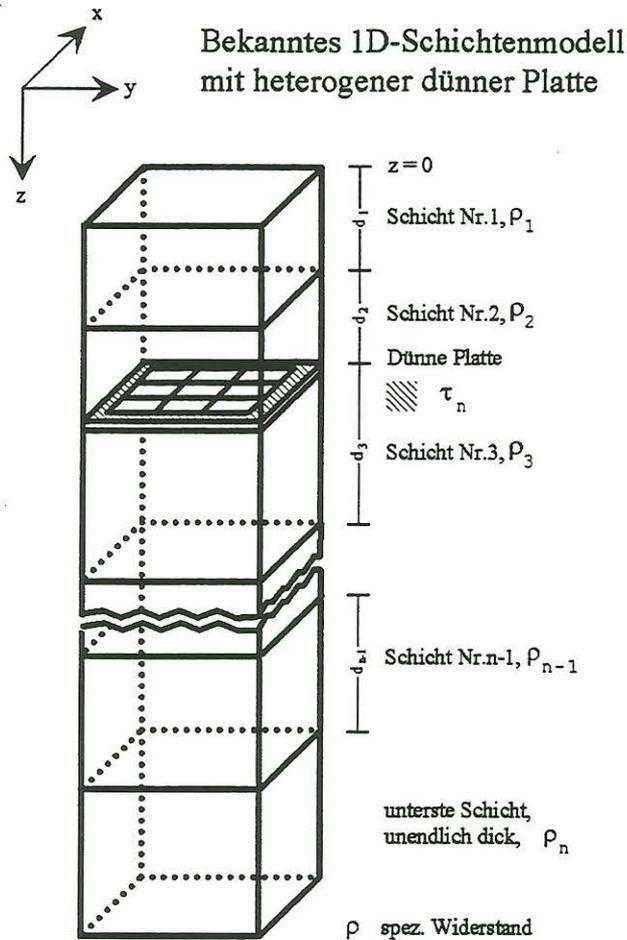


Abb.1

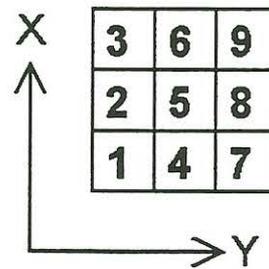


Abb.2 Reihenfolge der Leitwerte im Parametervektor X

- Initialisierung
- N sukzessive Iterationen über dem Inversionsgebiet
 - Regelmäßige Schleife über die Gitterzellen, $l = 1, \dots, L$
 - Für die aktuelle Gitterzelle Variation des Leitwerts -
 Schleife über alle durch das a priori Wissen vorgegebenen
 Leitwerte $\Theta_{l,j}$; $j = 1, \dots, M_l$
 - Lösung des direkten Problems und Berechnung der
 Abstandsfunktion
 - Bestimmung des neuen Leitwerts der Gitterzelle l per
 Zufallsversuch
 - Bestimmung des mittleren Fehlers am Ende einer Iteration

Abb.3 Algorithmus für Bayessche Inversion mit Markovketten

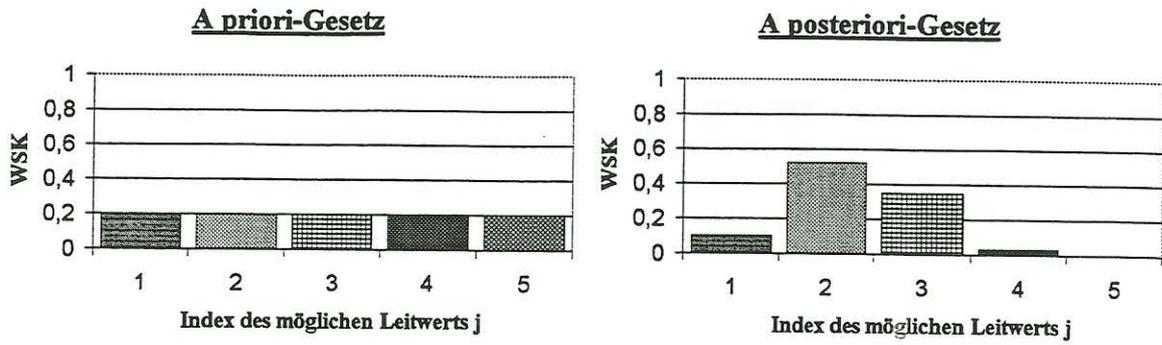


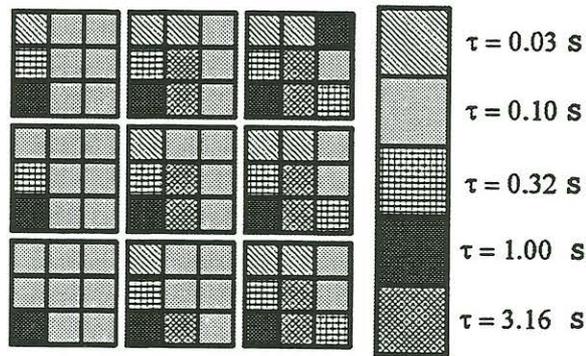
Abb.4 a

b

a) Startkonfiguration

3	6	9
2	5	8
1	4	7

b) Regelmäßige Schleife über alle Zellen



c) Ergebnis der ersten Iteration

3	6	9
2	5	8
1	4	7

Abb.5

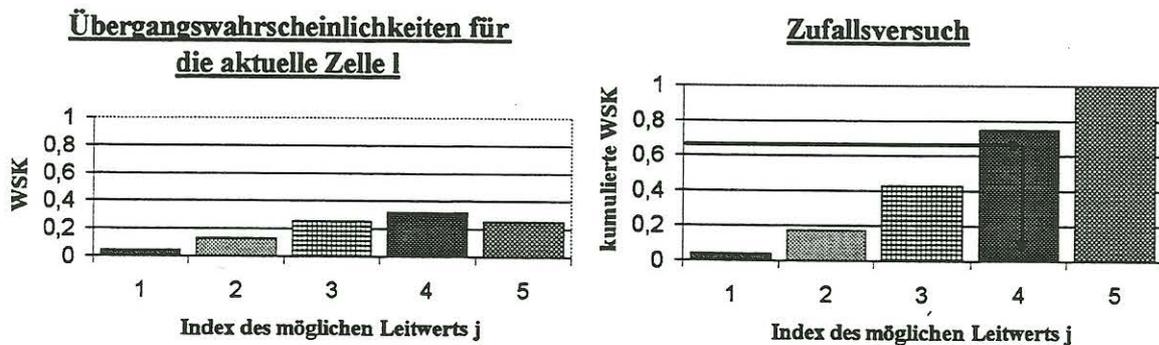


Abb.6 a

b

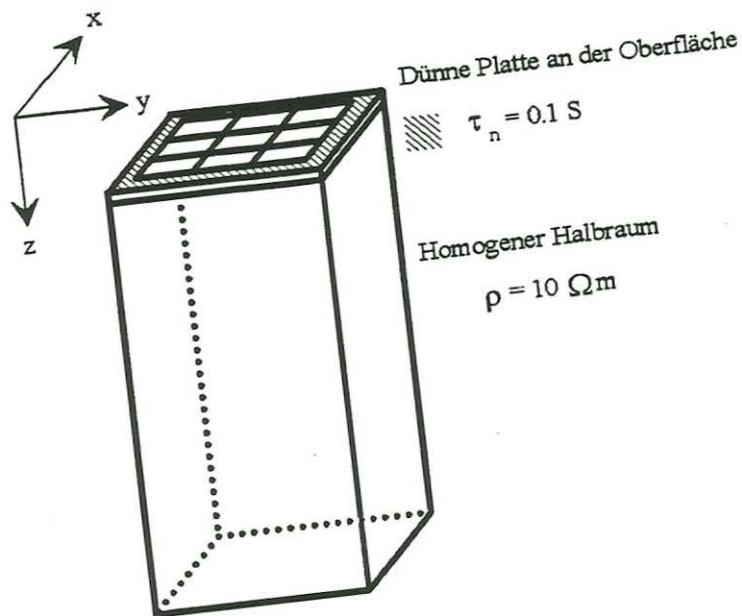


Abb.7

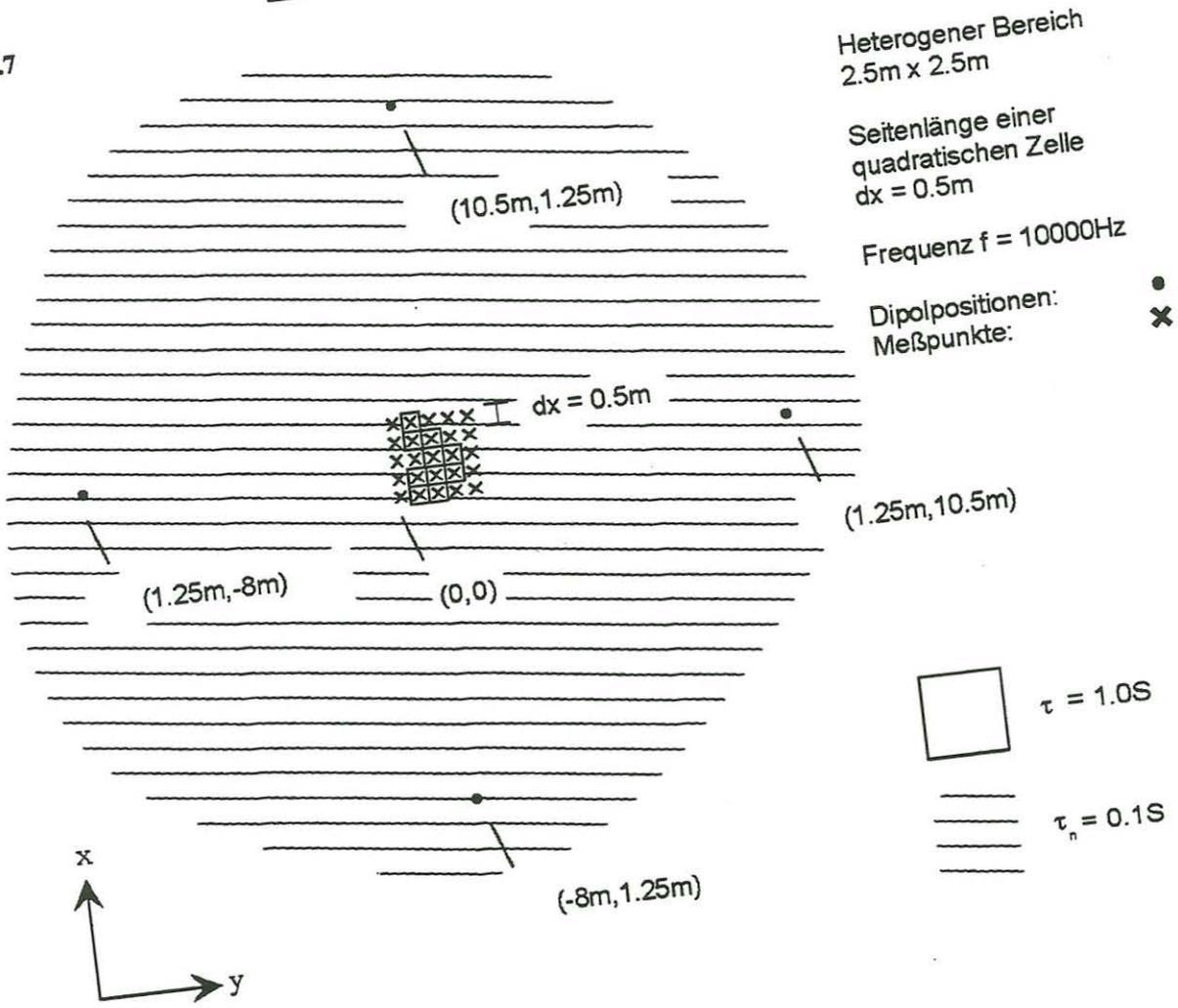


Abb.8

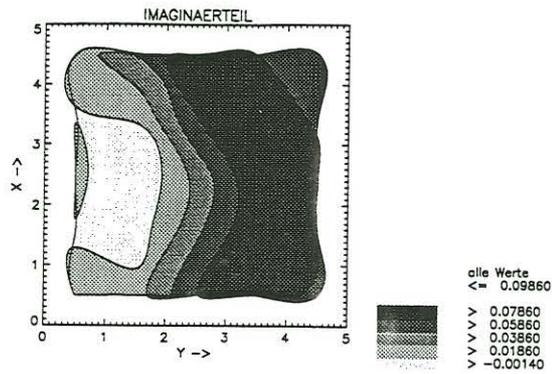


Abb.9: Normiertes induziertes Magnetfeld, 1% Rauschen

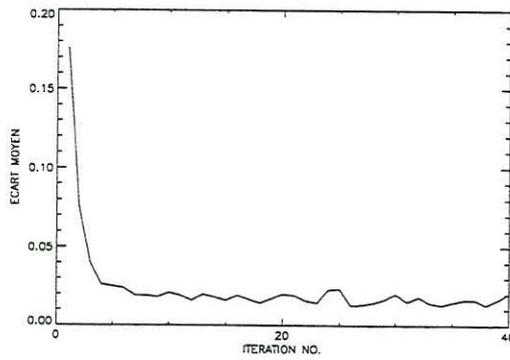


Abb.10: Mittlerer Fehler

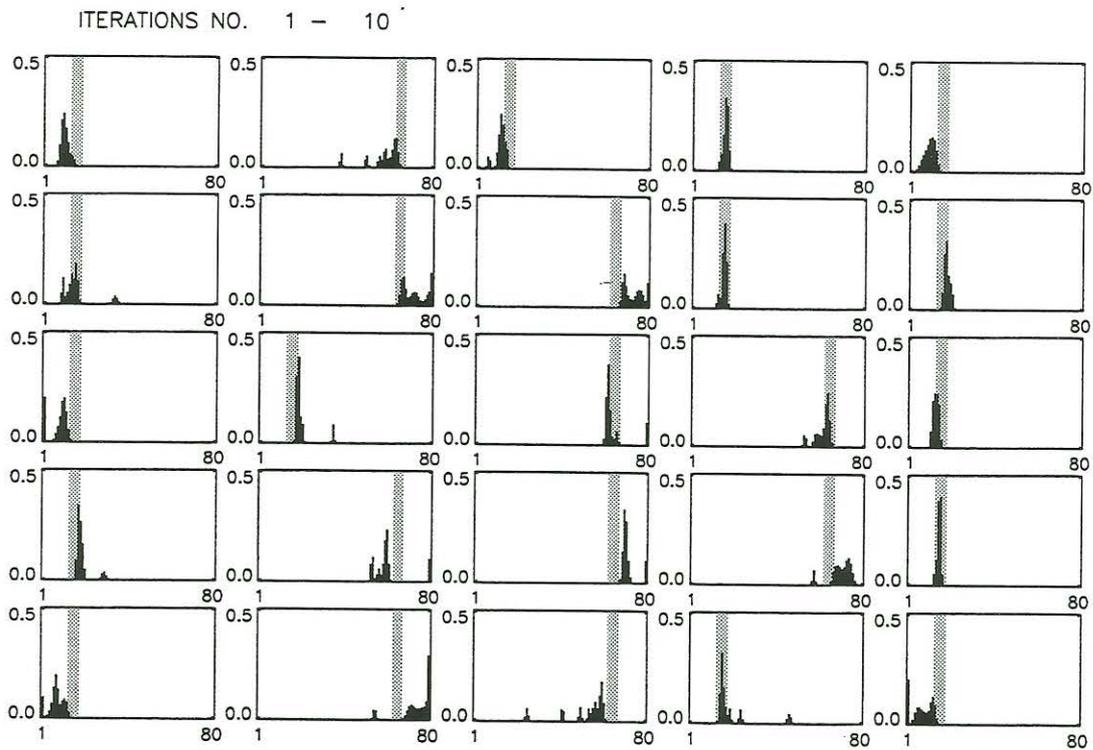


Abb.11: Mittelwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Leitwertindex (für eine logarithmische Skala mit 80 diskreten Werten)

ITERATIONS NO. 11 - 30

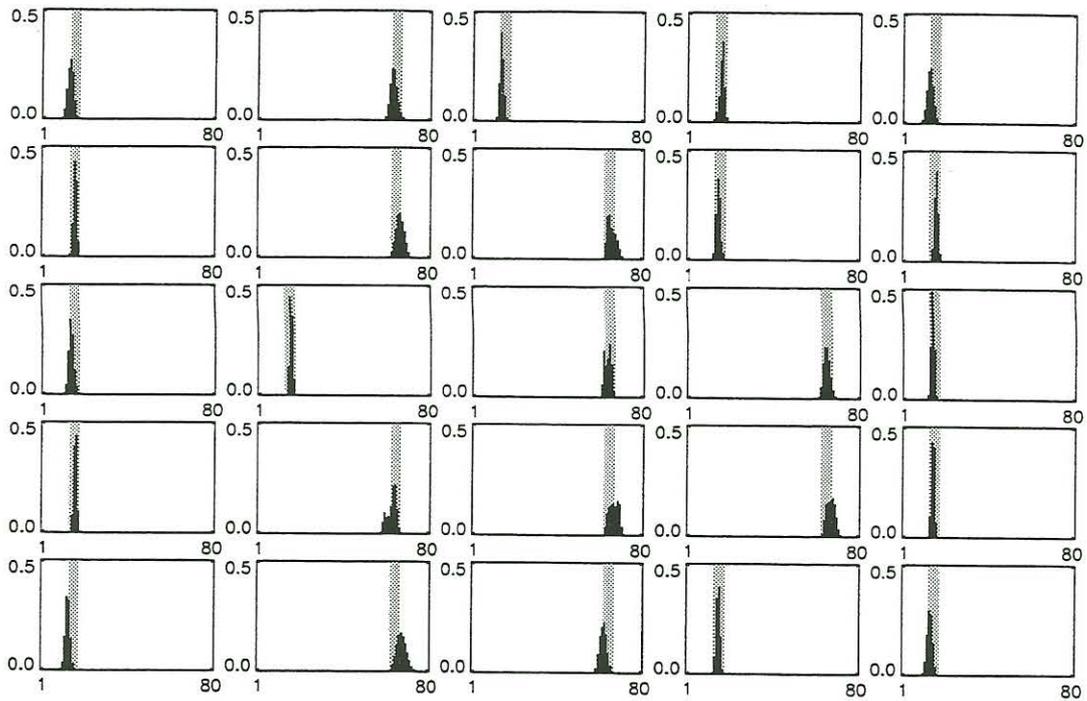


Abb.12: A posteriori-Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Leitwertindex
(für eine logarithmische Skala mit 80 diskreten Werten)

ITERATIONS NO. 11 - 40

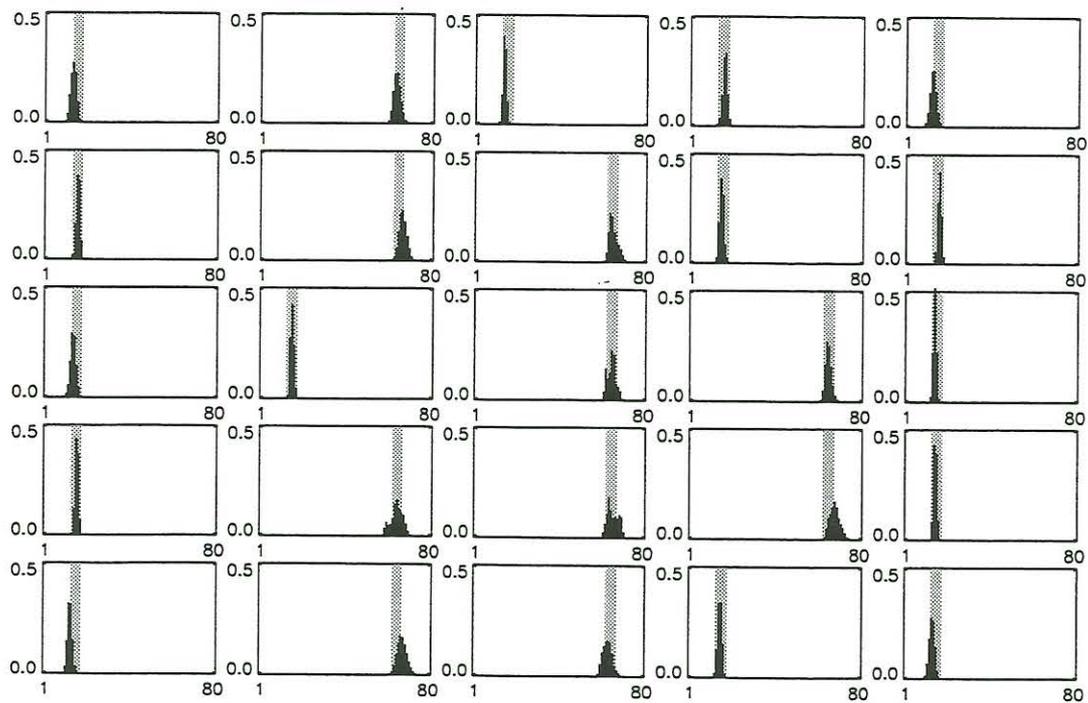


Abb.13: Mittelwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Leitwertindex
(für eine logarithmische Skala mit 80 diskreten Werten)