

# Dreidimensionale Geoelektrik

M. Günther

## Zusammenfassung

Bei der Erkundung dreidimensionaler Störkörper mit Hilfe der Gleichstromgeoelektrik kann im Gegensatz zur "klassischen" Vorgehensweise nicht mit  $\rho_a$  Kurven, sondern mit Potentialfeldern gearbeitet werden.

Als Meßgebiet wurde eine dike-ähnliche Leitfähigkeitsanomalie (Barytgang) im kristallinen Odenwald gewählt und mit Hilfe einer Pol-Dipol Anordnung flächenhaft vermessen. Eine Einspeiseelektrode wurde in einer Entfernung von ca. 1.5 km platziert, mit der anderen wurde ein Gebiet von  $50 \times 50$  m im Abstand von 5 bis 10 m abgetastet. Je zwei Potentialelektrodenpaare wurden orthogonal zueinander an drei verschiedenen Stellen eingegraben.

Die Interpretation wurde mit Hilfe der Potentialfelder vorgenommen, indem das vermessene Feld auf ein Modellfeld bezogen und das Residuum minimiert wurde. Zur Modellfindung wurde die Methode der Finiten Differenzen verwendet (Spitzer, 1994).

## Die Messung

Bei der Interpretation von gleichstromgeoelektrischen Daten ist es von Vorteil, jedem gemessenen Potential eindeutig einen Ort zuzuordnen zu können. Eine Dipol-Pol Anordnung (zwei Einspeiseelektroden, eine Potentialelektrode, eine Bezugselektrode im Unendlichen = Infinitumelektrode) erfüllt diese Voraussetzung. In der Praxis ist diese Anordnung jedoch nur schwer zu realisieren, da bedingt durch den "unendlichen" Abstand der Potentialelektroden das Rausch-Nutz Signal Verhältnis sehr ungünstig wird. Daher wurde das Prinzip der Reziprozität genutzt: Werden Potential und Einspeiseelektroden vertauscht, so bleibt der Meßwert davon unbeeinflusst [2].

Das Prinzip der Reziprozität beruht auf der Symmetrie der Greenschen Funktion in der Gleichstromgeoelektrik. Die *zweite Greensche Identität* (*Greenscher Satz*) lautet:

$$\int_V \Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi \, d\underline{x} = \int_{(V)} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d(V), \quad (1)$$

wobei  $\Phi$  und  $\Psi$  skalare Funktionen,  $V$  ein Volumen,  $(V)$  dessen Oberfläche und  $\frac{\partial}{\partial n}$  die Normalenableitungen beschreibt. Um das Reziprozitätsprinzip zu beweisen, muß gezeigt werden, daß

$Pot(\underline{x}, \underline{x}') = Pot(\underline{x}', \underline{x})$  gilt. Dies gelingt, indem man in (1)  $\Phi = Pot(\underline{x}', \underline{y})$  und  $\Psi = Pot(\underline{x}, \underline{y})$  einsetzt, wobei  $\underline{x}$  bzw.  $\underline{x}'$  den Quellpunkt und  $\underline{y}$  die Integrationsvariable beschreibt. Für beide Funktionen gilt die Poissongleichung.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_V \Phi(\underline{x}', \underline{y}) \nabla^2 \Psi(\underline{x}, \underline{y}) - \Psi(\underline{x}, \underline{y}) \nabla^2 \Phi(\underline{x}', \underline{y}) \, d\underline{y} &= \int_{(V)} \Phi(\underline{x}', \underline{y}) \frac{\partial \Psi(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n} - \Psi(\underline{x}, \underline{y}) \frac{\partial \Phi(\underline{x}', \underline{y})}{\partial n} \, d(V) \\ &\Leftrightarrow \\ \int_V -\Phi(\underline{x}', \underline{y}) 4\pi \delta(\underline{x} - \underline{y}) + \Psi(\underline{x}, \underline{y}) 4\pi \delta(\underline{x}', \underline{y}) \, d\underline{y} &= \\ -4\pi [\Phi(\underline{x}', \underline{x}) - \Psi(\underline{x}, \underline{x}')] & \end{aligned} \quad (2)$$

Integriert man über den gesamten Raum (Kugel mit unendlichem Radius) und setzt die aus der Potentialtheorie bekannten Ergebnisse für Neumannsche und / oder Dirichletsche Randbedingungen ein, so wird die rechte Seite von Gl. 2 gleich Null. Es ergibt sich der Beweis

$$\Phi(\underline{x}', \underline{x}) = \Psi(\underline{x}, \underline{x}')$$

Das Prinzip der Reziprozität konnte mit Messungen bestätigt werden. Im weiteren tragen die Bezeichnungen der Elektroden dem realen Meßaufbau Rechnung.

Das vermessene Gebiet hat eine Ausdehnung von  $50 \times 50$  m; der Abstand zwischen Strom- und Infimumelektrode sollte nach Telford et.al. [5] mindestens das zehnfache der Auslage betragen, um dem "unendlichen" Abstand numerisch zu entsprechen. Die Elektrode wurde in einem Abstand von 1,5 km plaziert, also ca. dem Dreißigfachen der größten Auslage; damit beträgt der Einfluß der Infimumelektrode unabhängig von der Elektrodenkonfiguration auf das gemessene Potential unter 1%.

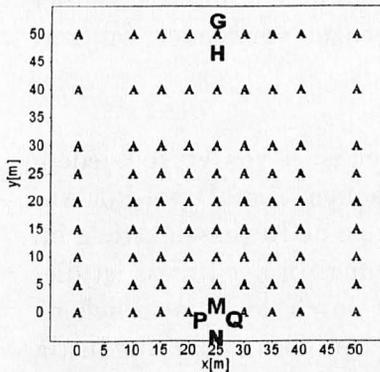


Abbildung 1: *Realer Meßaufbau: M, N / P, Q / G, H: Potentialelektroden; A: Positionen der Stromelektrode.*

Die Potentialelektroden wurden in einem Abstand von 6 m plaziert und an einem festen Ort belassen, während mit der Strom-Elektrode das Meßgebiet flächenhaft abgetastet wurde (Abb. 1). Insgesamt wurden die Messungen für 6 Potentialelektroden-Paare durchgeführt; im weiteren sei jedoch nur auf zwei dieser Messungen eingegangen. In Abb. 2b1 kann man für  $35 < y < 45$  einen Bereich erniedrigten Widerstands erkennen, während in Abb. 2b2 dieser für  $20 < y < 25$  zu erkennen ist; dies ist ein klarer Hinweis auf eine laterale Leitfähigkeitsanomalie parallel zur x-Achse, da diese Anisotropie nur mit dem Abschirmeffekt einer dikeähnlichen Struktur zu erklären ist: Bedingt durch den lateralen Leitfähigkeitskontrast fließen die Ströme vorwiegend im guten Leiter, wodurch die Stromdichte im schlechten Leiter und auch dahinter abnehmen muß. Dadurch ergeben sich zwei Bereiche unterschiedlichen scheinbaren spezifischen Widerstands vor und hinter der Struktur.

Weiterhin kann man in Abb. 2a) und b) eine annähernd symmetrische Verteilung der Isolinien beobachten, was darauf hinweist, daß die Struktur parallel zur x-Achse streicht.

Die Meßdaten in  $90^\circ$  Richtung zu den Potentialelektroden wurden in der Darstellung nicht berücksichtigt, da sie in diesen Bereichen sehr kleine Spannung aufweisen, und deshalb keine sichere Aussagekraft besitzen.

Für die anderen Konfigurationen der Potentialelektroden ergaben sich ähnliche Effekte wie in obigem Beispiel, was die Annahme einer lateralen Leitfähigkeitsanomalie in dem vermuteten Bereich erhärtet.

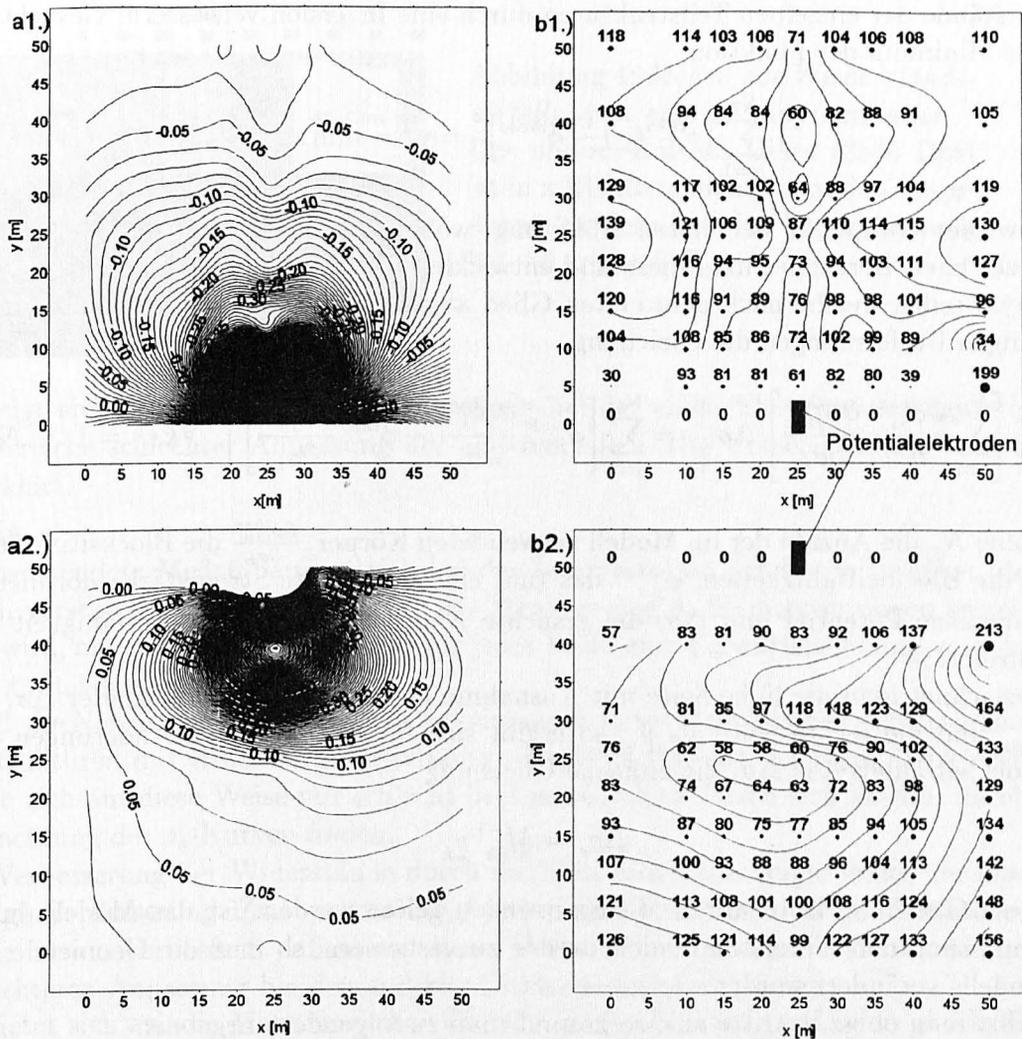


Abbildung 2: a) Potentialwerte normiert auf 1[A]; Isolinienabst. 0.01 [V] b.)  $\rho_a$ -Werte; Isolinienabst. 10 [ $\Omega\text{m}$ ] (weitere Erläuterungen siehe Text)

## Die Interpretation

Bei der "klassischen" Vorgehensweise wird das gemessene Potential mit Hilfe eines Konfigurationsfaktors in einen  $\rho_a$ -Wert umgerechnet. Dies ist äquivalent mit der Normierung der Potentialwerte auf einen homogenen Halbraum, wobei Abweichungen von diesem den Kurvenverlauf der  $\rho_a$ -Werte bestimmen. Es liegt daher nahe, das Potential auf ein favorisiertes Interpretationsmodell zu normieren, wodurch sich Abweichungen von diesem lokalisieren lassen. Die Lokalisation kann bei einer mehrdimensionalen Struktur am geeignetsten mit Hilfe der Sensitivitäten vorgenommen werden, da diese den Einfluß jeder Teilstruktur auf den Meßwert widerspiegeln. Bei einer dreidimensionalen Betrachtung ist es wegen der langen Rechenzeit ausgeschlossen, die Sensitivitäten für jede Modell-Zelle zu berechnen. Daher verwendet man "Blocksensitivitäten", welche die Sensitivität jedes im Modell angegebenen Blocks wiedergeben. Ist eine Abweichung der Daten mit der verwendeten Modellgeometrie nicht zu verbessern, so ist diese unter Berücksichtigung der Sensitivitäten zu verändern.

Ist die Geometrie der Struktur auf diese Weise angepaßt, so lassen sich die Wi-

derstände der einzelnen Teilstrukturen durch eine Inversion verbessern: Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$\sum_{j=1}^{N_M} [\phi_j^{theo}(\underline{\sigma}) - \phi_j^{mess}]^2 = \chi^2 = \min. \quad (3)$$

bzw. der Nullpunkt der ersten Ableitung, wobei  $N_M$  die Anzahl der Meßpunkte bezeichnet. Berechnet man diese und entwickelt das Modellpotential  $\phi^{theo}$  in eine Taylorreihe, welche nach dem ersten Glied abgebrochen wird, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{N_\sigma} \left[ \sum_{j=1}^{N_M} \frac{\partial \phi_{ji}^{theo}}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \phi_{jk}^{theo}}{\partial \sigma_k} \right] \Delta \sigma_i \Big|_k = \sum_{j=1}^{N_M} \left[ \phi_j^{mess} \frac{\partial \phi_{jk}^{theo}}{\partial \sigma_k} - \phi_j^{theo} \frac{\partial \phi_{jk}^{theo}}{\partial \sigma_k} \right] \Big|_k \quad \forall k (k = 1, \dots, N_\sigma), \quad (4)$$

wobei  $N_\sigma$  die Anzahl der im Modell verwendeten Körper,  $\frac{\partial \phi_{mn}^{theo}}{\partial \sigma_i}$  die Blocksitivitäten,  $\sigma_i$  die Blockleitfähigkeiten,  $\phi_j^{mess}$  das (auf eine bestimmte Stromstärke normierte) gemessene Potential und  $\Delta \sigma_i$  die gesuchte Änderungen der Blockleitfähigkeit beschreibt.

Bezeichnet man die linke Seite mit Ausnahme der unbekannt Parameter  $\Delta \sigma_i$  als  $\underline{M}_{ik}$  und die rechte Seite als  $\underline{y}_k$ , so ergibt sich für die gesuchten Änderungen der Blockleitfähigkeiten  $\Delta \sigma_i$  die einfache Gleichung

$$\underline{\Delta \sigma}_i = \underline{M}_{ik}^{-1} \underline{y}_k. \quad (5)$$

Diese Gleichung kann durch Matrixinversion gelöst werden. Ist das Modell durch Anpassung der Widerstände nicht weiter zu verbessern, so muß die Geometrie des Modells verändert werden.

Führt man obige Schritte aus, so kommt man zu folgendem Ergebnis:

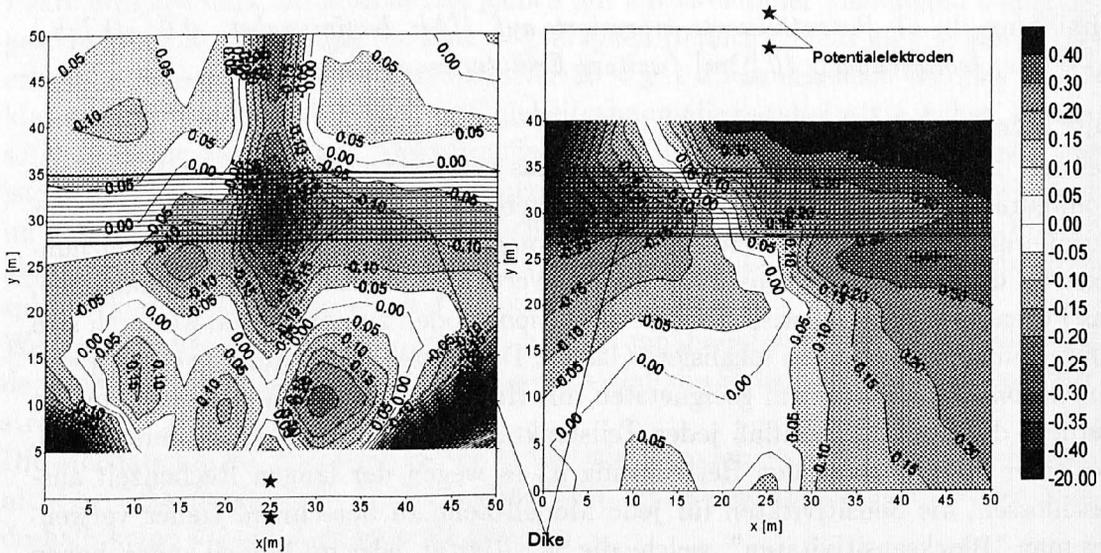


Abbildung 3: Anpassung:  $\phi_{mess}/\phi_{modell} - 1$ . Die Messwerte in  $90^\circ$  Richtung zu den Potentialelektroden wurden vernachlässigt.

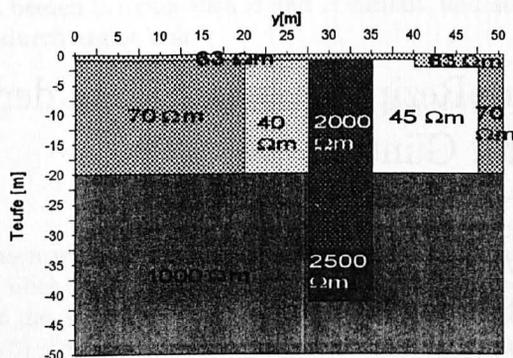


Abbildung 4: Modell der Widerstandsverteilung in eine 2D Approximation. Der untere Teil des Dikes (2500  $\Omega m$ ) ist in x Richtung nicht unendlich ausgehnt, sondern hat eine Unterbrechung bei  $-5 < x < 5m$ .

Es zeigt sich, daß Bereiche guter Anpassung bei der einen Elektronenkonfiguration Bereiche schlechter Anpassung der anderen fallen. Die Ursache dafür ist noch ungeklärt.

### Fazit

Der verwendete Meßaufbau hat sich bei der Interpretation der Daten bewährt, da durch verschiedene "Anstrahlwinkel" der Struktur das Auflösungsvermögen gesteigert wird, ohne bei der Modellierung für jedes Profil eine Vorwärtsrechnung vornehmen zu müssen.

Durch die Normierung der Potentiale auf ein favorisiertes Modell lassen sich großräumige Strukturen mit Hilfe der Sensitivitäten schnell lokalisieren. Kleinere Strukturen lassen sich auf diese Weise nur schlecht bestimmen; diese lassen sich leichter durch Betrachtung der  $\rho_a$ -Kurven finden.

Die Verbesserung der Widerstände durch die Matrixinversion zeigte leider nur eine geringe Verbesserung. Zwar wurde die Anpassung für eine bestimmte Elektrodenkonfiguration verbessert, daß so erhaltene Modell führte jedoch meistens zu einer schlechteren Anpassung bei den anderen Elektrodenkonfigurationen.

Es bietet sich an, die Matrixinversion für alle Elektrodenkonfigurationen gleichzeitig mit der verallgemeinerten Matrixinversion durchzuführen, um ein konsistentes Ergebnis zu erhalten.

## Literatur

- [1] J.D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter&Co, Berlin, 1993.
- [2] D. S. Parasnis. Reciprocity theorem in geoelectric and geoelectromagnetic work. *Geoplotation*, 25:177–198, 1988.
- [3] K. Spitzer. Dreidimensionale geoelektrische Modellrechnung nach der Methode der Finiten Differenzen. Bericht Archiv-Nr.: 111 551, Niedersächsisches Landesamt für Bodenforschung, Geowissenschaftliche Gemeinschaftsaufgaben, 1993.
- [4] K. Spitzer. Dreidimensionale gleichstromgeoelektrische FD-Modellrechnung mit symmetrischer Koeffizientenmatrix mittels der Methode der vorkonditionierten konjugierten Gradienten. Bericht Archiv-Nr.: 112 229, Niedersächsisches Landesamt für Bodenforschung, Geowissenschaftliche Gemeinschaftsaufgaben, 1994.
- [5] W.M. Telford, L.P. Geldart, and R.E. Sheriff. *Applied Geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.