

# 3D-FD-Modellierung zur Berechnung des Tensors des scheinbaren spezifischen Widerstandes

R.-U. Börner, Th. Günther, R. Käppler (TU Bergakademie Freiberg)

email: rub@geophysik.tu-freiberg.de

## 1 Einleitung

In jüngster Vergangenheit ist eine gewisse Renaissance der Anwendung geoelektrischer Verfahren erkennbar, die ihre Ursache zumindest teilweise in der Verfügbarkeit von Algorithmen zur Modellierung von Leitfähigkeitsstrukturen findet. Darüberhinaus sind Ansätze zu beobachten, unter Nutzung von Multielektrodenanordnungen klassische Elektrodenaufstellungen durch problemangepasste Konfigurationen zu ersetzen.

Bereits 1979 wurde eine Finite-Differenzen-Methode zur geoelektrischen Modellierung von Leitfähigkeitsstrukturen vorgestellt (DEY und MORRISON 1979). Seither folgten nur wenige Publikationen; SPITZER und WURMSTICH gaben eine Zusammenstellung verschiedener Ansätze und weiterführende Referenzen (SPITZER 1995; SPITZER und WURMSTICH 1996).

Der hier vorgestellte Algorithmus basiert in seinen Grundzügen auf dem Diskretisierungsschema von DEY und MORRISON, wobei die dort verwendeten Randbedingungen modifiziert wurden (ZHANG et al. 1995).

Besonderer Wert wurde auf die Genauigkeit der Potentialberechnung im gesamten diskretisierten Gebiet gelegt, um bei äquidistanten Gittern beliebige Kartierungsvarianten realisieren zu können. Unter der Forderung, auch in Quellennähe eine akzeptable Genauigkeit zu schaffen, war es zusätzlich notwendig, Ansätze zur Singularitätenbeseitigung zu untersuchen (LOWRY et al. 1989).

Der Algorithmus wurde in C programmiert. Als Gleichungslöser gelangte die Methode der konjugierten Gradienten zur Anwendung (SKALICKY 1996).

## 2 Grundlagen

Die grundlegende partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der Potentialverteilung  $\varphi(x, y, z)$  in einem Medium der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma(x, y, z)$  bei Vorhandensein von Stromquellen  $I$  ist durch

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = -I \delta(x_s, y_s, z_s) \quad (1)$$

gegeben. Die Integration der Kontinuitätsgleichung (1) über Volumenelemente wird unter Beachtung des GAUSSSchen Satzes als Oberflächenintegral entlang der sechs Außenflächen  $S_{i,j,k}$  des Elementarvolumens

$$\iint_{S_{i,j,k}} \sigma(x, y, z) \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial n} dS_{i,j,k} = -I(x_s, y_s, z_s) \quad (2)$$

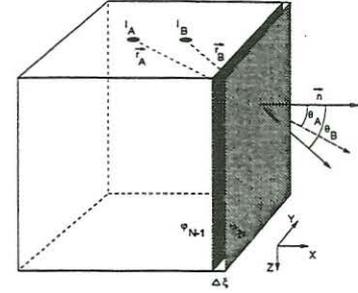
betrachtet. Von entscheidender Bedeutung für alle Verfahren der 3D-Vorwärtsmodellierung sind neben der Wahl geeigneter Diskretisierungsmethoden problemangepasste Randbedingungen. Die neben der NEUMANNschen ( $\partial \varphi / \partial n = 0$  an Erdoberfläche) meist verwendete DIRICHLETSche Randbedingung  $\varphi = 0$  liefert nur bei großem Abstand  $r$  zwischen Quelle und Randpunkt hinreichende Genauigkeit. DEY und MORRISON schlugen gemischte Randbedingungen vor, die das asymptotische Verhalten des Potentials

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\varphi}{r} \cos \theta = 0 \quad (3)$$

zugrunde legen ( $r$  und  $\theta$  sind Abstand zum geometrischen Mittelpunkt des Gebietes bzw. Winkel zwischen äußerer Flächennormale und Radiusvektor).

Eine weitere Verbesserung kann nach ZHANG durch die Berücksichtigung der exakten Quellpunktkoordinaten und Überlagerung der einzelnen Stromquellen erfolgen. Für den Fall einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung ergibt sich

$$\varphi_N = \varphi_{N-1} \left( 1 - \Delta\xi \sum_{i=1}^{ns} \frac{\cos \theta_i}{\frac{r_i^2}{I_i} \sum_{k=1}^{ns} \left( \frac{I_k}{r_k} \right)} \right) \quad (4)$$



Die Eliminierung der Quellensingularitäten (Deltafunktion in Gl. (1) an Stromquellen und -senken) gelingt durch den in LOWRY vorge-

stellten Ansatz  $\varphi = \varphi_p + \varphi_s$ . Durch Vorgabe einer primären Potentialverteilung  $\varphi_p$  (homogener oder geschichteter Halbraum) reduziert sich das Problem auf die Berechnung der sekundären Potentialverteilung  $\varphi_s$ , welche von den Abweichungen zur primären Leitfähigkeitsverteilung herrührt. Auf diese Weise wird eine wesentliche Verbesserung der Genauigkeit der Potentialbestimmung insbesondere in Quellennähe erzielt.

Ergebnis sind zwei Varianten des Programms: eine mit verbesserten Randbedingungen (ZHANG) und die andere mit beseitigten Singularitäten (LOWRY).

### Tensorgeoelektrik

Klassische Anordnungen der Geoelektrik beschränken sich häufig auf die Messung der Potentialdifferenz in Profilrichtung. Dabei wird der vektorielle Charakter des elektrischen Feldes nicht berücksichtigt. Die klassische Definition des skalaren scheinbaren spezifischen Widerstandes ist gegeben durch

$$\rho_s = \frac{|\vec{E}_{AB}|}{|\vec{j}_{AB}|} \quad (5)$$

Der Übergang zu zwei unterschiedlich orientierten Stromdipolen mit jeweils zwei zueinander orthogonalen Spannungsmessungen führt zur Definition des zweidimensionalen Tensors des scheinbaren spezifischen Widerstandes  $\tilde{\rho}$  (BIBBY und HOHMANN 1993; WINTER 1994)

$$\vec{E} = \tilde{\rho}_{ij} \vec{j} \quad (6)$$

mit

$$\tilde{\rho}_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{j}_{AB} \times \vec{j}_{A'B'}|} \begin{bmatrix} E_{11}j_{22} - E_{21}j_{12} & E_{21}j_{11} - E_{11}j_{21} \\ E_{12}j_{22} - E_{22}j_{12} & E_{22}j_{11} - E_{12}j_{21} \end{bmatrix} \quad (7)$$

und seinen Invarianten

$$P1 = \frac{1}{2} \text{Spur } \tilde{\rho} = \frac{1}{2} (\rho_{11} + \rho_{22}) \quad (8)$$

$$P2 = \sqrt{\det \tilde{\rho}} = (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{21}\rho_{12})^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$P3 = \frac{1}{2} (\rho_{21} - \rho_{12}). \quad (10)$$

### 3 Genauigkeit

Zunächst betrachten wir für ein 70x30x30 Zellen umfassendes Modell die prozentualen Fehler zwischen analytischer Lösung und Modellantwort für den homogenen Halbraum (s. Abb. 1). Wichtig ist, dass bei den ersten beiden Randbedingungen ein drei Zellen umfassender zusätzlicher Rand (Prolongationsfaktor 10) angefügt wurde, der bei der Zhang-Variante nicht mehr notwendig ist, wie die geringen Fehler zeigen.

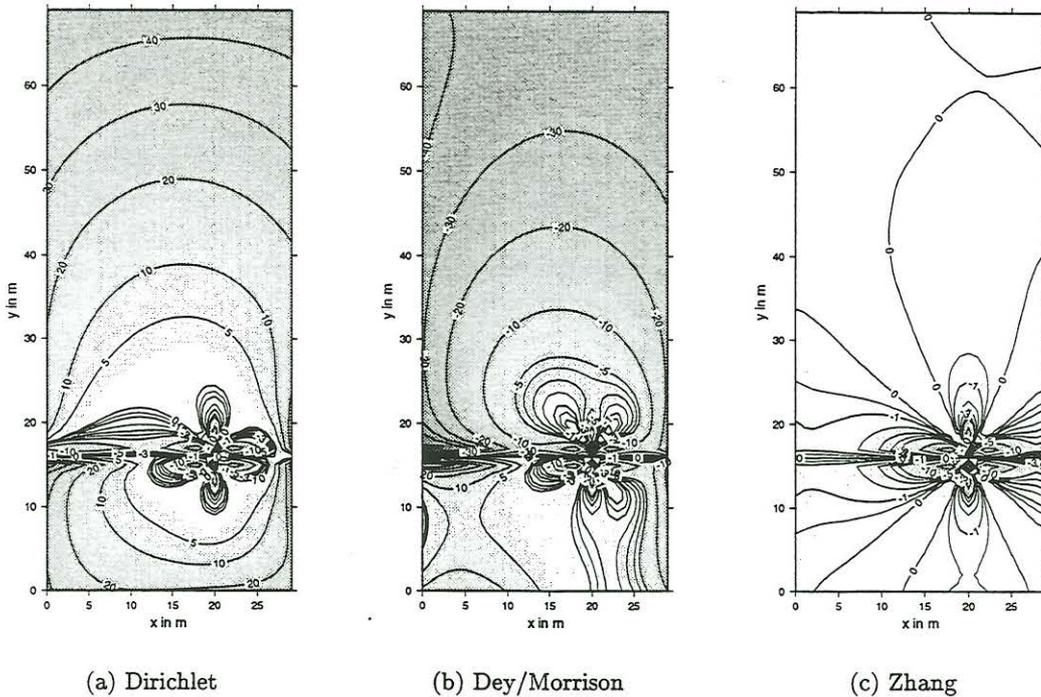


Abbildung 1: Genauigkeitsvergleich verschiedener Randbedingungen  $((\varphi_{anal} - \varphi_{num})/\varphi_{anal} \cdot 100\%)$

Bei der Anwendung der Lowry-Variante kann kein Fehler entstehen, weil für den trivialen Fall einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung kein Sekundärpotential auftritt.

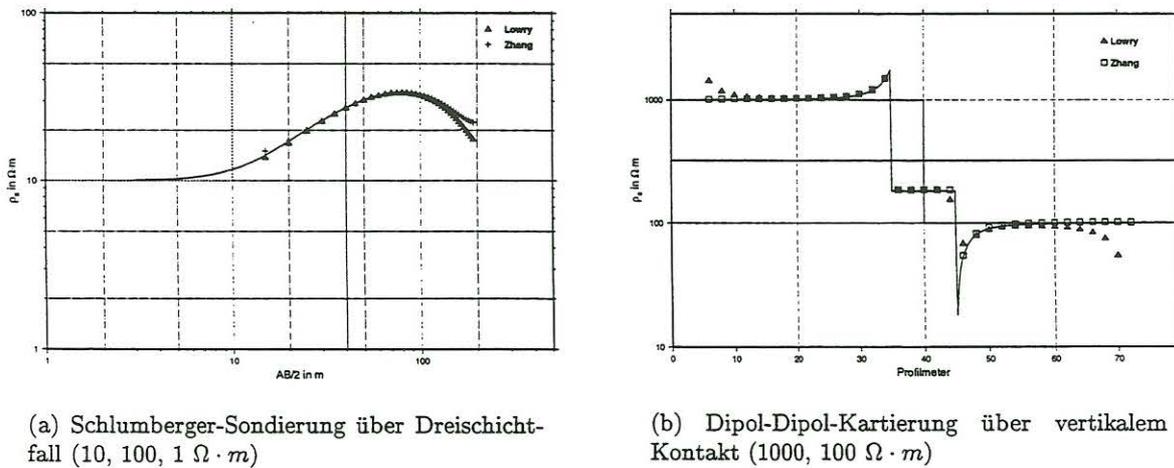


Abbildung 2: Vergleich mit semianalytisch lösbaren 1D-Modellen

Die in Abb. 2 vorgestellten 1D-Modelle zeigen deutliche Abweichungen. Aufgrund der vertikalen Kontraste im Mehrschichtfall ist die in Gl. (3) für die Randbedingungen getroffene Annahme homogener Leitfähigkeitsverhältnisse nicht mehr gültig. Für den vertikalen Kontakt arbeitet die Zhang-Variante genauer, weil zwischen Strom- und Spannungsdipol keine Widerstandsänderungen auftreten. Bei der Lowry-Variante zeigt sich dagegen die starke Abhängigkeit von der Wahl des mittleren spezifischen Widerstands  $\bar{\rho}$  zur Berechnung des Primärpotentials. Das führt dazu, dass beim vertikalen Kontakt an den Rändern zusätzliche Kontraste (bezüglich  $\bar{\rho} = 250 \Omega \cdot m$ ) entstehen, die das Ergebnis mehr oder weniger stark verfälschen. Durch die Wahl eines geeigneten  $\bar{\rho}$  werden jedoch für Modelle mit geringen horizontalen Kontrasten (z.B. auch am Mehrschichtfall) sehr gute Ergebnisse erreicht.

## 4 Beispiele

An wenigen Beispielen soll die Anwendung des vorgestellten Programms (Lowry-Variante) für 2D- und 3D-Strukturen demonstriert werden. Es wurde vor allem die Zielstellung verfolgt, aus den berechneten Potentialverteilungen den Tensor des scheinbaren spezifischen Widerstandes  $\bar{\rho}_s$  abzuleiten und seinen Informationsgehalt im Vergleich zum herkömmlichen skalaren  $\rho_s$  zu untersuchen.

### Dipol-Dipol-Kartierung

Senkrecht zu einem gutleitenden Gang ( $100 \Omega \cdot m$  in  $1000 \Omega \cdot m$  Hintergrund) mit  $2 \times 2$  m Querschnitt und einer Oberkantentiefe von 2 m wurde eine Dipol-Dipol-Pseudosektion berechnet (s. Abb. 3). Das Modell bestand aus  $80 \times 30 \times 25$  Zellen mit einer einheitlichen Kantenlänge von 1 m. Bei der Profillänge von 80 m und maximaler Separation von  $n = 10$  ergab sich mit einem Dipolabstand von  $a = 2$  m eine Gesamtzahl von 35 Vorwärtsrechnungen. Ein Pentium Prozessor mit 200 MHz Taktfrequenz benötigt pro Vorwärtsschritt ca. 13 s.

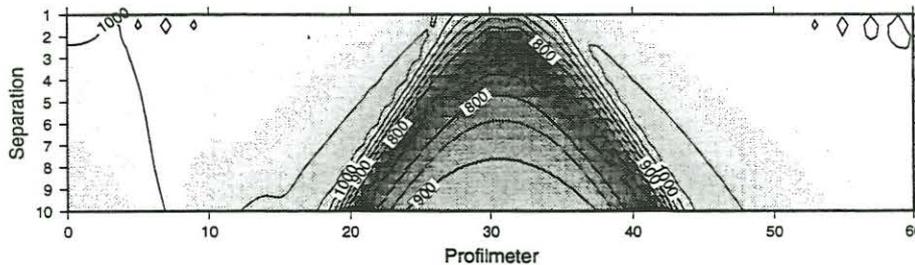


Abbildung 3: Gang: Pseudoschnitt der Dipolkartierung

Mit einer nachfolgenden 2D-Inversion nach LOKE und BARKER (1996) soll weniger die Invertierbarkeit des Pseudoschnittes gezeigt werden. Vielmehr können wertvolle Erkenntnisse aus dem Inversionsverhalten für bekannte Modellsituationen erlangt werden.

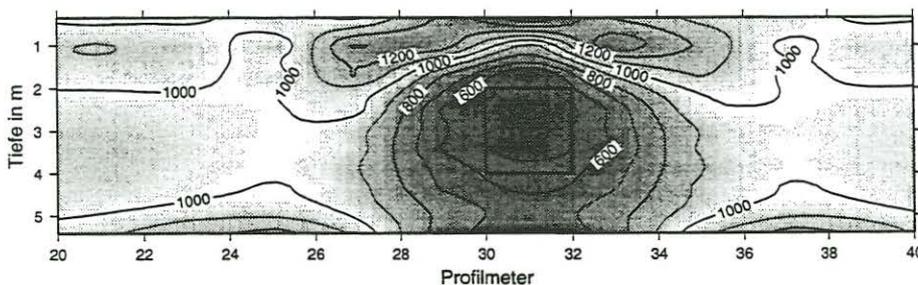
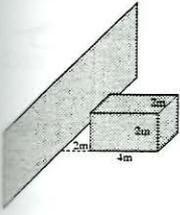


Abbildung 4: Gang: Inversionsergebnis der Dipolkartierung

## Tensor-Dipol-Dipol-Kartierung



Das folgende Beispiel stellt eine dreidimensionale Modellsituation dar, in der ein quaderförmiger Körper ( $2 \times 2 \times 4$  m) mit erhöhter Leitfähigkeit ( $100 \Omega \cdot m$ ) in einem hochohmigen ( $1000 \Omega \cdot m$ ) Hintergrund eingebettet ist, jedoch von der Profillinie um 2 m verfehlt wird. Dies könnte ein zu lokalisierendes oder aber ein störendes Objekt sein. Zusätzlich zur herkömmlichen kommt eine modifizierte Dipol-Dipol-Aufstellung zur Anwendung, die darauf beruht, dass neben den radialen Anteilen noch tangentielle Komponenten des elektrischen Feldes gemessen werden. Zur vollständigen Erfassung des Widerstandstensors werden für zwei zueinander senkrechte Stromeinspeisungen jeweils zwei orthogonale Spannungen gemessen.

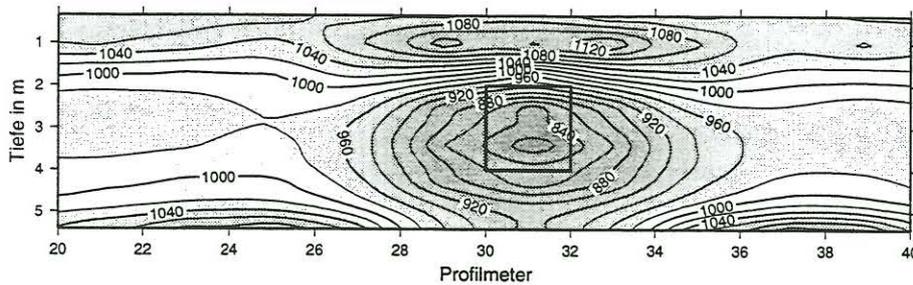


Abbildung 5: Lateraler Block: Inversionsergebnis der Dipolkartierung

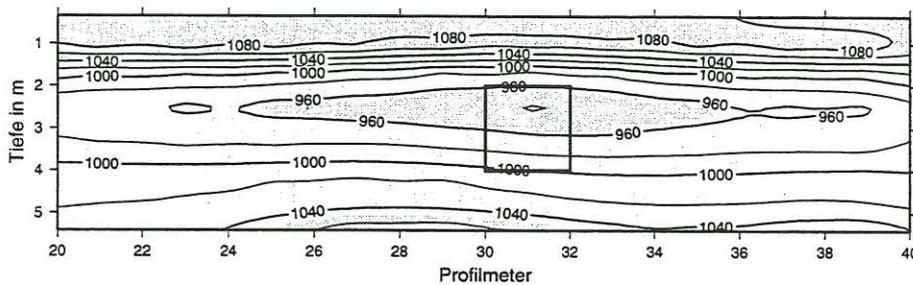


Abbildung 6: Lateraler Block: Inversionsergebnis der Tensorkartierung (P2)

Zum Vergleich beider Kartierungsvarianten wurden die Datensätze des scheinbaren spezifischen Widerstandes (Abb. 5) bzw. der Invarianten P2 (Abb. 6) invertiert. Die Ergebnisse zeigen anschaulich, dass die Berücksichtigung zusätzlicher Komponenten des elektrischen Feldes eine erhebliche Verbesserung der Interpretierbarkeit mit sich bringt. Während die Dipolkartierung den Körper als 2D-Objekt lokalisiert, "erkennt" die Tensorinvariante, was sich wirklich unter dem Profil befindet, nämlich nichts. Somit werden einzelne Profile repräsentativ für die darunterliegenden Widerstandsverhältnisse und schließen Lateraleffekte aus. Die Herkunft dieser Effekte kann mit Hilfe der Invarianten P3 geklärt werden - die Vorzeichenverhältnisse sind indikativ für die Lage des Störkörpers bezüglich des Profils (s. Abb. 7).

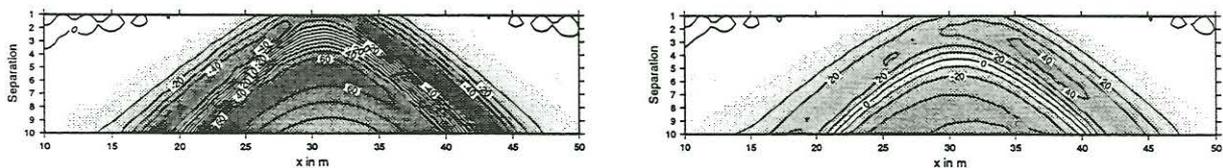


Abbildung 7: Invariante P3 - Profil links bzw. rechts neben dem Störkörper

## Komplexmodell

Schließlich betrachten wir ein komplexes Modell: In einem Hintergrund von  $500 \Omega \cdot m$ , der eine 1 m mächtige Bedeckung von  $200 \Omega \cdot m$  aufweist, befinden sich ein tieferreichender, gutleitender ( $100 \Omega \cdot m$ ) und ein L-förmiger, schlechtleitender ( $2000 \Omega \cdot m$ ) Störkörper.

Die Oberflächenkartierung wurde nach BIBBY und HOHMANN implementiert: Am Rand (40;40) des  $50 \times 50 \times 25$  m großen Modells wird an zwei unterschiedlich orientierten, ortsfesten Stromdipolen eingespeist und jeweils in zwei senkrechten Richtungen die Spannung flächenhaft kartiert.

Bereits BIBBY und HOHMANN (1993) wiesen darauf hin, dass der Verzicht auf den vollständigen Tensor, z.B. durch Reduzierung auf nur einen Stromdipol, in erheblichen Scheinanomalien im Messbild resultiert, die letztlich auf die Orientierung des Speisedipols zurückzuführen sind. Abbildung 8 zeigt anschaulich die verbesserte flächenhafte Projektion der Störkörperkonturen auf die Erdoberfläche. Der scheinbare Widerstandstensor lässt sich anschaulich in Ellipsenform darstellen. Die Lage der Ellipsen betont Störkörperkontraste auf charakteristische Weise.

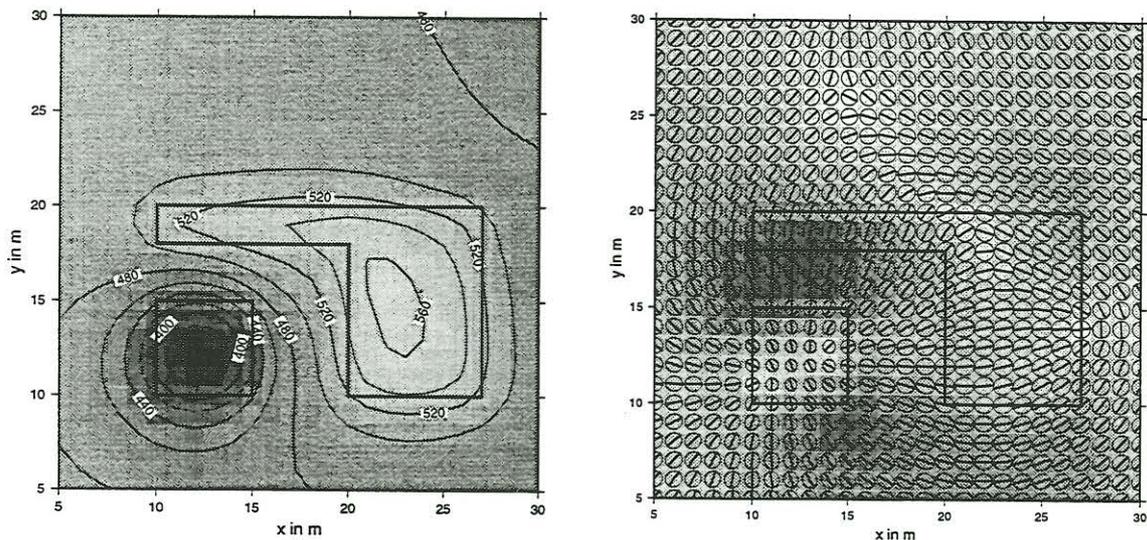
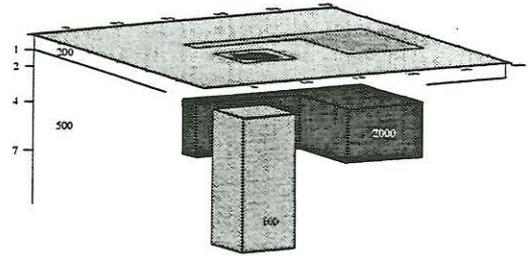


Abbildung 8: Invariante P2 und Ellipsendarstellung des scheinbaren Widerstandstensors

## 5 Zusammenfassung

- Ergebnis ist ein Programm, welches in zwei Varianten (durch den Einsatz verbesserter Randbedingungen bzw. durch die Entfernung der Quellensingularitäten) die Modellierung der Potentialverteilung beliebiger 3D-Strukturen mit einer sehr hohen Genauigkeit gewährleistet.
- Die Auswahl der Programmvariante sollte dabei auf die Modellklasse abgestimmt sein.
- Auf dieser Grundlage können verschiedenste geoelektrische Anordnungen und Verfahren problemlos implementiert werden.
- Insbesondere der richtungssensitive Widerstandstensor bringt in einigen Anwendungsgebieten erhöhten Informationsgewinn.
- Aufgrund ihrer hohen Genauigkeit und Geschwindigkeit bietet sich die Einbindung der Modellierung als Vorwärtsschritt in ein Inversionsschema an.

## Literatur

- BIBBY, H. M. und G. W. HOHMANN (1993). *Three-dimensional interpretation of multiple source bipole-dipole resistivity data using the apparent resistivity tensor*. Geophys. Prosp., 41(6):697–723.
- DEY, A. und H. F. MORRISON (1979). *Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures*. Geophysics, 44(4):753–780.
- GÜNTHER, TH. (1998). *Modellstudien zur Tensorgeoelektrik*. Unveröffentlichte Studienarbeit, Institut für Geophysik, TU Bergakademie Freiberg.
- LOKE, M.H. und R. BARKER (1996). *Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-Newton method*. Geophys. Prosp., 44:131–152.
- LOWRY, T., M. B. ALLEN und P. N. SHIVE (1989). *Singularity removal: A refinement of resistivity modeling techniques*. Geophysics, 54(6):766–774.
- SKALICKY, T. (1996). *LASPack reference manual*. <http://www.math.tu-dresden.de/~skalicky/laspack>.
- SPITZER, K. (1995). *A 3-D finite-difference algorithm for DC resistivity modelling using conjugate gradient methods*. Geophys. J. Int., 123:903–914.
- SPITZER, K. und B. WURMSTICH (1996). *Speed and Accuracy in 3D Resistivity Modeling*. In: BAHR, K. und A. JUNGE, Hrsg.: *Protokoll 16. Kolloquium "Elektromagnetische Tiefenforschung"*, S. 228–240, Burg Ludwigstein.
- WINTER, H. (1994). *Tensor-Geoelektrik an der kontinentalen Tiefbohrung*. Doktorarbeit, Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Frankfurt am Main.
- ZHANG, J., R. L. MACKIE und T. R. MADDEN (1995). *3-D resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients*. Geophysics, 60(5):1313–1325.