

Bestimmung von Porosität und Permeabilität aus Bohrlochmessungen der induzierten Polarisation (IP) oder der nuklearmagnetischen Resonanz (NMR) auf der Grundlage einer fraktalen Porenraumgeometrie - Teil 2: Elektrische Ersatzschaltbilder und IP-Anwendungsbeispiel

Hansgeorg Pape¹, Grinat², M. & Christoph Clauser²

¹Geodynamik, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Nussallee 8, D-53115 Bonn

²Geowissenschaftliche Gemeinschaftsaufgaben (GGA), Stilleweg 2, D-30655 Hannover

Kurzfassung

Bei der induzierten Polarisation (IP) im Zeitbereich und bei der nuklearmagnetischen Resonanz (NMR) beruht das Relaxationsverhalten der Meßgröße nicht nur auf elektrischen bzw. magnetischen Prozessen, sondern auch auf der Diffusion in einem Porenraum mit komplizierter Geometrie. Im Sinne einer vereinfachten mathematischen Beschreibung werden die verschiedenen physikalischen Einflußgrößen in die beiden Gruppen elastische Glieder und Reibungsglieder eingeteilt. Damit wird ein elektrischer Ersatzschaltkreis entworfen, für den eine Verteilung von Relaxationszeiten berechnet werden kann. Das elektrische Ersatzmodell wurde in der Weise aufgestellt, daß ein Zusammenhang zwischen Widerständen und Kondensatoren einerseits und Teilvolumina eines fraktalen Porenraummodells andererseits besteht. Für dieses Porenraummodell gelten die petrophysikalischen Zusammenhänge, die im Teil 1 vorgestellt sind. Auf diese Weise läßt sich aus der Verteilung der Relaxationszeiten die fraktale Dimension des Porenraums, die Porosität und schließlich die Permeabilität bestimmen.

Die IP-Untersuchungen wurden an der ultratiefen Bohrung KTB-Oberpfalz HB des Kontinentalen Tiefbohrprogramms der Bundesrepublik Deutschland (KTB) durchgeführt und beziehen sich auf kristalline Gesteine mit Rißporosität.

Abstract

The relaxation of the measured property in induced polarization (IP) and in nuclear magnetic resonance (NMR) is not exclusively based on electrical or magnetic processes, but also on diffusion inside a complicated pore space. In order to simplify the evaluation method, different physical properties are classified as elastic term or as frictional term. These terms build up an electrical equivalent circuit, for which the distribution of relaxation times can be calculated. This equivalent circuit has been established in such a way, that resistors and capacitors can be attributed to partial volumes of a fractal pore space model. Several petrophysical relationships which are valid for this model of porous rocks are stated in part 1. On this base it is possible to calculate fractal dimension, porosity and permeability from relaxation curves.

The evaluated IP-logs were measured in the ultradeep borehole KTB-Oberpfalz HB of the German Continental Drilling Program (KTB), where microfissured basement rocks were penetrated.

Einleitung

Bei der induzierten Polarisation (IP) im Zeitbereich wird eine Relaxationskurve der Polarisationsspannung gemessen, bei der nuklearmagnetischen Resonanz (NMR) das Abklingverhalten der Magnetisierung. Obwohl es sich zunächst um grundverschiedene Prozesse handelt, werden viele Gemeinsamkeiten deutlich, wenn die Einzelprozesse für die mathematische Behandlung so verallgemeinert betrachtet werden, daß sie entweder als elastischer Prozeß oder als Reibungsprozeß einzustufen

sind. Außer elektrischen und magnetischen Prozessen spielt bei IP und NMR die Diffusion eine wichtige Rolle. Diese liefert einen Beitrag zu den Reibungsprozessen. Mit Hilfe der elastischen Terme und der Reibungsterme, die als Kondensatoren bzw. Widerstände dargestellt werden, kann ein elektrischer Ersatzschaltkreis aufgestellt werden, mit dem sich die verschiedenen physikalischen Prozesse einheitlich beschreiben lassen.

Für die betrachteten physikalischen Teilprozesse spielen die geometrischen Verhältnisse eine große Rolle, so daß sich das zugrunde gelegte geometrische Porenraummodell in der Konstruktion des elektrischen Ersatzschaltbildes widerspiegelt. In Teil 1 wurde als einfaches Beispiel die Debye-Relaxation in einem Kapillarmodell mit einheitlichem Porenradius vorgeführt. Im folgenden sollen kompliziertere Schaltbilder entwickelt werden, die zu dem in Teil 1 erklärten, fraktalen Porenraummodell passen. Ein wesentliches Merkmal dieser Schaltbilder ist die Selbstähnlichkeit, die sich in einem kaskadenhaften Aufbau und in konstanten Verhältnissen der Größen von Widerständen und Kapazitäten zeigt.

Wir beginnen mit der Modellierung der IP-Relaxation. Das resultierende Ersatzschaltbild kann in abgewandelter Form auch für die Interpretation von NMR-Relaxationskurven verwendet werden. Als Ergebnis der Auswertung der IP-Abklingkurven erhalten wir zunächst zwei Parameter, den Abklingexponenten m und die Grenzrelaxationszeit τ_{\max} . Danach wird gezeigt, wie die elektrischen Größen mit geometrischen Größen verknüpft werden können. Dieser Auswerteschritt führt zur fraktalen Dimension D und zur Porosität ϕ . Schließlich wird die Permeabilität k mit Hilfe einer Permeabilitäts-Porositäts-Beziehung bestimmt.

Modellierung der IP-Relaxation

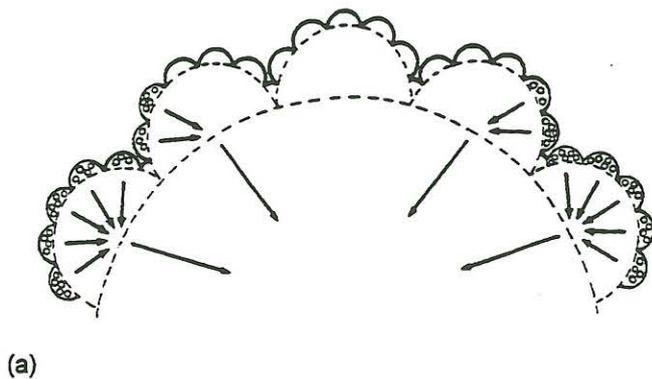
Die folgende mathematische Beschreibung der IP-Relaxationskurven auf der Basis eines fraktalen Porenraummodells stützt sich auf Pape et al. (1996) und Vogelsang et al. (1992), wobei einige Erweiterungen hinzukommen.

Bei der Meßanordnung der IP gelten zunächst dieselben Verhältnisse wie bei der Gleichstromgeoelektrik. Durch zwei Stromelektroden wird im umgebenden Gestein ein elektrischer Gleichstrom erzeugt. Aus der Stromstärke I und der Primärspannung V_p läßt sich unter Berücksichtigung eines nur von den Abständen zwischen den Elektroden abhängigen Geometriefaktors K der scheinbare spezifische elektrische Widerstand ρ_a ermitteln:

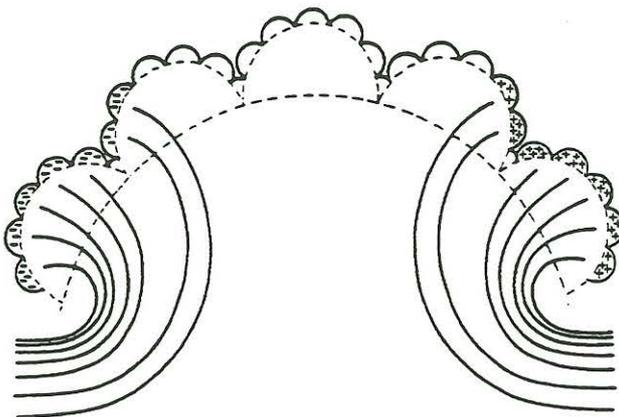
$$\rho_a = K (V_p / I) \quad (1)$$

Während des Gleichstromflusses bauen sich im Gestein an bestimmten Stellen in der Nähe der Porenwand Ladungswolken aus positiv bzw. negativ geladenen Ionenwolken auf. Nach dem Abschalten des Gleichstroms geht die Potentialdifferenz an den Potentialelektroden nicht sofort auf Null zurück, sondern fällt zunächst auf einen Bruchteil der Primärspannung ab, um anschließend in Form einer Abklingkurve gegen den Endwert Null zu laufen. Dieses Verhalten läßt sich durch die Polarisierung des Gesteins und das allmähliche Entladen der Ionenwolken erklären. Die Expansion der Ionenwolken beruht sowohl auf der Potentialdifferenz zwischen Anionen- und Kationenwolken als auch auf dem osmotischen Druck. Dadurch wird ein Prozeß der elektrolytischen Stromleitung und ein Diffusionsprozeß in Gang gesetzt. In Abb. 1 ist dargestellt, wie man sich beide Prozesse in dem fraktalen Porenraum des in Teil 1 beschriebenen „Pigeon hole“-Modells von Pape et al. (1987) vorstellen kann.

Zu Beginn des Relaxationsprozesses ist die Diffusion der beherrschende Vorgang. Deshalb soll dieser Prozeß zunächst isoliert betrachtet werden. Das Ergebnis liefert dann eine Asymptote für den Anfangsteil der gemessenen Abklingkurven. Der Diffusionsprozeß kann durch das in Abb. 2a dargestellte Ersatzschaltbild modelliert werden. Es besteht aus einer Kaskade von Kapazitäten, die durch Widerstände verbunden sind. Ein ähnlicher Schaltkreis wurde von Liu (1985) für die Polarisation einer Elektrode mit fraktaler Oberflächenstruktur entworfen. Die Ergebnisse von Liu, die das sogenannte „Constant phase angle“-Element betreffen, können später übernommen werden.



(a)



(b)

Abb. 1: Zwei Prozesse der Relaxation von Ionenwolken in einem fraktalen Porenraum:

- a) Expansion der Ionenwolken durch Diffusion
- b) Entladung durch elektrolytische Stromleitung

Aus der Selbstähnlichkeit des fraktalen geometrischen Modells ergibt sich als wesentliche Vereinfachung, daß die Widerstands- (R -) und die Kapazitäts- (C -) Glieder durch ein Potenzgesetz miteinander verknüpft sind:

$$C_i/C_1 = (R_i/R_1)^q. \quad (2)$$

Da die C_i und die R_i selbst von geometrischen Parametern abhängen, besteht eine Beziehung zwischen q und der fraktalen Dimension des geometrischen Modells, auf die später näher eingegangen werden soll. Zunächst sei erklärt, daß C_1 und R_1 den feinsten Porenraumstrukturen direkt an der Porenwand zugeordnet sind und höhere Indizes die übergeordneten Strukturen in Richtung auf das Poreninnere bezeichnen.

Für die Diffusion besteht das lineare elastische Gesetz wie bei der NMR (siehe Teil 1) aus der Gleichung für den osmotischen Druck p :

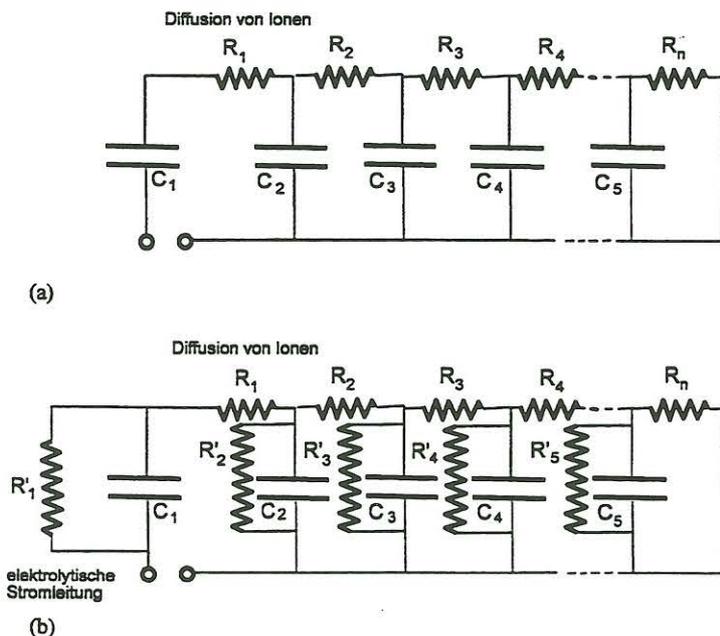
$$p/(RT) = V^{-1} n, \quad (3)$$

mit der Gaskonstanten R , der absoluten Temperatur T , der Molzahl n der Ionen und dem Volumen V .

Dieser Gleichung entspricht im elektrischen Analogon:

$$U = C^{-1} Q, \quad (4)$$

mit der Spannung U und der Ladung Q .



(a)

(b)

Abb. 2: Elektrische Ersatzschaltkreise für die induzierte Polarisierung (IP)

a) Getrennte Beschreibung des Diffusionsprozesses durch eine Kaskade von Kapazitäten, die durch Widerstände verbunden sind. Hierdurch wird die Warburg-Impedanz bzw. das „Constant phase angle element“ (CPA-Element) dargestellt.

b) Der aus elektrolytischer Stromleitung und Diffusion bestehende Gesamtprozess wird durch eine Kaskade von RC-Gliedern, die durch Widerstände verbunden sind, beschrieben.

Der Reibungsprozeß der Diffusion wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$dn/dt = D_{diff} (S / \Delta x) \Delta p / (R T), \quad (5)$$

mit dem Diffusionskoeffizienten D_{diff} , der Transportlänge Δx und der Querschnittsfläche S . Das elektrische Analogon dazu ist die Gleichung für die Stromstärke I :

$$dQ/dt = I = R^{-1} U. \quad (6)$$

Das Ersatzschaltbild der Abb. 2a beschreibt stellvertretend durch elektrische Größen der Gleichungen (4) und (6) die diffusionsbedingte Konzentrations-Abnahme von sogenannten Überschütionen, d.h. von Ionen, die von ihren Gegenionen getrennt sind. Wir rechnen bei der Auswertung der Relaxationskurven mit elektrischen Größen. Dabei vertritt R^{-1} den Ausdruck $D (S / \Delta x)$, und C steht an Stelle von V . Dieser Zusammenhang ist später von Wichtigkeit, wenn die Abhängigkeit dieser Größen von Länge und Querschnittsfläche der Volumenelemente des geometrischen Modells betrachtet wird. Daß die Relaxationskurve im Experiment durch Spannungsmessungen aufgenommen wird, steht der Betrachtung als Diffusionprozeß nicht entgegen, da die Überschüßkonzentration der Ladung und damit der Spannung eines Kondensators proportional ist.

Die Gleichungen (4) und (6) gelten für die einzelnen C - und R -Glieder der komplexen Schaltung von Abb. 2a. Außerdem ist die Summe der Ströme an den Knotenpunkten gleich Null. Damit läßt sich in folgender Weise ein Gleichungssystem für die Spannungen U_i an den Kondensatoren C_i und die zeitlichen Ableitungen dU_i/dt aufstellen:

$$\begin{aligned} C_1 dU_1/dt &= R_1^{-1} (U_1 - U_2) \\ C_i dU_i/dt &= -R_{i-1}^{-1} (U_{i-1} - U_i) + R_i^{-1} (U_i - U_{i+1}) \\ C_n dU_n/dt &= -R_{n-1}^{-1} (U_{n-1} - U_n) + R_n^{-1} U_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Dieses läßt sich umformen durch geeignetes Addieren der Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_1 dU_1/dt &= R_1^{-1} (U_1 - U_2) \\ \sum_{j=1}^i C_j dU_j/dt &= R_i^{-1} (U_i - U_{i+1}) \\ \sum_{j=1}^n C_j dU_j/dt &= R_n^{-1} U_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Nachdem die Widerstandsterme auf die linke Seite gebracht sind, ergibt sich durch weiteres Summieren das endgültige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=k}^n R_j \right) C_k dU_k/dt &= U_1 \\ \sum_{k=1}^{i-1} \left(\sum_{j=k}^n R_j \right) C_k dU_k/dt + \sum_{k=i}^n \left(\sum_{j=k}^n R_j \right) C_k dU_k/dt &= U_i \\ \sum_{k=1}^n R_n C_k dU_k/dt &= U_n \end{aligned} \quad (9)$$

Unter Benutzung von Gl. (2) reduzieren sich die Eingangsparameter auf C_1 , R_1 und q . Die numerische Lösung stellt die Abklingspannung $M(t)$ als Summe von Exponentialtermen mit den Re-

laxationszeiten τ_i dar:

$$M(t) = U_1(t) = \sum_{i=1}^n a_i \exp(-t/\tau_i). \quad (10)$$

Die numerisch gewonnenen Abklingkurven für die diffusionsgesteuerte Relaxation der Abb. 2a lassen sich sehr genau durch eine Potenzfunktion mit dem Abklingexponenten $m < 1$ annähern:

$$M(t) \propto t^m. \quad (11)$$

Für eine solche Potenzfunktion gilt nach Mandelbrot (1987) folgende Integral-Darstellung:

$$M(t) = \int [H(\tau) \exp(-t/\tau)] d \ln \tau, \quad (12)$$

wobei $H(\tau)$ als Frequenzspektrum bezeichnet wird, das selbst eine Potenzfunktion ist:

$$H(\tau) \propto \tau^m. \quad (13)$$

Zur Umrechnung der numerisch bestimmten Vorfaktoren a_i arbeiten wir lieber mit der integralen Verteilungsfunktion $G(\tau)$ mit

$$G(\tau) = \int_0^{\tau} H(\tau) d \ln \tau / \int_0^{\infty} H(\tau) d \ln \tau. \quad (14)$$

Durch Einsetzen von Gl. (13) in (14) folgt, daß die Funktion $1 - G(\tau)$ ebenfalls eine Potenzfunktion mit demselben Exponenten m ist:

$$1 - G(\tau) \propto \tau^m. \quad (15)$$

Ein Vergleich der Gleichungen für die Verteilung der Relaxationszeiten (13) und (14) mit den Gleichungen für die fraktale Porenradienverteilung (Gleichungen (7) und (4) in Teil 1 zeigt, wie sich beide Verteilungen aufgrund der Selbstähnlichkeit hinsichtlich des Funktionstyps entsprechen. Bei beiden Verteilungen ist der Exponent eine Funktion der fraktalen Dimension. Der Zusammenhang zwischen m und D soll später bei Besprechung der geometrischen Zusammenhänge geklärt werden.

Für das Ersatzschaltbild der Abb. 2a gibt es auch analytische Lösungen. Für den Frequenzbereich beschreibt Liu (1985) eine Methode, die Impedanz mit Hilfe eines Kettenbruchverfahrens zu bestimmen. Der hier behandelte Schaltkreis läßt sich in dieselbe Form wie bei Liu angegeben bringen. Mit dem Exponenten q aus Gl. (2) ist die Impedanz $Z(\omega)$:

$$Z(\omega) \propto (i \omega)^{-c} = (i \omega)^{-1/(1+q)}, \quad (16)$$

mit der Frequenz ω , dem Exponenten $c > 0$ und $i = \sqrt{-1}$. Da die Gl. (16) im komplexen Impedanzdiagramm eine Gerade durch den Ursprung darstellt, wird die durch sie beschriebene Impedanz bzw. das gesamte Ersatzschaltbild als „Constant phase angle element“ (CPA-Element) bezeichnet, denn für jeden Punkt auf der Geraden, d.h. bei jeder Frequenz ist der Phasenwinkel gleich $-c \pi/2$.

Ein wichtiger Sonderfall, der schon früh theoretisch behandelt wurde (Warburg 1899, 1901; Mitoff and Charles 1972), ist das „CPA-Element“ mit $c = 0.5$ mit der Bezeichnung Warburg-Impedanz, die in der Elektrochemie bei der Elektrodenpolarisation gemessen wird und Diffusionsvorgänge vor ebenen Elektroden charakterisiert. Aus Gl. (16) folgt $q = 1$. Für diesen Fall läßt sich der Ersatzschaltkreis von Abb 2a leicht in geometrische Verhältnisse umsetzen, indem z.B. vor einer glatten Porenwand auf der linken Seite parallele Scheiben gleicher Dicke angenommen werden. Dann sind alle Widerstände und Kapazitäten untereinander gleich, unabhängig davon, wie die Umrechnung von Größen des Diffusionprozesses in geometrische Parameter im Einzelnen gehandhabt wird. Als

Ergebnis sei zunächst festgestellt, daß für glatte Porenwände mit $D = 2$ die Warburgimpedanz mit $c = 0.5$ zutrifft. Als nächstes ist der Zusammenhang zwischen dem Impedanz-Parameter c im Frequenzbereich mit dem Abklingexponenten m im Zeitbereich zu klären. Für die Warburgimpedanz ist die Abklingkurve gegeben durch:

$$M(t) = t^{-0.5} . \quad (17)$$

Allgemein gilt, daß für das Potenzgesetz der Gl. (11) die Fourier-Transformierte in den Frequenzbereich angegeben werden kann (Jonscher 1981):

$$Z(\omega) \propto (i\omega)^{-m-1} . \quad (18)$$

Daraus folgt durch Vergleich mit Gl. (16):

$$c = m + 1 \quad (19)$$

und

$$q = -m / (1+m) . \quad (20)$$

Damit ist die Betrachtung der Relaxation durch reine Diffusion abgeschlossen. Anschließend soll als weiterer Prozeß die Entladung der Ionenwolken durch elektrolytische Stromleitung in die Betrachtung einbezogen werden. Das erfolgt mit Hilfe des Ersatzschaltbildes der Abb. 2b, das eine Erweiterung des „CPA-Elements“ von Abb. 2a darstellt, indem parallel zu jedem Kondensator C_i ein Widerstand R'_i geschaltet sind. Zwei Sonderfälle lassen sich ganz einfach lösen. Beim 1. Fall werden alle Widerstände bis auf R_1 fortgelassen. Übrig bleibt ein Ersatzschaltbild für das Cole-Cole-Modell (Cole und Cole 1941) mit der Impedanz:

$$Z(\omega) \propto 1 / (1 + (i\omega\tau)^c) , \quad (21)$$

mit der Zeitkonstanten τ . Der zweite leicht zu lösende Fall besteht aus einer Kaskade von RC-Gliedern, die alle die gleiche Relaxationszeit τ_0 haben. Dann gilt zusätzlich zu Gl. (2) die weitere Selbstähnlichkeitsbeziehung:

$$C_i/C_1 = (R'_i/R'_1)^r , \quad (22)$$

mit $r = -1$. Da im Vergleich zum „CPA-Element“ lediglich alle Kapazitäten durch RC-Glieder ersetzt sind, lassen sich Impedanz und Abklingkurve leicht durch Analogiebetrachtungen angeben. Als Impedanz ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck wie in Gl. (21), in dem nur die Klammern anders gestellt sind:

$$Z(\omega) \propto 1 / (1 + i\omega\tau_0)^c . \quad (23)$$

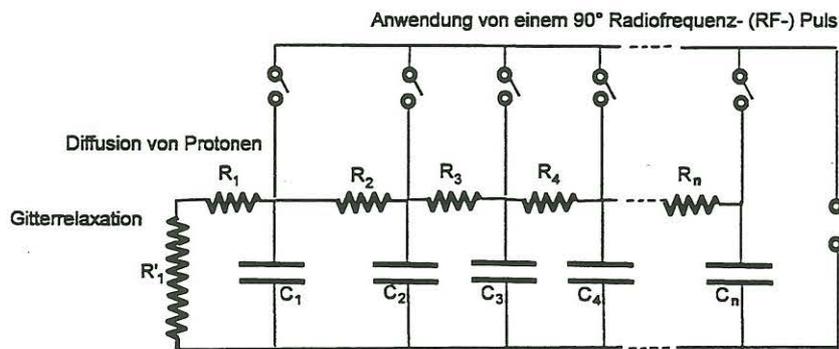
Allein durch elektrolytische Stromleitung fließen die Ladungen von allen Kondensatoren nach demselben exponentiellen Zeitgesetz ab:

$$M'(t) \propto \exp(-t/\tau_0) . \quad (24)$$

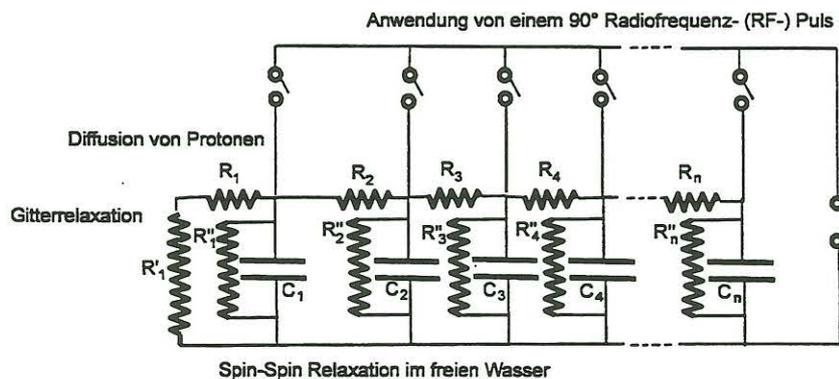
Durch Kombination mit Gl. (11) und (10) des „CPA-Elements“ ergibt sich für die gesamte Relaxationsfunktion:

$$\begin{aligned} M(t) &\propto t^m \exp(-t/\tau_0) = \left[\sum_{i=1}^n a_i \exp(-t/\tau_i) \right] \exp(-t/\tau_0) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \exp(-t(1/\tau_i + 1/\tau_0)) . \end{aligned} \quad (25)$$

Da in der Darstellung der Abklingkurve als Summe von Exponentialtermen alle auftretenden Relaxationszeiten $1/(1/\tau_i + 1/\tau_0)$ kleiner als τ_0 sind, wird τ_0 als Grenzrelaxationszeit τ_{\max} bezeichnet. Die durch Diffusion und elektrolytische Stromleitung bedingten Abklingkurven der IP werden bis auf einen Faktor, d.h. hinsichtlich ihrer Form, durch die beiden Parameter Abklingkoeffizient m und Grenzrelaxationszeit τ_{\max} vollständig beschrieben.



(a)



(b)

Modellierung der NMR-Relaxation

Bei der NMR beruht der wesentliche Relaxationsvorgang, der zur Untersuchung der Porenstruktur dient, auf der Gitterrelaxation an der Porenwand. Ein einfaches Modell mit einheitlichem Porenradius, in dem allein die Gitterrelaxation berücksichtigt ist, wurde in Teil 1 besprochen. Wenn das fraktale „Pigeon hole“-Modell zugrunde gelegt wird, kann außerdem der Transport der Protonen durch Diffusion von den zentral gelegenen Teilvolumina zur Porenwand betrachtet werden. Die NMR-Relaxation in einem fraktalen porösen Medium kann mit den Ersatzschaltbildern in Abb. 3 modelliert werden, die ganz ähnlich wie die Ersatzschaltbilder für die IP-Relaxation (Abb. 2) aufgebaut sind. In Abb. 3 b wurde zusätzlich zur Gitterrelaxation die Spin-Spin-Relaxation berücksichtigt, die in jedem Teilvolumen nach der gleichen exponentiellen Abklingfunktion stattfindet. Vor Beginn des Relaxationprozesses wird die Anfangsmagnetisierung durch einen 90° Radiofrequenz- (RF-) Puls erzeugt, durch den ein Teil der Kernspins in eine antiparallele Stellung zum stationären Magnetfeld gebracht werden. Im elektrischen Analogon werdend alle Kondensatoren auf die gleiche Spannung aufgeladen. In den Schaltbildern entsprechen die Kapazitäten C_i im wesentlichen den Teilvolumina, die Widerstände R_i beziehen sich auf die Diffusion, R'_i auf die Gitterrelaxation und die R''_i auf die Spin-Spin-Relaxation. Die Auswertung der Ersatzmodelle kann analog zur IP-Relaxation erfolgen und wird an dieser Stelle nicht weiter behandelt, bleibt aber Gegenstand laufender Untersuchungen.

Abb. 3: Beschreibung der NMR-Relaxation in einem porösen Medium mit einem elektrischen Ersatzschaltkreis.

- a) Die Relaxation beruht allein auf der Gitterrelaxation an der Porenwand.
- b) Zusätzlich findet im ganzen Porenvolumen Spin-Spin-Relaxation statt.

Zusammenhang zwischen elektrischen Größen der Ersatzschaltbilder und Porengeometrie

Wie die Kapazitäten und Widerstände der Ersatzschaltbilder mit den geometrischen Parametern des fraktalen Porenraummodells zusammenhängen, ergibt sich aus den Gleichungen (3) bis (6) für die analogen Prozesse. Ein Vergleich des osmotischen Gesetzes (3) mit der Kondensatorgleichung (4) zeigt, daß die Kapazität ein Volumen V repräsentiert. Für den Diffusionsprozeß, Gl. (5), sowie für die elektrische Leitfähigkeit, Gl. (6), gilt, daß der Widerstandsterm sich proportional zur Transportlänge L und umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche S verhält. Danach läßt sich der für die Abklingkurve maßgebliche Parameter q aus Gl. (2) folgendermaßen durch Längen-, Flächen- und Volumenverhältnisse ausdrücken:

$$q = \log(C_i/C_1) / \log(R_i/R_1) = \log(V_i/V_1) / \log[(L_i/L_1) / (S_i/S_1)] \quad (26)$$

Aus der fraktalen Theorie folgt für die Teilvolumina V_i des zugrunde gelegten Modells mit einer fraktalen Dimension D :

$$V_i/V_1 = (L_i/L_1)^{3-D} . \quad (27)$$

Für die Querschnittsflächen gilt:

$$S_i/S_1 = (L_i/L_1)^{2-D} . \quad (28)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (27) und (28) in Gl. (26) wird der Zusammenhang zwischen q und D erhalten:

$$q = (3-D) / (D-1),$$

$$D = (3/q + 1) / (1/q + 1). \quad (29)$$

Aus der Form von gemessenen IP-Abklingkurven läßt sich der Abklingexponent m bestimmen. Daraus wird mit Gl. (20) q berechnet, das zur Berechnung der fraktalen Dimension nach Gl. (29) benötigt wird.

Als nächste Größe interessiert uns die Gesamtporosität ϕ . Bei den nun folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf Gesteine mit Rißporosität. Dafür trifft die Überlegung zu, daß glatte Risse enger zusammenschließen können als rauhe Risse, bei denen die linke und die rechte Wandseite unabhängig von einander strukturiert sind. Die Voraussetzung, daß die beiden Seiten eines Risses nach dem Aufklaffen nicht mehr zusammenpassen, wird leicht erfüllt, z. B. indem sie während der tektonischen Ereignisse seitlich gegeneinander verschoben wurden. Für ein einfaches fraktales Rißmodell, das in Abb. 4 im Querschnitt dargestellt ist, läßt sich der Zusammenhang zwischen Porosität und fraktaler Dimension ableiten, der allerdings nicht allgemein gilt, sondern vom Modell abhängt.

In der Theorie der fraktalen Dimension gelten folgende beiden Grundgleichungen: Erstens gilt für den Zusammenhang zwischen der fraktalen Dimension D einer statistisch isotropen fraktalen Figur im Vektorraum mit der topologischen Dimension D^t und der fraktalen Dimension D^* der Querschnittsfigur im Untervektorraum mit der topologischen Dimension D^{t*} :

$$D^* = D - (D^t - D^{t*}) . \quad (30)$$

Zweitens berechnet sich die fraktale Dimension einer selbstähnlichen Figur aus der Anzahl N der Unterstrukturen, die auf die übergeordnete Struktur entfallen, und den Selbstähnlichkeitsfaktor $\nu > 1$:

$$D = \log N / \log \nu . \quad (31)$$

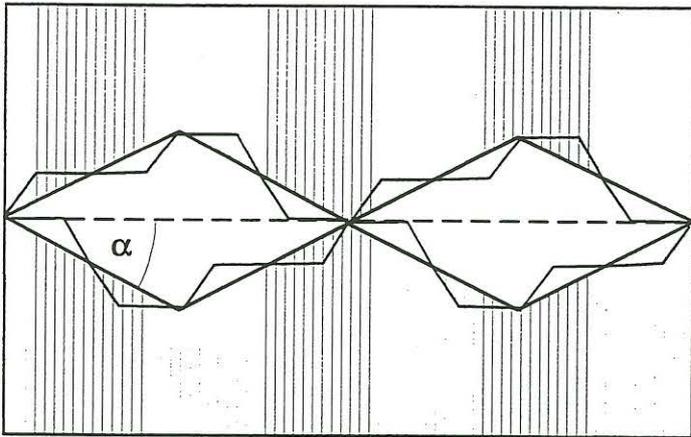


Abb. 4: Darstellung eines fraktalen Risses im Querschnitt. Die Gesteinsmatrix ist schraffiert und das Porenvolumen weiß dargestellt. Dieses wird von der Porenwand abgegrenzt, deren Grundstruktur im Querschnitt durch den groben Polygonzug repräsentiert wird. Aus der Konstruktion des feineren überlagernden Polygonzuges der ersten Unterstruktur wird das Bildungsgesetz erkennbar. Der eingezeichnete Winkel α bestimmt die Größe des Porenvolumens und die fraktale Dimension.

In Abb. 4 stellt die Schnittfigur der Kluftwand einen Polygonzug dar. Dessen selbstähnliches Bildungsgesetz wird mit dem in der Abbildung eingetragenen Winkel α ausgedrückt durch:

$$N = 4 \text{ und } v = 4(\text{tg}^2 \alpha + 1)^{-1/2}. \quad (32)$$

Nach Einsetzen von Gl. (32) in Gl. (31) erhält man unter Berücksichtigung, daß wir mit Gl (31) die fraktale Dimension D^* der Schnittfigur ausrechnen:

$$\text{tg } \alpha = (2^{4(1-1/D^*)} - 1)^{1/2}. \quad (33)$$

Außerdem ist das zwischen oberer und unterer Kluftwand freigelassene Porenvolumen proportional zu $\text{tg } \alpha$. Damit haben wir bis auf einen Faktor den prinzipiellen Zusammenhang zwischen dem Porenvolumen und der fraktalen Dimension hergestellt. Die folgende explizite Gleichung beruht auf einer Anpassung an Kerndaten aus dem KTB-Projekt (Berckhemer et al., 1997; Pechnig et al., 1997, Zimmermann, 1991):

$$\phi = \phi_{\min} + \phi_{\max} (2^{4(1-1/D^*)} - 1)^{1/2} / 3^{1/2}. \quad (34)$$

Dabei wurde für die Gesteine mit der fraktalen Dimension $D = 2$ eine Minimum-Porosität $\phi_{\min} = 0.3\%$ und für die fraktale Dimension $D = 3$ eine Maximum-Porosität ϕ_{\max} von 6% angenommen. Nach Gl. (30) ergibt sich D^* der Schnittfigur aus der fraktalen Dimension D des Gesteins zu $D^* = D-1$.

Bestimmung von Porosität und Permeabilität aus IP-Bohrlochmessungen

Als Anwendungsbeispiel für die Berechnung eines Porositäts- und Permeabilitäts-Logs aus einem im Zeitbereich gemessenen IP-Log soll die KTB-Hauptbohrung dienen. Die Messungen wurden 1991 von G.Grinat durchgeführt. Aus der Form der IP-Abklingkurven wurden für jede Teufe der Abklingexponent m und die Grenzrelaxationszeit τ_{\max} bestimmt (Pape und Vogelsang, 1996). Mit Hilfe der Gleichungen (20) und (29) wurde aus dem Abklingexponenten m die fraktale Dimension D bestimmt. Aus D ergibt sich nach Gl. (34) die Porosität. Für die Berechnung der Permeabilität k wurde eine Permeabilitäts-Porositätsbeziehung für kristalline Gesteine zugrundegelegt, die für KTB-Gesteine kalibriert wurde (Pape et al., 1998):

$$k = 45 (10 \phi)^3 + 311 (10 \phi)^{3.88} \quad (\text{nm})^2. \quad (35)$$

Eine ähnliche Porositäts-Permeabilitäts-Beziehung für den Falkenberg-Granit wurde in Teil 1 vorgestellt.

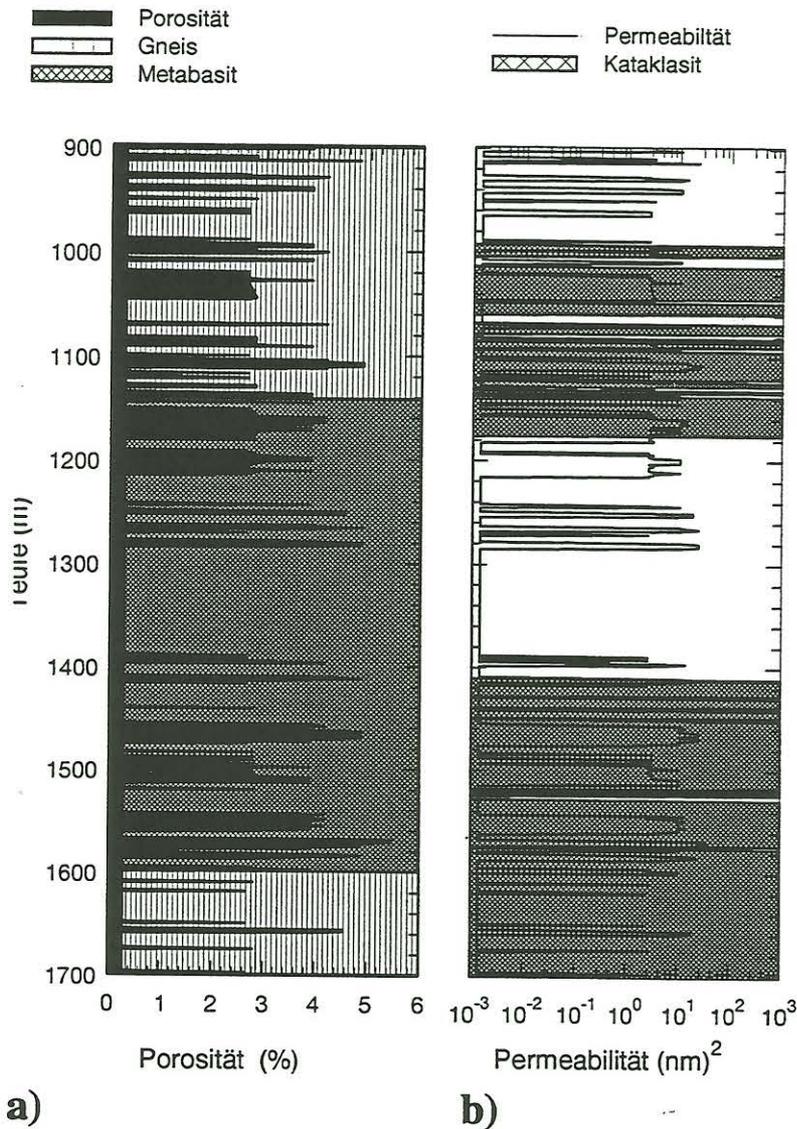


Abb. 5: Porositäts- und Permeabilitäts-Log auf der Grundlage von IP-Messungen für einen Abschnitt der KTB-Hauptbohrung.

a) Porosität und Gesteinstypen
 b) Permeabilität und Kataklasten-Zonen nach Pechnig und Wohlenberg (1993).

Der in Abb. 5 dargestellte Abschnitt des Bohrprofils enthält einen über 400 m mächtigen Metabasit-Körper, der in Gneise eingebettet ist. Die Porositäts- und damit auch die Permeabilitäts-Verteilung zeigt keine offensichtliche Abhängigkeit vom Gesteinstyp. Dagegen ergibt sich eine weitgehende Übereinstimmung der Teufenbereiche mit hohen Porositäten und Permeabilitäten mit den von Pechnig und Wohlenberg (1993) ausgehaltenen Kataklasten-Zonen ihres Elektrofazies- (EFA-) Logs. Für die KTB-Vorbohrung wurde von Zimmermann (Zimmermann, 1991; Pechnig et al. 1997) ein Porositäts-Log berechnet, das im Wesentlichen auf einem elektrischen Widerstands-Log beruht. Auch aus diesem Porositäts-Log wurde mit Gl. (35) ein Permeabilitäts-Log für einen Teufenabschnitt berechnet, der denselben Metabasit-Körper enthält (Pape et al. 1989). Dieses Log ähnelt dem hier dargestellt Permeabilitäts-Log auf der Basis von IP-Messungen und zeigt eine gute Übereinstimmung mit Kern-daten. Sowohl in der Vorbohrung als in der Hauptbohrung ist im hangenden und im liegenden Grenzbereich des Metabasitkörpers eine intensiv kataklastisch beeinflusste Zone vorhanden. Als Erklärung dafür kommt die durch den Fazieswechsel bedingte Diskontinuität der mechanischen Eigenschaften in Frage.

Daß in dem hier vorgeführten Beispiel die Porosität und die Permeabilität aus der Form der IP-Abklingkurven und nicht aus elektrischen Widerstandsmessungen bestimmt wurden, hat einen

triftigen Grund. Die Gesteine der KTB, die besonders gut leitfähig sind, haben diese Eigenschaft aufgrund von elektronischer Leitfähigkeit aufgrund ihres hohen Graphitgehaltes. Deshalb täuschen die niedrigen Widerstände im Log eine viel zu große Porosität vor. Diese Fehlerquelle spielt bei der hier dargestellten Auswertung der IP-Abklingkurven keine Rolle.

Zum Abschluß muß angemerkt werden, daß in dem Permeabilitäts-Log die auf Mikroklüften beruhende Gesteinspermeabilität dargestellt ist. Es wird dabei keine Aussage über die Permeabilität von Makroklüften gemacht, die für hydraulische Vorgänge eine viel größere Rolle spielt (Huenges et al., 1997; Zimmermann und Burkhardt, 1998).

Literatur

- Berckhemer, H., Rauen, A., Winter, H., Kern, H., Kotny, A., Lienert, M., Nover, G., Pohl, J., Popp, T., Schult, A., Zinke, J., and Soffel, H. C. (1997): Petrophysical properties of the 9-km-deep crustal section at KTB, *J. Geophys. Res.*, 102, (B8), 18337-18361.
- Cole, K.S. and Cole, R.H. (1941): Dispersion and absorption in dielectrics: I, alternating current characteristics, *J. Chem. Phys.*, 9, 341-351.
- Jonscher, A.K. (1981): Review: A new understanding of the dielectric relaxation of solids, *J. Mater. Sc.*, 16, 2037-2060.
- Huenges, E., Erzinger, J., and Kessels, W. (1997): The permeable crust: Geohydraulic properties down to 9101 m depth, *J. Geophys. Res.*, 102, (B8), 18255-18265.
- Liu, S.H. (1985): Fractal model for the AC response of a rough interphase, *Phys. Rev. Lett.*, 55, 5, 529-532.
- Mitoff, S.P. and Charles, R.J. (1972), *J. Appl. Phys.*, 43, 927.
- Mandelbrot, B. B. (1977): *Fractals - form, chance and dimensions*, W. H. Freeman and Co..
- Pape, H., Riepe, L., and Schopper, J.R. (1987): Theory of self-similar network structures in sedimentary and igneous rocks and their investigation with microscopical methods, *J. Microsc.*, 148, 121-147.
- Pape, H., Clauser, C., and Iffland, J. (1998): Permeability prediction for reservoir sandstones based on fractal pore space geometry, submitted to *Geophysics*.
- Pape, H., and Vogelsang, D. (1996): Fractal evaluation of induced polarization logs in the KTB-Oberpfalz HB, *Geol. Jb.*, E54, 3-27.
- Pechnig, R., Haverkamp, S., Wohlenberg, J., Zimmermann, G., and Burkhardt, H. (1997): Integrated log interpretation in the German Continental Deep Drilling Program: Lithology, porosity, and fracture zones, *J. Geophys. Res.*, 102, (B8), 18363-18390.
- Pechnig, R. and Wohlenberg, J. (1993): EFA-LOG - the upper 3 km of the KTB Hauptbohrung, KTB-Report, 93-1, 265-280.
- Vogelsang, D., Grinat, M. und Pape, H. (1992): Logging of induced polarization in the KTB-Oberpfalz VB interpreted by a fractal model, *Scientific Drilling*, 3, 105-114.
- Warburg, E. (1899): Über das Verhalten sogenannter unpolarisierbarer Elektroden gegen Wechselstrom. *Ann. Phys. Chem. (Neue Serie)*, 67, 493-499.
- Warburg, E. (1901): Über die Polarisationskapazität des Platins, *Ann. Phys. (Deutschland)*, (4), 6, 125-135.
- Zimmermann, G. (1991): Integrierte Auswertung von Bohrlochmessungen der Kontinentalen Tiefbohrung (KTB) mit Verfahren der multivariaten Statistik, PhD. Dissertation Techn. Univ. Berlin, Berlin.
- Zimmermann, G. und Burkhardt, H. (1998): Fluidwegsamkeiten im Kristallin, Vortrag auf der 58. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, 30. März bis 3. April in Göttingen.