

# Elektromagnetische Induktion in dreidimensional anisotropen Leitern

Peter Weidelt

Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig

## 1 Einleitung

### 1.1 Grundgleichungen

In der elektromagnetischen Tiefenforschung ist die Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeit lange Zeit ignoriert worden, weil die Auflösungsprobleme mit der räumlich variablen *isotropen* Leitfähigkeit schon groß genug waren und eine Vermehrung der Parameter bei Annahme einer *anisotropen* Leitfähigkeitsverteilung die Unbestimmtheit des Modells nur vergrößert hätte. Aber insbesondere durch die Arbeiten von U. Schmucker zur Interpretation der Schwarzwalddaten wurde klar, daß bei beträchtlichen Abweichungen zwischen elektrischen und magnetischen Vorzugsrichtungen eine konsistente Interpretation nur unter Annahme einer *anisotropen* Leitfähigkeitsverteilung möglich ist. Es wurde aber auch erkannt, daß diese Anisotropie als *strukturelle* Anisotropie durch eine isotrope Leitfähigkeit mit Vorzugsrichtungen, also z.B. durch eine Folge von parallelen Dykes, nachgebildet werden kann, so daß auch aus dieser Sicht die Einführung einer anisotropen Leitfähigkeitsverteilung sich als nicht notwendig erwies.

Wenn wir uns in der Folge trotzdem der numerischen Modellierung der elektromagnetischen Induktion in anisotropen Leitern zuwenden, so geschieht dies aus der Tatsache heraus, daß etwa eine *homogene* anisotrope Schicht leichter (und genauer?) zu modellieren ist als eine Sequenz von Dykes. Darüber hinaus besteht natürlich auch Interesse daran, Vertrautheit mit den modernen numerischen Verfahren (versetzte Gitter, konjugierte Gradienten für komplexe Matrizen) zu gewinnen. Das verwandte Problem der elektromagnetischen Induktion in zweidimensional anisotropen Leitern wird eingehend von Schmucker (1994), Pek (1994) und Pek & Verner (1996) behandelt. Die Annahme einer anisotropen Leitfähigkeitsverteilung bietet neue Freiheitsgrade in der Interpretation, die – bei vorsichtiger Verwendung – zu einer verbesserten Interpretation führen sollten.

Unter Verwendung des Zeitfaktors  $e^{i\omega t}$  lauten die Grundgleichungen bei Vernachlässigung des Verschiebungsstromes

$$\nabla \times \underline{E} = -i\omega \underline{B}, \quad \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J}, \quad \underline{J} = \underline{\sigma} \underline{E}. \quad (1)$$

Hier sind  $\underline{E}$ ,  $\underline{B}$  und  $\underline{J}$  die Vektoren des elektrischen Feldes, der magnetischen Kraftflußdichte und der elektrischen Stromdichte, während  $\underline{\sigma}$  den  $(3 \times 3)$ -Leitfähigkeitstensor bezeichnet. Nach Elimination von  $\underline{B}$  und  $\underline{J}$  folgt

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} + i\omega \mu_0 \underline{\sigma} \underline{E} = 0. \quad (2)$$

Im folgenden beschränken wir unsere Betrachtungen auf das magnetotellurische Problem, in dem das quasi-homogene induzierende Magnetfeld durch inhomogene Randbedingungen berücksichtigt wird.

Der Leitfähigkeitstensor  $\underline{\sigma}$  hat die folgenden Eigenschaften:

- **Symmetrie**

Der Leitfähigkeitstensor ist symmetrisch, wenn das Magnetfeld keinen Einfluß auf den Leitungsprozeß nimmt (Onsager 1931). In der Gegenwart von Hall-Strömen, wie in einem Plasma, ist  $\underline{\sigma}$  unsymmetrisch. Deshalb ist die Symmetrie bei der Annahme von rein ohmscher Stromleitung gewährleistet.

- **Nicht-Negativität**

$\underline{\sigma}$  ist positiv-semidefinit, da die über die Zeit gemittelte Energiedissipation pro Volumen,  $(1/2)\underline{E}^* \cdot \underline{J} = (1/2)\underline{E}^* \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{E}$ , nicht-negativ sein muß. \* bezeichnet die komplex-konjugierte Größe.

In kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$ ,  $z$  positiv nach unten, hat der Leitfähigkeitstensor  $\underline{\sigma}$  die Darstellung

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Im Lufthalbraum  $z < 0$  ist  $\underline{\sigma} = 0$ ; im Leiter  $z \geq 0$  wird der Tensor als positiv-definit angenommen. Notwendig und hinreichend hierfür ist die Positivität der drei Hauptunterdeterminanten. Die Interpretation der Nebendiagonalelemente von  $\underline{\sigma}$  ist klar:  $\sigma_{xy}$  kann z.B. eine Abweichung der regionalen Streichrichtung von den horizontalen Anisotropieachsen bezeichnen; einfallende Anisotropie wird durch  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  beschrieben. Als Beispiel betrachten wir eine einfallende Platte mit  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  parallel und senkrecht zur Foliation. Dann gilt für Punkte innerhalb der Platte (cf. Fig. 1)

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta & (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \beta \cos \beta \\ 0 & (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \beta \cos \beta & \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_2 \cos^2 \beta \end{pmatrix}.$$

Außerhalb der Platte kann die Leitfähigkeit etwa isotrop sein.

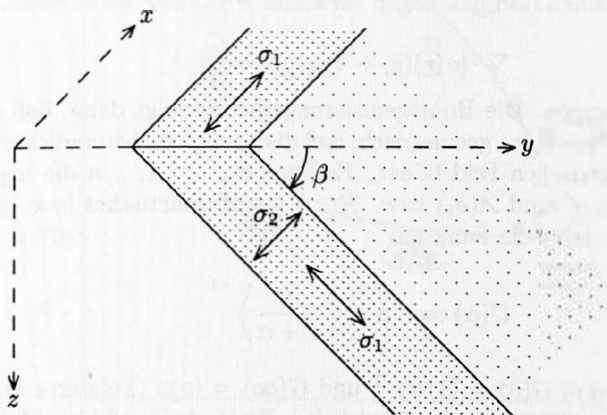


Fig. 1: Beispiel für eine Leitfähigkeitsverteilung mit einfallender Anisotropie

## 1.2 Ursprung und Größe elektrischer Anisotropie

Die Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeit ist im wesentlichen ein Skaleneffekt: Selbst wenn die Leitfähigkeit mikroskalig isotrop ist, wird sie auf einer größeren Skala anisotrop, wenn im Mittelungsvolumen Vorzugsrichtungen (z.B. Schichtungen oder Foliationen) existieren. Ein Beispiel zeigt Fig. 2:

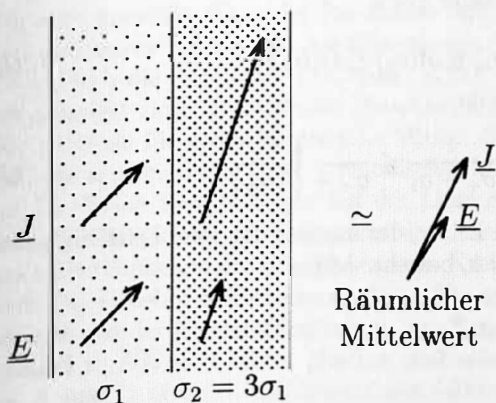


Fig. 2: Ein einfaches Beispiel für den Ursprung struktureller Anisotropie durch räumliche Mittelung von  $\underline{E}$  und  $\underline{J}$  über *isotrope* Leiter mit Vorzugsrichtung. Die gemittelte Stromdichte ist in Richtung der Vorzugsrichtung abgelenkt.

In den beiden isotropen Schichten sind elektrisches Feld  $\underline{E}$  und Stromdichte  $\underline{J}$  parallel. An der Grenzfläche sind Tangentialkomponente von  $\underline{E}$  und Normalkomponente von  $\underline{J}$  stetig. Nach räumlicher Mittelung über beide Schichten sind jedoch  $\underline{E}$  und  $\underline{J}$  nicht mehr parallel. Auf dieser größeren Skala existiert deshalb eine *strukturelle* Anisotropie. Sie wird unterschieden von der *intrinsischen* Anisotropie, die durch geordnete Inhomogenitäten auf einer noch kleineren Skala entstanden sein kann. Deshalb drückt die Annahme einer (strukturellen) Anisotropie unsere Unfähigkeit oder Unwilligkeit aus, die Mikrostruktur adäquat zu modellieren.

Der Grad der Anisotropie hängt von den elektrischen Verbindungen im Inneren des Gesteins ab, einige allgemeine Schranken lassen sich jedoch mit Hilfe der Homogenisierungstheorie (z.B. Jikov et al. 1994) gewinnen. Obgleich diese Schranken streng nur für Gleichstrom gelten, geben sie auch verlässliche Richtlinien für niederfrequente Wechselströme. Es seien  $\sigma_- (> 0)$  und  $\sigma_+$  untere und obere Schranke der *isotropen* mikroskaligen Leitfähigkeit  $\sigma(\underline{r})$ ,  $0 < \sigma_- \leq \sigma(\underline{r}) \leq \sigma_+$ . Es wird zur Vereinfachung angenommen, daß sich  $\sigma(\underline{r})$  periodisch wiederholt. Die Periodenzelle sei ein  $n$ -dimensionaler Quader (hier  $n = 3$ ) mit Kanten parallel zu den kartesischen Achsenrichtungen mit den Einheitsvektoren  $\hat{e}_i, i = 1, \dots, n$ . Das räumliche Mittel über diese Zelle werde mit  $\langle \cdot \rangle$  bezeichnet. Wir legen an die Zelle externe elektrische Einheitsfelder  $\hat{e}_i$  an und definieren den *homogenisierten* Leitfähigkeitstensor  $\underline{\sigma}^0$  als

$$\underline{\sigma}^0 \hat{e}_i := \langle \sigma(\underline{r})[\hat{e}_i + \nabla u_i(\underline{r})] \rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

$\nabla u_i(\underline{r})$  ist die durch die elektrischen Raumladungen verursachte Störung des externen Feldes und gehorcht der Dgl.

$$\nabla \cdot [\sigma(\underline{r})(\hat{e}_i + \nabla u_i(\underline{r}))] = 0$$

mit periodischen Randbedingungen. Die Homogenisierungstheorie zeigt dann, daß  $\underline{\sigma}^0$  symmetrisch und positiv-definit ist. Das letztere bedeutet geometrisch, daß die gemittelte Stromdichte immer einen spitzen Winkel mit dem externen elektrischen Feld bildet. Es seien  $\sigma_i, i = 1, \dots, n$  die  $n$  positiven Eigenwerte (= Hauptleitfähigkeiten) von  $\underline{\sigma}^0$  und  $\mathcal{A}(\sigma_i)$  bzw.  $\mathcal{H}(\sigma_i)$  ihr arithmetisches bzw. harmonisches Mittel. Wenn  $\sigma(\underline{r})$  nicht konstant ist, steigt die Funktion

$$G(\alpha) := -\alpha + \left\langle \frac{1}{\sigma + \alpha} \right\rangle^{-1} \quad (5)$$

monoton an. Ihre Schranken sind  $G(0) = \langle 1/\sigma \rangle^{-1}$  und  $G(\infty) = \langle \sigma \rangle$ . (Letzteres ergibt sich, wenn man zunächst den zweiten Term von (5) nach  $\sigma/\alpha$  entwickelt.) Wenn das leitfähige Material geschichtet ist, liefert  $\langle 1/\sigma \rangle^{-1}$  die longitudinale Leitfähigkeit (Stromfluß parallel zu  $\nabla\sigma$ ) und  $\langle \sigma \rangle$  ist die Leitfähigkeit in Richtung der  $(n-1)$  transversalen Richtungen (Stromfluß senkrecht zu  $\nabla\sigma$ ). Nur die longitudinale Leitfähigkeit existiert für  $n = 1$ , wo die Stromrichtung mit  $\nabla\sigma$  übereinstimmen muß. (In den anderen Richtungen verschwinden  $\underline{E}$  und  $\nabla\sigma$ .)

Es sei  $\alpha_{\pm} := (n-1)\sigma_{\pm}$ . Wenn man alle möglichen elektrischen Verbindungen in der Periodenzelle zur Konkurrenz zuläßt, dann liefern die eleganten Methoden der Homogenisierungstheorie (Jikov et al. 1994, pp. 187-198) bestmögliche Schranken für die Hauptleitfähigkeiten von  $\underline{\sigma}^0$ . Nach Korrektur einiger offensichtlicher Druckfehler lauten diese Schranken in kompakter Form

$$G(0) \leq \sigma_i \leq G(\infty), \quad G(\alpha_-) \leq \mathcal{H}(\sigma_i) \leq \mathcal{A}(\sigma_i) \leq G(\alpha_+) \quad (6)$$

und

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i - \sigma_-} \leq \frac{1}{G(\alpha_-) - \sigma_-}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_+ - \sigma_i} \leq \frac{1}{\sigma_+ - G(\alpha_+)}. \quad (7)$$

Als Veranschaulichung von (6) und (7) betrachten wir einen Leiter, der nur aus den zwei Leitfähigkeiten  $\sigma_-$  und  $\sigma_+$  mit den Volumenanteilen  $p_-$  and  $p_+$ ,  $p_- + p_+ = 1$ , besteht. Mit

$$\left\langle \frac{1}{\sigma + \alpha} \right\rangle = \frac{p_-}{\sigma_- + \alpha} + \frac{p_+}{\sigma_+ + \alpha}$$

und

$$s_- := \frac{p_+ \sigma_-}{\sigma_- / (\sigma_+ - \sigma_-) + p_- / n}, \quad s_+ := \frac{p_- \sigma_+}{\sigma_+ / (\sigma_+ - \sigma_-) - p_+ / n}$$

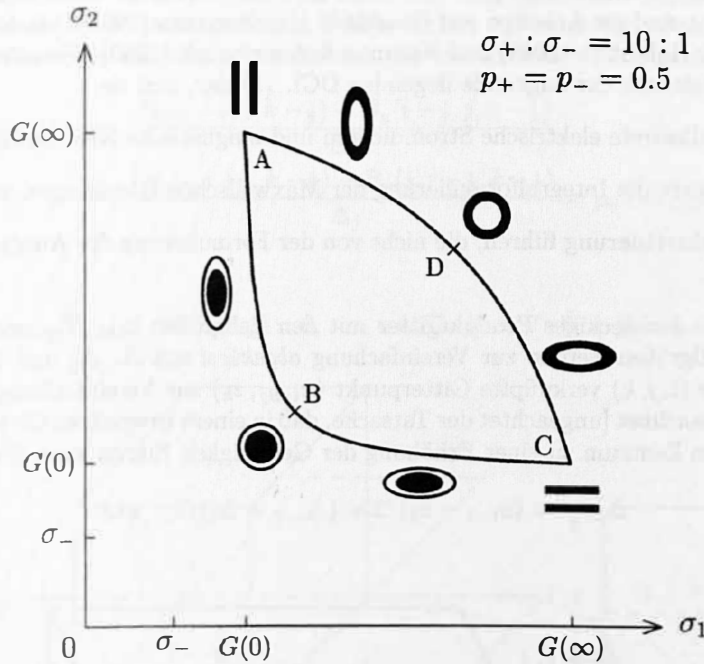
folgt dann

$$\sigma_- + s_- \leq \mathcal{H}(\sigma_i) \leq \mathcal{A}(\sigma_i) \leq \sigma_+ - s_+ \quad (8)$$

und

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i - \sigma_-} \leq \frac{1}{s_-}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_+ - \sigma_i} \leq \frac{1}{s_+}. \quad (9)$$

Mit wachsendem  $n$  verschieben sich die Schranken für die mittleren Hauptleitfähigkeiten nach höheren Werten, da der Stromfluß nun mit größerer Wahrscheinlichkeit in den  $n - 1$  besser leitenden transversalen Richtungen erfolgt. Dadurch werden die Schranken enger (und im formalen Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  streben beide Schranken gegen  $G(\infty) = \langle \sigma \rangle$ ).



**Fig. 3:** Wertebereich der Hauptleitfähigkeiten eines zweidimensionalen Zweikomponenten-Leiters. Erreichbar ist der Bereich  $\overline{ABCD}$  einschließlich seiner Berandung. Die makroskopischen Modelle sind isotrop entlang der Linie  $\overline{BD}$ . Von dort wächst die Anisotropie in Richtung  $A$  und  $C$ . Realisiert werden die Randmodelle (mit Ausnahme von  $A$  und  $C$ ) durch lückenloses Auffüllen der Periodenzellen mit Ellipsen mit konstantem Achsenverhältnis und der skizzierten konstanten Orientierung. Die Ellipsen bestehen aus leitfähigem Material mit  $\sigma_+$  (schwarz) und  $\sigma_-$  (weiß).

Für eine spezielle Wahl der Parameter und eine zweidimensionale Geometrie ( $n = 2$ ) illustriert Fig. 3 den geometrischen Gehalt der Gleichungen (8) und (9). Der Bereich möglicher Werte von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  wird durch die Segmente  $\overline{ABC}$  bzw.  $\overline{CDA}$  begrenzt, die durch die erste bzw. zweite Ungleichung von (9) definiert sind. Individuelle Hauptleitfähigkeiten liegen zwischen  $G(0) = \langle 1/\sigma \rangle^{-1}$  und  $G(\infty) = \langle \sigma \rangle$ . Die Isolinien für das arithmetische Mittel  $A(\sigma_i) = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  stehen senkrecht auf der Linie  $\overline{BD}$ . Das kleinste arithmetische (und harmonische) Mittel  $\sigma_- + s_-$  wird bei  $B$  angenommen, das größte  $\sigma_+ - s_+$  bei  $D$ . Beide Punkte liegen auf der Linie  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Deshalb werden die Extremalwerte der mittleren Hauptleitfähigkeiten für Leiter realisiert, die makroskalig *isotrop* sind. Mikroskalig bestehen diese Leiter aus selbstähnlichen zweikomponentigen Kreisen unterschiedlicher Größe, die die Periodenzelle lückenlos ausfüllen (Hashin & Shtrikman 1962). Die untere (obere) Schranke wird in Zellen angenommen, die mit Kreisen mit der Kernleitfähigkeit  $\sigma_+$  ( $\sigma_-$ ) und der Mantelleitfähigkeit  $\sigma_-$  ( $\sigma_+$ ) ausgefüllt sind. Die Linien parallel zu  $\overline{BD}$  sind Linien gleicher makroskopischer Anisotropie  $|\sigma_2 - \sigma_1|$ . Die größte Anisotropie wird bei  $A$  und  $C$  erreicht. Die zugehörige Mikrostruktur ist eine eindimensionale Schichtung. Jeder Punkt der vier Segmente  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ , etc. kann durch eine dichte Füllung der Periodenzelle mit selbstähnlichen Ellipsen in der in Fig. 3 gezeigten Orientierung erreicht werden. Zu jedem Punkt der Segmente gehört ein festes Achsenverhältnis. Die aus den zwei Komponenten aufgebauten Kreise und Ellipsen haben die Eigenschaft, daß die elektrischen Störfelder, die durch Ladungsanhäufungen an den beiden Grenzflächen entstehen, sich außerhalb der heterogenen isotropen Leiter aufheben, wenn sie in die makroskopische (anisotrope) Hintergrundleitfähigkeit eingebettet werden. - In der interessanteren dreidimensionalen Geometrie ( $n = 3$ ), werden Kreise und Ellipsen durch Kugeln und Ellipsoide ersetzt.

## 2 Implementation eines FD-Algorithmus mit versetzten Gittern

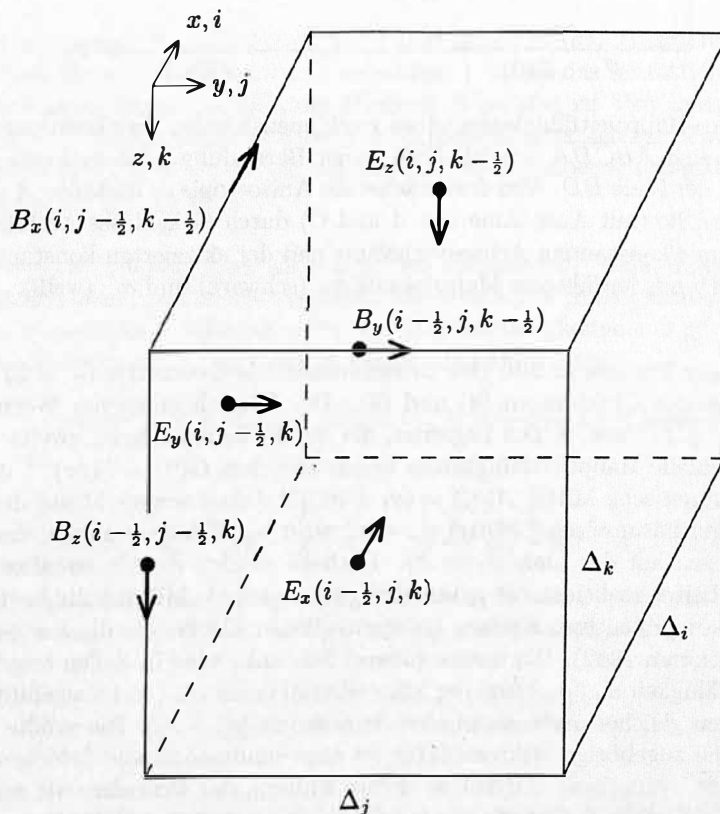
### 2.1 Bildung lokaler Mittelwerte und Aufbau der Systemmatrix

Das Konzept der versetzten Gitter hat in der elektromagnetischen Modellierung zu einer Renaissance der Methode der Finiten Differenzen (FD) geführt. Wichtige Beispiele für die Anwendung versetzter Gitter in der 3D-Modellierung sind die Arbeiten von Druskin & Knizhnerman (1988), Madden & Mackie (1989), Smith (1992), Wang & Hohmann (1993) und Newman & Alumbaugh (1995). Versetzte Gitter stellen eine befriedigende Diskretisierung der zugrunde liegenden DGL. (2) dar, weil sie

- automatisch quellenfreie elektrische Stromdichten und magnetische Kraftflußdichten ergeben,
- physikalisch-intuitiv die Integralformulierung der Maxwell'schen Gleichungen widerspiegeln
- und zu einer Diskretisierung führen, die nicht von der Formulierung der Ausgangsgleichungen in  $\underline{E}$  oder  $\underline{B}$  abhängt.

Angenommen wird ein rechteckiges Produktgitter mit den Zellgrößen  $\Delta_{xi}$ ,  $\Delta_{yj}$  und  $\Delta_{zk}$  in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung. Diese Zellgrößen werden zur Vereinfachung *abgekürzt* mit  $\Delta_i$ ,  $\Delta_j$  und  $\Delta_k$ . Darüber hinaus wird der mit der Zelle  $(i, j, k)$  verknüpfte Gitterpunkt  $(x_i, y_j, z_k)$  zur Vereinfachung dem geometrischen Zentrum der Zelle zugeordnet [ungeachtet der Tatsache, daß in einem irregulären Gitter eine Verschiebung aus dem geometrischen Zentrum zu einer Erhöhung der Genauigkeit führen kann (Smith, 1992)]. Es sei

$$\Delta_{i-\frac{1}{2}} := (x_{i-1} - x_i)/2 = (\Delta_{i-1} + \Delta_i)/2, \quad \text{etc.}$$



**Fig. 4:** Lokationen der elektromagnetischen Feldkomponenten in der Einheit zelle eines versetzten Gitters

Dem Zentrum jeder Zelle in der Erde weisen wir den vollen 6-komponentigen Leitfähigkeitstensor (3) zu, der symmetrisch und positiv-definit sein muß. Fig. 4 zeigt eine mögliche Lokalisierung der elektromagnetischen Feldkomponenten innerhalb einer Zelle: magnetische Feldkomponenten werden den Mittelpunkten der Kanten und elektrische Feldkomponenten den Mittelpunkten der Flächen (parallel zu den Flächennormalen) zugeordnet. Die diese normalen  $\underline{E}$ -Feld-Komponenten sind im allgemeinen *unstetig*.

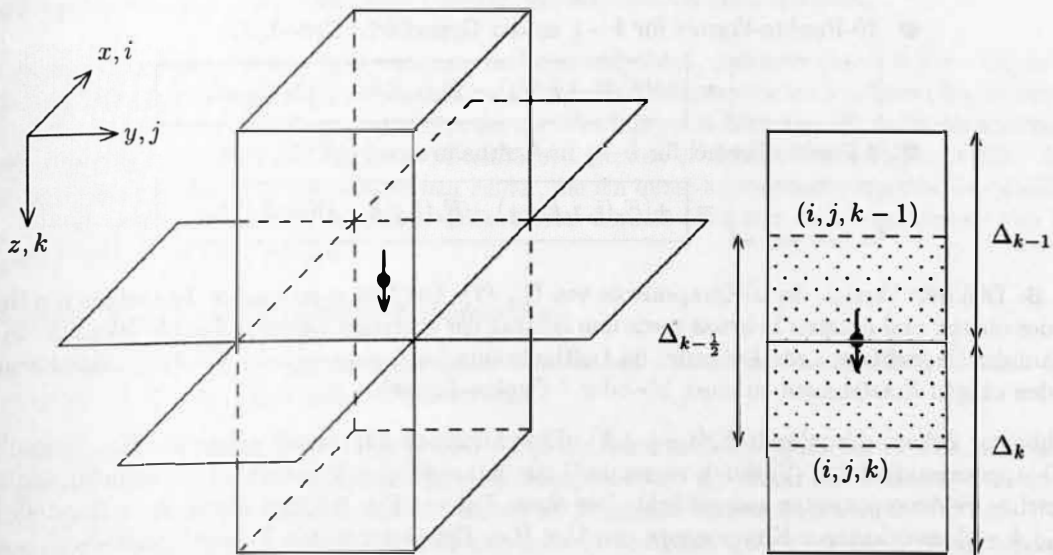


Möglich ist auch die komplementäre Zuordnung, in der magnetische und elektrische Feldkomponenten ihre Plätze tauschen. Diese Zuordnung hat den *scheinbaren* Vorzug, daß die  $\underline{E}$ -Komponenten an Positionen lokalisiert sind, wo sie als tangentielle Komponenten *stetig* sind. Es zeigt sich jedoch, daß auch die Diskontinuitäten der ersten Zuordnung einfach zu handhaben sind, siehe als Beispiel etwa Gl. (11). Da die elektromagnetischen Feldkomponenten an verschiedenen Kanten und Flächen der Zelle lokalisiert sind, stellt das resultierende elektromagnetische Feld natürlich nur einen Mittelwert über die Zelle dar. Ein Beispiel für die FD-Approximation mit versetzten Gittern (mit der Tilde gekennzeichnet) ist

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{z}} \cdot \tilde{\nabla} \times \underline{B} &:= \frac{B_y(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) - B_y(i-\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta_i} \\ &- \frac{B_x(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}) - B_x(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta_j} = \mu_0 J_z(i, j, k-\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Stets gilt

$$\mu_0 \tilde{\nabla} \cdot \underline{J} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \times \underline{B} = 0, \quad -i\omega \tilde{\nabla} \cdot \underline{B} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \times \underline{E} = 0.$$



**Fig. 5:** Topologie des  $\nabla \times \nabla \times$ -Operators: Die vertikale Komponente  $E_z$  (Pfeil) ist verknüpft mit den 4 Vertikalkomponenten in den Mittelpunkten der angrenzenden Seitenflächen in der Ebene dieser Komponente und mit den 8 horizontalen Komponenten, die in den Mittelpunkten der vertikalen Seitenflächen des oberen und unteren Prismas lokalisiert sind. Die rechte Seite zeigt das Mittelungsvolumen für  $E_z$ .

Das Modellierungsproblem wird in  $\underline{E}$  formuliert. Nach der Definition des Gitters wird das lineare Gleichungssystem für die elektrischen Feldkomponenten aufgestellt. Dies sei am Beispiel von  $E_z(i, j, k-\frac{1}{2})$  erläutert: Die Approximation der  $z$ -Komponente von  $\nabla \times \nabla \times$  [linke Seite von (2)] verknüpft 13 elektrische Feldkomponenten: Zusätzlich zu  $E_z(i, j, k-\frac{1}{2})$  sind dies – siehe Fig. 5, linker Teil – die vier horizontalen Komponenten der oberen Zelle  $(i, j, k-1)$ , die vier Horizontalkomponenten der unteren Zelle  $(i, j, k)$  und die vier vertikalen Komponenten in der Ebene  $k-\frac{1}{2}$ . Zur Herstellung der FD-Approximation wird die  $z$ -Komponente von (2) über das Volumen zwischen den Mittelpunkten der Zellen  $(i, j, k-1)$  und  $(i, j, k)$  (siehe Fig. 5, rechter Teil) integriert. Während  $J_z$  an der Grenzfläche zwischen  $(i, j, k-1)$  und  $(i, j, k)$  stetig ist, hat dort die elektrische Feldkomponente  $E_z$  im allgemeinen eine Diskontinuität. Wenn man

$$\tilde{\underline{z}} \cdot \nabla \times \nabla \times \underline{E} = -(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2)E_z + \partial_z(\partial_x E_x + \partial_y E_y) \quad (10)$$

zuerst über  $z$  integriert, wird klar, daß  $E_z(i, j, k-\frac{1}{2})$  als Mittelwert über das Volumen zwischen den Mittelpunkten der Zellen  $(i, j, k-1)$  und  $(i, j, k)$  angesehen werden muß. Entsprechend muß z.B. auch  $E_x(i-\frac{1}{2}, j, k)$  als Mittelwert von  $E_x$  über das Volumen zwischen den Mittelpunkten der Zellen  $(i-1, j, k)$  und  $(i, j, k)$  aufgefaßt werden. Als normale Feldkomponente ist auch  $E_x$  an der Grenzfläche im allgemeinen unstetig. Die Integration von (10) in  $x$ -Richtung verlangt den (möglicherweise unstetigen) Wert von  $E_x$  an der  $x$ -Grenzfläche. Dieser wird approximiert durch den Mittelwert von  $E_x$  zwischen den Zentren

$$i\omega\mu_0 J_z(i, j, k - \frac{1}{2})\Delta_{k-\frac{1}{2}}\Delta_i\Delta_j =$$

$$+ [E_x(i + \frac{1}{2}, j, k - 1) - E_x(i - \frac{1}{2}, j, k - 1)]\Delta_j$$

$$+ [E_y(i, j + \frac{1}{2}, k - 1) - E_y(i, j - \frac{1}{2}, k - 1)]\Delta_i$$

$$- [E_x(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_x(i - \frac{1}{2}, j, k)]\Delta_j$$

$$- [E_y(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_y(i, j - \frac{1}{2}, k)]\Delta_i$$

$$- [E_z(i, j, k - \frac{1}{2}) - E_z(i - 1, j, k - \frac{1}{2})]\Delta_j\Delta_{k-\frac{1}{2}}/\Delta_{i-\frac{1}{2}}$$

$$- [E_z(i, j, k - \frac{1}{2}) - E_z(i, j - 1, k - \frac{1}{2})]\Delta_i\Delta_{k-\frac{1}{2}}/\Delta_{j-\frac{1}{2}}$$

$$+ [E_z(i + 1, j, k - \frac{1}{2}) - E_z(i, j, k - \frac{1}{2})]\Delta_j\Delta_{k-\frac{1}{2}}/\Delta_{i+\frac{1}{2}}$$

$$+ [E_z(i, j + 1, k - \frac{1}{2}) - E_z(i, j, k - \frac{1}{2})]\Delta_i\Delta_{k-\frac{1}{2}}/\Delta_{j+\frac{1}{2}}$$

- 13-Punkte-Formel für  $k - \frac{1}{2}$  im leitenden Halbraum:
- 10-Punkte-Formel für  $k - \frac{1}{2}$  an der Grenzfläche Erde-Luft:

$$= -[E_z(i, j, k - \frac{1}{2}) - E_z(i, j, k - \frac{3}{2})]\Delta_i\Delta_j/\Delta_{k-1}$$

- 7-Punkte-Formel für  $k - \frac{1}{2}$  im Lufthalbraum ( $= \nabla^2 E_z = 0$ ):

$$= +[E_z(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_z(i, j, k - \frac{1}{2})]\Delta_i\Delta_j/\Delta_k$$

**Fig. 6:** Diskrete Version der  $z$ -Komponente von Gl. (2). Die Boxen im oberen Teil zeigen die Beiträge des oberen und unteren Prismas sowie den Beitrag der zentralen Ebene in Fig. 5. Wenn  $E_z$  in Fig. 5 auf der Grenzfläche Erde-Luft oder im Lufthalbraum liegt, reduziert sich die 13-Punkte-Formel mit den obigen Ersetzungen zu einer 10- oder 7-Punkte-Formel.

benachbarter Zellen, d.h. durch  $E_x(i - \frac{1}{2}, j, k)$ . Entsprechende Ergebnisse gelten für  $E_y$ . Deshalb wird die FD-Approximation von (2) durch versetzte Gitter in natürlicher Weise durch die volumengemittelten elektrischen Feldkomponenten ausgedrückt. Der obere Teil von Fig. 6 bringt die explizite Darstellung der um  $(i, j, k - \frac{1}{2})$  zentrierten  $z$ -Komponente von  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times$ . Die gestrichelten Rahmen beziehen sich auf die obere und untere Zelle, der durchgezogene Rahmen gehört zur Ebene  $k - \frac{1}{2}$ . Er enthält den Beitrag von dem ersten Term der rechten Seite von (10). Es bleibt noch übrig,  $J_z(i, j, k - \frac{1}{2})$  durch volumengemittelte elektrische Feldkomponenten auszudrücken. Um im folgenden zwischen dem gemittelten und dem wahren Wert unterscheiden zu können, soll der letztere den Index 't' erhalten. Der Mittelungsprozess wird durch Überstreichen gekennzeichnet, also z.B.  $E_z = \overline{E_{zt}}$ . Aus

$$J_{zt} = \sigma_{xz}E_{xt} + \sigma_{yz}E_{yt} + \sigma_{zz}E_{zt}$$

folgt nach Division durch  $\sigma_{zz}$ , Mittelung und Division durch  $1/\sigma_{zz}$

$$J_z \simeq \{(\sigma_{xz}/\sigma_{zz})\overline{E_{xt}} + (\sigma_{yz}/\sigma_{zz})\overline{E_{yt}} + E_z\}/(1/\sigma_{zz})$$

$$\simeq \{(\sigma_{xz}/\sigma_{zz})\overline{E_{xt}} + (\sigma_{yz}/\sigma_{zz})\overline{E_{yt}} + E_z\}/(1/\sigma_{zz}).$$

Dabei wurde benutzt, daß  $E_{xt}$ ,  $E_{yt}$  und  $J_{zt}$  als tangentielle elektrische Felder und normale Stromdichte im Mittelungsvolumen nur langsam variabel sind (im Vergleich zu  $E_z$ ). Deshalb ist insbesondere  $J_{zt} \simeq J_z$ . Schließlich müssen noch  $\overline{E_{xt}}$  und  $\overline{E_{yt}}$  durch gemittelte Feldkomponenten ausgedrückt werden. Zunächst wird  $\overline{E_{xt}}$  durch die vier  $E_x$ -Komponenten approximiert, die auf den Seitenflächen des Mittelungsvolumens definiert sind,

$$\overline{E_{xt}} = \frac{1}{2(\Delta_{k-1} + \Delta_k)} \{ \Delta_{k-1}E_{xt}(i - \frac{1}{2} + 0, j, k - 1) + \Delta_k E_{xt}(i - \frac{1}{2} + 0, j, k)$$

$$+ \Delta_{k-1}E_{xt}(i + \frac{1}{2} - 0, j, k - 1) + \Delta_k E_{xt}(i + \frac{1}{2} - 0, j, k)\}.$$

Dabei wurde die mögliche Diskontinuität der wahren Werte berücksichtigt. Im nächsten Schritt wird jeder der vier wahren Werte durch Mittelwerte approximiert. Wenn man für den Augenblick annimmt,

daß die  $x$ -Achse mit einer Hauptachse von  $\underline{\sigma}$  zusammenfällt,  $J_{xt} = \sigma_{xx} E_{xt}$ , dann ergibt sich

$$J_{xt}/\sigma_{xx} = E_{xt}, \quad J_x(1/\sigma_{xx}) \simeq E_x, \quad J_x \simeq E_x/\sqrt{1/\sigma_{xx}} \simeq \sigma_{xx}(i, j, k) E_{xt}(i - \frac{1}{2} + 0, j, k)$$

und deshalb

$$\begin{aligned} E_{xt}(i - \frac{1}{2} + 0, j, k) &\simeq \frac{1}{\sigma_{xx}(i, j, k)\sqrt{1/\sigma_{xx}}} E_x(i - \frac{1}{2}, j, k) \\ &= \frac{(\Delta_{i-1} + \Delta_i)/\sigma_{xx}(i, j, k)}{\Delta_{i-1}/\sigma_{xx}(i - 1, j, k) + \Delta_i/\sigma_{xx}(i, j, k)} E_x(i - \frac{1}{2}, j, k), \end{aligned} \quad (11)$$

wo  $\overline{\quad}$  Überstreichen nun die Mittelung zwischen Zelle  $(i - 1, j, k)$  und Zelle  $(i, j, k)$  bezeichnet. Wenn eine beliebige Orientierung der Hauptachsen erlaubt ist, ist zu  $E_x(i - \frac{1}{2}, j, k)$  der Term

$$\{(\overline{\sigma_{xy}/\sigma_{xx}} - \overline{\sigma_{xy}/\sigma_{xx}})\} E_{yt} + \{(\overline{\sigma_{xz}/\sigma_{xx}} - \overline{\sigma_{xz}/\sigma_{xx}})\} E_{zt},$$

zu addieren. Dieser Term liefert nur dort einen Beitrag, wo  $\nabla\sigma_{xy}$  und/oder  $\nabla\sigma_{xz}$  eine Komponente in  $x$ -Richtung besitzt und wird in der gegenwärtigen Implementation noch ignoriert.

Das System der linearen Gleichungen wird nun dadurch aufgebaut, daß man den  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times$ -Operator auf jede *innere* Seitenfläche der Zellen, an denen eine elektrische Feldkomponente lokalisiert ist, anwendet, so daß für jede unbekannte Feldkomponente eine lineare Gleichung mit höchstens 13 nicht-verschwindenden Termen erhalten wird. An den *äußeren* Seitenflächen werden Dirichlet-Bedingungen erfüllt. Im Fall der Magnetotellurik sind dies die elektrischen Felder, die ein quasi-homogenes magnetisches Quellfeld im geschichteten anisotropen Leiter induziert. Diese Felder können etwa mit dem Algorithmus von Dekker & Hastie (1980) berechnet werden.

Die Systemmatrix  $\underline{A}$  hat die folgenden Eigenschaften:

- Die oben beschriebene Implementation der elektrischen Anisotropie erhält die Symmetrie der Matrix  $\underline{A}$ , wie sie vom isotropen Fall bekannt ist.
- Die topologische Komplexität von  $\underline{A}$  wird durch die Berücksichtigung allgemeiner Anisotropie nicht verändert, d.h. nur die 13 elektrischen Feldkomponenten, die schon im isotropen Fall durch die FD-Approximation verknüpft werden, treten im allgemein anisotropen Fall wieder auf. Nebendiagonalelemente sind nun allerdings im allgemeinen komplex. (Dies geschieht allerdings auch im isotropen Fall nach einer Vorkonditionierung.)
- $\underline{A}$  ist singular, wenn das Feld im (isolierenden) Lufthalbraum auch mit finiten Differenzen behandelt wird, und nicht der Lufthalbraum durch eine integrale Randbedingung an der Erde-Luft-Grenzfläche eliminiert wird.

## 2.2 Stabilisierung des linearen Systems

Bisher scheint die Singularität der Systemmatrix  $\underline{A}$  in der einschlägigen Literatur keine Beachtung gefunden zu haben. Dies liegt wahrscheinlich daran, daß sich die Singularität umgehen läßt, wenn man entweder im Lufthalbraum schwache Ströme zuläßt (durch Annahme einer kleinen positiven Leitfähigkeit oder durch Berücksichtigung der Verschiebungsströme) oder - wie erwähnt - eine integrale Randbedingung benutzt.

Wir diskutieren nun, wie die Singularität aus der Annahme eines stromfreien Lufthalbraumes entsteht und zeigen einen Weg zu ihrer Beseitigung. Es sei  $N$  die Dimension des linearen Systems (= Anzahl der unbekannt komplexen Feldkomponenten). Die elektrischen Feldkomponenten seien in dem komplexen Vektor  $\underline{e} \in \mathbb{C}^N$  zusammengefaßt. Ferner sei  $\underline{b} \in \mathbb{C}^N$  der Quellterm, der von den Dirichletschen Randbedingungen stammt. Mit der Systemmatrix  $\underline{A} \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$  gilt dann

$$\underline{A} \underline{e} = \underline{b}. \quad (12)$$

Unter der Voraussetzung, daß im Lufthalbraum  $\underline{\sigma} = 0$  ist und die Verschiebungsströme vernachlässigt werden, reduziert sich (2) auf

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = 0.$$



Da zusammen mit  $\nabla \cdot \nabla \times \nabla \times \underline{v} = 0$  auch die Approximation durch versetzte Gitter  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times \underline{v}$  für alle Vektoren  $\underline{v}$  verschwindet, existiert für jede Zelle  $k$  im Lufthalbraum,  $k = 1, \dots, M$ , ein reeller gitterabhängiger Vektor  $\underline{d}_k \in \mathcal{R}^N$ , der für diese Zelle die Divergenz für versetzte Gitter bildet und die Bedingung  $\underline{d}_k^T \underline{A} = 0$  erfüllt. Dabei bedeutet  $T$  die Transposition. Der Vektor  $\underline{d}_k$  hat nur sechs nichtverschwindende Komponenten für die elektrischen Feldkomponenten, die den Seitenflächen der Zelle  $k$  entsprechen. Deshalb sind die sechs Gleichungen, die sich auf die Seitenflächen von Zelle  $k$  beziehen, *linear abhängig*, so daß der Rank von  $\underline{A}$  nur  $N - M$  ist. Wegen dieses Informationsdefizits kann  $\underline{e}$  nicht eindeutig bestimmt werden. Aus der Symmetrie von  $\underline{A}$  folgt, daß neben  $\underline{d}_k^T \underline{A} = 0$  auch  $\underline{A} \underline{d}_k = 0$ , d.h.  $\underline{d}_k$  gehört zum Nullraum von  $\underline{A}$ . Deshalb ist mit jeder Lösung  $\underline{e}$  von (12) auch

$$\underline{e} + \sum_{k=1}^M \alpha_k \underline{d}_k$$

eine Lösung. Dabei sind  $\alpha_k$  beliebige komplexe Zahlen. Diese Zahlen können jedoch durch die physikalische Bedingung bestimmt werden, daß im Lufthalbraum wegen fehlender Ladungsanhäufungen  $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ . Wenn man diese Bedingung für jede Zelle  $\ell$  des Lufthalbraumes erfüllt, ergibt sich

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k (\underline{d}_\ell^T \underline{d}_k) = -\underline{d}_\ell^T \underline{e}, \quad \ell = 1, \dots, M.$$

Dies nicht-singuläre System gestattet eine eindeutige Bestimmung  $\alpha_k$ , und damit eine eindeutige Bestimmung des elektrischen Feldes.

In der Praxis wird ein quellfreies elektrisches Feld im Lufthalbraum schon beim Aufbau der Systemmatrix erzwungen. Dies wird im unteren Teil von Fig. 6 näher ausgeführt: Wenn das Niveau  $(i, j, k - \frac{1}{2})$  mit der Grenzfläche Erde-Luft zusammenfällt, wird der Beitrag der oberen Zelle (kurze Striche) - da für diese Zelle  $\nabla \cdot \underline{E} = 0$  - ersetzt durch die Feldkomponenten  $E_z(i, j, k - \frac{1}{2})$  und  $E_z(i, j, k - \frac{1}{2})$ . Damit reduziert sich die 13-Punkte-Formel auf eine 10-Punkt-Formel. Wenn  $(i, j, k - \frac{1}{2})$  im Lufthalbraum liegt, werden auch die Beiträge der unteren Zelle (lange Striche) ersetzt durch  $E_z(i, j, k - \frac{1}{2})$  und  $E_z(i, j, k + \frac{1}{2})$ , so daß man zu einer 7-Punkt-Formel gelangt. Dies ist gerade die FD-Approximation von  $\nabla^2 E_z = 0$  integriert über das Mittelungsvolumen. Eine hybride 10-Punkte-Formel wird auch an allen anderen Randpunkten des Lufthalbraumes verwendet. All diese Ersetzungen bewahren die Symmetrie von  $\underline{A}$ .

Das stabilisierte lineare komplexe Gleichungssystem mit seiner dünnbesetzten symmetrischen Matrix  $\underline{A}$  wird nach der Methode der Konjugierten Gradienten gelöst. Bisher wird nur die einfache, aber effiziente Äquilibrierung (Jacobi scaling) zur Vorkonditionierung benutzt. Da  $\underline{A}$  indefinit ist, führt die komplexe Version der gewöhnlichen Konjugierten Gradienten (Jacobs 1981) zu einem erraticen Verhalten der der Summe der Residuenquadrate. Während auch Bi-CGSTAB (stabilized Bi-Conjugate Gradients-Squared method) von van der Vorst (1992), nicht sehr erfolgreich war, lieferte die QMR-(quasi-minimal residual)-Methode von Freund (1992) befriedigende Ergebnisse. Die QMR-Methode minimiert bei jeder Iteration die  $L_2$ -Norm der Koeffizienten in einer Entwicklung des Residuenvektors nach den orthonormalen Lanczos-Vektoren und führt zu einem glatten, aber nicht notwendig monotonen Abfall der Residuenquadratsumme. Sehr ähnliche Erfahrungen werden von Newman & Alumbaugh (1995) berichtet.

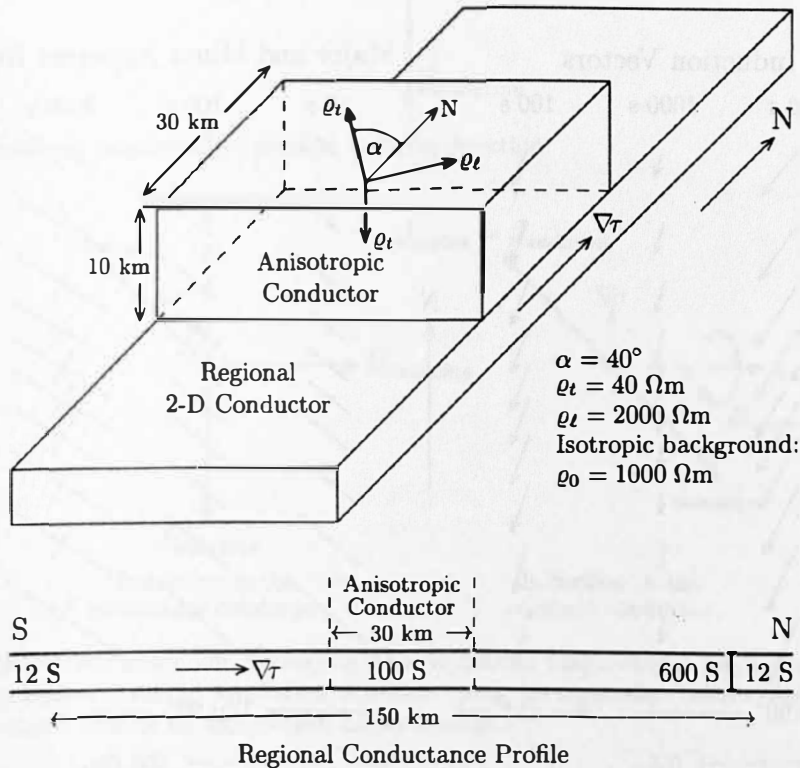
### 3 Bedeutung der elektrischen Anisotropie für magnetische und magnetotellurische Übertragungsfunktionen

Ein schönes Leitfähigkeitsmodell zur Untersuchung der Auswirkungen elektrischer Anisotropie auf die magnetischen und magnetotellurischen Übertragungsfunktionen ist das Grundmodell für die Leitfähigkeitsverteilung in der Umgebung der KTB, das von Markus Eisel zur Verfügung gestellt wurde und (mit unwesentlicher Modifikation) in Fig. 7 gezeigt wird. Der anomale Leiter besteht aus zwei Teilen:

- **Regionaler 2D-Leiter:** Dieser dünne E-W streichende isotrope Leiter liegt in einer Tiefe von  $\simeq 10$  km. Seine Leitfähigkeit steigt nach N an. Im Modell von Fig. 7 ist der Leiter durch seinen Leitwert (= integrierte Leitfähigkeit)  $\tau$  dargestellt.  $\tau$  variiert von  $\simeq 12$  S im S bis  $\simeq 600$  S im N (unterer Teil von Fig. 7).

- **Anisotroper Leiter in der oberen Kruste:** Dieser  $\approx 10$  km mächtige, hochgradig anisotrope Leiter liegt über dem regionalen Leiter und hat eine N-S Ausdehnung von  $\approx 30$  km. Die horizontalen Anisotropie-Achsen weichen deutlich von den Achsen ab, die von dem regionalen Leiter definiert werden: Die Vorzugsrichtung für die elektrischen Ströme weist etwa in NW-SE Richtung mit einem transversen spezifischen Widerstand von  $\varrho_t = 40 \Omega\text{m}$ . Der longitudinale Widerstand ist etwa 50-mal größer,  $\varrho_l = 50\varrho_t$ .

Die Leiter liegen in einem homogenen Hintergrund mit  $\varrho_0 = 1000 \Omega\text{m}$ .



**Fig. 7:** Ein erstes Modell für die elektrische Leitfähigkeitsverteilung in der Umgebung der KTB (nach M. Eisel, persönl. Mitteilung)

Bevor wir die elektromagnetische Kopplung zwischen beiden Leitern diskutieren, sei noch einmal kurz auf die konventionale Definition der Übertragungsfunktionen hingewiesen. Angenommen wird ein quasi-homogenes induzierendes Magnetfeld. Es seien  $\underline{E}_s = \underline{E}_s(\underline{r}, \omega)$  und  $\underline{B}_s = \underline{B}_s(\underline{r}, \omega)$  die horizontalen Projektionen von  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  am Ort  $\underline{r}$ . Dann ist der  $(2 \times 2)$  Impedanztensor  $\underline{Z} = \underline{Z}(\underline{r}, \omega)$  definiert durch

$$\underline{E}_s = \underline{Z} \underline{B}_s.$$

Ist  $Z_{kl}$  ein Nebendiagonalelement von  $\underline{Z}$  in der Darstellung von  $\underline{Z}$  für eine spezielle Wahl der horizontalen Achsen, dann

$$\varrho_{akl} := \frac{\mu_0}{\omega} |Z_{kl}|^2$$

ist der entsprechende *scheinbare* Widerstand. Ausgezeichnet sind die Orientierungen der horizontalen Koordinaten, in denen  $\varrho_{akl}$  seinen größten ('major') und kleinsten ('minor') Wert annimmt.

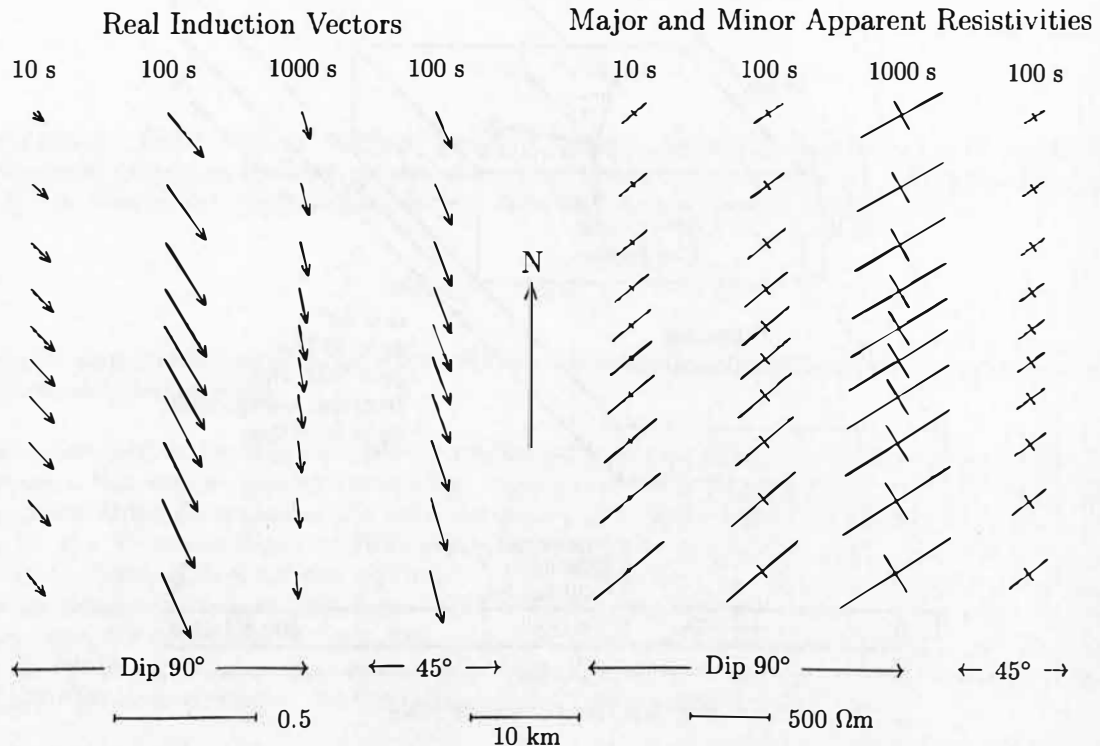
Der magnetische Induktionsvektor ('Tipper')  $\underline{T}$  ist definiert durch

$$\underline{B}_z = \underline{T} \underline{B}_s,$$

wobei  $\underline{B}_z = B_z(\underline{r}, \omega)$  die nach unten gerichtete Komponente von  $\underline{B}$  ist. Wenn wir im Moment ignorieren, daß alle Felder komplexwertig sind, dann zeigt  $\underline{T}$  in diejenige Richtung von  $\underline{B}_s$ , die das größte (positive)  $B_z$  erzeugt.

$\underline{Z}$  und  $\underline{T}$  werden numerisch dadurch bestimmt, daß man  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{B}_s$  und  $B_z$  für zwei linear unabhängige Polarisationen des externen Magnetfeldes bestimmt.

Für die erste Diskussion wird das Modell von Fig. 7 dahingehend vereinfacht, daß der anisotrope Leiter in horizontaler Richtung als unbegrenzt angenommen wird und deshalb durch eine homogene, anisotrope Schicht dargestellt werden kann. Das Modell entartet dann in ein 2D-Modell, in dem die Anisotropie jedoch keine Trennung mehr in E- und B-Polarisation erlaubt. Diese einfache, aber wichtige Modellklasse ist sorgfältig von Pek (1994), Schmucker (1994) und Pek & Verner (1996) behandelt worden.

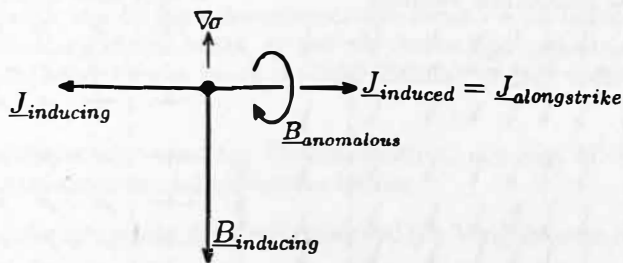


**Fig. 8:** Magnetische und magnetotellurische Übertragungsfunktionen für eine vereinfachte 2D-Version des Modells von Fig. 7. Die Daten sind gegeben entlang N-S Profilen im zentralen Teil von Fig. 7). Betrachtet werden drei Perioden für den Fall, daß die gutleitenden Ebenen des anisotropen Leiters senkrecht stehen (wie in Fig. 7) und eine Periode für den Fall, daß die Schichten in Richtung NE mit  $45^\circ$  einfallen.

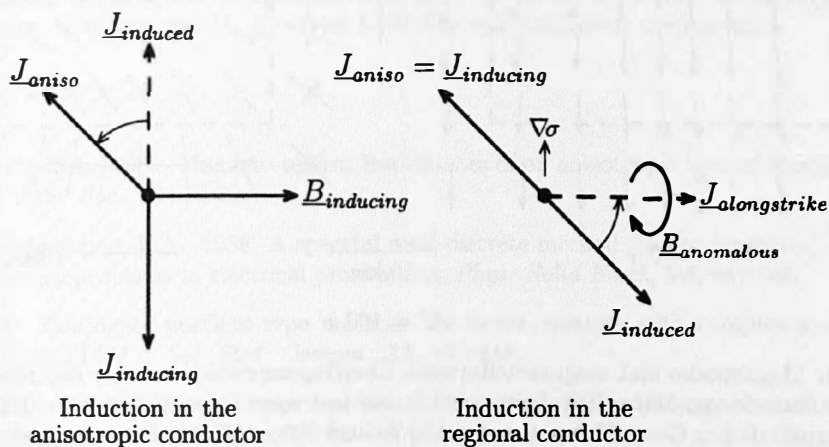
Für die vereinfachte Version des Modells von Fig. 7 zeigt Fig. 8 den Realteil von  $\underline{T}$  (linke Seite) sowie Richtung und Größe der größten und kleinsten scheinbaren Widerstände (rechte Seite). Die eingezeichnete Richtung ist die Richtung des zugehörigen elektrischen Feldes. Zunächst betrachten wir die ersten drei Spalten der linken Seite. Sie zeigen für drei Perioden die Induktionsvektoren für vertikal stehende gutleitende Schichten im anisotropen Bereich (wie in Fig. 7). Für die lange Periode von 1000 s zeigen die Induktionsvektoren nach S, d.h. ein südwärts gerichtetes Magnetfeld erzeugt das größte  $B_z$ . Diese Richtung war zu erwarten, da (in isotropen) Leitern die Induktionsvektoren von den guten Leitern fortzeigen. Die physikalische Erklärung liefert Fig. 9 (oberer Teil): Ein südwärts weisendes Magnetfeld wird von westwärts fließenden ionosphärischen Strömen erzeugt. Folglich fließen die induzierten Ströme in der Erde ostwärts - ihren Quellen entgegenwirkend. Wegen des Leitfähigkeitsanstiegs fließen sie bevorzugt im nördlichen Teil des regionalen Leiters. Dieser N-S gradient produziert dann eine positive magnetische Vertikalkomponente. Die lange Periode führt im relativ schlecht leitenden anisotropen Leiter nur zu einem schwachen Induktionseffekt, so daß er weitgehend unsichtbar bleibt (abgesehen von einer kleinen Auslenkung der Vektoren nach E).

Diese Situation ändert sich für die kürzere Periode von 100 s: Wegen der verstärkten Induktion im regionalen Leiter wächst die Länge der Induktionsvektoren. Darüber hinaus besteht jetzt eine starke

a) Inducing magnetic field normal to strike direction of regional conductor:



b) Inducing magnetic field parallel to strike direction:



**Fig. 9:** Modellvorstellungen zur Erzeugung eines vertikalen Magnetfeldes aus induzierenden Magnetfeldern a) *senkrecht* und b) *parallel* zur Streichrichtung des regionalen Leiters (Aufsicht). Im Fall b) wird  $B_z$  durch Ströme im anisotropen Leiter erzeugt.

elektromagnetische Kopplung zwischen regionalem und anisotropem Leiter, die zu einer starken Ostauslenkung der Induktionsvektoren führt, d.h. ein Magnetfeld in Ostrichtung (= Streichrichtung) erzeugt nun ein vertikales Magnetfeld. Die physikalische Interpretation gibt Fig. 9 (unten): Das ostwärts gerichtete induzierende Feld wurde durch einen südwärts gerichteten ionosphärischen Strom erzeugt, die in der Erde induzierten Ströme fließen deshalb nordwärts, werden in anisotropen Leiter aber in die gutleitende SE-NW Richtung abgelenkt. Diese abgelenkten Ströme koppeln nun mit dem regionalen Leiter, wo sie die Rolle von induzierenden Strömen haben. Die induzierten Ströme fließen dann in SE Richtung und haben damit auch eine Ostkomponente (in Streichrichtung). Genau wie im Fall a) (oberer Teil), führt die höhere Leitfähigkeit im N dort zu einer höheren Stromdichte und damit im S zu einem positiven  $B_z$ . – Wenn sich die Periode auf 10 s vermindert, bleibt die starke Kopplung zwischen den beiden Leitern bestehen, aber der Skineneffekt im anisotropen Leiter schirmt das  $B_z$  des regionalen Leiters zunehmend ab.

Die vierte Spalte der linken Seite von Fig. 8 bezieht sich auf den Fall, daß die gutleitende Richtung des anisotropen Leiters nicht mehr vertikal steht, sondern  $45^\circ$  in Richtung NE abtaucht. Die Verminderung des Einfallwinkels vermindert auch den Einfluß der Anisotropie: Die Ströme werden schwächer in Richtung NE abgelenkt, die Ostkomponente der Induktionsvektoren nimmt ab und der verstärkte Skineneffekt des anisotropen Leiters, in dem jetzt der niedrige Widerstand  $\rho_t$  fast voll zur Wirkung kommt, verkürzt die Induktionsvektoren.

Wir wenden nun unsere Aufmerksamkeit auf die magnetotellurischen Übertragungsfunktionen, die in der rechten Hälfte von Fig. 8 durch Größe und Richtung von größtem und kleinstem Widerstand dargestellt werden: Als generelle Eigenschaft widerspiegeln diese Daten die die NW-SE und SW-NE streichenden Hauptachsenrichtungen des anisotropen Leiters (siehe Fig. 7). Die Widerstandsanisotropie vermindert sich mit der Periode: Die längeren Perioden fühlen mehr und mehr den isotropen Widerstand

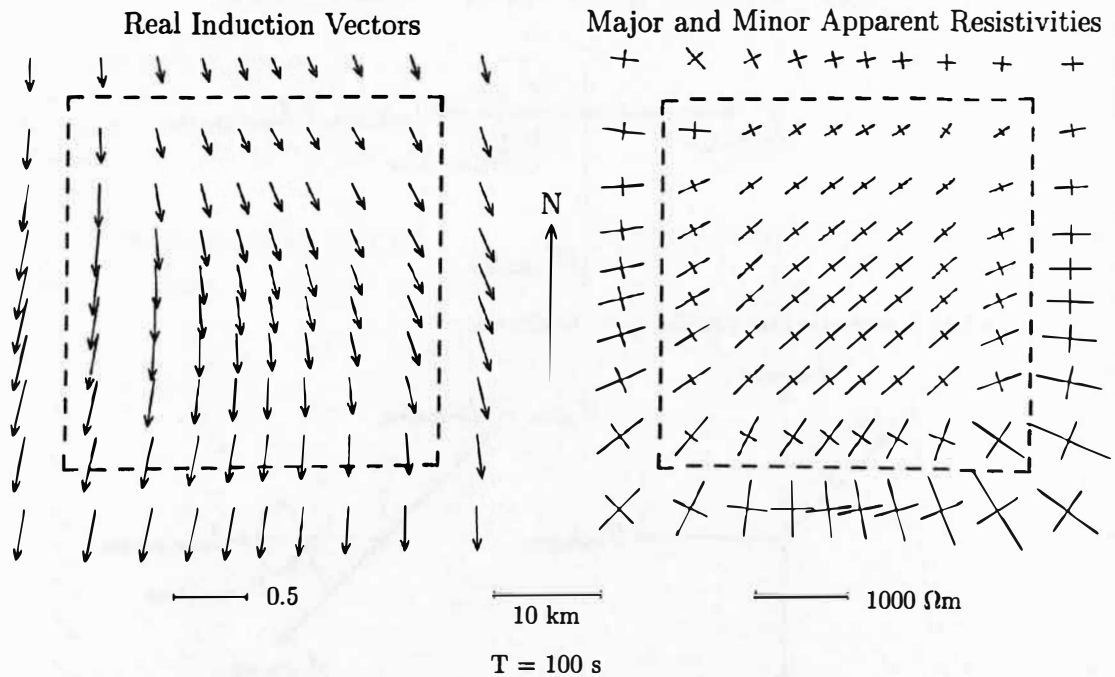


Fig. 10: Magnetische und magnetotellurische Übertragungsfunktionen für das Modell von Fig. 7 für eine Periode von 100 s. Die Leiter sind in ein isotropes Substrat mit  $\varrho_0 = 1000 \Omega\text{m}$  eingebettet. Die zusätzlichen Grenzflächen verursachen weitere Störungen des Induktionsvektors. Im Norden ist der dämpfende Einfluß des regionalen Leiters noch in den scheinbaren Widerständen sichtbar, im Süden nähern sie sich dagegen dem Widerstand des isotropen Substrats.

$\varrho_0 = 1000 \Omega\text{m}$  des Hintergrundes, der Abfall des Widerstandes in Richtung Norden widerspiegelt den Leitfähigkeitsanstieg im regionalen Leiter. Die Abnahme der Widerstände mit fallender Periode resultiert von der wachsenden induktiven Effizienz des regionalen Leiters. Für noch kleinere Perioden jedoch sollten die Widerstände nach Abschirmung des regionalen Leiters wieder ansteigen bis sie die wahren Werte von  $\varrho_t$  und  $\varrho_l$  erreichen.

Die bemerkenswerteste Eigenschaft (horizontaler) Anisotropie war in dem obigen 2D-Modell das Auftreten einer Komponente des Induktionsvektors in Streichrichtung des regionalen Leiters. Dies ist eine generelle Erscheinung, die immer auftritt, wenn ein länglicher (isotroper) Leiter in einem anisotropen Substrat eingebettet ist und die Achsen beider Leiter deutlich voneinander abweichen. Dies bedeutet, daß E - Polarisation (elektrisches Feld in Streichrichtung) und B-Polarisation (magnetisches Feld in Streichrichtung) nicht mehr entkoppelt sind wie im isotropen 2D-Fall. Mathematisch drückt sich dies dadurch aus, daß die rotationsinvariante Spur des Impedanztensors nicht mehr verschwindet.

Bisher haben wir nur die vereinfachte Version des Modells von Fig. 7 betrachtet. Nun kehren wir zum Originalmodell zurück und zeigen in Fig. 10 die Übertragungsfunktionen für die Periode  $T = 100 \text{ s}$ . Der isotrope Hintergrundwiderstand  $\varrho_0 = 1000 \Omega\text{m}$  wird von den scheinbaren Widerständen im Süden des anomalen Quadrats erreicht. Der Einfluß dieses isotropen Substrats schwächt die starke anomale Ostkomponente des Induktionsvektors, den wir für diese Periode in Fig. 8 angetroffen hatten.



## Zusammenfassung

- Anisotrope Leitfähigkeitsmodelle können nicht mehr leisten als *isotrope* 3D-Modelle beliebiger Komplexität. Dies ist deshalb möglich, weil für die elektromagnetische Induktion die mikroskalige Struktur des Leitungsmechanismus unzugänglich bleibt, so daß alle Anisotropie gedeutet werden kann durch *strukturelle* Anisotropie, hervorgerufen durch räumliche Mittelwerte über *isotrope* Leiter mit Vorzugsrichtungen.
- Es wird kurz ein FD-Algorithmus mit versetzten Gittern skizziert, mit dem 3D-Leitfähigkeitsverteilungen mit beliebiger Anisotropie modelliert werden können.
- Die Berücksichtigung der Anisotropie erhöht den Rechenaufwand (im Vergleich zum isotropen Fall) nicht wesentlich.
- Die verschwindende Leitfähigkeit im Lufthalbraum führt zu einem singulären Gleichungssystem, das durch explizite Erfüllung von  $\nabla \cdot \underline{E} = 0$  im Lufthalbraum stabilisiert werden kann.

## Literatur

- Dekker, D.L. & Hastie, M.L., 1980. Magneto-telluric impedances of an anisotropic layered Earth model, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **61**, 12-20.
- Druskin, V.L. & Knizhnerman, L.A., 1988. A spectral semi-discrete method for the numerical solution of 3-D nonstationary problems in electrical prospecting, *Phys. Solid Earth*, **24**, 641-648.
- Freund, R.W., 1992. Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **13**, 425-448.
- Hashin, Z. & Shtrikman, S., 1962. A variational approach to the theory of effective magnetic permeability of multiphase materials, *J. Appl. Phys.*, **33**, 3125-3131.
- Jacobs, D.A.H., 1981. The exploitation of sparsity by iterative methods. In *Sparse matrices and their uses*, pp. 191-222, Duff, I.S. ed., Springer-Verlag Berlin.
- Jikov, V.V., Kozlov, S.M. & Oleinik, O.A., 1994. Homogenization of differential operators and integral functionals. Springer-Verlag, Berlin.
- Madden, T.R. & Mackie, R.L., 1989. Three-dimensional magnetotelluric modeling and inversion, *Proc. IEEE*, **77**, 318-333.
- Newman, G.A. & Alumbaugh, D.L., 1995. Frequency-domain modelling of airborne electromagnetic responses using staggered finite differences, *Geophys. Prosp.* **43**, 1021-1042.
- Onsager, L., 1931. Reciprocal relations in irreversible processes, *Phys.Rev.*, **37**, 405-426.
- Pek, J., 1994. 2-D numerical modelling of magnetotelluric fields in anisotropic structures - an FD algorithm. In *Protokoll Kolloq. 'Elektromagnetische Tiefenforschung', Höchst im Odenwald, 28.3.-31.3.1994*, pp. 27-37, Bahr, K. & Junge, A. eds., Deutsche Geophysikalische Gesellschaft Hannover.
- Pek, J. & Verner, T., 1996. Finite difference modelling of magnetotelluric fields in 2-D anisotropic media, *Geophys. J. Int.* (in press).
- Schmucker, U., 1994. 2-D Modellrechnungen zur Induktion in inhomogenen dünnen Schichten über anisotropen geschichteten Halbräumen. In *Protokoll Kolloq. 'Elektromagnetische Tiefenforschung', Höchst im Odenwald, 28.3.-31.3.1994*, pp. 3-26, Bahr, K. & Junge, A. eds., Deutsche Geophysikalische Gesellschaft Hannover.
- Smith, J.T., 1992. Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, *International Association of Geomagnetism and Aeronomy, 11th Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth, Wellington, New Zealand*, poster presentation and manuscript.
- Wang, T. & Hohmann, G.W., 1993. A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modelling, *Geophysics*, **58**, 797-809.