

# Digitale Optimalfilter für LOTEM-Daten

Tilman Hanstein

Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln

## 1 Einleitung

Eine wesentliche Besonderheit der transient elektromagnetischen Sondierung mit der LOTEM Methode ist die Aufzeichnung des Signals als Zeitreihe und die digitale Aufbereitung der Daten, die aufgrund der meist stark verrauschten Daten unumgänglich ist. Der größte Anteil des Rauschens ist harmonisch und anthropogenen Ursprunges, bestehend aus den 50 Hz des Verbundnetzes bzw.  $16 \frac{2}{3}$  Hz der Bundesbahn, sowie allen möglichen Multiplen.

In der zur Zeit verwendeten TEMEX Meßapparatur ist die Anzahl der analogen Sperrfilter drastisch reduziert worden, um die damit verbundenen Signalverzerrung gering zu halten und die Auflösung der oberflächennahen Bereiche zu erhöhen.

Aber die Letzten mit der TEAMEX durchgeführten Meßkampagnen wiesen einen Rauschanteil auf mit einer extrem starken Amplitude, siehe hierzu auch die Beiträge von H. Thern und D. Sylvester (in diesem Band). Die bisher verwendeten digitalen Filter zeigen entweder eine unerwünschte Signalverzerrung oder eine unzureichende Rauschunterdrückung.

Die Parameter des Rauschens (Amplitude, Phase, Frequenz) variieren ständig und erschweren so eine Anwendung schmalbandiger Filter.

Die Anwendung herkömmliche Filter setzen eine Trennung zwischen Signal und Rauschen über dem gesamten Spektralbereich voraus. Optimalfilter dagegen nutzen Eigenschaften des Signals zur Unterdrückung des Rauschens, auch wenn eine Überlappung der beiden Spektralbereiche vorhanden ist.

Die Filtereigenschaften können verbessert werden, indem man die Informationen über den zeitlichen Verlauf des Transienten beim Filterprozess mit berücksichtigt. Damit werden diese Filter zu Optimalfiltern, die sich durch eine hohe Unterdrückungsgüte und eine sehr geringe Signalverformung auszeichnen.

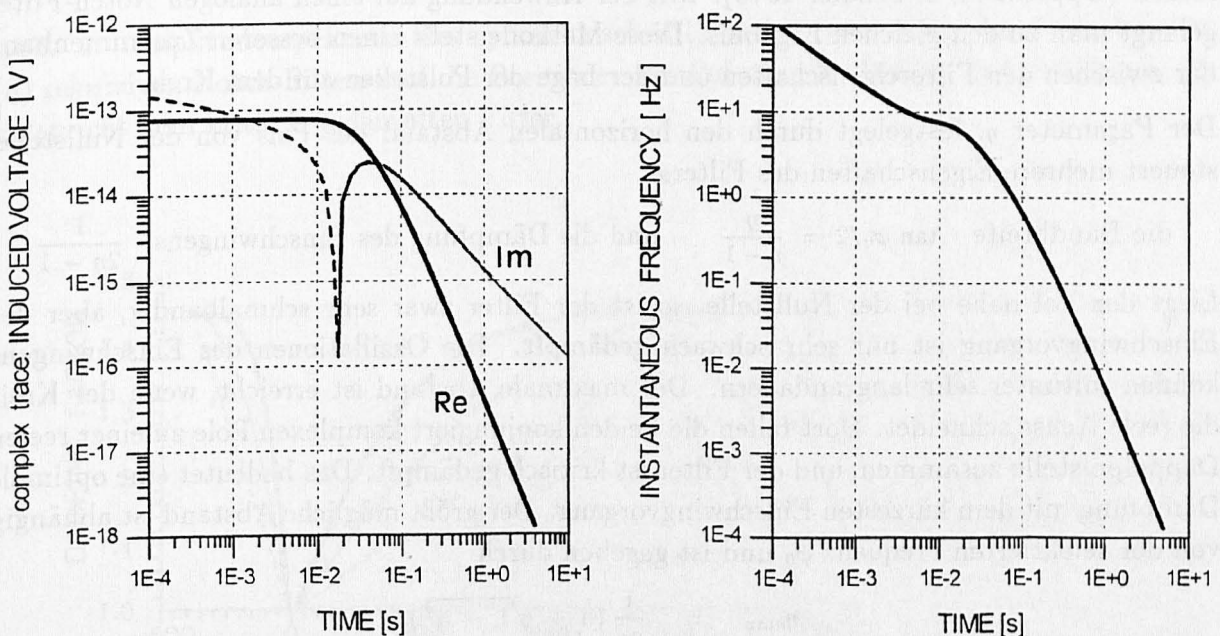
## 2 Optimalfilter

Das bekannteste Beispiel für einen Optimalfilter aus der Seismik ist wohl das Wiener Filter, bei dem das Signal-Rausch Verhältnis im Amplitudenspektrum als bekannt vorausgesetzt wird (Buttkus 1991). Eine solche apriori-Annahme über das Amplitudenspektrum ist bei Transienten nicht möglich. Überhaupt ist bei der Anwendung von Optimalfiltern aus der Seismik zu beachten, daß eine Signalverformung oft nicht nur erlaubt, sondern sogar erwünscht ist. Außerdem ist das Auftreten des seismischen Signals in der Zeitreihe stochastisch verteilt, und der Signalverlauf ist veränderlich und nur unzureichend bekannt.

Bei der Transientenmethode dagegen erscheint das Signal zu einem festen und bekannten Zeitpunkt. Direkt nach dem Schalten des Sendestromes zeigt der Transient einen sprunghaften Anstieg, der durch die Meßapparatur etwas abgerundet wird, und zu späteren Zeiten einen glatten, abklingenden Verlauf.

Die komplexe Signalanalyse (Taner et al 1979) stellt einen Zusammenhang dar zwischen Signalverlauf im Zeitbereich und dem dazugehörigen Frequenzinhalt. Zum Transienten, eine reelle Funktion, wird über eine Hilbert-Transformation eine imaginäre Zeitfunktion definiert. Diese imaginäre Zeitfunktion hat das gleiche Amplitudenspektrum wie der Transient, aber das Phasenspektrum ist um  $\pi/2$  verschoben (Abb. 1a). Mit dieser komplexen Zeitfunktion läßt sich nun eine momentane Amplitude und Phase definieren. Die zeitliche Ableitung der momentanen Phase ergibt dann die momentane Frequenz, die als Funktion der Zeit in Abb. 1b dargestellt ist. Die Frequenzen des periodischen Rauschens sind nur zu frühen Zeiten zu beobachten und der abklingende Spätzeitbereich enthält nur einen sehr niederfrequenten Anteil.

Diese Tatsache und der glatt abklingende Verlauf soll nun als Information in den Filterprozess miteingebracht werden. Zwei Arten der digitalen Filterung wurden erfolgreich verwendet: rekursive Systeme (Notch- und Delay-Filter) und das sogenannte Lockin-Filter, das die Amplitude und Phase der Störfrequenzen bestimmt und eliminiert. Bei den rekursiven Sperrfiltern führt die Optimierung zu zeitvarianten Systemen, deren Filtercharakteristik sich entsprechend dem Signalverlauf verändert.



**Abb. 1:** komplexe Signalanalyse, links: Realteil (Transient  $\dot{h}_z(t)$ ) und Imaginärteil (Hilbert-Transformierte) der komplexen Zeitfunktion, rechts: momentane Frequenz als Funktion der Zeit

### 3 Rekursive Notch-Filter

Dieses Filter, konstruiert mit der Pol-Nullstellen-Technik, wurde schon in einem früheren Kolloquiumsbeitrag vorgestellt (Hanstein et al 1986). Das Besondere und der wesentliche Unterschied zu den in der Literatur angegebenen Kerbfiltern (Buttkus 1991, S. 385, Kulhanek 1976, Shanks 1967) liegt in der Wahl der Pollage.

Die übliche Pollage, von der Nullstelle radial nach außen, ergibt ein unsymmetrisches Amplitudenspektrum mit einer ungleichen Verstärkung bei der Nullfrequenz und der Nyquistfrequenz (Kurve 3 in Abb.2). Die Symmetrie im Amplitudenspektrum wird durch eine rein geometrische Bedingung erzwungen.

$$\frac{|z_p \pm 1|^2}{|z_0 \pm 1|^2} = \eta, \quad \text{mit Pol } z_p, \text{ Nullstelle } z_0$$

Die geometrischen Orte bei denen die Verstärkung gleich ist, liegen auf einem Kreis mit der Gleichung

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} - 1 \quad \text{mit } z = x + iy$$

und dieser ist nur eine Funktion von  $\alpha = \cos(\omega_0 \Delta t)$  mit der zu unterdrückenden Frequenz  $\omega_0$ . Die Filterfunktion im  $z$ -Bereich lautet (Hanstein et al 1986)

$$H(z) = \eta \frac{z^2 - 2\alpha z + 1}{z^2 - 2\alpha\eta z + (2\eta - 1)}$$

Die bilineare  $z$ -Transformation ermöglicht es, analoge Systeme in diskrete Systeme zu überführen (Oppenheim & Schaffer 1975). Mit der Anwendung auf einen analogen Notch-Filter gelangt man zu den gleichen Ergebnis. Diese Methode stellt einen besseren Zusammenhang dar zwischen den Filtereigenschaften und der Lage der Polstellen auf dem Kreis.

Der Parameter  $\eta$ , festgelegt durch den horizontalen Abstand des Pols von der Nullstelle, steuert mehrere Eigenschaften des Filters:

$$\text{die Bandbreite } \tan \varphi_0/2 = \frac{\eta}{\eta - 1} \quad \text{und die Dämpfung des Einschwingens } \frac{1}{2\eta - 1}$$

Liegt der Pol nahe bei der Nullstelle, so ist der Filter zwar sehr schmalbandig, aber der Einschwingvorgang ist nur sehr schwach gedämpft. Die Oszillationen des Einschwingens können mitunter sehr lang andauern. Der maximale Abstand ist erreicht, wenn der Kreis die reele Achse schneidet. Dort fallen die beiden konjugiert komplexen Pole zu einer reelen Doppelpolstelle zusammen, und der Filter ist kritisch gedämpft. Das bedeutet eine optimale Dämpfung mit dem kürzesten Einschwingvorgang. Der größt mögliche Abstand ist abhängig von der selektierten Frequenz  $\omega_0$  und ist gegeben durch

$$\eta_{max} = \frac{1}{\alpha^2} (1 + \sqrt{1 - \alpha^2})$$

Mit einem zeitabhängigen Filterparameter  $\eta = \eta(k \Delta t)$  läßt sich das Einschwingverhalten kontrolliert steuern. Die Rekursion beginnt mit der kritischen Dämpfung und mit jedem Rekursionschritt wird der Pol zur Nullstelle verlagert. Es reicht aus,  $\eta$  über einen Zeitbereich

von etwa 2 Perioden der selektierten Frequenz linear zu verkleinern bis zur gewünschten Bandbreite, um das Einschwingen auf ein Minimum zu reduzieren.

Zu einem Optimalfilter gelangt man, in dem die zeitliche Variation der Filtercharakteristik an den Signalverlauf angepaßt wird. Der Frühzeitbereich, in dem der Transient sehr schnell ansteigt, benötigt einen sehr schmalbandigen Filter ( $\eta = 1.001$ ), damit die Verformung des Signals gering ist. In dem abklingenden Teil des Transienten kann die Bandbreite des Filter zur besseren Rauschunterdrückung wieder geöffnet werden.

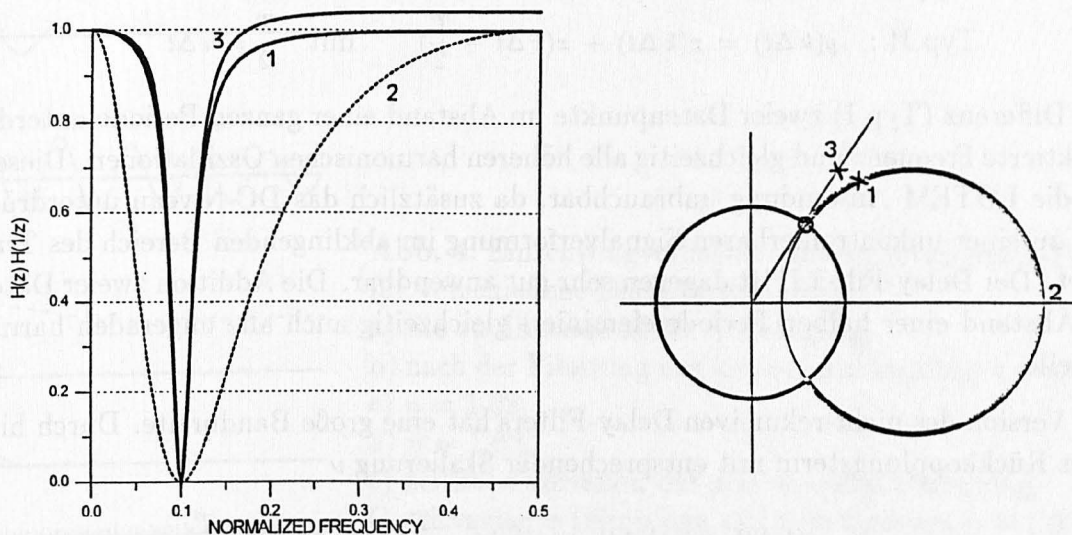


Abb. 2: Amplitudenspektrum des symmetrischen (1 und 2) und des nicht-symmetrischen (3) rekursiven Notch-Filters und die Positionen der Pol- und Nullstellen in der z-Ebene. (2) entspricht dem kritisch gedämpften Filter.

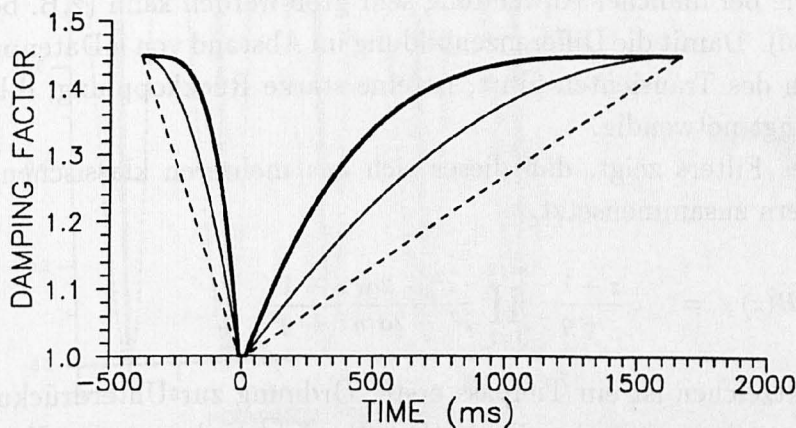


Abb.3: Zeitlicher Verlauf des Dämpfungsparameters  $\eta$  für den rekursiven Optimalfilter.

#### 4 Rekursive Delay-Filter

Die Grundidee des Delay-Filters ist sehr einfach; eine nicht-rekursive Version wurde von Schnegg & Fischer (1980) vorgestellt mit einer Anwendung auf magnetotellurischen Daten. Zwei Varianten sind möglich:

$$\begin{aligned} \text{Typ I: } & y(k \Delta t) = x(k \Delta t) - x(k \Delta t - T) \quad \text{mit } T = n \Delta t, n = 1, 2, \dots \\ \text{Typ II: } & y(k \Delta t) = x(k \Delta t) + x(k \Delta t - \frac{T}{2}) \quad \text{mit } \frac{T}{2} = n \Delta t \end{aligned}$$

Die Differenz (Typ I) zweier Datenpunkte im Abstand einer ganzen Periode unterdrückt die selektierte Frequenz und gleichzeitig alle höheren harmonischen Oszillationen. Dieser Typ ist für die LOTEM Anwendung unbrauchbar, da zusätzlich das DC-Niveau unterdrückt wird, was zu einer unkontrollierbaren Signalverformung im abklingenden Bereich des Transienten führt. Der Delay-Filter II ist dagegen sehr gut anwendbar. Die Addition zweier Datenpunkte im Abstand einer halben Periode eliminiert gleichzeitig auch alle ungeraden harmonischen Anteile.

Die Version des nicht-rekursiven Delay-Filters hat eine große Bandbreite. Durch hinzufügen eines Rückkopplungsterm mit entsprechender Skalierung  $\nu$

$$y(k \Delta t) = x(k \Delta t) + x(k \Delta t - \frac{T}{2}) - \nu y(k \Delta t - \frac{T}{2})$$

erhält man ein rekursives System. In der Darstellung der z-Transformation lautet das Filter:

$$H(z) = c \frac{z^n + 1}{z^n + \eta} \quad \text{mit der Normalisierung } c = \frac{1 + \eta}{2}$$

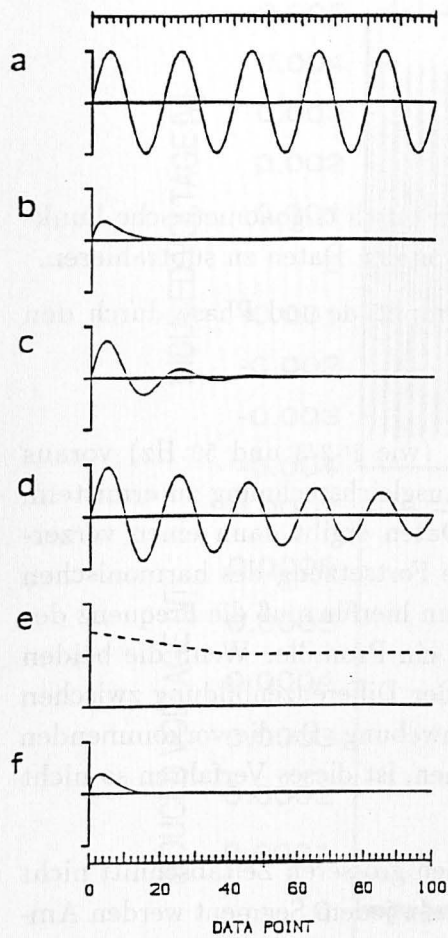
Die Bandbreite des Filters läßt sich wieder mit dem Parameter  $\eta$  steuern, der nun den Pol im radialen Abstand zur Nullstelle festlegt. Die zu selektierende Frequenz bestimmt die Ordnung des Filters, die bei mancher Anwendung sehr groß werden kann (z.B. bei  $\Delta t = 0.5 \text{ms}$ ,  $f_0 = 16.2/3 \text{Hz}$  ist  $n = 60$ ). Damit die Differenzenbildung im Abstand von  $n$  Datenpunkten nicht zu einer Deformation des Transienten führt, ist eine starke Rückkopplung, d.h. sehr geringe Bandbreite unbedingt notwendig.

Eine genauere Analyse des Filters zeigt, daß dieser sich aus mehreren klassischen nicht-symmetrischen Notch-Filtern zusammensetzt.

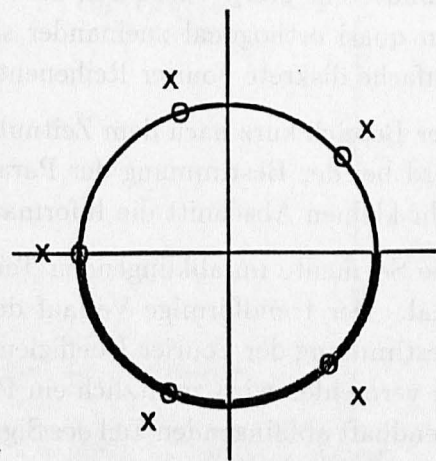
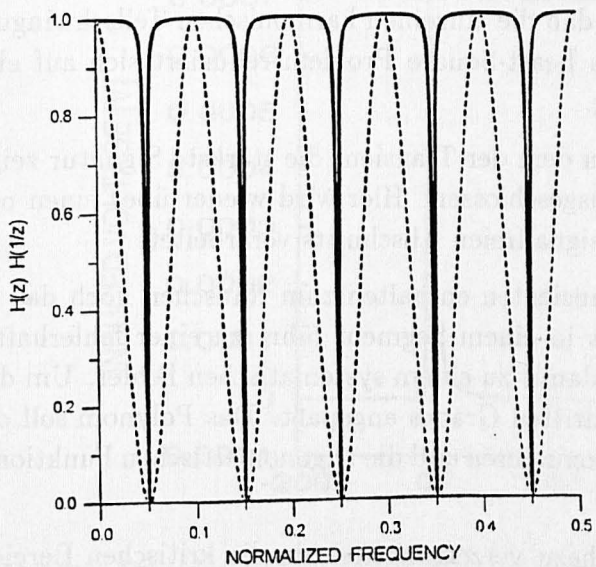
$$H(z) = c \frac{z + 1}{z + \eta} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{z^2 - 2\alpha_i z + 1}{z^2 - 2\alpha_i \eta z + \eta^2}$$

Der Term vor dem Produktzeichen ist ein Tiefpass erster Ordnung zur Unterdrückung der Nyquistfrequenz und tritt nur bei ungeradem  $n$  auf. Das Produkt bedeutet eine Kaskadenanordnung verschiedener Kerbfilter, wobei  $\alpha_i = \cos \omega_i \Delta t$  durch die selektierte Frequenz mit ihren ungeraden Harmonischen gegeben ist.

Den Optimalfilter erhält man wiederum durch einen zeitvarianten Delay-Filter, bei dem die Filtercharakteristik, wie beim Notch-Filter, den Anforderungen des Signals angepaßt wird.



**Abb. 4:** Einschwingverhalten des rekursiven Notch-Filters für verschiedene Dämpfungsfaktoren:  
 a) die zu filternde 50 Hz Schwingung,  
 b) nach der Filterung mit kritischer Dämpfung  $\eta = \eta_{max}$ ,  
 c)  $\eta = 1.08$ ,  
 d)  $\eta = 1.02$ ,  
 e) zeitliche Variation der zeitvarianten Dämpfung,  
 f) zeitvariante Dämpfung mit dem Endwert  $\eta = 1.001$ .



**Abb. 5:** Amplitudenspektrum des rekursiven (Linie) und des nicht-rekursiven (gestrichelt) Delay-Filters für  $n = 10$  und die Positionen der Pol- und Nullstellen in der  $z$ -Ebene für  $n = 5$ .

## 5 Lockin-Filter

Das Prinzip des Lockin-Filters ist, das periodische Rauschen durch trigonometrische Funktionen zu approximieren, und dieses modellierte Rauschen von den Daten zu subtrahieren.

Ursprünglich sollte im signalfreien Teil der Zeitreihe die Amplitude und Phase durch den harmonischen Ansatz

$$a \cos \omega_i t + b \sin \omega_i t$$

bestimmt werden. Die Frequenzen  $\omega_i$  werden als bekannt (wie 162/3 und 50 Hz) vorausgesetzt, und die Koeffizienten  $a, b$  sind durch eine lineare Ausgleichsrechnung zu ermitteln. Die Differenz zwischen modelliertem Rauschen und den Daten ergibt dann einen verzerrungsfreien Filterprozess. Die Praxis zeigte aber, daß eine Fortsetzung des harmonischen Ansatzes über die gesamte Zeitreihe nicht möglich war. Denn hierfür muß die Frequenz des Rauschens sehr genau bekannt sein, wesentlich genauer als ein Promille. Wenn die beiden Frequenzen nicht gleich sind, entsteht bei der Fortsetzung der Differenzenbildung zwischen der tatsächlichen und der modellierten Schwingung eine Schwebung. Da die vorkommenden Störfrequenzen nie exakt dem theoretischen Wert entsprechen, ist dieses Verfahren so nicht anwendbar.

Da eine Extrapolation des modellierten Rauschens über einen grösseren Zeitabschnitt nicht möglich ist, wird die Zeitreihe in kleine Segmente aufgeteilt. In jedem Segment werden Amplitude und Phase bestimmt und das modellierte Rauschen von den Daten abgezogen. Die Segmentlänge beträgt ein ganzzahliges Vielfaches der Periode der niedrigsten Störfrequenz (mindestens drei). Hierdurch wird erreicht, daß die einzelnen harmonischen Teilschwingungen quasi orthogonal zueinander sind. Das Least-Square Problem reduziert sich auf eine einfache diskrete Fourier Reihenentwicklung.

Der Bereich kurz nach dem Zeitnullpunkt, in dem der Transient die stärkste Signatur zeigt, wird bei der Bestimmung der Parameter ausgeschlossen. Hier wird wieder über einen nun sehr kleinen Abschnitt die Information des signalfreien Abschnitts verarbeitet.

Die Segmente im abklingenden Teil des Transienten enthalten zum Rauschen noch das Signal. Der trendförmige Verlauf des Signals in einem Segment führt zu einer fehlerhaften Bestimmung der Fourier Koeffizienten und damit zu einem systematischen Fehler. Um dies zu vermeiden wird zusätzlich ein Polynom dritten Grades angepaßt. Das Polynom soll den trendhaft abklingenden Teil des Signals approximieren und die trigonometrischen Funktionen das periodische Rauschen.

Dieses optimierte Lockin-Filter arbeitet nahezu verzerrungsfrei, da die kritischen Bereiche mit einem komplizierteren Signalverlauf (z.B. bei 'Reversals' oder stark impulsförmigen Transienten) ausgespart werden können.

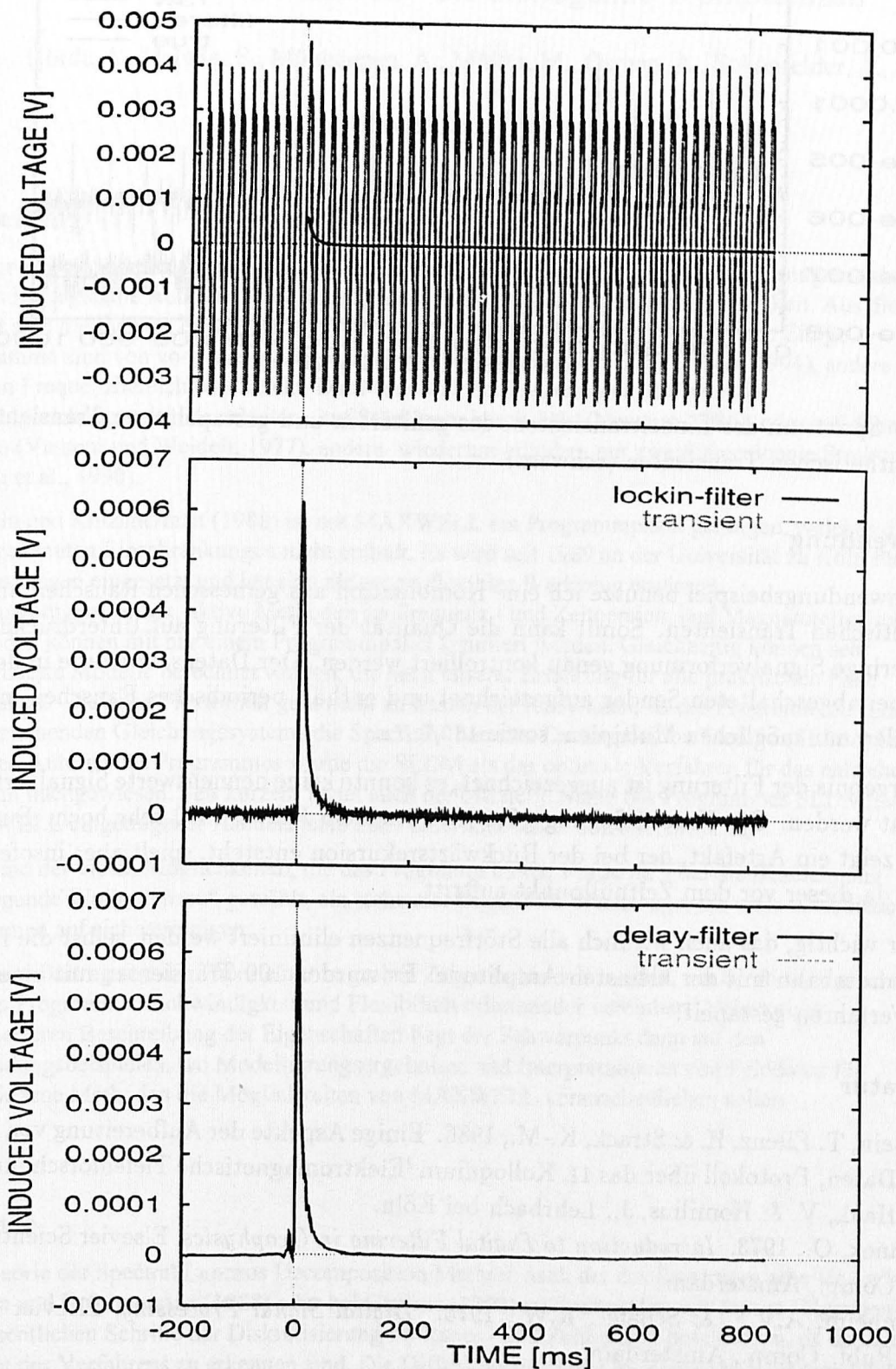


Abb. 6: Anwendungsbeispiel: a) Einzeltransient, gemessenes Rauschen mit synthetischen Transient (grau), synthetischer Transient (schwarz); Ergebnis der Filterung, b) Lockin-Filter, c) Delay-Filter.



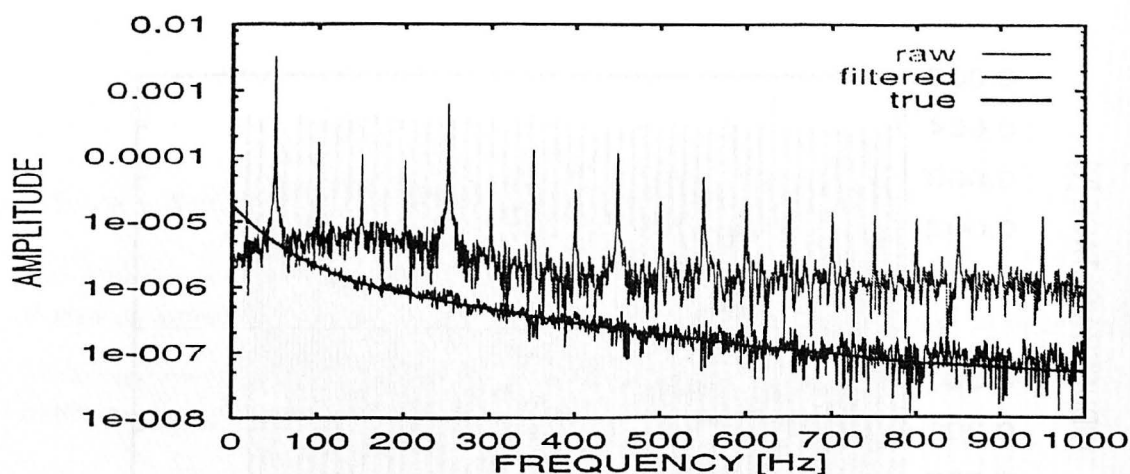


Abb. 7 Spektrum des Einzeltransienten, des gefilterten und gestapelten Transienten und des synthetischen Transienten (schwarz).

## 6 Anwendung

Als Anwendungsbeispiel benutze ich eine Kombination aus gemessenen Rauschen und einen synthetischen Transienten. Somit kann die Qualität der Filterung auf Unterdrückungsgüte und geringe Signalverformung genau kontrolliert werden. Der Datensatz wurde in der Oberpfalz bei abgeschalteten Sender aufgezeichnet und enthält periodisches Rauschen mit 50 Hz und allen nur möglichen Multiplen, sowie  $16\frac{2}{3}$  Hz.

Das Ergebnis der Filterung ist ausgezeichnet, es konnte keine nennenswerte Signalverformung erkannt werden. Die Unterdrückungsgüte ist mit einem Faktor 1000 sehr hoch. Der Delay-Filter zeigt ein Artefakt, der bei der Rückwärtsrekursion entsteht, spielt aber insofern keine Rolle, da dieser vor dem Zeitnullpunkt auftritt.

Es war wichtig, das auch wirklich alle Störfrequenzen eliminiert werden, selbst die Frequenz der Bundesbahn mit der kleinsten Amplitude. Es wurden 100 Transienten mit einem robusten Verfahren gestapelt.

## Literatur

- Hanstein, T. Eilenz, H. & Strack, K.-M., 1986. Einige Aspekte der Aufbereitung von LOTEM Daten, Protokoll über das 11. Kolloquium 'Elektromagnetische Tiefenforschung', Hrsg.: Haak, V. & Homilius, J., Lehrbach bei Köln.
- Kulhanek, O., 1973. *Introduction to Digital Filtering in Geophysics*, Elsevier Scientific Publ. Comp., Amsterdam.
- Oppenheim, A.V.F. & Schafer, R.W., 1975. *Digital Signal Processing*, Elsevier Scientific Publ. Comp., Amsterdam.
- Schnegg, P.-A. & Fischer, G., 1980. On-line determination of apparent resistivity in magnetotelluric soundings, Protokoll über das 8. Kolloquium 'Elektromagnetische Tiefenforschung', Hrsg.: Haak, V. & Homilius, J.
- Shanks, J.L., 1967. Recursive Filters of Digital Processing, *Geophysics*, 35, 247-253.
- Taner, M.T, Kohler, F., Sheriff, R.E., 1979. Complex Seismic Trace Analysis, *Geophysics*, 44, 1041-1063.