

Zum Diskussionsbeitrag 'Fragen zum Reziprozitätsprinzip in der Geoelektrik' von M. Günther

Josef Pek

Geophysikalisches Institut, Akad. d. Wiss. der Tschech. Rep., Prag
Boční II/1401, CZ-14131 Prag 4-Spořilov, Tschechische Republik

Die im Laufe des Kolloquiums vom Herrn Günther gestellte Frage, wie man einfach das Reziprozitätsprinzip in der Geoelektrik begründen könnte, ist von Landau & Lifschitz (1967) im Band VIII ihres Kompendiums der theoretischen Physik elegant gelöst worden, auch wenn nicht für die uns interessierende geoelektrische Formulierung, sondern für den Fall der Elektrostatik. Die Analogie mit der Gleichstromelektrodynamik liegt aber auf der Hand.

Landau & Lifschitz (1967) formulieren in der Kapitel II.7 ihres Lehrbuches die folgende Aufgabe: Man zeige, daß das Potential $\varphi_A(\mathbf{r}_B)$ in irgendeinem inhomogenen dielektrischen Medium, das von der Punktladung e in \mathbf{r}_A erzeugt wird, gleich dem Potential $\varphi_B(\mathbf{r}_A)$ im Punkt \mathbf{r}_A ist, das von der gleichen im Punkt \mathbf{r}_B befindlichen Ladung hervorgerufen wird.

Wenn wir aufgrund der bekannten Analogie zwischen der Elektrostatik und der Elektrodynamik der stationären Ströme in jener Aufgabe die Permittivität durch die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r})$ und die Punktladungen durch die Punktstromquellen $I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)$, $q \in \{A, B\}$, ersetzen, wird die so umformulierte Aufgabe den Beweis des Reziprozitätsprinzips der Geoelektrik fordern. Auch die Lösung der Aufgabe können wir jetzt einfach aus dem elektrostatischen Bereich kopieren.

Das Potential des elektrischen Feldes $\varphi_A(\mathbf{r})$, das von einer im Punkt \mathbf{r}_A befindlichen Punktstromquelle mit der Stromstärke I erzeugt wird, muß in einem beliebigen Punkt \mathbf{r} die Kontinuitätsgleichung erfüllen,

$$\operatorname{div}[\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r})] = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A). \quad (1)$$

Analog muß auch für das elektrische Potential des Feldes, das von der gleichen Stromstärke I erzeugt wird, jetzt aber im Punkt \mathbf{r}_B lokalisiert, die Gleichung

$$\operatorname{div}[\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r})] = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \quad (2)$$

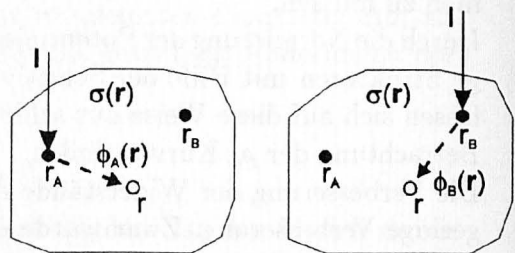
gelten. Wenn wir nun die erste Gleichung mit $\varphi_B(\mathbf{r})$ und die zweite mit $\varphi_A(\mathbf{r})$ multiplizieren, und danach die so modifizierten Gleichungen subtrahieren, bekommen wir

$$\varphi_B(\mathbf{r}) \operatorname{div}[\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r})] - \varphi_A(\mathbf{r}) \operatorname{div}[\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r})] = I\varphi_B(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) - I\varphi_A(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B). \quad (3)$$

Mit Hilfe der bekannten Formel $f(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \operatorname{div}[f(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r})] - \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{r})$ haben wir weiter

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}[\sigma(\mathbf{r})\varphi_B(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r})] - \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r}) - \\ & - \operatorname{div}[\sigma(\mathbf{r})\varphi_A(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r})] + \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r}) = \\ & = I\varphi_B(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) - I\varphi_A(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B). \end{aligned} \quad (4)$$

Die Terme, die die Skalarprodukte der Potentialgradienten enthalten, sind identisch und werden also aus der Gleichung (4) durch die Subtraktion eliminiert. Weiter können wir diese Gleichung über einen beliebigen Raumvolumen G (mit der Oberfläche $S(G)$ und dem Normalvektor $\mathbf{n}_{S(G)}$ dazu) integrieren, der



die beiden Stromquellen A und B enthält, und auf der linken Seite den Gaußschen Integralsatz benutzen. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{S(G)} \sigma(\mathbf{r}) \varphi_B(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_{S(G)} dS(G) - \int_{S(G)} \sigma(\mathbf{r}) \varphi_A(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_{S(G)} dS(G) = \\ = I \int_G \varphi_B(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) dG - I \int_G \varphi_A(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) dG = I[\varphi_B(\mathbf{r}_A) - \varphi_A(\mathbf{r}_B)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Blasen wir nun den Raumvolumen G bis ins Unendliche auf, was in anderen Worten die Integration von (4) über den gesamten dreidimensionalen Raum bedeutet, und nützen dabei die natürliche Bedingung aus, daß das elektrische Feld ins Unendliche hin verschwinden muß, werden die beiden Oberflächenintegrale in (5) gleich Null, und als Ergebnis bleibt uns die Endformel

$$\boxed{\varphi_B(\mathbf{r}_A) = \varphi_A(\mathbf{r}_B)} \quad (6)$$

die das Reziprozitätsprinzip der Gleichstromgeoelektrik in allgemeinsten Form ausdrückt.

Die einfache Manipulation mit der skalaren Leitfähigkeit in der Gleichung (4), die uns erlaubte, die die Skalarprodukte der Potentialgradienten enthaltenden Terme einfach loszuwerden, läßt sich allerdings nicht ohne weiteres auf *anisotrope Strukturen* übertragen. Im anisotropen Fall ist die Stromdichte als Produkt des Leitfähigkeitstensors und der elektrischen Intensität gegeben, also $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\hat{\sigma}(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})$ in (1) und (2). Um die Verifikation des Reziprozitätsprinzips in anisotropen Strukturen vollzuführen, wo wir mehr auf das korrekte Umgehen mit dem Leitfähigkeitstensor aufpassen müssen, untersuchen wir die folgende Form

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r}) \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_B(\mathbf{r})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi_A(\mathbf{r})}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi_A(\mathbf{r})}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ji}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi_B(\mathbf{r})}{\partial x_i} = \operatorname{grad} \varphi_A(\mathbf{r}) \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_B(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7)$$

Die in (7) unterstrichenen Elemente des Leitfähigkeitstensors sollen die Tatsache betonen, daß die für die Gültigkeit des Reziprozitätsprinzips prinzipielle Vereinfachung der Gleichung (4) zu (5) in anisotropen Medien nur unter der Annahme der *Symmetrie des Leitfähigkeitstensors* möglich ist. Dank den allgemeinen thermodynamischen Beziehungen sollte aber diese Bedingung für die Erdmaterialien immer erfüllt sein, so daß die Verallgemeinerung des Reziprozitätsprinzips auch für die anisotropen Strukturen begründet ist.

Referenzen

Landau, L. D. & Lifschitz, E. M., *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VIII: Elektrodynamik der Kontinua*. Akademie-Verlag, Berlin 1967.