# Analytische Berechnung von geoelektrischen Geometriefaktoren für kanonische Bereiche

Peter Weidelt & Andreas Weller
*Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig*

## 1 Einleitung

Der geoelektrische Geometriefaktor $K$ ist der Proportionalitätsfaktor, der in einem homogen leitenden Körper zwischen dem spezifischen elektrischen Widerstand $\varrho$ und der auf den Strom $I$ bezogenen Spannungsdifferenz $\Delta V/I$ besteht,

$$\varrho = K \cdot \frac{\Delta V}{I}.$$

$K$ hängt ab

- von der Geometrie des homogenen Körpers
- von der Geometrie der Elektrodenanordnung

Der Geometriefaktor interessiert, weil er bei Messung an/in einem tatsächlich *inhomogenen* Körper die Umrechnung des unanschaulichen $\Delta V/I$-Verhältnisses in den aussagekräftigeren scheinbaren spezifischen Widerstand

$$\varrho_a = K \cdot \frac{\Delta V}{I}$$

erlaubt. Wichtigstes Ingredient zur Bestimmung des Geometriefaktors ist die Berechnung des Potentials einer Punktquelle in dem vorgegebenen homogenen Körper für alle Lagen von Quellpunkten und Aufpunkten, die auch in der tatsächlichen Meßanordnung Anwendung finden. Aus den Zweipunktpotentialen können die Potentiale für die gebräuchlichen Vierpunktanordnungen durch Superposition gebildet werden.

Am bekanntesten ist der Geometriefaktor für eine Vierpolanordnung mit Stromelektroden bei $\mathbf{r}_A$ und $\mathbf{r}_B$ sowie Spannungselektroden bei $\mathbf{r}_M$ und $\mathbf{r}_N$ auf der Oberfläche eines homogenen Halbraumes,

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_B|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_A|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_B|}\right\},$$

der sich aus der Superposition von vier Zweipunktpotentialen zusammensetzt. (Im Vollraum verdoppelt sich $K$.)

Im Zusammenhang mit der "tomographischen" Untersuchung von Bohrkernen mit elektrischen Potentialmethoden und den experimentellen Untersuchungen im Plastiktank im Rahmen des VEGAS-Projektes ist verstärktes Interesse an der Berechnung von Geometriefaktoren für

- Zylinder endlicher Länge in nichtleitender Umgebung
- Quader in nichtleitender Umgebung

aufgekommen. Obgleich diese Geometrien elementar sind, sind uns aus der Literatur keine einfachen Berechenmethoden bekannt. Im folgenden stellen wir schnelle Algorithmen zur Berechnung dieser Faktoren vor.

## 2 Grundgleichungen

Der homogen leitende Körper $\mathcal{K}$ (Quader $\mathcal{Q}$ oder Zylinder $\mathcal{Z}$) habe den spezifischen elektrischen Widerstand $\varrho$. Wir betrachten zunächst die Einspeisung des Stromes $I$ durch nur eine Elektrode am Ort $\mathbf{r}_0$. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß $\mathbf{r}_0$ im *Inneren* von $\mathcal{K}$ liegt. Elektrisches Feld $\mathbf{E}$, elektrisches Potential $V$ und Stromdichte $\mathbf{J}$ sind dann verknüpft durch

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \varrho \mathbf{J},\ \nabla \cdot \mathbf{J} = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

so daß im Inneren des homogenen Körpers das Pol-Pol-Potential $V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -I\varrho \cdot \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \tag{1}$$

darstellt. Der Körper $\mathcal{K}$ liege in nichtleitender Umgebung. Da dann kein Strom durch die Berandung $\partial\mathcal{K}$ fließen kann, erfüllt $V$ auf dem *inneren* Rand $\partial\mathcal{K}_-$ die Neumannsche Randbedingung

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{K}_- \tag{2}$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{n}}$ der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor. (Auf dem äußeren Rand $\partial\mathcal{K}_+$ ist dagegen wegen der Flächenladungen $\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \not\equiv 0$.)

Für eine einzige Punktquelle im Inneren von $\mathcal{K}$ hat unser Problem im strengen Sinne keine Lösung, denn die Integration von (1) über $\mathcal{K}$ liefert mit dem Gaußschen Satz

$$\oint_{\partial\mathcal{K}_-} \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla V \, da = -I\varrho, \tag{3}$$

wobei $da$ das Flächenelement von $\partial\mathcal{K}_-$ ist. Diese Konsistenzbedingung wird mit den bisherigen Annahmen verletzt: Die linke Seite verschwindet wegen der Neumannschen Randbedingung (2), während die rechte Seite bei Annahme einer einzigen Punktquelle endlich ist. Eine Lösung im strengen Sinn existiert nur, wenn das Integral über die Divergenz der Quellstromdichte verschwindet, also z.B. für ein Paar von zwei gleichen Punktquellen entgegengesetzter Polarität oder wenn wir uns den bei $\mathbf{r}_0$ zugeführten Strom $I$ durch *gleichmäßig* über $\mathcal{K}$ verteilte Senken mit der Stromdichtedivergenz $-I/|\mathcal{K}|$ wieder abgeführt denken. Dabei sei $|\mathcal{K}|$ das Volumen von $\mathcal{K}$. Anstelle von (1) und (3) gilt dann

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = I\varrho\{1/|\mathcal{K}| - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\}. \tag{4}$$

und

$$\oint_{\partial\mathcal{K}_-} \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla V \, da = 0, \tag{5}$$

so daß nunmehr eine Lösung mit der Randbedingung (2) existiert. Bei einem Punktquellen*paar* fällt der soeben eingeführte Term natürlich wieder heraus. Mathematisch kommt die Nicht-Existenz der Pol-Pol-Lösung von (1) dadurch zum Ausdruck, daß die Lösung stets eine unendlich große additive Konstante enthält, die für ein Punktquellen*paar* oder für die Lösung von (4) verschwindet.

# 3 Quader in nichtleitender Umgebung

In cartesischen Koordinaten $(x, y, z)$ sei der Quader $\mathcal{Q}$ gegeben durch

$$\mathcal{Q} := \{\mathbf{r} \in \mathcal{Q} \mid 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}.$$

Bei Einspeisung des Stromes $I$ am Ort $\mathbf{r}_0$ ist für das Potential $V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ die Poisson-Gleichung (1) mit der Randbedingung

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{Q}_- \tag{6}$$

zu lösen.

Naheliegend ist die Lösung der gestellten Aufgabe durch Superposition von Spiegelquellen. Wegen des erforderlichen *dreidimensionalen* Rasters und der relativ langsamen Potentialabfalls $\simeq 1/r$ sind mehrere Tausend Einzelpotentiale zu addieren.

Wir versuchen jetzt eine Lösung durch Superposition von orthogonalen Funktionen $\Phi_{k\ell m}(\mathbf{r})$, die zwar die Randbedingung (6) erfüllen, aber keine Lösungen der homogenen Gleichung (1) darstellen,

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{k\ell m}(\mathbf{r}_0)\Phi_{k\ell m}(\mathbf{r}) \tag{7}$$

mit

$$\Phi_{k\ell m}(\mathbf{r}) = \cos(k\frac{\pi x}{a})\cos(\ell\frac{\pi y}{b})\cos(m\frac{\pi z}{c}) \tag{8}$$

Einsetzen von (7) in (1) und Integration über $Q$ liefert unter Ausnutzung der Orthogonalität der Ansatzfunktionen

$$g_{k\ell m}(\mathbf{r}_0) = \frac{I\varrho \cdot \Phi_{k\ell m}(\mathbf{r}_0)}{abc\pi^2[k^2/a^2 + \ell^2/b^2 + m^2/c^2]}, \quad |k| + |\ell| + |m| > 0, \tag{9}$$

so daß man als Lösung

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{I\varrho}{abc\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_{k\ell m}(\mathbf{r}_0)\Phi_{k\ell m}(\mathbf{r})}{k^2/a^2 + \ell^2/b^2 + m^2/c^2}, \quad |k| + |\ell| + |m| > 0 \tag{10}$$

erhält. Der unbeschränkte Term $k = \ell = m = 0$ muß unberücksichtigt bleiben (bzw. taucht gar nicht erst auf, wenn man (7) in (4) einsetzt). Er entspricht der - unendlichen - freien additiven Konstanten. Die Reihe (10) ist wegen ihrer oszillierenden äußerst langsamen Konvergenz für eine numerische Auswertung **vollkommen unbrauchbar.**

Die Situation ändert sich aber sofort (Titchmarsh 1958, p. 6), wenn man $V$ in der Form

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{I\varrho}{abc} \sum_{k\ell m} \int_0^\infty \exp\{-t\pi^2[k^2/a^2 + \ell^2/b^2 + m^2/c^2]\}\, \Phi_{k\ell m}(\mathbf{r}_0)\Phi_{k\ell m}(\mathbf{r})\, dt \tag{11}$$

darstellt. Der Summand $k = \ell = m = 0$ wird wieder ausgelassen. Nach Vertauschung von Summation und Integration läßt sich der Integrand als das Produkt dreier Funktionen schreiben, die nur von jeweils einer Ortskoordinate abhängen,

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = I\varrho \int_0^\infty \{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0;t) - 1/(abc)\}\, dt \tag{12}$$

mit

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0;t) := \phi_a(x|x_0;t)\phi_b(y|y_0;t)\phi_c(z|z_0;t) \tag{13}$$

und

$$\phi_a(x|x_0;t) := \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\{-t\frac{\pi^2 k^2}{a^2}\} \cos(k\frac{\pi x_0}{a}) \cos(k\frac{\pi x}{a}) \tag{14}$$

sowie entsprechenden Formen für $\phi_b(y|y_0;t)$ und $\phi_c(z|z_0;t)$. Der zweite Term im Integranden von (12) berücksichtigt die Tatsache, daß bei der Summation der Term $k = \ell = m = 0$ auszulassen ist.

Dem Nachteil einer zusätzlichen $t$-Integration stehen zwei entscheidende Vorteile gegenüber:

- Im Vergleich zu (10) sind die drei Summationen über $k, \ell$ und $m$ nunmehr entkoppelt und können *unabhängig* voneinander ausgeführt werden.
- Die Reihen vom Typ (14) konvergieren extrem schnell.

Letzteres folgt für große $t$-Werte aus der Darstellung (14), für kleine $t$-Werte mit Hilfe der Poissonschen Summationsformel [z.B., Morse & Feshbach (1953, p. 466)]:

$$\phi_a(x|x_0;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(x - x_0 - 2na)^2}{4t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x + x_0 - 2na)^2}{4t}\right\}\right]. \tag{15}$$

Die Darstellung (15) läßt sich deuten als die Superposition der Felder einer Quelle

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2}{4t}\right\}$$

und seiner Spiegelquellen zur Erfüllung der Randbedingingen $\partial_x \phi_a = 0$ bei $x = 0$ und $x = a$.

Obgleich (14) und (15) für alle $t > 0$ konvergieren, eignet sich (14) besonders für $t \geq a^2/\pi$ und (15) für $t \leq a^2/\pi$. Im ungünstigsten Fall $t = a^2/\pi$ sind bei Berücksichtigung der Terme bis $|k| = 4$ bzw. $|n| = 4$ die vernachlässigten Exponentialterme in (14) bzw. (15) kleiner als $10^{-10}$.

Die $t$-Integration ist unproblematisch. Für $t \to \infty$ klingt der Integrand

$$\sim \exp\{-\pi^2 t/d^2\}, \quad d := \max(a, b.c)$$

ab und für $t \to 0$ verschwindet er, falls $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ ist und weder $\mathbf{r}$ noch $\mathbf{r}_0$ nahe eines Randes liegen, wie

$$\frac{I\varrho}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2/(4t)\}.$$

Der verbleibende Integrationsrest von $V$ zwischen $t = 0$ und der unteren Integrationsgrenze $t = \tau$ läßt sich deshalb abschätzen durch

$$\frac{I\varrho}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathrm{erfc}\{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/\sqrt{4\tau}\}.$$

Dabei ist erfc($\cdot$) die komplementäre Fehlerfunktion (s. Abramowitz & Stegun, 1965, Kapitel 7.1). Wenn $\mathbf{r}$ oder $\mathbf{r}_0$ in der Nähe von Rändern liegen, sind die nächstgelegenen Spiegelquellen gemäß (15) mitzuberücksichtigen.

Es ist bemerkenswert, daß sich $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t)$ als Lösung des Wärmeleitungsproblems

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t) = \partial_t G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t), \tag{16}$$

mit Neumannschen Randbedingungen, d.h. als Temperaturfeld eines zur Zeit $t = 0$ am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ im Inneren eines wärme-isolierten Quaders kurzzeitig eingeschalteten Wärmepols interpretieren läßt. Für $t \leq 0$ verschwindet $G$, zu frühen Zeiten ist die Wärme-Energie auf die Umgebung des Punktes $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ konzentriert und zu späten Zeiten ist sie gleichmäßig auf den Quader verteilt. Es gilt

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t \leq 0) = 0, \quad \lim_{t \to 0^+} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \lim_{t \to \infty} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t) = 1/(abc). \tag{17}$$

Mit (16) und (17) wird ersichtlich, daß (12) tatsächlich eine Lösung von (4) darstellt; denn es ist

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) &= I\varrho \int_{0^-}^{\infty} \nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t)\, dt = I\varrho \int_{0^-}^{\infty} \{\partial_t G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; t) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t)\}\, dt \\ &= I\varrho\{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; \infty) - G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; 0^-) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\} = I\varrho\{1/(abc) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\}, \end{aligned}$$

da $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0; 0^-) = 0$. Die Lösung eines (nur scheinbar komplizierteren) zeitabhängigen Diffusionsproblems ergibt also nach Integration über die Zeit die gesuchte Lösung des stationären Geoelektrikproblems.

# 4 Zylinder in nichtleitender Umgebung

In zylindrischen Koordinaten $(r, \phi, z)$ sei der Zylinder definiert durch

$$\mathcal{Z} := \{\mathbf{r} \in \mathcal{Z} \mid 0 < r < R,\ 0 < \phi < 2\pi,\ 0 < z < L\}$$

und habe den spezifischen Widerstand $\varrho$. Wir wollen zur Lösung von (1) mit den Neumannschen Randbedingungen

$$\partial_r V|_{r=R^-} = \partial_z V|_{z=0^+} = \partial_z V|_{z=L^-} = 0 \tag{18}$$

auf dem Innenrand $\partial\mathcal{Z}_-$ zwei Lösungsmethoden angeben.

- **Erste Lösung:** Reihenansatz mit partikulären Lösungen der homogenen Gleichung, die aber in einer Koordinate ($z$ oder $r$) noch nicht die Randbedingungen erfüllen.

- **Zweite Lösung:** Reihenansatz mit orthogonalen Funktionen, die alle Randbedingungen erfüllen, aber nicht die homogene Dgl. lösen.

Die zweite Lösung entspricht der Lösung, die im vorangehenden Kapitel für den Quader gegeben wurde.

**Erste Lösung**

*a) Ansatz erfüllt Randbedingungen in $\phi$ und $r$*

Dies Problem wird mit Dirichlet-Randbedingungen von Van Bladel (1964, pp. 107-111) und Smythe (1968, pp. 187-190) behandelt. Wir benutzen ein System von partikulären Lösungen von $\nabla^2 V = 0$, das die Periodizitätsforderung bezüglich $\phi$ und die Randbedingungen bezüglich $r$ [(18) und keine Singularität bei $r = 0$] erfüllt, aber (18) bezüglich $z$ noch unbefriedigt läßt,

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{ns}(r_0, \phi_0) J_n(\mu_{ns} r) \mathrm{e}^{in\phi} f(z|z_0; \mu_{ns}). \tag{19}$$

Hier sind $A_{ns}(r_0, \phi_0)$ zu bestimmende freie Koeffizienten, $J_n(\cdot)$ ist die Besselfunktion $n$-ter Ordnung erster Art, $\mu_{ns} R$ die $s$-te *nichtnegative* Nullstelle von $J_n'(\cdot) = 0$ und $f(z|z_0; \mu)$ erfüllt für $z \neq z_0$ die Dgl.

$$f''(z|z_0; \mu) = \mu^2 f(z|z_0; \mu). \tag{20}$$

In Zylinderkoordinaten gilt

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\delta(r - r_0)\delta(\phi - \phi_0)\delta(z - z_0)}{r}.$$

Integriert man (1) über $z$ von $z_0^-$ nach $z_0^+$,

$$\partial_z V(z_0^+) - \partial_z V(z_0^-) = I\varrho \frac{\delta(r - r_0)\delta(\phi - \phi_0)}{r}$$

und setzt

$$f'(z_0^+) - f'(z_0^-) =: -2\mu_{ns}, \tag{21}$$

so sind die Entwicklungskoeffizienten $A_{ns}$ aus

$$2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \mu_{ns} A_{ns}(r_0, \phi_0) J_n(\mu_{ns} r) \mathrm{e}^{in\phi} = I\varrho \frac{\delta(r - r_0)\delta(\phi - \phi_0)}{r}. \tag{22}$$

zu bestimmen. Multipliziert man (22) mit $J_m(\mu_{mq} r)\mathrm{e}^{-im\phi}$ und integriert über den Zylinderquerschnitt, so folgt unter Ausnutzung der Orthogonalitäten

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\phi}\, d\phi = 2\pi\delta_{nm}, \quad \int_0^R r J_n(\mu_{ns} r) J_n(\mu_{nq} r)\, dr = \frac{\mu_{ns}^2 R^2 - n^2}{2\mu_{ns}^2} J_n^2(\mu_{ns} R)\delta_{sq} \tag{23}$$

sofort

$$A_{ns}(r_0, \phi_0) = \frac{I\varrho}{2\pi} \cdot \frac{\mu_{ns} J_n(\mu_{ns} r_0)\mathrm{e}^{-in\phi_0}}{(\mu_{ns}^2 R^2 - n^2) J_n^2(\mu_{ns} R)}. \tag{24}$$

Die Funktion $f(z|z_0; \mu)$, die die Dgl. (20), die Sprungbedingung (21) und die Randbedingungen $f'(z) = 0$ für $z = 0$ und $z = L$ erfüllt und überdies bei $z = z_0$ stetig ist, lautet

$$f(z|z_0; \mu) = \begin{cases} \dfrac{2\cosh[\mu(L - z_0)]\cosh(\mu z)}{\sinh(\mu L)}, & 0 \le z \le z_0 \le L \\ \dfrac{2\cosh[\mu(L - z)]\cosh(\mu z_0)}{\sinh(\mu L)}, & 0 \le z_0 \le z \le L \end{cases} \tag{25}$$

Für $L \to \infty$ ergibt sich das Modell eines *halbunendlichen* Zylinders mit einer Stirnfläche bei $z = 0$ und der anderen im Unendlichen,

$$f(z|z_0; \mu) = \mathrm{e}^{-\mu|z - z_0|} + \mathrm{e}^{-\mu(z + z_0)},$$

d.h. eine zusätzliche Spiegelladung bei $-z_0$. Für einen *beidseitig* unendlichen Zylinder hat man zunächst die $z$-Koordinate bei $L/2$ zu zentrieren und dann den Grenzübergang $L \to \infty$ durchzuführen,

$$f(z|z_0; \mu) = \mathrm{e}^{-\mu|z - z_0|}.$$

Gl. (19) in Verbindung mit (24) und (25) gibt das Potential einer beliebigen Punktladung und ist Ausgangspunkt zur Berechnung von Geometriefaktoren. Da die erste Nullstelle von $J_0'(\cdot)$ verschwindet, $\mu_{01} = 0$, liefert in (19) der Summand $n = 0$, $s = 1$ einen unendlichen konstanten Beitrag. Deshalb soll dieser Term bei der Berechnung des Punktquellenpotentials unterdrückt werden. Er ist aber von Bedeutung, wenn Elektroden mit verschiedenen $z$-Koordinaten betrachtet werden. Dies illustriert das folgende Beispiel:

Zwei Stromelektroden an den Mittelpunkten der Stirnflächen des Zylinders ($r_0 = 0$, $+I$ bei $z_0 = 0$, $-I$ bei $z_0 = L$) liefern auf der Mantelfläche des Zylinders ($r = R$) das rotationssymmetrische Potential ($n = 0$)

$$V(R,z) = \frac{I\varrho}{\pi R^2}\left[L/2 - z + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{\sinh[\mu_s(L/2 - z)]}{\mu_s J_0(\mu_s R)\cosh(\mu_s L/2)}\right], \tag{26}$$

wobei $\mu_s := \mu_{0s}$. Der erste Summand ist der Beitrag von der Nullstelle $\mu_1 = 0$ und beschreibt das homogene elektrische Feld von zwei stirnseitigen *Scheiben*elektroden.

Wenig ermutigend ist die bisher gewonnene Potentialdarstellung zur Berechnung der Geometriefaktoren für die wichtige Azimutalanordnung mit $r = r_0 = R$, $z = z_0$. Setzt man etwa $z = L/2$, so gilt - bis auf eine additive Konstante -

$$V(\phi|\phi_0) = \frac{I\varrho}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\phi - \phi_0)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu_{ns}\coth(\mu_{ns}L/2)}{\mu_{ns}^2 R^2 - n^2}.$$

Diese Doppelreihe oszilliert, ihre numerische Konvergenz ist nur unter Benutzung von konvergenzerzeugenden Faktoren, etwa $\exp(-\mu_{ns}\epsilon)$, $\epsilon > 0$, unter Verwendung vieler Terme zu erreichen. Deshalb wollen wir für die Azimutalanordnung den zweiten Lösungsweg versuchen.

***b) Ansatz erfüllt Randbedingungen in $\phi$ und $z$***

Wir benutzen jetzt ein System von partikulären Lösungen von $\nabla^2 V = 0$, das die Periodizitätsforderung bezüglich $\phi$ und die Randbedingungen bezüglich $z$ [$\partial_z V = 0$ für $z = 0$ und $z = L$, siehe (18)] erfüllt, aber (18) bezüglich $r$ noch unbefriedigt läßt. Dies Problem wird für Dirichlet-Bedingungen von Smythe (1968, p. 201) behandelt. Der Ansatz für $V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ lautet nun

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{nk}(\phi_0, z_0)\mathrm{e}^{in\phi}\cos(\lambda_k z) f_n(r|r_0;\lambda_k), \quad \lambda_k := k\pi/L. \tag{27}$$

Für $r \neq r_0$ erfüllt $f_n(r|r_0;\lambda)$ die Dgl.

$$r^2 f_n''(r|r_0;\lambda) + r f_n'(r|r_0;\lambda) - (\lambda^2 r^2 + n^2) f_n(r|r_0;\lambda) = 0$$

und die Sprungbedingung

$$f_n'(r_0^+) - f_n'(r_0^-) = -1/r_0.$$

Unter Ausnutzung der Orthogonalität

$$\int_0^L \cos(\lambda_k z)\cos(\lambda_\ell z)\,dz = (L/2)(1 + \delta_{k0})\delta_{k\ell}, \tag{28}$$

liefert eine ganz ähnliche Behandlung wie im Fall *a)*

$$B_{nk}(\phi_0, z_0) = \frac{I\varrho}{2\pi L}(2 - \delta_{k0})\mathrm{e}^{-in\phi_0}\cos(\lambda_k z_0),$$

$$f_n(r|r_0;\lambda) = \begin{cases} I_n(\lambda r)[K_n(\lambda r_0) - q_n\, I_n(\lambda r_0)], & r \le r_0 \le R \\ I_n(\lambda r_0)[K_n(\lambda r) - q_n\, I_n(\lambda r)], & r_0 \le r \le R \end{cases}$$

Dabei sind $I_n(\cdot)$ bzw. $K_n(\cdot)$ modifizierte Bessel- bzw. Hankelfunktionen der Ordnung $n$ (cf. Abramowitz & Stegun 1965, Kapitel 9.6) und es ist $q_n := K_n'(\lambda R)/I_n'(\lambda R)$. Der Term $k = n = 0$ in (27) liefert wieder die unendlich große additive Konstante, die für das Pol-Pol-Potential ausgeschlossen wird, aber in Betracht zu ziehen ist, wenn zwei Stromelektroden mit unterschiedlichem $r_0$ untersucht werden.

Mit dem Ansatz (27) erhält das Potential (26) die alternative Darstellung

$$V(R,z) = \frac{2I\varrho}{\pi RL} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{2m+1}z)}{\lambda_{2m+1} I_1(\lambda_{2m+1}R)}, \tag{29}$$

die - im Gegensatz zu (26) - auch für $z = 0$ und $z = L$ schnell konvergiert.

**Zweite Lösung**
Reihenansatz mit orthogonalen Funktionen, die die Randbedingungen (18) erfüllen:

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_{nsk}(\mathbf{r}_0) \Psi_{nsk}(\mathbf{r}) \tag{30}$$

mit

$$\Psi_{nsk}(\mathbf{r}) = e^{in\phi} J_n(\mu_{ns} r) \cos(\lambda_k z), \quad \lambda_k := k\pi/L.$$

Nach Einsetzen in (1) und Integration über $\mathcal{Z}$ erhält man unter Ausnutzung der Orthogonalitäten (23) und (28) sofort

$$h_{nsk}(\mathbf{r}_0) = \frac{I\varrho \mu_{ns}^2 (2 - \delta_{k0}) \Psi^*_{nsk}(\mathbf{r}_0)}{\pi L(\mu_{ns}^2 R^2 - n^2) J_n^2(\mu_{ns} R)(\mu_{ns}^2 + \lambda_k^2)}.$$

Die schlecht konvergente Reihe (30), in der der Term $k = n = 0$, $s = 1$ auszulassen ist (bzw. verschwindet, wenn man (30) in (4) einsetzt), wird nun analog zu (11) wieder in ein Integral mit schnell konvergenter Reihendarstellung des Integranden verwandelt:

$$V(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = I\varrho \int_0^{\infty} \{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0;t) - 1/(\pi R^2 L)\}\, dt \tag{31}$$

mit

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0;t) := \Omega(r,\phi|r_0,\phi_0;t)\psi(z|z_0;t)$$

und

$$\Omega(r,\phi|r_0,\phi_0;t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\phi - \phi_0) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_{ns}^2 J_n(\mu_{ns} r) J_n(\mu_{ns} r_0)}{(\mu_{ns}^2 R^2 - n^2) J_n^2(\mu_{ns} R)} \exp(-\mu_{ns}^2 t), \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \psi(z|z_0;t) &= \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda_k z)\cos(\lambda_k z_0)\exp(-\lambda_k^2 t) \qquad (33) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \exp\left\{ -\frac{(z - z_0 - 2nL)^2}{4t} \right\} + \exp\left\{ -\frac{(z + z_0 - 2nL)^2}{4t} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Für die azimutale Anordnung ($r = r_0 = R$, $z = z_0 = L/2$) gilt vereinfacht

$$\Omega(R,\phi|R,\phi_0;t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n(\phi - \phi_0) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_{ns}^2 \exp(-\mu_{ns}^2 t)}{\mu_{ns}^2 R^2 - n^2}, \tag{34}$$

$$\psi(L/2|L/2;t) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\{-4m^2\pi^2 t/L^2\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp\{-j^2 L^2/(4t)\}. \tag{35}$$

Die erste Form eignet sich besonders für $t \geq L^2/(4\pi)$, die zweite Form für $t \leq L^2/(4\pi)$.

Die Funktionen $\psi$, $\Omega$ und $G$ können wieder als Greensche Funktionen ('Wärmepole') der Diffusionsgleichung interpretiert werden. Sie verschwinden für $t \leq 0$ und erfüllen die Randbedingungen (18) sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \delta(z - z_0)\delta(t), \quad \psi(t \to 0^+) = \delta(z - z_0), \; \psi(t \to \infty) = \frac{1}{L}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \nabla_2^2 \Omega + \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t), \quad \Omega(t \to 0^+) = \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \; \Omega(t \to \infty) = \frac{1}{\pi R^2}, \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= \nabla^2 G + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t), \quad G(t \to 0^+) = \delta(\mathbf{r}\ \mathbf{r}_0), \; G(t \to \infty) = \frac{1}{\pi R^2 L}. \end{aligned}$$

$\nabla_2^2$ und $\delta_2$ sind die Projektionen der zugehörigen dreidimensionalen Operatoren in die $(r, \phi)$-Ebene. Die letzte Gleichung beschreibt wieder einen Wärmeimpuls, der zur Zeit $t = 0$ bei $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ freigesetzt wird, zu frühen Zeiten um $\mathbf{r}_0$ konzentriert ist und sich zu späten Zeiten gleichmäßig über den wärme-isolierten Zylinder verteilt. Aus dieser Gleichung folgt dann auch (siehe Ende von Abschnitt 3), daß (31) eine Lösung von (4) darstellt.

**Numerische Betrachtungen**

Beide Lösungsmethoden benötigen die Wurzeln $u_{ns} := \mu_{ns}R$ von $J_n'(u_{ns}) = 0$, $n = 0, ..., n_m$, $s = 1, ..., s_m$, wobei die oberen Grenzen $n_m$ und $s_m$ weiter unten näher diskutiert werden. Bei Kenntnis der exakten Nullstelle $u_{ns}$ ist

$$\tilde{u}_{n,s+1} \simeq u_{ns} + \pi,$$

eine gute Anfangsschätzung für die nächstfolgende Nullstelle $u_{n,s+1}$. Die Genauigkeit dieser Schätzung wächst mit $s$. Wir starten mit $n = 0$, $s = 1$, $u_{01} = 0$ und verbessern die obige Schätzung mit der Newtonschen Methode, bei der aufeinanderfolgende Approximationen $x_k$ und $x_{k+1}$ verknüpft sind durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{36}$$

und

$$f(x) = J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x), \quad f'(x) = J_n''(x) = -\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) - \frac{1}{x}f(x).$$

Nachdem man so alle benötigten Nullstellen von $J_0'(\cdot)$ berechnet hat, gewinnt man eine Anfangsschätzung für die Nullstellen der nächstfolgenden Ordnung durch

$$\tilde{u}_{n+1,s} \simeq u_{ns} + 1.$$

Die Genauigkeit dieser Schätzung wächst mit $n$ und wird mit der Newtonschen Methode (36) iterativ verbessert. Als Test für unsere Rechnungen werden die ersten Nullstellen $J_n'(\cdot)$ herangezogen, die bei Abramowitz & Stegun (1965, p. 411) kompiliert sind.

Bei der Auswertung des Integrals (27) wollen wir uns auf die symmetrische Azimutalanordnung beschränken. Mit den speziellen Formen von $\Omega$ und $\psi$ aus (34) ind (35) ergibt sich als asymptotisches Verhalten nahe der Endpunkte des Integrationsbereichs

$$\begin{aligned}
\Omega &\simeq \frac{1}{2\pi t}\exp\{-R^2\epsilon^2/(4t)\},\ t << R^2,\ \epsilon << 1 \\
\psi &\simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}},\ t << L^2/(4\pi), \\
\Omega &\simeq \frac{1}{\pi R^2}\left[1 + \frac{2u_{11}^2\cos\epsilon}{u_{11}^2 - 1}\exp(-u_{11}^2 t/R^2)\right],\ t >> R^2, \\
\psi &\simeq \frac{1}{L}\left[1 + 2\exp(-4\pi^2 t/L^2)\right],\ t >> L^2/(4\pi).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\epsilon := |\phi - \phi_0|$ und $u_{11} = 1.84118$. Anstelle eines unendlichen Integrationsbereichs in $t$ benutzen wir einen endlichen Integrationsbereich der dimensionslosen Variablen $v := \sqrt{t}/R$, $v_1 \leq v \leq v_2$. Dabei sollen $v_1$ und $v_2$ so bestimmt werden, daß Beiträge von außerhalb des Integrationsbereichs entweder vernachässigbar oder oder in geschlossener Form darstellbar sind.

Der für großes $v$ (oder großes $t$) dominierende *azimutabhängige* Term im Integranden von (27) ist $\sim \cos\epsilon\exp(-u_{11}^2 v^2)$. Der Exponentialterm ist kleiner als $10^{-p}$ für $v \geq v_2 := 0.824\sqrt{p}$, z.B. $v_2 = 2.33$ für $p = 8$. [Der für großes $t$ führende Term von $\psi$ ist azimutunabhängig und fällt bei der Berechnung von azimutalen Potentialdifferenzen heraus.]

Mit den Approximationen für kleines $t$ erhält man für das Integrationsintervall $0 \leq v \leq v_1$ von (27)

$$\delta V \simeq \frac{I\varrho}{2\pi\epsilon R}\mathrm{erfc}\{-\epsilon/(2v_1)\}.$$

Dabei ist erfc$(\cdot)$ wieder die komplementäre Fehlerfunktion. Für $v_1 = 0.025$ wird der Beitrag von $\delta V$ vernachlssigbar für $\epsilon > 10°$. Damit die Exponentialterme in der Summe (34) für die kleinsten Werte von $t$ oder $v$ kleiner als $10^{-p}$ sind, werden Wurzeln $u_{ns}$ bis zur Größe $u_m = 1.52\sqrt{p}/v_1$ benötigt. Wenn $n_m$

und $s_m$ unabhängig voneinander bestimmt werden, bedeutet dies $n_m \simeq u_m$ (für $s = 1$) und $s_m \simeq u_m/\pi = 0.48\sqrt{p}/v_1$ (für $n = 0$). Beispiel: $p = 8$ und $v_1 = 0.025$ ergibt $n_m = 172, s_m = 54$. Wenn $\epsilon \geq 10°$ ist, haben die resultierenden Pol-Pol-Potentiale eine Genauigkeit von etwa vier Stellen. - The $\psi$-Reihe (35) konvergiert problemlos: Nach nicht mehr als $q = 0.86\sqrt{p}$ Termen sind alle nachfolgenden Terme kleiner als das $10^{-p}$-fache des ersten Terms (z.B. $q = 3$ für $p = 8$). Die Integration in (31) läßt mit geringstem Aufwand mit der Gauß-Legendre-Integration, z.B. mit einer 64-Punkt-Formel, durchführen.

# 5 Anwendungen

Das Pol-Pol-Potential für die symmetrische azimutale Anordnung ($z = z_0 = L/2$),

$$V(\phi|\phi_0) =: \frac{I\varrho}{R} \cdot f(\phi - \phi_0; L/R), \tag{37}$$

wird in Tabelle 1 für verschiedene Werte von $\epsilon := |\phi - \phi_0|$ und $L/R$ tabelliert. Die additive Konstante im Potential ist so festgelegt worden, daß $f(180°; L/R) =: 0$. Für $L/R << 1$ ist $\psi \simeq 1/L$ und deshalb $f(\epsilon; L/R) \sim (R/L)$. Für lange Zylinder, $L/R >> 1$, ist der Effekt der Stirnseiten klein und $f$ wird fast unabhängig von $L/R$.

Tabelle 1 kann zur Berechnung (oder Schätzung) des Geometriefaktor $K$ für die gewöhnlichen symmetrischen azimutalen Vierpunktanordnungen dienen:

1. **Wenner-$\alpha$-Anordnung** (benachbarte Elektroden spannen den Winkel $\alpha$ auf):

$$\frac{R}{K} = 2[f(\alpha) - f(2\alpha)]$$

*Beispiel:* $R = 3$ cm, $L = 12$ cm, $\alpha = 30°$ ergeben $K = 8.47$ cm [im Vergleich zu $2\pi(\alpha R) = 9.87$ cm für einen Halbraum].

2. **Wenner-$\beta$-Anordnung** (= Dipolanordnung mit gleichabständigen Elektroden, benachbarte Elektroden spannen den Winkel $\alpha$ auf):

$$\frac{R}{K} = f(\alpha) - 2f(2\alpha) + f(3\alpha)$$

*Beispiel:* Gleiche Parameter wie a) ergeben $K = 26.1$ cm [im Vergleich zu $6\pi(\alpha R) = 29.6$ cm für einen Halbraum].

3. **Dipol-Dipol-Anordnung** (jeder Dipol spannt den Winkel $\alpha$ auf, Dipolzentren im Abstand $\beta$):

$$\frac{R}{K} = f(\beta - \alpha) - 2f(\beta) + f(\beta + \alpha)$$

Für $\beta = 2\alpha$ ergibt sich b). - *Beispiel:* $R = 5$ cm, $L = 18$ cm, $\alpha = 15°$, $\beta = 180°$ ergibt bei linearer Interpolation $K \simeq 22.4$ m.

# 6 Zusammenfassung

Zur Berechnung der geoelektrischen Geometriefaktoren für Messungen im Quader (Plastiktank) und an der Oberfläche eines Zylinders (Bohrkern) wurden effektive Algorithmen abgeleitet. Die Besonderheit dieser Algorithmen liegt darin, daß sie zunächst ein (scheinbar) komplizierteres zeitabhängiges Diffusionsproblem lösen und daraus durch Integration über die Zeit eine Lösung für das stationäre Geoelektrikprobblem gewinnen. - Für die symmetrische azimutale Elektrodenanordnung auf dem Mantel eines Zylinders werden für verschiedene Schlankheitsgrade des Zylinders Pol-Pol-Potentiale berechnet, aus denen die gewünschten Geometriefaktoren leicht durch Superposition gewonnen werden können.

| $\epsilon$ [°] | Faktor | $L/R = 0.5$ | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1.00 | 2.6609 | 2.0740 | 1.9456 | 1.9038 | 1.8883 | 1.8823 | 1.8790 | 1.8785 | 1.8784 |
| 10 | .10 | 16.9505 | 11.3172 | 10.0546 | 9.6410 | 9.4875 | 9.4279 | 9.3951 | 9.3899 | 9.3890 |
| 15 | .10 | 13.3625 | 8.0721 | 6.8439 | 6.4375 | 6.2860 | 6.2271 | 6.1946 | 6.1895 | 6.1887 |
| 20 | .10 | 11.2706 | 6.3794 | 5.1968 | 4.8002 | 4.6515 | 4.5935 | 4.5615 | 4.5564 | 4.5556 |
| 25 | .10 | 9.7845 | 5.3087 | 4.1805 | 3.7959 | 3.6507 | 3.5939 | 3.5625 | 3.5575 | 3.5567 |
| 30 | .10 | 8.6189 | 4.5492 | 3.4818 | 3.1113 | 2.9704 | 2.9150 | 2.8843 | 2.8794 | 2.8787 |
| 35 | .10 | 7.6547 | 3.9683 | 2.9660 | 2.6113 | 2.4751 | 2.4214 | 2.3915 | 2.3868 | 2.3860 |
| 40 | .10 | 6.8320 | 3.5002 | 2.5652 | 2.2277 | 2.0969 | 2.0450 | 2.0161 | 2.0115 | 2.0108 |
| 45 | .10 | 6.1157 | 3.1089 | 2.2419 | 1.9226 | 1.7975 | 1.7477 | 1.7198 | 1.7154 | 1.7147 |
| 50 | .10 | 5.4834 | 2.7730 | 1.9733 | 1.6731 | 1.5541 | 1.5065 | 1.4797 | 1.4754 | 1.4747 |
| 55 | .10 | 4.9195 | 2.4792 | 1.7452 | 1.4643 | 1.3519 | 1.3065 | 1.2810 | 1.2769 | 1.2762 |
| 60 | .10 | 4.4128 | 2.2186 | 1.5480 | 1.2867 | 1.1809 | 1.1380 | 1.1137 | 1.1098 | 1.1092 |
| 65 | .01 | 39.5470 | 19.8511 | 13.7506 | 11.3337 | 10.3438 | 9.9397 | 9.7103 | 9.6734 | 9.6675 |
| 70 | .01 | 35.3875 | 17.7436 | 12.2182 | 9.9946 | 9.0737 | 8.6955 | 8.4798 | 8.4450 | 8.4395 |
| 75 | .01 | 31.5973 | 15.8310 | 10.8485 | 8.8142 | 7.9625 | 7.6105 | 7.4089 | 7.3763 | 7.3711 |
| 80 | .01 | 28.1349 | 14.0886 | 9.6163 | 7.7658 | 6.9830 | 6.6574 | 6.4702 | 6.4398 | 6.4350 |
| 85 | .01 | 24.9663 | 12.4972 | 8.5023 | 6.8292 | 6.1143 | 5.8150 | 5.6423 | 5.6142 | 5.6097 |
| 90 | .01 | 22.0636 | 11.0412 | 7.4917 | 5.9886 | 5.3401 | 5.0670 | 4.9087 | 4.8829 | 4.8788 |
| 95 | .01 | 19.4036 | 9.7082 | 6.5726 | 5.2315 | 4.6477 | 4.4003 | 4.2564 | 4.2329 | 4.2291 |
| 100 | .01 | 16.9669 | 8.4878 | 5.7359 | 4.5483 | 4.0268 | 3.8046 | 3.6747 | 3.6535 | 3.6501 |
| 105 | .01 | 14.7369 | 7.3715 | 4.9739 | 3.9308 | 3.4691 | 3.2713 | 3.1553 | 3.1362 | 3.1332 |
| 110 | .01 | 12.6997 | 6.3519 | 4.2806 | 3.3729 | 2.9681 | 2.7937 | 2.6911 | 2.6742 | 2.6715 |
| 115 | .01 | 10.8432 | 5.4231 | 3.6508 | 2.8691 | 2.5181 | 2.3661 | 2.2764 | 2.2616 | 2.2592 |
| 120 | .01 | 9.1572 | 4.5797 | 3.0803 | 2.4152 | 2.1146 | 1.9839 | 1.9064 | 1.8936 | 1.8916 |
| 125 | .01 | 7.6330 | 3.8172 | 2.5656 | 2.0075 | 1.7539 | 1.6431 | 1.5772 | 1.5663 | 1.5646 |
| 130 | .01 | 6.2628 | 3.1319 | 2.1037 | 1.6432 | 1.4328 | 1.3405 | 1.2855 | 1.2764 | 1.2749 |
| 135 | .01 | 5.0404 | 2.5206 | 1.6922 | 1.3198 | 1.1488 | 1.0735 | 1.0285 | 1.0210 | 1.0198 |
| 140 | .01 | 3.9600 | 1.9802 | 1.3289 | 1.0350 | .8996 | .8397 | .8039 | .7979 | .7970 |
| 145 | .01 | 3.0169 | 1.5086 | 1.0120 | .7874 | .6834 | .6374 | .6097 | .6051 | .6043 |
| 150 | .01 | 2.2071 | 1.1037 | .7402 | .5753 | .4988 | .4648 | .4443 | .4409 | .4404 |
| 155 | .01 | 1.5272 | .7637 | .5121 | .3977 | .3445 | .3208 | .3065 | .3041 | .3037 |
| 160 | .01 | .9746 | .4874 | .3267 | .2536 | .2195 | .2043 | .1951 | .1936 | .1933 |
| 165 | .01 | .5470 | .2735 | .1834 | .1422 | .1230 | .1145 | .1093 | .1084 | .1083 |
| 170 | .01 | .2427 | .1214 | .0814 | .0631 | .0546 | .0508 | .0484 | .0481 | .0480 |
| 175 | .01 | .0606 | .0303 | .0203 | .0158 | .0136 | .0127 | .0121 | .0120 | .0120 |
| 180 | 1.00 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |

**Tabelle 1:** Funktion $f(\epsilon; L/R)$ [siehe Gl. (37)] für die symmetrische azimutale Pol-Pol-Anordnung auf einer zylinderförmigen Probe für verschiedene $L/R$-Verhältnisse als Funktion der Winkeldifferenz $\epsilon$ (erste Spalte). Die $f$-Werte jeder Reihe müssen noch mit dem in der zweiten Spalte angegebenen Faktor multipliziert werden. Die Potentiale sind auf $f(\epsilon = 180°) = 0$ normiert. Die Werte scheinen bis auf eine Einheit in der letzten Stelle korrekt zu sein.

## Literatur


Abramowitz, M. & Stegun, I.A., 1965. Handbook of mathematical functions, Dover Publications, Inc., New York.

Morse, P.M. & Feshbach, H., 1953. Methods of theoretical physics. McGraw-Hill, New York.

Smythe, W.R., 1968. Static and dynamic electricity, 3. Aufl., McGraw-Hill, New York.

Titchmarsh, E.C., 1958. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Teil 2, Oxford University Press.

Van Bladel, J., 1964. Electromagnetic fields, McGraw-Hill, New York.