

# Untersuchungen zur Leitfähigkeit von Zufallsmedien

J. Bigalke\*

## 1 Einleitung

Die Leitfähigkeit der Gesteine der oberen Erdkruste wird wesentlich durch Fluide und elektronisch leitfähige Mineralisationen beeinflusst. Beide können erheblich zu einer Verringerung des spezifischen elektrischen Widerstandes des Gesteins beitragen. Die Parameter, die die Gesteinsleitfähigkeit bestimmen, sind bei Fluiden die Ionenkonzentration, das Porenraumvolumen und der Sättigungsgrad des Gesteins und bei Erzmineralisationen der spezifische Widerstand des Minerals und der prozentuale Anteil des Minerals im Gestein. Darüber hinaus spielt die Verbundenheit der höher leitfähigen Komponente eine große Rolle. Ein hoher Vernetzungsgrad kann schon bei geringen Konzentrationen der hochleitfähigen Komponente zu einer wesentlichen Erhöhung der Leitfähigkeit führen.

Der Zusammenhang zwischen dem Widerstand eines mehrkomponentigen Systems und der Konzentration der einzelnen Komponenten und deren Leitfähigkeiten ist Gegenstand zahlreicher theoretischer Untersuchungen (z.B. Shankland und Waff, 1974; Madden, 1976; Bahr, 1996).

Shankland und Waff (1974) führten Untersuchungen an einem realen Widerstandnetzwerk durch. Daraus resultierte ein experimentell gefundener Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit, daß ein Widerstandselement im Netzwerk geschlossen ist und der Leitfähigkeit des gesamten Netzwerks.

Madden (1976) entwickelte ein Netzwerk-Konzept, das in die Untersuchungen die Leitfähigkeitsanisotropie einbezieht. Das Konzept wurde von Bahr (1996) im Hinblick auf die Auswertung magnetotellurischer Daten unter Berücksichtigung von beobachteten Leitfähigkeitsanisotropien im Umfeld des KTB weiterentwickelt. Der Ansatz von Bigalke (1994) hatte zum Ziel, durch eine zusätzliche statistische Auswertung von Eigenpotentialanomalien, das Verhältnis von elektronischer und elektrolytischer Leitfähigkeit zu ermitteln.

Die theoretische Untersuchung der Leitfähigkeit von Zufallsmedien erfolgt häufig über Netzwerkmodelle. Sie liefern einen Zusammenhang zwischen dem Mischungsverhältnis von hoch leitfähigen und gering leitfähigen Komponenten und der resultierenden Gesamtleitfähigkeit eines Probekörpers. Dieser Zusammenhang liegt entweder in analytischer Form vor, oder wird durch ein MONTE-CARLO-Experiment bestimmt.

Die schnelle Fortentwicklung der Computertechnik sowie die Entwicklung effektiver Algorithmen zur Lösung großer Gleichungssysteme (vgl. Spitzer, 1994) ermöglicht eine statistische Untersuchung von 'großen' Netzwerkmodellen. Im folgenden wird ein einfaches Netzwerkmodell mit einem MONTE-CARLO-Experiment untersucht.

---

\*Institut für Meteorologie und Geophysik, Feldbergstr. 47, 60323 Frankfurt am Main

## 2 Netzwerkmodell

Das verwendete Netzwerkmodell ist ein kubisches Gitter, dessen Zellen die Leitfähigkeit  $\sigma_m$  (hoch leitfähige Komponente) oder  $\sigma_s$  (gering leitfähige Komponente) besitzen. Die Leitfähigkeitsmodelle werden durch einen Zufallsgenerator erstellt, wobei eine Zelle mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  mit  $\sigma_m$  belegt wird bzw. mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - p)$  die Leitfähigkeit  $\sigma_s$  erhält. Führt man an einem solchen Netzwerk geoelektrische Leitfähigkeitsmessungen (Schlumberger-Messungen) durch, so wird man zu gegebenem  $p$  unter Berücksichtigung einer Vielzahl von Leitfähigkeitsmessungen an unterschiedlichen Zufallsmodellen feststellen, daß die gemessenen scheinbaren spezifischen Widerstände schwanken und daß der Mittelwert des Widerstandes von  $p$  abhängt. Man erhält also zu gegebenem  $p$  eine Widerstandsverteilung, deren Form und Mittelwert eine Funktion von  $p$  ist. Es ist offensichtlich, daß bei  $p = 1$  die gemessene Leitfähigkeit  $\sigma_m$  und bei  $p = 0$   $\sigma_s$  beträgt, wobei die Streuung jeweils gleich Null ist. Für  $0 < p < 1$  wird die Streuung ungleich Null sein. Die Idee ist nun, den Mittelwert und die Streuung durch die Berechnung einer großen Zahl von zufälligen Leitfähigkeitsmodellen numerisch zu bestimmen (vgl. Shankland und Waff, 1974).

## 3 Berechnungen

Zur Ermittlung der Leitfähigkeit der Zufallsmodelle wurde ein 3D finite-Differenzen Programm verwendet, welches zur Berechnung der Verteilung des elektrischen Potentials in geoelektrischen Problemstellungen konzipiert wurde. Das in C geschriebene Programm basiert auf dem konjugierte Gradienten-Verfahren (vgl. Spitzer, 1994). Für die Leitfähigkeitsbestimmungen wurden äquidistante Gitter mit  $105 \cdot 105 \cdot 105$  und  $63 \cdot 63 \cdot 63$  Gitterpunkten verwendet. Die Gitterkonstante wurde auf  $1m$  gesetzt. Es wurden zweikomponentige Zufallsmodelle mit den Leitfähigkeitskontrasten  $1/10$ ,  $1/100$  und  $1/1000$  berechnet. Die Wahrscheinlichkeit  $p$ , in einer Gitterzelle die höher leitfähige Komponente anzutreffen, wurde von 0 bis 1 in Schritten von 0.1 variiert. Die Leitfähigkeit der Zufallsmodelle wurde durch eine Schlumberger-Anordnung bestimmt, wobei der Abstand der Potentialelektroden im 105-Gitter  $40m$  und im 63-Gitter  $24m$  ist. Der Abstand der Stromelektroden betrug  $60$  bzw.  $36m$ . Für die statistische Auswertung wurden zu jedem  $p$  die Ergebnisse einiger hundert (300-499) Berechnungen herangezogen.

## 4 Statistische Auswertung und Ergebnisse

Die Grundlage der Auswertungen waren die Logarithmen der spezifischen Widerstände aus Abschnitt 3. Es wurden Mittelwert und Standardabweichung der Widerstandswerte bestimmt. Zur Darstellung der Verteilung der log-Widerstände wurde der Widerstandswertebereich in 55 Klassen der logarithmischen Skala eingeteilt und die Anzahl der Elemente in jeder Klasse ermittelt.

Abb. 1 und 2 zeigen beispielhaft die Widerstandsverteilungen zu den Wahrscheinlichkeiten  $p = 0.1$  und  $p = 0.6$ , die aus dem 105-Gitter mit dem Leitfähigkeitskontrast  $1/100$  resultieren, wobei die Matrixleitfähigkeit  $1 S/m$  gewählt wurde. Die höher leitfähige Komponente hat demnach eine Leitfähigkeit von  $100 S/m$ . Beide Abbildungen zeigen die Wahrscheinlichkeitsdichte, mit der ein Zufallsmodell einen bestimmten Widerstand aufweist. In der oberen Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsdichte gegen den spezifischen Widerstand 'rho' aufgetragen; in der unteren gegen 'log rho'. Die durchgezogene

Linie ist die jeweils an die Daten angepasste Gaußfunktion. Es fällt auf, daß die Form der 'log rho'-Kurven etwas besser einer Normalverteilung entsprechen, als dies für die 'rho'-Kurven der Fall ist. Die Annahme einer logarithmischen Normalverteilung der spezifischen Widerstände (s. Bahr 1996) wird durch dieses Ergebnis gestützt.

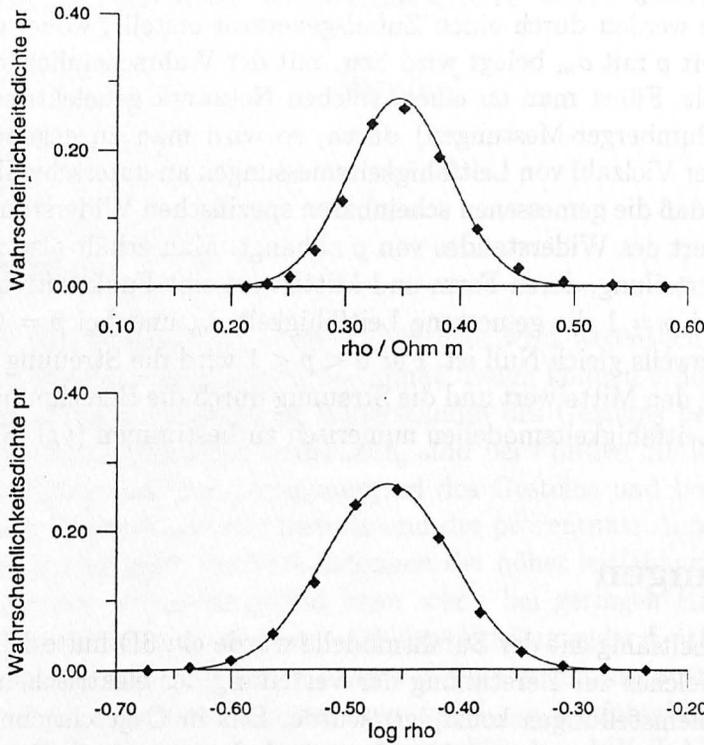


Abb. 1: Widerstandsverteilung zu der Wahrscheinlichkeit  $p = 0.1$  im 105-Gitter mit dem Leitfähigkeitskontrast  $1/100$ . Die Matrixleitfähigkeit wurde  $1 S/m$  gewählt.

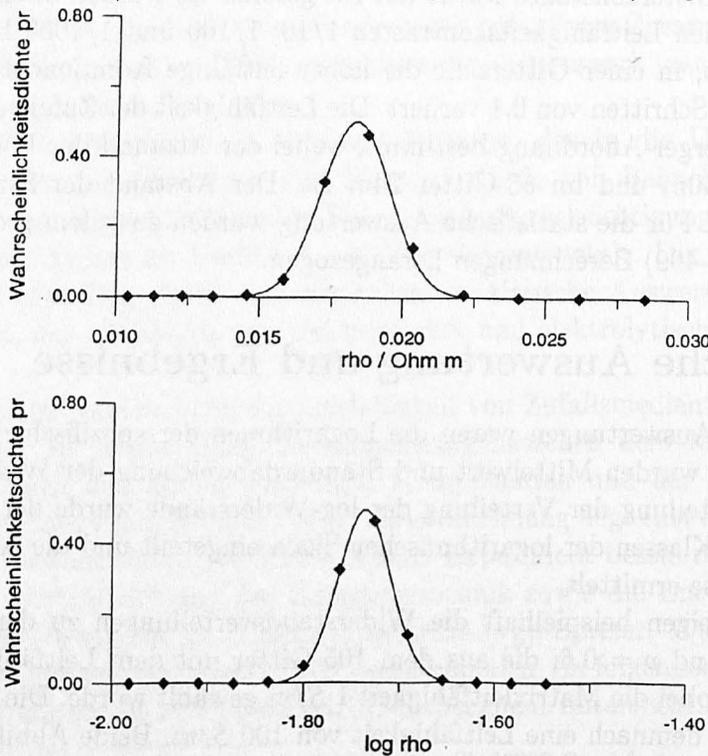


Abb. 2: Widerstandsverteilung zu der Wahrscheinlichkeit  $p = 0.6$  im 105-Gitter mit dem Leitfähigkeitskontrast  $1/100$ . Die Matrixleitfähigkeit wurde  $1 S/m$  gewählt.

In Abb. 3 sind die Abhängigkeit des mittleren logarithmischen Widerstandes von der Besetzungswahrscheinlichkeit  $p$  sowie deren Standardabweichungen für die Leitfähigkeitskontraste 1/10, 1/100 und 1/1000 dargestellt.

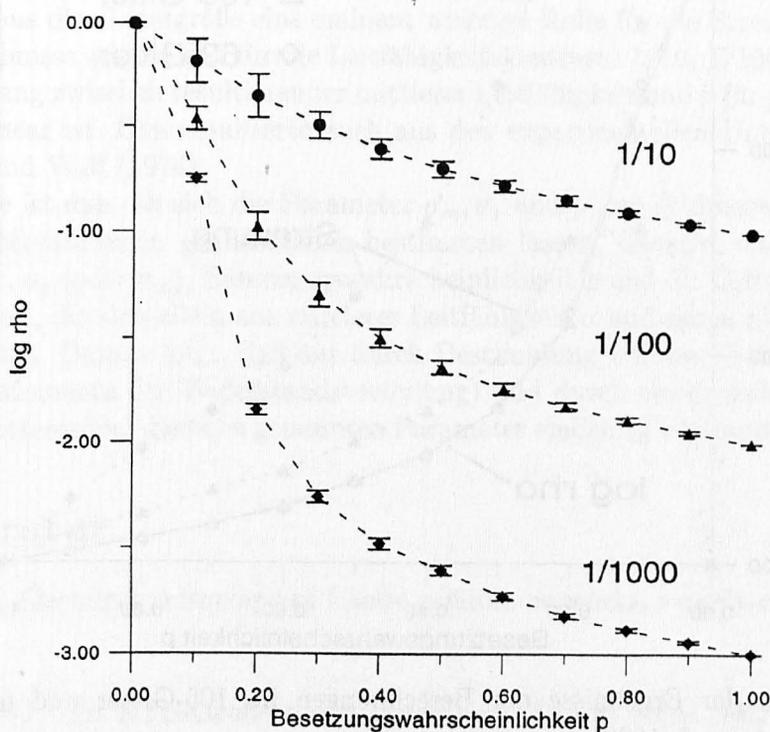


Abb. 3: Abhängigkeit des mittleren logarithmischen Widerstandes von der Besetzungswahrscheinlichkeit  $p$  sowie deren Standardabweichungen für die Leitfähigkeitskontraste 1/10, 1/100 und 1/1000.

Es stellt sich die Frage, in welchem Maß die Abhängigkeit von 'log rho' von der Besetzungswahrscheinlichkeit  $p$  durch die Größe des verwendeten Gitters beeinflusst wird. In Abb. 4 ist zum Vergleich das Ergebnis der Berechnungen im 105-Gitter und im 63-Gitter zusammen dargestellt (Leitfähigkeitskontrast 1/1000). Es zeigt sich, daß nur ein kleiner Unterschied in der Abhängigkeit des logarithmischen Widerstandes von der Besetzungswahrscheinlichkeit  $p$  besteht. Jedoch ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Madden (1974) die Streuung der Widerstandswerte im 63-Gitter wesentlich höher.

Das Ziel von Untersuchungen an Zufallsmodellen ist, einen quantitativen Zusammenhang zwischen der mittleren Leitfähigkeit eines Zufallsmediums  $\sigma$  in Abhängigkeit von  $p$ ,  $\sigma_m$  und  $\sigma_s$  zu ermitteln. Dazu ist es vorteilhaft, von einer Formel der Struktur

$$\sigma = (\sigma_m - \sigma_s) C(p, \frac{\sigma_s}{\sigma_m}) + \sigma_s \quad (1)$$

auszugehen, wobei  $\sigma_m$  die Leitfähigkeit des Fluids bzw. der Mineralisation und  $\sigma_s$  die der gering leitfähigen Gesteinsmatrix ist. Die Funktion  $C$  ist streng monoton in  $p$  und variiert von 0 bis 1. Abb. 5 zeigt die Graphen von  $C(p)$  für das 105-Gitter. Offensichtlich ist  $C$  nicht nur eine Funktion von  $p$ , sondern auch des Leitfähigkeitskontrasts. Darüber hinaus fällt auf, daß für  $p > 0.3$  der Verlauf von  $C$  mit guter Näherung durch eine Gerade beschrieben werden kann. Dies stimmt mit den Resultaten der experimentellen Untersuchungen von Shankland und Waff (1974) überein.

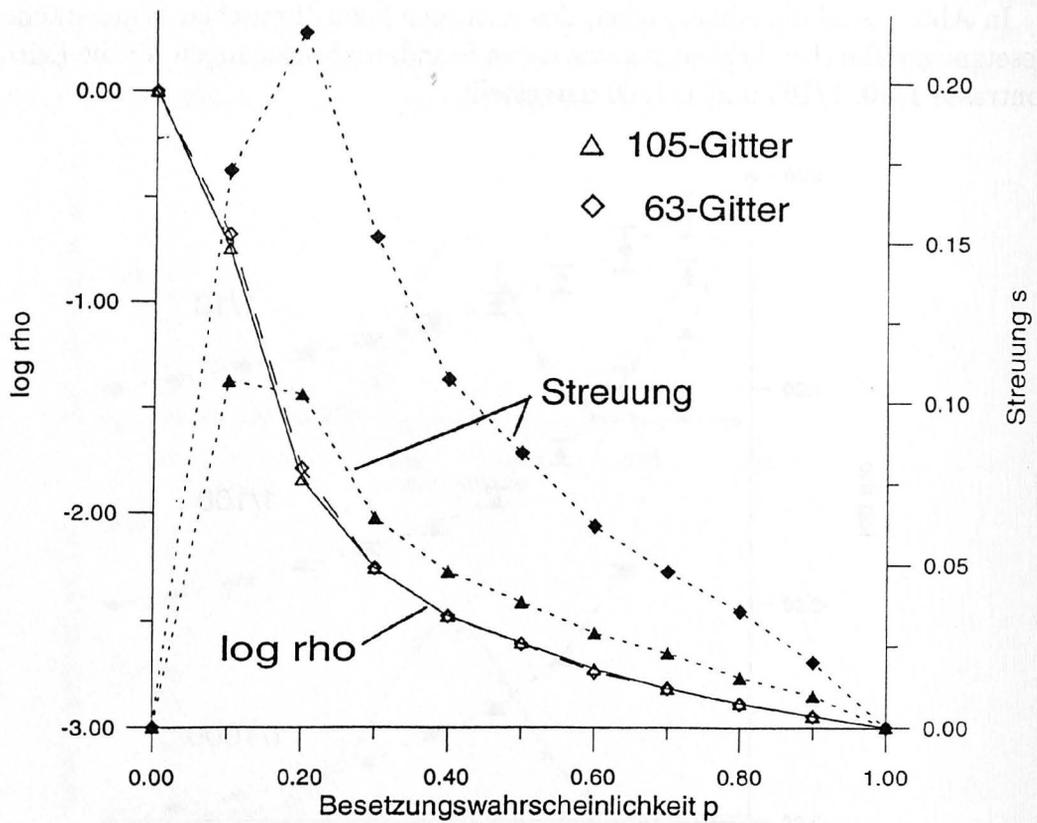


Abb. 4: Vergleich der Ergebnisse der Berechnungen im 105-Gitter und im 63-Gitter (Leitfähigkeitskontrast 1/1000).

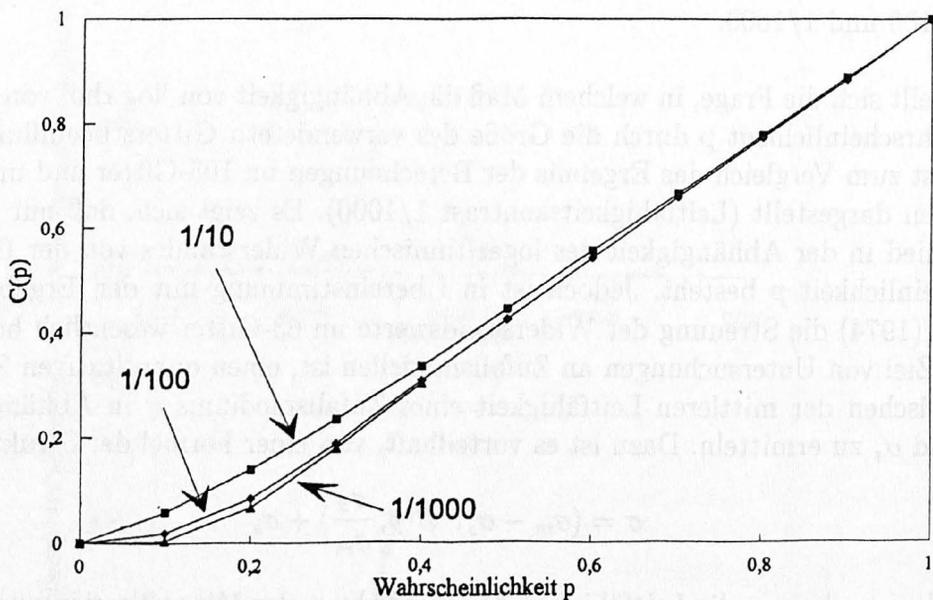


Abb. 5: Graphen von  $C(p)$  für das 105-Gitter bei den Leitfähigkeitskontrasten 1/10, 1/100 und 1/1000.

## 5 Diskussion

Abb. 3 zeigt deutlich, daß die Streuung des Widerstandes von dem Leitfähigkeitskontrast und von der Besetzungswahrscheinlichkeit  $p$  abhängt. Wie aus Abb. 4 hervorgeht, spielt darüber hinaus die Gittergröße eine eminent wichtige Rolle für die Streubreite.

Die Ergebnisse zeigen, daß für die Leitfähigkeitskontraste 1/10, 1/100 und 1/1000 der Zusammenhang zwischen resultierender mittlerer Leitfähigkeit und  $p$  für  $p > 0.3$  mit guter Näherung linear ist. Dies resultierte auch aus den experimentellen Untersuchungen von Shankland und Waff (1974).

Die Frage ist nun, ob sich die Parameter  $\sigma_m$ ,  $\sigma_s$  und  $p$  aus Feldmessungen durch statistische Untersuchungen grundsätzlich bestimmen lassen. Gesucht sind also Leitfähigkeitskontrast,  $\sigma_s$  (oder  $\sigma_m$ ), Besetzungswahrscheinlichkeit  $p$  und die Gittergröße. Das sind vier Parameter, die sich allein aus mittlerer Leitfähigkeit  $\sigma$  und deren Streuung nicht bestimmen lassen. Daraus folgt, daß nur durch Bestimmung weiterer Größen (z.B. höhere statistische Momente der Widerstandsverteilung) und durch einschränkende Annahmen (z.B. feste Gittergröße) die oben genannten Parameter eindeutig bestimmt werden können.

## 6 Literatur

*Bahr (1996)*: Electrical anisotropy of fractal random networks, submitted to Geophys. J. Int.

*Bigalke (1994)*: Die KTB-Geobatterien unter dem Aspekt eines Netzwerkmodells zur Abschätzung des Beitrags der elektronischen Leitfähigkeit zur Gesamtleitfähigkeit. In: K.Bahr und A.Junge, Protokoll über das Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung in Höchst im Odenwald, p. 364

*Madden (1976)*: Geophysics, Vol. 41, No. 6A, p. 1104.

*Shankland and Waff (1974)*: J. Geophys. Res., Vol. 79, No. 32, p. 4863.

*Spitzer (1994)*: A 3D Finite Difference Algorithm for DC Resistivity Modeling Using Conjugate Gradients Methods. Bericht: Niedersächsisches Landesamt für Bodenforschung, Geowissenschaftliche Gemeinschaftsaufgaben.