

2 D Modellrechnungen zur Induktion in inhomogenen dünnen Deck- schichten über anisotropen geschichteten Halbräumen

Ulrich Schmucker, Göttingen

1 Einleitung

Seit den Anfängen der Magnetotellurik ist es eine stets wiederkehrende Erfahrung, daß man etwas mißt, was konventionellen Modellvorstellungen widerspricht: Eine nach Betrag und Ausrichtung flächenmäßig einheitliche Anisotropie der magnetotellurischen Impedanz (s. z.B. Chr. Peters Beitrag zu diesem Kolloquiumsband). Man kann nun seine Meßergebnisse teilweise ignorieren, also etwa 2 D Modelle aus den Impedanzen nur einer Polarisierung entwickeln, im Falle der E-Polarisation möglicherweise auch ohne Einbeziehung magnetischer Übertragungsfunktionen. Oder man kann durch exzessive "static shift"-Korrekturen die genannte Anisotropie auf ein interpretierbares Maß bringen.

Soll jedoch ein Modell gefunden werden, daß die Impedanzen und Übertragungsfunktionen weitgehend so erklärt, wie sie sich aus den Feldregistrierungen ableiten, stößt man auf prinzipielle Schwierigkeiten, wenn folgendes gilt:

1. An allen Meßstationen existieren, insbesondere bei längeren Perioden, ausgeprägte tellurische Vorzugsrichtungen und damit verbunden sehr unterschiedliche Impedanzen auf der Nebendiagonalen in optimal gedrehten Koordinaten.
2. Die Richtungen kleinster und größter Impedanz, wie man sie beispielsweise mit dem Swift-Winkel festlegt, sind überall nahezu gleich mit ebenfalls etwa gleichbleibenden Anisotropieverhältnissen.
3. Anomalien des inneren Anteils erdmagnetischer Variationen, sofern es sie gibt, erscheinen als zusammenhanglos zu denjenigen des erdelektrischen Feldes. Die Induktionsvektoren verweisen auf eine Leitfähigkeitsstruktur, die unabhängig zu sein scheint von den Ursachen der genannten magnetotellurischen Richtungsabhängigkeit.

Es wird kein Modell geben, weder in zwei noch in drei Dimensionen, das die erstgenannten magnetotellurischen Beobachtungen erklären kann. Ein Notbehelf wären, wie schon erwähnt, Versuche, durch "static shift" die weit auseinanderliegenden ρ_a -Kurven zusammenzuschieben - und damit möglicherweise eine wichtige Aussage der Magnetotellurik bezüglich der Krustenleitfähigkeit zu eliminieren. Auch sind solche Korrekturen dazu gedacht, die Impedanzen von örtlichen 3D Effekten zu befreien ohne eine vorherrschende gleichbleibende Anisotropie aufzuheben, es sei denn, man würde für jeden Meßort die gleiche 2D Verzerrung annehmen oder dem Meßgebiet insgesamt eine solche Verzerrung zuordnen. Das würde aber Frequenzabhängigkeiten der Anisotropie voraussetzen, die in der Regel

nicht beobachtet werden. Außerdem sollten solche gleichbleibenden 2D Verzerrungen geologisch plausibel sein, was ebenfalls in vielen Fällen nicht zutrifft.

Sondierungen in der Göttinger Umgebung waren der ursprüngliche Anlaß, unter den geschilderten Umständen nach neuen Erklärungsmöglichkeiten zu suchen (Schmucker, 1986). Dem auch hier in größeren Tiefen angetroffenen Krustenleiter wurde eine richtungsabhängige Leitfähigkeit zugeordnet, wobei sich die spezifischen Widerstände in den Richtungen größter und kleinster Werte um Größenordnungen unterscheiden sollten (10 Ωm vs. 1000 Ωm). Damit wurde zum ersten Mal eine horizontale Leitfähigkeitsanisotropie nicht dem Kristallin des Grundgebirges zugeschrieben oder einem hochohmigen Bereich in größerer Tiefe, wie in den Arbeiten von Kurtz et al. (1986) und Rasmussen (1988), sondern jener nach wie vor mysteriösen Zone hoher Leitfähigkeit, die für die mittlere und untere kontinentale Kruste so charakteristisch sein kann.

Die in diesem Zusammenhang entwickelten "dyke" Modelle sind anschließend mehrfach benutzt worden, um unter ähnlichen Gegebenheiten im Schwarzwald und anderswo zu konsistenten Modellen bezüglich aller Meßgrößen zu kommen (Teufel 1987; Tezkan 1988, Kellet et al. 1992, Eisel 1992). Im Falle des Schwarzwaldes ging es darum, eine richtungsconstante Anisotropie nicht unter 1D Verhältnissen zu interpretieren, sondern unter 2D Verhältnissen im folgenden Sinne: Eine oberflächliche 2D Struktur mit isotropen Leitfähigkeiten (hier der Rheingraben) ist induktiv gekoppelt an eine Tiefenstruktur, deren Leitfähigkeit in gewissen Bereichen anisotrop ist, was sich in richtungsabhängigen Impedanzen ausserhalb der Struktur auswirkt (hier im Kristallin des angrenzenden Schwarzwalds).

Alle bisherigen diesbezüglichen Modellrechnungen besitzen jedoch eine gravierende Einschränkung. Um mit existierenden 2D Programmen rechnen zu können, mußte vorausgesetzt werden, daß die Streichrichtung der 2D Struktur übereinstimmt mit der Richtung extremaler Leitfähigkeit der Tiefenstruktur, wobei es gleichgültig ist, ob man deren Anisotropie durch "dyke" Modelle wiedergibt oder durch unterschiedliche Leitfähigkeiten bei Modellrechnungen für E- und B-Polarisation. In diesem Beitrag soll gezeigt werden, wie sich 2D Modellrechnungen mit inhomogenen dünnen Schichten gestalten, wenn die genannte Voraussetzung *nicht* erfüllt ist. Die im Schwarzwald gefundenen tellurischen Vorzugsrichtungen beispielsweise bilden deutliche Winkel von 45 Grad mit der nordsüdlich verlaufenden Grabenstruktur (Abb. 1). Die Auswirkung dieser Schiefwinkligkeit auf die induzierten Felder und Impedanzen ist unübersehbar und Ziel der vorliegenden Arbeit.

Die Tiefenstruktur soll dabei aus einer Folge von homogenen Schichten bestehen, von denen eine oder auch mehrere eine horizontal-anisotrope Leitfähigkeit in beliebiger Orientierung erhalten. Um die Zweidimensionalität des Induktionsproblems zu wahren, muß ein quasi-homogenes Normalfeld vorausgesetzt werden. Diese bei 2D Modellrechnungen mit isotropen Leitfähigkeiten nur für B-Polarisation zu fordernde Einschränkung ist jetzt auf alle Polarisationsrichtungen zu erweitern. Dies erklärt sich daraus, daß es eine Unterscheidung von E- und B-Polarisation im üblichen Sinne nicht mehr gibt. Ganz allgemein wird die erweiterte 2D Lösung viele Merkmale von 3D Lösungen aufweisen, insbesondere vollbesetzte Impedanz-Matrizen in jeder Orientierung des Bezugssystems.

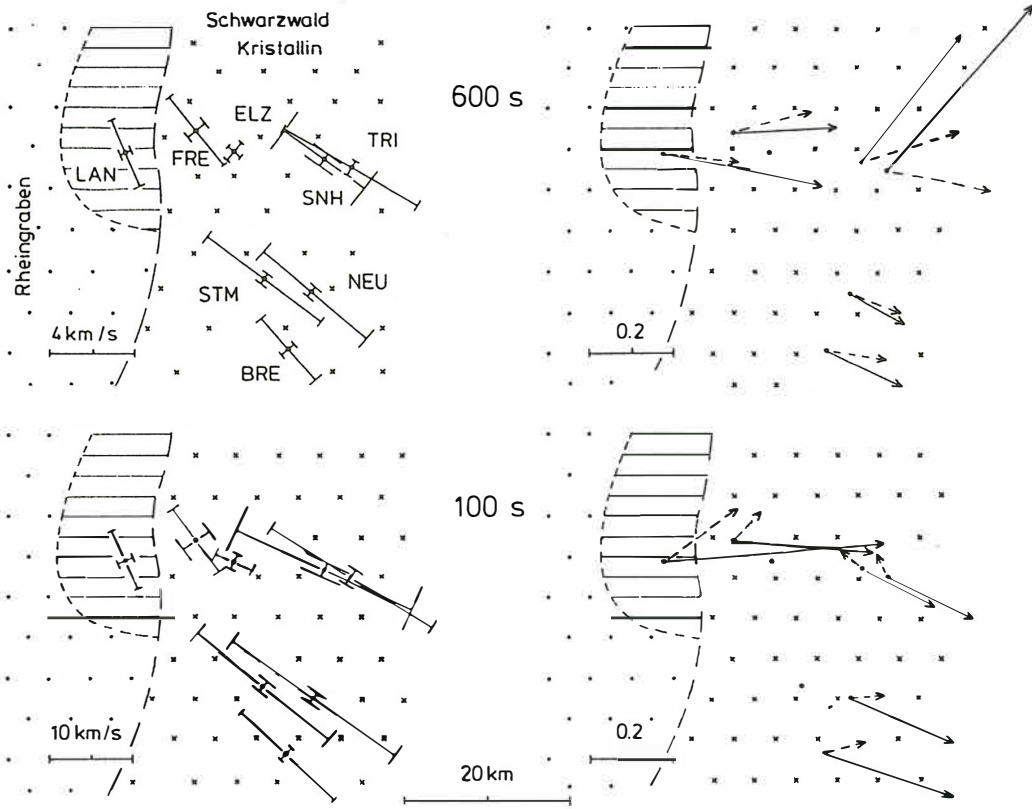


Abb. 1 Tellurische Vorzugsrichtungen in der Siemonschen Darstellungsweise (links) und Induktionsvektoren der Wiese-Konvention (rechts) im Schwarzwald für $T = 100$ s. Zahlenwerte entnommen dem Tabellenanhang in: B. Tezkan, 1986. Erdmagnetische und magnetotellurische Untersuchungen auf den hochohmigen Kristallinstrukturen des Hochschwarzwaldes und des Bayrischen Waldes bei Passau. Dissertation U. Göttingen, 117 pp.

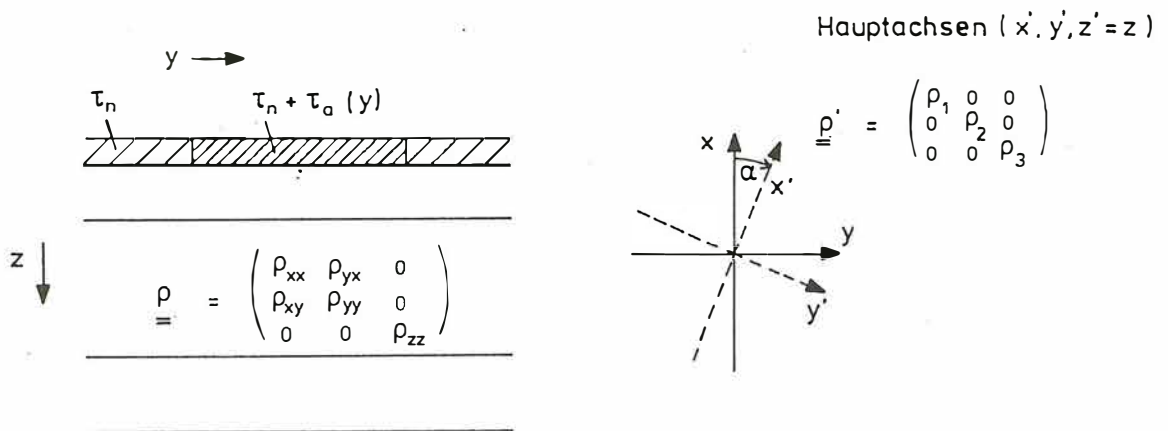


Abb. 2 2D Modell einer inhomogenen dünnen Deckschicht über einem geschichteten horizontal-anisotropen Halbraum

2 Modellansatz und Ausgangsgleichungen

Die als unendlich dünn betrachtete inhomogene Deckschicht variabler integrierter Leitfähigkeit $\tau(y) = \tau_n + \tau_a(y)$ bildet die $z = 0$ Ebene kartesischer Koordinaten, so daß in der üblichen Konvention x die Streichrichtung der 2D Struktur angibt und z senkrecht nach unten weist. Ausserhalb eines gewissen anomalen Bereichs ist die integrierte Leitfähigkeit konstant. Sie kann links und rechts von diesem Bereich verschiedene Werte annehmen. Ihr Wert links vom anomalen Bereich definiert den Leitwert τ_n der Normalstruktur (Abb. 2).

Das Konzept einer unendlich dünnen leitfähigen Schicht beinhaltet eine diskontinuierliche Änderung gewisser Feldgrößen beim Durchgang durch die dünne Schicht von der Schichtoberseite ($z = -0$, Index -) zur Schichtunterseite ($z = +0$, Index +). Diese Sprungbedingung wird durch eckige Klammern symbolisiert:

$$[f(y)]_{-}^{+} = f^{+}(y) - f^{-}(y) = f(y, z = +0) - f(y, z = -0).$$

Innerhalb der dünnen Schicht ist der Stromfluß horizontal, da keine induzierten Ströme in den nicht-leitenden oberen Halbraum eindringen können. Dafür können aber sehr wohl Ströme aus der Tiefenstruktur in die dünne Schicht hinein und aus ihr heraus fließen. Für den Bereich der dünnen Schicht erhält die erste Maxwell'sche Feldgleichung die Poynting'sche Form einer Sprungbedingung für das tangentielle Magnetfeld:

$$-[\hat{z} \times \underline{B}]_{-}^{+} = \mu_0 \underline{j} \quad (2.1)$$

mit der Materialgleichung

$$\underline{j} = \tau(\underline{E}_x \hat{x} + \underline{E}_y \hat{y}) \quad (2.2)$$

für die tiefenintegrierte Schichtstromdichte \underline{j} (in Amp/m). Diese ist zu unterscheiden von der Stromdichte \underline{J} im angrenzenden geschichteten Halbraum (in Amp/m²). Für sie gilt die erste Feldgleichung in der üblichen Form $\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$, wenn Beiträge von Verschiebungsströmen zu $\text{rot } \underline{B}$ weggelassen werden.

Jeder anisotropen Schicht des Halbraums wird ein Widerstandstensor $\underline{\rho}$ zugeordnet mit den Hauptachsenrichtungen: $(x', y', z' = z)$ und mit α als horizontalem Richtungswinkel bezüglich der ungestrichenen Modell-Koordinaten (x, y, z) . Die Diagonalelemente des auf Hauptachsenkoordinaten bezogenen Widerstandstensors werden mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 bezeichnet:

$$\underline{\rho}' = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}.$$

Eine Drehung auf die ungestrichenen Koordinaten mittels der Drehungsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und ihrer Inversen ergibt für die Komponenten von $\underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\rho'}} \cdot \underline{\underline{T}}$

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \rho_1 \cos^2 \alpha + \rho_2 \sin^2 \alpha, & \rho_{xy} &= (\rho_1 - \rho_2) \cos \alpha \sin \alpha, \\ \rho_{yy} &= \rho_1 \sin^2 \alpha + \rho_2 \cos^2 \alpha & \text{und} & \quad \rho_{yx} = \rho_{xy}, \quad \rho_{zz} = \rho_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Daraus folgt die vielfach benutzte Formel

$$\rho_1 \rho_2 = \rho_{xx} \rho_{yy} - \rho_{xy}^2. \quad (2.4)$$

Die Elemente $\rho_{zx} = \rho_{xz}, \rho_{zy} = \rho_{yz}$ sind Null.

Die Materialgleichung, die im Sinne des Ohm'schen Gesetzes Stromdichte und elektrisches Feld in der anisotropen Schicht verbindet, erhält die Form

$$\underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{E}}. \quad (2.5)$$

Bei der Berechnung der Feldanteile für die Normalstruktur soll zunächst vereinfachend angenommen werden, daß nur *eine* Schicht des Halbraums anisotrop ist. Man führt dann die 1D Vorwärtsrechnung in den zugehörigen Hauptachsenkoordinaten aus und erhält so für das Oberflächenfeld zwei Impedanzen Z_1 und Z_2 , indem beim Durchgang durch die anisotrope Schicht entweder ρ_1 oder ρ_2 verwendet wird. Sie besetzen die Nebendiagonale der tensoriellen Impedanz $\underline{\underline{Z'}}$ in Hauptachsenkoordinaten, woraus sich als Impedanz der Normalstruktur in Modellkoordinaten $\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{Z'}} \underline{\underline{T}}$ ableitet. Sind mehrere Schichten anisotrop, wird die 1D Rechnung etwas umständlicher, führt aber letztlich in gleicher Weise zu einer voll besetzten Impedanz-Matrix der Normalstruktur. Damit ist das elektrische Normalfeld in der dünnen Schicht zurückgeführt auf das magnetische Tangentialfeld an der Schichtoberseite, sofern deren Leitwert τ_n in die Rechnung einbezogen wird:

$$\begin{aligned} E_{nx} &= (Z_2 - Z_1) \cos \alpha \sin \alpha \cdot B_{nx}^- + (Z_1 \cos^2 \alpha + Z_2 \sin^2 \alpha) \cdot B_{ny}^- \\ E_{ny} &= (-Z_2 \cos^2 \alpha - Z_1 \sin^2 \alpha) \cdot B_{nx}^- + (Z_1 - Z_2) \cos \alpha \sin \alpha \cdot B_{ny}^- \\ E_{nz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wäre die Widerstandsmatrix voll besetzt, also auch die dritte Hauptachse z' schiefwinklig zur Vertikalen, würde eine normale elektrische Vertikalkomponente E_{nz} erscheinen. Die Schichtgrenzen würden sich aber dann in der Weise aufladen, daß der normale Stromfluß horizontal bleibt und wegen der vorausgesetzten Quasi-Homogenität senkrecht zu $\underline{\underline{B}}_n$.

Man entnimmt der Darstellung von \underline{E}_n unmittelbar, daß die Begriffe E- und B-Polarisation ihren ursprünglichen Sinn verloren haben. Man wird zwar weiterhin alle Feldgrößen in zwei Rechnungen entweder auf B_{nx} (mit $B_{ny} = 0$) oder auf B_{ny} (mit $B_{nx} = 0$) beziehen. Im ersten Fall ist der normale Stromfluß in y-Richtung und damit wie bei B-Polarisation für isotrope Schichten senkrecht zur 2D Struktur. Doch der zugehörige elektrische Feldvektor besitzt jetzt auch eine x-Komponente parallel zur Struktur, so daß gewissermaßen anomale Felder für B- und E-Polarisation gleichzeitig erzeugt werden. Die anomalen Feldvektoren ($\underline{B}_a, \underline{E}_a, \underline{j}_a$) sind daher dreidimensional mit Komponenten in allen drei Richtungen des Raumes, die als solche aber nur von y und z abhängen, da ja jeder Profilschnitt quer zur Struktur gleichwertig sein muß. Die tangentialen anomalen Schichtstromdichten $\underline{j}_a(y)$ in der dünnen Schicht sind gleichfalls mit Komponenten senkrecht und parallel zu B_{nx} . Entsprechendes gilt, wenn das normale Magnetfeld alternativ in y-Richtung polarisiert ist.

Die Berechnung der anomalen Feldgrößen wird durch die numerische Lösung einer Integralgleichung für die vektorielle anomale Schichtstromdichte $\underline{j}_a = \underline{j} - \underline{j}_n$ erfolgen. Diese entspricht in Form und Herleitung gewissen Integralgleichungen für j_{ax} bei E-Polarisation und j_{ay} bei B-Polarisation für den Fall isotroper geschichteter Halbräume oder horizontal-anisotroper Halbräume mit $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} -i\omega\mu\tau S^* j_{ax} &= j_{ax} - \tau_a E_{nx}, \\ -\tau\rho_0 L^* j'_{ay} &= j_{ay} - \tau_a E_{ny} \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit $j'_{ay} = \partial j_{ay} / \partial y$ und ρ_0 als spezifischem Widerstand der ersten Schicht.

Die Faltungskerne S und L sind Fouriertransformierte der Ausdrücke

$$\frac{k C_{TE}^+}{1 + k C_{TE}^+} \text{ und } (ik_y C_{TM}^+)^{-1}$$

aus dem Wellenzahlbereich. Hierin ist k der Betrag des horizontalen Wellenzahlvektors $k_y \hat{y}$; C_{TE}^+ und C_{TM}^+ bezeichnen die C-Response des Halbraums für TE und TM Felder für $z = +0$. Die Faltungskerne besorgen die induktive Ankopplung der Deckschicht an die Tiefenstruktur, indem sie eine induktiv begründete Beziehung zwischen anomaler Schichtstromdichte und anomalem elektrischen Feld herstellen. Mit ihrer Hilfe kann man \underline{E}_a aus der für \underline{j}_a umgeschriebenen Materialgleichung (2.2)

$$\underline{j}_a = \tau_a \underline{E}_n + \tau \underline{E}_a \quad (2.8)$$

eliminieren und erhält die zitierten Integralgleichungen für j_{ax} und j_{ay} .

Näheres hierzu steht im Protokollband "Rothenberge 1971", S. 25 ff, sowie in einem demnächst in *unserer* Zeitschrift erscheinendem Artikel. Ein weiterer Literaturhinweis betrifft die Dissertation von H.-M. Maurer (1993). Sie behandelt in allgemeinerer Form die

Induktion in anisotropen geschichteten Halbräumen, und zwar für 3D Felder und ohne Beschränkung auf horizontale Anisotropie.

3. Potentialansätze für die anomalen Felder und induzierten Ströme

Das anomale Magnetfeld ist divergenzfrei und somit darstellbar durch den Potentialansatz

$$\underline{B}_a = \text{rot}(\underline{\hat{z}}\Phi) + \text{rotrot}(\underline{\hat{z}}\Psi).$$

Dabei bezeichnen Φ und Ψ skalare Ortsfunktionen (für eine feste Frequenz), Φ für den toroidalen Teil von \underline{B}_a (ohne z-Komponente) und Ψ für den poloidalen Teil. In homogenen Bereichen ist auch die anomale Stromdichte divergenzfrei und die erste Maxwellsche Gleichung $\text{rot}\underline{B}_a = \mu_0 \underline{J}_a$ liefert für sie

$$\mu_0 \underline{J}_a = \text{rotrot}(\underline{\hat{z}}\Phi) - \text{rot}(\underline{\hat{z}}\nabla^2\Psi).$$

Beide Ansätze sind verbunden über die zweite Maxwellsche Gleichung, hier in der Schreibweise $\text{rot}(\underline{\rho}\underline{J}_a) = -i\omega \underline{B}_a$ für anisotrope Leiter. Doch zunächst soll die vereinfachende Tatsache genutzt werden, daß alle Ableitungen bezüglich x entfallen können. Dadurch erhalten die Potentialansätze die 2D Form

$$\begin{aligned} \underline{B}_a &= \Phi_y \underline{\hat{x}} + \Psi_{yz} \underline{\hat{y}} - \Psi_{yy} \underline{\hat{z}}, \\ \mu_0 \underline{J}_a &= -\nabla^2 \Psi_y \underline{\hat{x}} + \Phi_{yz} \underline{\hat{y}} - \Phi_{yy} \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit den Bezeichnungen $\Phi_x = \partial\Phi/\partial x, \dots$ und $\nabla^2\Psi = \Psi_{yy} + \Psi_{zz}$.

Gleichsetzen der z-Komponenten in der zweiten Maxwellschen Gleichung links und rechts ergibt

$$\frac{-\partial}{\partial y} E_{ay} = \frac{-\partial}{\partial y} (\rho_{xx} J_{ax} + \rho_{xy} J_{ay}) = -i\omega B_{az}$$

oder, nach zweimaliger Integration bezüglich y in Verbindung mit (3.1),

$$\rho_{xx} \nabla^2 \Psi - \rho_{xy} \Phi_z = i\omega \mu_0 \Psi. \quad (3.2)$$

Ausserdem muß die Diffusionsgleichung für \underline{J}_a erfüllt sein, die man nach Elimination von \underline{B}_a aus den beiden Feldgleichungen erhält:

$$\text{rotrot}(\underline{\rho}\underline{J}_a) = -i\omega \mu_0 \underline{J}_a.$$

Nochmaliges Gleichsetzen der z-Komponenten links und rechts führt, wiederum nach zweimaliger Integration bezüglich y, auf

$$\rho_{zz} \Phi_{yy} - \rho_{yx} \cdot \partial(\nabla^2 \Psi) / \partial z + \rho_{yy} \Phi_{zz} = i\omega \mu_0 \Phi.$$

Multiplikation mit ρ_{xx} bringt diese Gleichung auf die im Folgenden benutzte Form

$$\rho_{zz} \rho_{xx} \Phi_{yy} + \rho_1 \rho_2 \Phi_{zz} - i\omega \mu_0 \rho_{yx} \Psi_z = i\omega \mu_0 \rho_{xx} \Phi. \quad (3.3)$$

Bei der Umformung sind (2.4) und (3.2) für $\nabla^2 \Psi$ benutzt worden.

Die Anisotropie bewirkt also, daß zwei gekoppelte Diffusionsgleichungen (3.2) und (3.3) zu lösen sind. Wären die Hauptachsen von $\underline{\rho}$ in Richtung der Modellkoordinaten ($\alpha = 0$ oder 90°), würden sie sich mit $\rho_{xy} = 0$ entkoppeln. Die Zusatzforderung $\rho_{zz} = \rho_3 = \rho_2$ führt sie zurück auf die bekannten Diffusionsgleichungen für E- und B-Polarisation, wenn man für $\alpha = 0$ im ersten Fall der anisotropen Schicht den Widerstand $\rho_{xx} = \rho_1$ und im zweiten Fall den Widerstand $\rho_{yy} = \rho_2 = \rho_3$ zuordnet:

$$\nabla^2 \Psi = i\omega \mu_0 / \rho_1 \cdot \Psi, \quad \nabla^2 \Phi = i\omega \mu_0 / \rho_2 \cdot \Phi.$$

Die Lösung der für schiefwinklige Anisotropie gekoppelten Gleichungen wird wie üblich im Wellenzahlbereich vorgenommen. Für die mit (\wedge) gekennzeichneten Fourieramplituden der Potentiale erhält man so zwei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen, die in vereinfachter Form Maurers Gleichungen (3.20) entsprechen:

$$\begin{aligned} \rho_{xx} \hat{\Psi}_{zz} - \rho_{xy} \hat{\Phi}_z - (\rho_{xx} k^2 + i\omega \mu_0) \hat{\Psi} &= 0, \\ \rho_1 \rho_2 \hat{\Phi}_{zz} - i\omega \mu_0 \rho_{yx} \hat{\Psi}_z - \rho_{xx} (\rho_{zz} k^2 + i\omega \mu_0) \hat{\Phi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Für die verbliebende z-Abhängigkeit der transformierten Potentiale wird der Exponentialansatz $\exp(\pm Kz)$ gewählt. Einsetzen der partikulären Lösungen $A \exp(-Kz)$ für $\hat{\Psi}$ und $A' \exp(-Kz)$ für $\hat{\Phi}$ reduziert die Differentialgleichungen zu homogenen Gleichungen für die Lösungskoeffizienten A und A':

$$\begin{aligned} \rho_{xx} (K^2 - K_{TE}^2) A + \rho_{xy} K A' &= 0, \\ i\omega \mu_0 \rho_{yx} K A + \rho_1 \rho_2 (K^2 - K_{TM}^2) A' &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit

$$K_{TE}^2 := k^2 + i\omega \mu_0 / \rho_{xx} \quad \text{und} \quad K_{TM}^2 := \left(k^2 + i\omega \mu_0 / \rho_{zz} \right) \cdot \frac{\rho_{zz} \rho_{xx}}{\rho_1 \rho_2}. \quad (3.6)$$

Die Indizierung der Hilfsgrößen K_{TE} und K_{TM} soll anzeigen, daß K_{TE} für $\alpha = 0$ zur vertikalen Wellenzahl der TE-Mode wird (= anomales Feld für E-Polarisation) und K_{TM} zur

vertikalen Wellenzahl der TM-Mode (= anomales Feld für B-Polarisation), sofern die Zusatzbedingung $\rho_{zz} = \rho_2$ erfüllt ist.

Das homogene Gleichungssystem (3.5) besitzt nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn seine Determinante Null ist. Diese Forderung liefert in

$$\rho_{xx}\rho_1\rho_2(K^2 - K_{TE}^2)(K^2 - K_{TM}^2) - i\omega\mu_0\rho_{xy}^2K^2 = 0 \quad (3.7)$$

eine quadratische Gleichung für die noch unbekannte quadrierte Wellenzahl K^2 . Ihre Lösungen sind

$$K_1^2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}, \quad K_2^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} \quad (3.8)$$

mit $b = K_{TM}^2 + K_{TE}^2 + \frac{i\omega\mu_0\rho_{xy}^2}{\rho_1\rho_2\rho_{xx}}$ und $c = K_{TM}^2 \cdot K_{TE}^2$.

Damit ist Ψ die Summe von vier partikulären Lösungen mit den vertikalen Wellenzahlen $\pm K_1$ und $\pm K_2$, deren Koeffizienten wie folgt bezeichnet werden:

$$\hat{\Psi}(k, z) = Ae^{-K_1z} + ae^{-K_2z} + Be^{+K_1z} + be^{+K_2z}. \quad (3.9)$$

Für $\text{Re}(K_i) > 0$ repräsentieren diejenigen mit negativem Exponenten abwärtsdiffundierende Feldanteile in der betreffenden Schicht und diejenigen mit positivem Exponenten aufwärtsdiffundierende Feldanteile. Bei nicht-horizontaler Anisotropie tritt an die Stelle von (3.7) eine Gleichung 4. Grades für K (Maurers Gl. 3.23), die im allgemeinen Fall jeder partikulären Lösung eine andere vertikale Wellenzahl zuordnet.

Durch die homogenen Gleichungen wird außerdem das Verhältnis der Lösungskoeffizienten A' zu A festgelegt. Es wird mit γ bezeichnet, und zwar mit $\pm\gamma_1$ für K_1 -Lösungen und mit $\pm\gamma_2$ für K_2 -Lösungen, je nach Vorzeichen des Exponenten. Das poloidale Potential erhält so die Form

$$\hat{\Phi}(k, z) = \gamma_1(Ae^{-K_1z} - Be^{+K_1z}) + \gamma_2(ae^{-K_2z} - be^{+K_2z}) \quad (3.10)$$

$$(A'/A = +\gamma_1, B'/B = -\gamma_1, a'/a = +\gamma_2, b'/b = -\gamma_2).$$

Für das Koeffizientenverhältnis entnimmt man den Gleichungen (3.5) die alternativen Ausdrücke ($i = 1, 2$)

$$\gamma_i = \frac{\rho_{xx}(K_{TE}^2 - K_i^2)}{\rho_{xy}K_i} = \frac{i\omega\mu_0\rho_{xy}K_i}{\rho_1\rho_2(K_{TM}^2 - K_i^2)} \quad (3.11)$$

Damit ist für die gewählte Schicht die Lösung gefunden soweit es die Potentiale und die aus ihnen abgeleiteten anomalen Magnetfelder und Stromdichten betrifft. Es verbleibt die Aufgabe, die Potentialansätze für das anomale elektrische Feld zu formulieren und über die Sprungbedingung (2.1) die Ankopplung der Halbraumlösung an die dünne Schicht vorzunehmen.

Die erste Aufgabe wird mittels der Materialgleichung (2.5) und des Potentialansatzes (3.1) für \underline{J}_a gelöst. Man erhält

$$\begin{aligned} E_{ax} &= \rho_{xx} J_{ax} + \rho_{xy} J_{ay} = -i\omega \Psi_y \\ E_{ay} &= \rho_{yx} J_{ax} + \rho_{yy} J_{ay} = -i\omega \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}} \Psi_y + \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_{xx}} \Phi_{yz} / \mu_0 \\ E_{az} &= \rho_{zz} J_{az} = -\rho_{zz} \Phi_{yy} / \mu_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

unter Verwendung von (2.4) und (3.2) zur Substitution von $\nabla^2 \Psi$.

Die Sprungbedingung für das anomale magnetische Tangentialfeld an der dünnen Schicht stellt den gesuchten Zusammenhang zur anomalen Schichtstromdichte her. Mittels des Potentialansatzes (3.1) für \underline{B}_a gewinnt man

$$[B_{ax}]_-^+ = [\Phi_y]_-^+ = \mu_0 j_{ay} \quad \text{und} \quad [B_{ay}]_-^+ = [\Psi_{yz}]_-^+ = -\mu_0 j_{ax}.$$

Im oberen nicht-leitenden Halbraum ist der toroidale magnetische Feldanteil Null. Damit verschwindet auch Φ_y auf der Schichtoberseite. Das poloidale Fourierpotential besitzt im oberen Halbraum nur nach oben propagierende Lösungen mit der vertikalen Wellenzahl $K=k$. Also ist hier $\hat{\Psi} \sim \exp(+kz)$, woraus für die Fourieramplituden der anomalen Schichtstromdichten insgesamt folgt

$$ik_y \hat{\Phi}^+ = \mu_0 \hat{j}_{ay} \quad \text{und} \quad ik_y (k \hat{\Psi} - \hat{\Psi}_z^+) = \mu_0 \hat{j}_{ax}. \quad (3.13)$$

Da B_{az} stetig durch dünne Schichten hindurchgeht, gilt gleiches auch für das in (3.13) erscheinende poloidale Potential Ψ . Für die unstetigen Größen Φ und $\Psi_z = \partial\Psi/\partial z$ sind die Funktionswerte an der Schichtunterseite zu verwenden, wie durch das Zeichen (+) angezeigt wird. Indem man die so gefundenen Potentialansätze für \underline{j}_a und \underline{E}_a miteinander verbindet, letzteren für $z=0$, erhält man die gesuchte induktive Kopplungsbeziehung zwischen ihnen, die nach einer Rücktransformation in den Ortsbereich zu einer auf anisotrope Leitfähigkeiten erweiterten Integralgleichung führen wird.

4 Ableitung der Integralgleichung für den anomalen Schichtstromvektor

Zur Vorbereitung werden die Potentialdarstellungen für die anomale Schichtstromdichte und das anomale elektrische Feld in eine vektorielle Form gebracht. Übertragen in den

Wellenzahlbereich lauten diejenigen für das tangentielle anomale elektrische Feld in der dünnen Schicht gemäß (3.12)

$$\hat{E}_{ax} = \omega k_y \hat{\Psi}, \quad \hat{E}_{ay} = \omega k_y \left\{ \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}} \hat{\Psi} - \frac{\rho_1 \rho_2}{i\omega \mu_0 \rho_{xx}} \hat{\Phi}_z^+ \right\}. \quad (4.1)$$

Ohne sie als solche besonders zu kennzeichnen sollen sich die nachfolgend verwendeten Lösungskoeffizienten auf das Feld in der ersten Schicht beziehen. Die in (3.13) und (4.1) einzusetzenden Potentiale sind dann nach (3.9) und (3.10) für $z = 0$ oder $+0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= A + a + B + b, & \Phi^+ &= \gamma_1(A - B) + \gamma_2(a - b) \\ \hat{\Psi}_z^+ &= K_1(B - A) + K_2(b - a), & \hat{\Phi}_z^+ &= -\gamma_1 K_1(A + B) - \gamma_2 K_2(a + b). \end{aligned}$$

Die gesuchten vektoriellen Potentialdarstellungen sind somit

$$\mu_0 \hat{j}_a = ik_y \cdot \left\{ \underline{U}_1 \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} + \underline{U}_2 \begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad (4.2)$$

und

$$\hat{E}_a = \omega k_y \underline{T} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad (4.3)$$

mit den zu diesem Zweck eingeführten Matrizen

$$\underline{U}_1 = \begin{pmatrix} k + K_1 & k + K_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{U}_2 = \begin{pmatrix} k - K_1 & k - K_2 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

und, unter Verwendung von (3.11),

$$\eta_i = \frac{\rho_{yx}}{\rho_{xx}} + \frac{\rho_1 \rho_2}{i\omega \mu_0 \rho_{xx}} \gamma_i K_i = \frac{\rho_{yx}}{\rho_{xx}} \cdot \frac{K_{TM}^2}{K_{TM}^2 - K_i^2}. \quad (4.4)$$

Die Abstrahlbedingung, daß das anomale Feld für $z \rightarrow \infty$ gegen Null streben muß, verbindet in jeder Schicht des Halbraums die Lösungskoeffizienten der aufwärts und abwärts diffundierenden Feldanteile. Für die erste Schicht soll diese Beziehung durch eine Matrix \underline{L} wiedergegeben werden, über deren Berechnung in Abschnitt 6 gesondert berichtet wird:

$$\begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix} = \underline{L} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Durch Zusammenfassen von (4.2), (4.3) mit (4.5) können die Lösungskoeffizienten eliminiert werden, und man erhält

$$\underline{\hat{E}}_a = -i\omega\mu_0\underline{\hat{S}} \cdot \underline{\hat{j}}_a \quad (4.6)$$

mit

$$\underline{\hat{S}} = \underline{\mathbb{T}} \left\{ \left(\underline{\mathbb{U}}_1 + \underline{\mathbb{U}}_2 \underline{\mathbb{L}} \right)^{-1} + \left(\underline{\mathbb{U}}_2 + \underline{\mathbb{U}}_1 \underline{\mathbb{L}}^{-1} \right)^{-1} \right\} \quad (4.7)$$

als der gesuchten Kopplungsmatrix für die dünne Schicht über einem anisotropen geschichteten Halbraum. Gl. (4.6) wird nun zurücktransformiert in den Ortsbereich und dann in die Materialgleichung (2.8) eingesetzt. Das Ergebnis ist eine Integralgleichung

$$-i\omega\mu_0\tau\underline{\hat{S}}^* \underline{j}_a = \underline{j}_a - \tau_a \underline{E}_n \quad (4.8)$$

zur Bestimmung des anomalen Schichtstromvektors. Die Elemente der Faltungskern-Matrix \underline{S} sind dabei die Fouriertransformierten der Elemente von \hat{S} . Näheres zur numerischen Lösung von (4.8) und zur Fouriertransformation von \hat{S} in den Anhängen A1 und A2.

Ist der Schichtstromvektor für ein vorgegebenes Normalfeld \underline{E}_n gefunden worden, so liefert die Materialgleichung den zugehörigen elektrischen Feldvektor. Durch Differentiation von E_{ax} bezüglich y kann anschließend $B_{az} = (\partial E_{ax} / \partial y) / i\omega$ bestimmt werden und durch Anwendung des Kertz-Operators die zugehörige Horizontalkomponente B_{ay}^- auf der Schichtoberseite. Die x -Komponente des Magnetfeldes ist hier ohne anomalen Anteil.

5 Explizite Lösung für anisotrope homogene Halbräume

Wegen der zitierten Abstrahlbedingung kann es aufwärtsdiffundierende Lösungen in einem homogenen Halbraum nicht geben. Damit folgt aus (4.7) mit $\underline{\mathbb{L}}$ als Nullmatrix und unter Fortfall von $\underline{\mathbb{U}}_2$

$$\underline{\hat{S}} = \underline{\mathbb{T}} \underline{\mathbb{U}}_1^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \gamma_2 - \gamma_1 & K_1 - K_2 \\ \eta_1 \gamma_2 - \eta_2 \gamma_1 & k(\eta_2 - \eta_1) + K_1 \eta_2 - K_2 \eta_1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Hierbei ist

$$\frac{1}{D} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -k - K_2 \\ -\gamma_1 & k + K_2 \end{pmatrix}$$

als Inverse zur Matrix $\underline{\mathbb{U}}_1$ verwendet worden mit

$$D = (k + K_1)\gamma_2 - (k + K_2)\gamma_1$$

als deren Determinante.

Man kann von D den Faktor $\beta = \rho_{xx} / \rho_{xy} \cdot (K_1 - K_2) / K_1 K_2$ abspalten, und zwar mittels

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \beta \cdot (K_{TE}^2 + K_1 K_2) \quad \text{und} \quad K_1 \gamma_2 - K_2 \gamma_1 = \beta \cdot K_{TE}^2 (K_1 + K_2),$$

was sich aus (3.11) ableiten läßt. Indem der gleiche Faktor von den Zählern der Elemente von \hat{S} abgespalten wird, erhält die Kopplungsmatrix für einen anisotropen homogenen Halbraum folgende Komponenten:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{xx} &= (K_{TE}^2 + K_1 K_2) / D^*, \quad \hat{S}_{xy} = \frac{\rho_{yx}}{\rho_{xx}} K_1 K_2 / D^*, \\ \hat{S}_{yx} &= \frac{\rho_{yx}}{\rho_{xx}} \left\{ K_{TE}^2 + K_1 K_2 + K_2^2 \frac{K_{TE}^2 - K_1^2}{K_{TM}^2 - K_2^2} \right\} / D^* \quad (5.2) \\ \hat{S}_{yy} &= K_1 K_2 \left\{ \left(\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}} \right)^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{i \omega \mu_0 \rho_{xx}} \left[k(K_1 + K_2) + K_{TE}^2 + K_1 K_2 \right] \right\} / D^* \end{aligned}$$

mit

$$D^* = k(K_{TE}^2 + K_1 K_2) + K_{TE}^2 (K_1 + K_2).$$

Diesen expliziten Halbraumlösungen ist unmittelbar zu entnehmen, daß die Elemente der Nebendiagonale erwartungsgemäß auf der Schiefstellung des Hauptachsensystems beruhen. Sie verschwinden für $\alpha = 0$ und damit $\rho_{yx} = 0$, während dann mit $K_1 = K_{TM}$ und $K_2 = K_{TE}$ S_{xx} und S_{yy} übergehen in die Faltungskerne S und N der eingangs zitierten Integralgleichungen (2.7). Ausserdem lassen die Halbraumlösungen erkennen, wie einfach sich die Kopplungsbeziehung für E_{ax} in Streichrichtung gestaltet und wie kompliziert sie ist für E_{ay} senkrecht zur Streichrichtung.

6 Explizite Lösungen für anisotrope geschichtete Halbräume

Für einen aus M Schichten bestehenden Halbraum müssen zunächst die in Abschnitt 3 entwickelten Lösungsansätze von Schicht zu Schicht aneinander angeschlossen werden. Dabei ist beim Durchgang durch eine Schichtgrenze Stetigkeit beider Potentiale Φ und Ψ sowie von Ψ_z zu fordern, um die Stetigkeit des magnetischen Feldvektors zu wahren, wie (3.1) unmittelbar zu entnehmen ist. Ausserdem müssen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldvektors stetig sein, was gemäß (4.1) eine zusätzliche Stetigkeitsforderung im Falle von E_{ay} bedeutet. Durch diese poloidale und toroidale Feldanteile gemeinsam betreffenden Stetigkeitsbedingungen, gestalten sich die nachfolgende Rechnungen wesentlich umständlicher als im Falle getrennter Moden.

Indem man in dieser Weise die ganze Schichtfolge durchläuft, kann die Lösung der ersten Schicht auf diejenige des abschließenden Halbraums ($m = M, d_M = \infty$) bezogen werden:

$$\underline{v}_M = \underline{N} \cdot \underline{v}_1 \quad (6.5)$$

mit

$$\underline{N} = \underline{F}_M^{-1} \underline{F}_{M-1} \underline{E}_{M-1} \underline{F}_{M-1}^{-1} \underline{F}_{M-2} \cdots \underline{F}_1 \underline{E}_1,$$

wobei wegen der Abstrahlbedingung aufsteigende Lösungen im abschließenden Halbraum fehlen:

$$\underline{v}_M = (A_M, a_M, 0, 0)^T.$$

Die so definierte und den gesamten Halbraum erfassende 4×4 Matrix \underline{N} wird nun zur Formulierung einer auf den ganzen Halbraum übertragenen Abstrahlbedingung in vier 2×2 Untermatrizen \underline{N}_{ij} zerlegt ($i, j = 1, 2$). Die Matrix \underline{N}_{11} beispielsweise enthält die Elemente der beiden ersten Zeilen und Spalten von \underline{N} , \underline{N}_{21} diejenigen der dritten und vierten Zeile sowie der ersten und zweiten Spalte. Damit läßt sich (6.5) umschreiben in

$$\begin{pmatrix} A_M \\ a_M \end{pmatrix} = \underline{N}_{11} \begin{pmatrix} A_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \underline{N}_{12} \begin{pmatrix} B_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{N}_{21} \begin{pmatrix} A_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \underline{N}_{22} \begin{pmatrix} B_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Gebraucht wird nur die zweite Gleichung. Sie zeigt, wie aufsteigende und absteigende Lösungen bis zur ersten Schicht hin durch die Abstrahlungsbedingung $B_M = b_M = 0$ miteinander verbunden werden. Die zu diesem Zweck bereits in (4.5) eingeführte L-Matrix ist also gegeben durch

$$\underline{L} = -\underline{N}_{22}^{-1} \underline{N}_{21}. \quad (6.6)$$

Die Behandlung des anisotropen geschichteten Halbraums ist damit abgeschlossen. Indem man seine nach (6.6) berechnete L-Matrix in (4.7) einsetzt, erhält man die Kopplungsmatrix \hat{S} , die zur Integralgleichung (4.8) führt. Bei der Berechnung von dieser Matrix können sich numerische Schwierigkeiten durch die Exponentialfunktionen in den E-Matrizen ergeben, wenn sie zum Zwecke der Fouriertransformation für sehr große Wellenzahlen berechnet werden soll. Näheres hierzu im Anhang A3.

7 Ein Modellbeispiel

Das Modell soll in vereinfachter Form die Verhältnisse im Bereich von Schwarzwald und Rheingraben wiedergeben, so wie sie eingangs dargestellt worden sind. Für die Grabensedimente wird ein 30 km breiter Streifen von 2000 S gewählt, für Kruste und Mantel ein ani-

Um eine konzentrierte Darstellung zu erhalten, wird vorübergehend für jede Schicht ($m=1, 2, \dots, M$) ein Schichtvektor \underline{v} eingeführt, dessen Komponenten die partikulären Lösungen des poloidalen Potentials gemäß (3.9) sind. Indem man als Bezugstiefe die obere Schichtgrenze $z = z_m$ wählt, also $\pm K_i(z - z_m)$ in den Exponenten schreibt, erhält man für die Tiefe $z_m + 0$ den Schichtvektor

$$\underline{v}_m = (A_m, a_m, B_m, b_m)^T. \quad (6.1)$$

Die hier erfolgte Indizierung der Lösungskoeffizienten soll bei den nachfolgend benutzen Wellenzahlen K_i und Potentialverhältnissen γ_i dieser Schicht wieder entfallen, um zweifache Indizierungen zu vermeiden.

Zur Feldfortsetzung an die untere Schichtgrenze nach $z = z_{m+1} - 0$ wird eine 4×4 Diagonalmatrix \underline{E}_m eingeführt mit den zugehörigen Exponentialfunktionen in der durch (6.1) festgelegten Reihenfolge, also mit $\exp(-K_1 d_m)$ links oben und $\exp(+K_2 d_m)$ links unten ($d_m = z_{m+1} - z_m$). Mit \underline{v}_m^+ soll der Schichtvektor der m 'ten Schichten an deren unteren Begrenzung z_{m+1} bezeichnet werden. Es gilt

$$\underline{v}_m^+ = \underline{E}_m \underline{v}_m. \quad (6.2)$$

Zum Anschluß an die benachbarten Schichten wird eine zweite 4×4 Matrix \underline{F}_m eingeführt, die nach Multiplikation mit dem Schichtvektor die an Schichtgrenzen stetigen Potentiale und Feldgrößen erzeugt. An der unteren Begrenzung der m 'ten Schicht soll also gelten

$$\underline{F}_{m+1} \underline{v}_{m+1} = \underline{F}_m \underline{v}_m^+. \quad (6.3)$$

Die Besetzung der Matrix wird durch (3.9) und (3.10) für die Potentiale und durch (4.1) für \hat{E}_{ay} geregelt. Es gilt, wenn $\underline{F}_m \underline{v}$ an den Grenzflächen den stetigen Vektor $(\hat{\Psi}, \hat{\Phi}, -\hat{\Psi}_z, \hat{E}_{ay} / \omega ky)^T$ ergeben soll,

$$\underline{F}_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ K_1 & K_2 & -K_1 & -K_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

mit den in (4.4) definierten Elementen η_i .

Durch Zusammenfassen von (6.2) und (6.3) ist dann der Anschluß der m 'ten Schicht an die nachfolgende Schicht vollzogen:

$$\underline{v}_{m+1} = \underline{F}_{m+1}^{-1} \underline{F}_m \underline{E}_m \underline{v}_m.$$

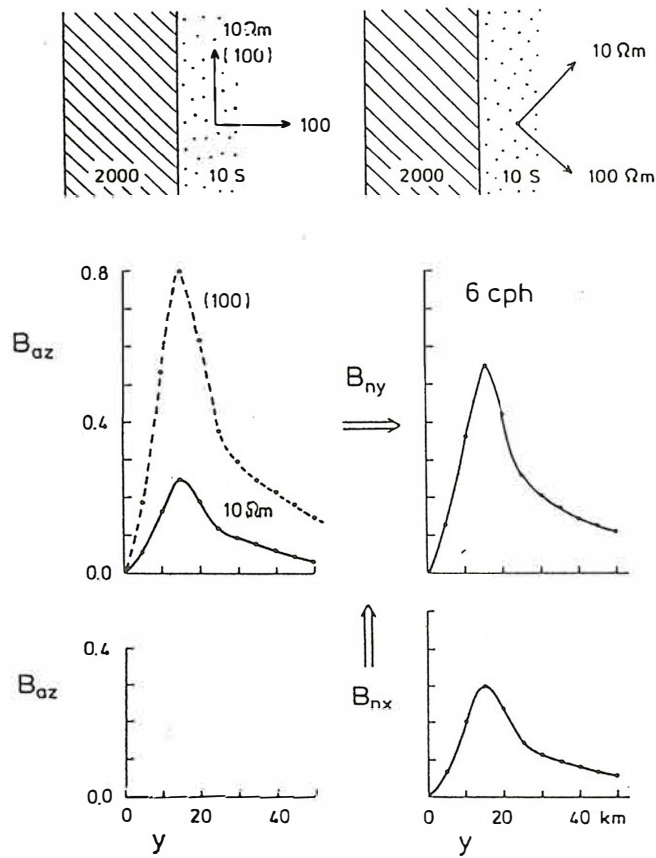


Abb. 3 Induktionsanomalie B_{az} (Realteil) für $T = 600$ s

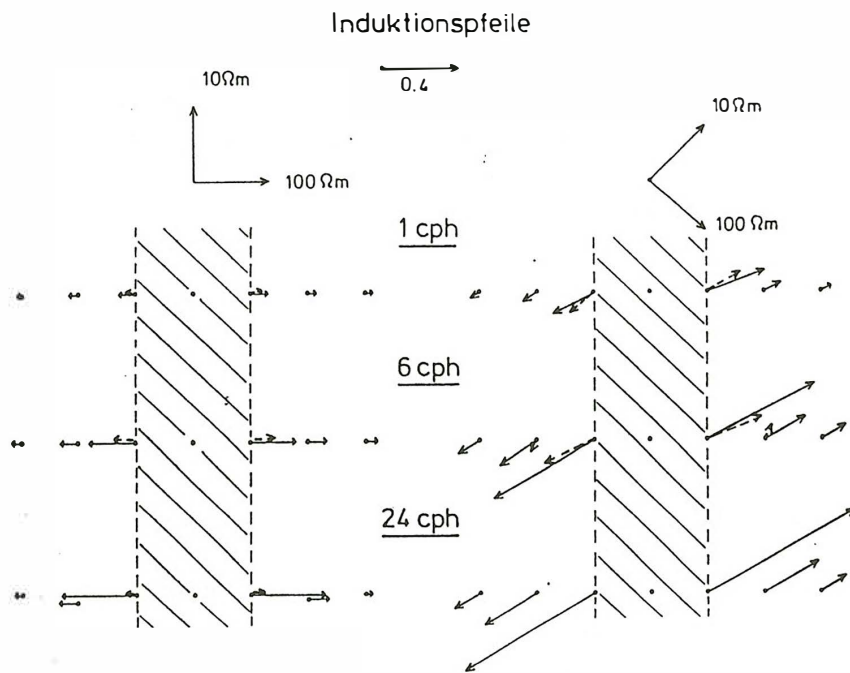
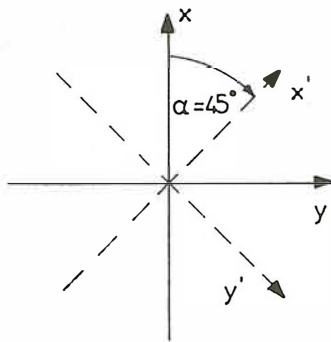


Abb. 4

sotroper homogener Halbraum mit $\rho_1 = 10 \Omega\text{m}$ und $\rho_2 = \rho_3 = 100 \Omega\text{m}$. Ausserhalb des Streifens beträgt der Leitwert der dünnen Deckschicht 10 S (Schwarzwaldkristallin). Die Hauptachsen des Widerstandstensors bilden einen Winkel von $\alpha = 45$ Grad mit der Grabenrichtung. Die Modellergebnisse beziehen sich auf Polarisationen des magnetischen Normalfeldes parallel und senkrecht zum Grabenverlauf und alle Feldgrößen sind bezüglich B_{nx} und B_{ny} normalisiert. Um an frühere Modellrechnungen anschließen zu können, werden sie zum Vergleich auch für $\alpha = 0$ durchgeführt.



$$\underline{\underline{\rho'}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \Omega\text{m}$$

Abb. 3 und 4 betreffen die Grabenanomalie für B_{az} . Infolge des niedrigen ρ_1 -Widerstandes erhält man für $\alpha = 0$ und $T = 600 \text{ s}$ eine relativ schwache B_{az} -Anomalie (im Realteil), sofern natürlich mit $\underline{B}_n = B_{ny} \hat{y}$ E-Polarisation vorliegt, mit Induktionsvektoren senkrecht zum Grabenverlauf. Ersetzt man ρ_1 durch ρ_2 , dreht man also die Hauptachsen auf $\alpha = 90^\circ$, so erhält man die stark vergrößernde Anomalie für einen hochohmigen Halbraum mit $\rho_2 = 100 \Omega\text{m}$. Bei schiefwinkliger Anisotropie $\alpha = 45^\circ$ liegt die B_{az} -Kurve erwartungsgemäß zwischen diesen beiden Extremkurven. Doch die eigentliche Besonderheit ist die auch bei B_{nx} -Polarisation auftretende Grabenanomalie, wenn also der normale Stromfluß wie bei B-Polarisation senkrecht zum Grabenverlauf ist. Sie bewirkt die in Abb. 4 gezeigte Schiefstellung der Induktionsvektoren, wobei ausserdem Real- und Imaginärteil unterschiedliche Richtungen erhalten.

Entsprechendes gilt für die tellurischen Vorzugsrichtungen, die in Abb. 5 in der Siemonschen Form dargestellt sind. An der Länge der Querbalken kann also die Besetzung der Impedanz-Matrix auf der Diagonalen abgelesen werden, wenn man diese auf optimal gedrehte Koordinaten im Swiftschen Sinne bezieht. Sie entfallen naturgemäß für $\alpha = 0$, treten aber für $\alpha = 45^\circ$ deutlich in Erscheinung und zeigen so, daß schiefgestellte Anisotropien wie im 3D Fall einen "skew" der Impedanz-Matrix bewirken.

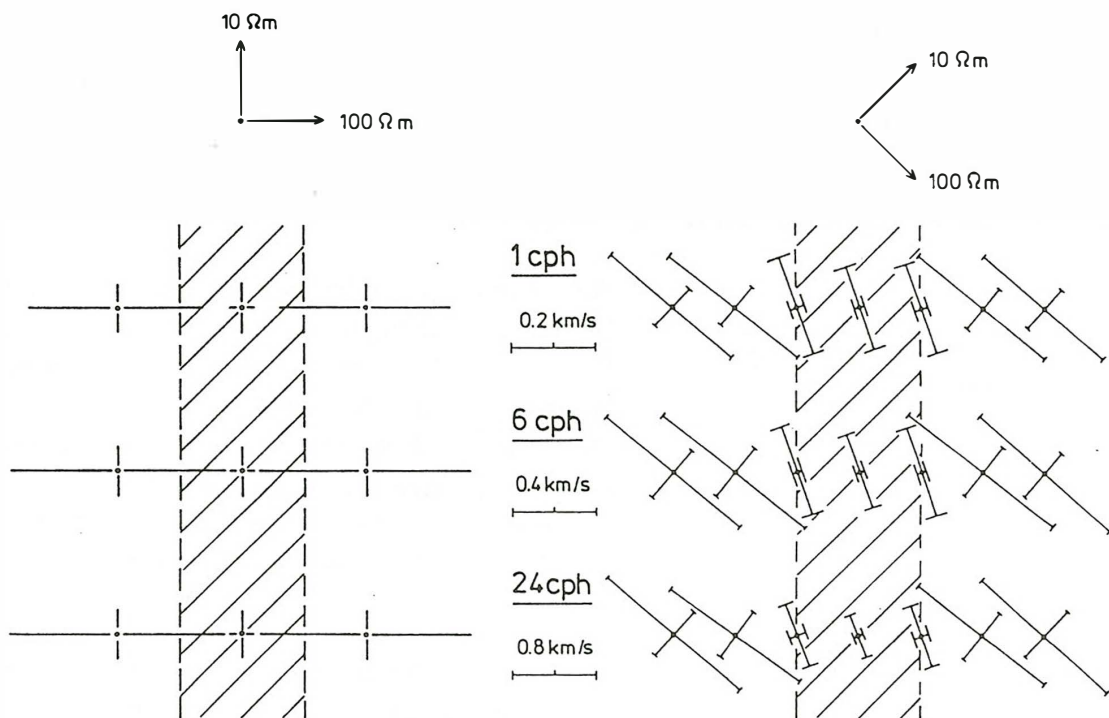


Abb. 5 Impedanzen in den tellurischen Vorzugsrichtungen nach Swift

Aufschlußreich sind in dieser Hinsicht auch die Profildarstellungen der einzelnen Tensorelemente in Abb. 6. Für $\alpha \neq 0$ erhält man in beiden Polarisierungen Elemente, die in ihrem Verlauf sowohl Merkmale der E-Polarisation als auch der B-Polarisation aufweisen. So ändern sich die zu E_y gehörigen Elemente (Z_{yx}, Z_{yy}) sprunghaft an der Grabengrenze, während diejenigen für E_x parallel zum Grabenverlauf (Z_{xx}, Z_{xy}) stetig durch diese Grenze hindurchgehen.

Abb. 7 zeigt abschließend die Auswirkungen einer schiefwinkligen Anisotropie auf ρ_a - und Phasenkurven. Sie beziehen sich auf $y = 25$ km, also auf Beobachtungen im Kristallin in 10 km Entfernung vom Grabenrand, wo die Grabenanomalie des tellurischen Feldes bereits abgeklungen ist. Für $\alpha = 0$ ergeben sich erwartungsgemäß weit auseinander liegende ρ_a -Kurven für die beiden Polarisierungen, die in unmittelbarer Nähe der jeweils wirksamen Halbraumwiderstände ρ_1 und ρ_2 liegen, mit Phasen um 45 Grad.

Durch Schiefstellung der Hauptachsen werden die ρ_a -Kurven dichter aneinander gerückt, wenn man die Impedanz-Matrix auf die Grabenkoordinaaten bezieht (mittlere Darstellung). Dies entspricht der gemeinsamen Wirkung beider Hauptachsenwiderstände auf die magnetotellurischen Beziehungen. Wählt man jedoch als Bezugssystem die Hauptachsenrichtungen, so werden die zugehörigen ρ_a -Kurven wieder getrennt (rechte Darstellung).

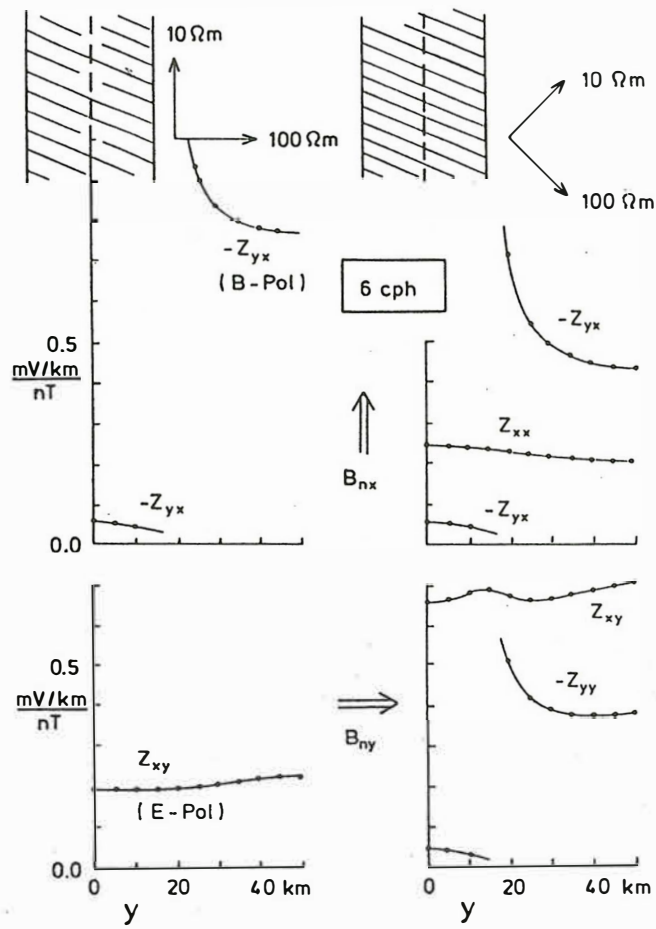


Abb. 6

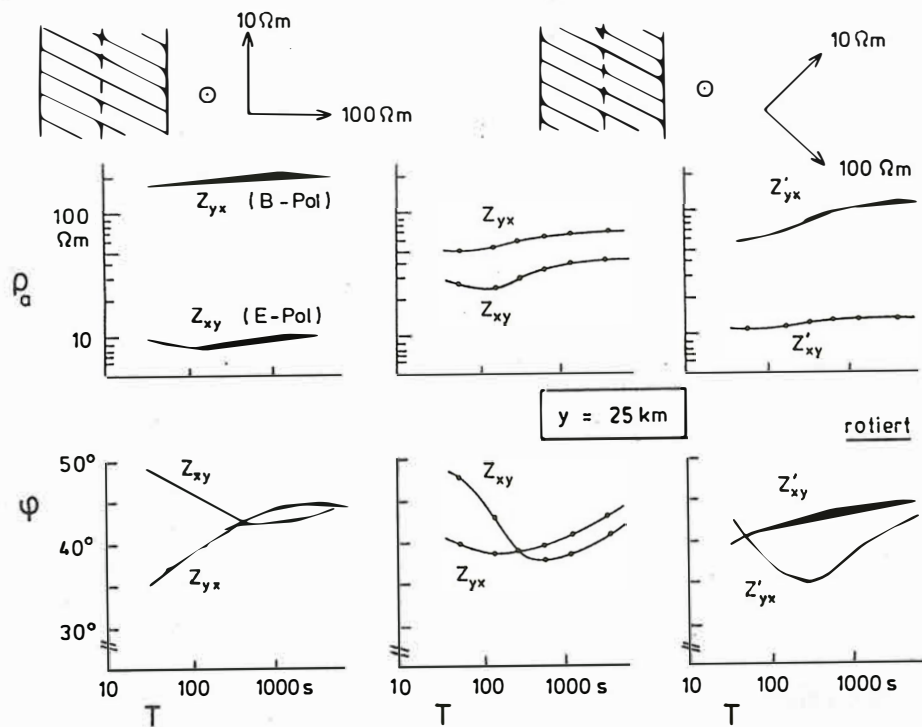


Abb. 7

Diese Richtungen würden sich nach dem Swift-Kriterium auch näherungsweise aus den tellurischen Vorzugsrichtungen ergeben (s. Abb. 5).

Man nähert sich so der Darstellung links für $\alpha = 0$ und rechtfertigt zu einem gewissen Grade die bisherige Vorgehensweise, die Schiefstellung der Hauptachsen bei 2D Modellrechnungen zu ignorieren und zur Interpretation im Kristallin die ρ_a -Kurven in optimal gedrehten Koordinaten zu verwenden. Bei den Phasen verbleiben jedoch nicht unerhebliche Unterschiede in den Darstellungen links und rechts.

8 Schlußbemerkungen

Die Erweiterung auf anisotrope Widerstände mit einer beliebigen Orientierung der Hauptachsen erfordert zwar überraschend komplizierte Modellrechnungen, doch erhalten andererseits die gewonnenen magnetischen und magnetotellurischen Übertragungsfunktionen die entscheidenden Merkmale, um die in der Einleitung genannten drei Besonderheiten von Feldbeobachtungen zu erklären. In diesem Sinne werden etwa die Meßergebnisse aus Schwarzwald und Rheingraben mit konsistenten Modellen für die magnetische Grabenanomalie einerseits und die tellurischen Vorzugsrichtungen und Anisotropien im Kristallin andererseits interpretierbar.

Die in diesem Beitrag vorgenommene Beschränkung auf horizontale Anisotropien der Schichtwiderstände kann ohne Schwierigkeiten aufgehoben werden. Auf die dann erforderlich werdenden Abänderungen ist mehrmals im Text verwiesen worden. Auch eine Verallgemeinerung auf 3D Anomalien erscheint als möglich. Die Rechnungen im Wellenzahlbereich, die zur Kopplungsmatrix \hat{S} führen, könnten im wesentlichen so vorgenommen werden, wie es in den Abschnitten 3 bis 5 beschrieben worden ist. Nur würden in den Potentialansätzen jeweils beide Potentiale zur Darstellung einer Horizontalkomponente von \underline{B}_a und \underline{J}_a benötigt. Entsprechendes würde für die anomale Schichtstromdichte gelten. Die nunmehr zweidimensionale Fouriertransformation in den Ortsbereichen wäre im Sinne einer schnellen Hankeltransformation umzuformen (Maurer, 1993; Kap. 5), und es würde abschließend eine zweidimensionale Integralgleichung für den anomalen Schichtstromvektor numerisch zu lösen sein.

9 Literatur

- Eisel, M., 1992. Effekte lateral anisotroper Leitfähigkeitsstrukturen in der MT. Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Borkheide, Protokollband 279-288.
- Kellet, R.L., Mareschal, M. & Kurtz, R.D., 1992. A model of lower crustal electrical anisotropy for the Pontiac Subprovince of the Canadian Shield. *Geophys. J. Int.*, **111**, 141-150.
- Kurtz, R.D., Ostrowski, J.A. & Niblett, E.R., 1986. A magnetotelluric survey over the East Bull lake gabbro - anorthosite complex. *J. Geophys. Res.* **91**, 7403-7416.

- Maurer, H.-M. 1993. Elektromagnetische Induktion in anisotropen Leitern. Dissertation TU Braunschweig, 99 pp.
- Rasmussen, T.M., 1988. Magnetotellurics in southwestern Sweden: evidence for electrical anisotropy in the lower crust? *J. Geophys. Res.* **93**, 7897-7907.
- Schmucker, U., 1986. A regional quasi-anisotropy in West Germany. 8th Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth and Moon, Neuchatel. Abstract 1-3.
- Teufel, U., 1986. Die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit in der Erdkruste unter dem Schwarzwald, ein Beispiel für Möglichkeiten und Grenzen der Interpretation von Audio-Magnetotellurik, Magnetotellurik, Erdmagnetischer Tiefensondierung. Dissertation U. München, 216 pp.
- Tezkan, B., 1988. Electromagnetic sounding experiments in the Schwarzwald central gneiss massif. *J. Geophysics* **62**, 109-118.

Anhang A1 Numerische Lösung der Integralgleichung (4.8)

Die Elemente von \underline{S} sind mit wachsendem Abstand u zwischen Aufpunkt und Integrationspunkt exponentiell abnehmende Ortsfunktionen: $S_{xx} \approx \exp(-u/C^+)$ usw. mit C^+ als Eindringtiefen in den geschichteten Halbraum. Der Bereich der numerischen Lösung muß entsprechend weit über den anomalen Bereich des Leitwerts hinausgehen. Er wird mit N Gitterpunkten y_1, y_2, \dots, y_N besetzt, für die j_{ax} und j_{ay} berechnet werden. Für $u = 0$ sind die Faltungskerne logarithmisch singular, und es wird ihr Mittelwert für den Abstandsbereich $u = \pm h$ verwendet (h : Gitterpunktabstand).

Die Integralgleichung erhält so die Form von $2N$ linearen Gleichungen für die Unbekannten j_{ax}, j_{ay} an N Gitterpunkten mit den bekannten rechten Seiten E_{nx} und E_{ny} an jeweils N Gitterpunkten. Der Voraussetzung der Quasi-Homogenität entsprechend sind diese Normalfeldkomponenten an allen Punkten gleich und für die gewählte Polarisation nach (2.6) zu berechnen. Die Besetzung der Koeffizientenmatrix mit den Elementen von \underline{S} ist für beide Polarisierungen des normalen Magnetfeldes gleich, die Lösung des Gleichungssystems erfolgt also zweckmäßigerweise mittels ihrer einmal berechneten Kehrmatrix. In den bisherigen Rechnungen wurden bis zu 81 Gitterpunkte benutzt, so daß höchstens 162×162 Matrizen zu invertieren waren.

Anhang A2 Fouriertransformation der Kopplungsmatrix $\hat{\underline{S}}$

Die Transformation

$$S_{ij}(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{S}_{ij} \cos ku \, dk \quad (i, j = 1, 2)$$

erfolgt in drei Schritten (gegebenenfalls unter vorheriger Abspaltung asymptotischer Werte für $k \rightarrow \infty$, über die gesondert integriert wird): analytisch von $k = 0$ bis Δk mit den asymptotischen Werten der \hat{S}_{ij} für $k \rightarrow 0$, numerisch nach der Trapezformel von $k = \Delta k$ bis k_{\max} (mit gleichbleibenden Wellenzahlinkrementen Δk) und wieder analytisch von $k = k_{\max}$ bis ∞ mit den asymptotischen Werten für $k \rightarrow \infty$.

$$\text{Für } k \rightarrow 0 \text{ gilt mit } K_{TE} = \sqrt{i\omega \mu_0 / \rho_{xx}}, \quad K_{TM} = \sqrt{i\omega \mu_0 \rho_{xx} / \rho_1 \rho_2}:$$

$$K_1 = \sqrt{i\omega \mu_0 / \rho_2}, \quad K_2 = \sqrt{i\omega \mu_0 / \rho_1}, \quad \gamma_1 = -K_1 \operatorname{ctg} \alpha, \quad \gamma_2 = +K_1 \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\eta_1 = (\rho_{xy} - \rho_1 \operatorname{ctg} \alpha) / \rho_{xx}, \quad \eta_2 = (\rho_{xy} + \rho_2 \operatorname{tg} \alpha) / \rho_{xx}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ gilt mit $\beta = \rho_{yx} / \rho_{xx}$, $\varepsilon^2 = \rho_{zz} \rho_{xx} / \rho_1 \rho_2$ sowie $K_{TE} = k$, $K_{TM} = k\varepsilon$:

$$K_1 = \varepsilon k, \quad K_2 = k, \quad \gamma_1 = \frac{1 - \varepsilon^2}{\beta \varepsilon} \cdot k, \quad \gamma_2 = -\frac{i\omega \mu_0 \rho_{xy}}{\rho_1 \rho_2 - \rho_{xx} \rho_{zz}} \cdot k^{-1},$$

$$\eta_1 = \beta + \frac{\rho_1 \rho_2 (1 - \varepsilon^2)}{i\omega \mu_0 \rho_{xy}} \cdot k^2, \quad \eta_2 = -\frac{\beta \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Im Falle eines mehrschichtigen Halbraums wird durch diese asymptotischen Werte die Besetzung der Matrizen S , E , $U_{1,2}$ und T geregelt. Für homogene Halbräume lassen sich wieder explizite Ausdrücke angeben:

	$k \rightarrow 0 (R = \sqrt{i\omega \mu_0 \rho_1} + \sqrt{i\omega \mu_0 \rho_2})$	$k \rightarrow \infty (\delta = \varepsilon / (1 + \varepsilon))$
\hat{S}_{xx}	$(\rho_{xx} + \sqrt{\rho_1 \rho_2}) / R$	$1/2k$
$\hat{S}_{xy} = \hat{S}_{yx}$	ρ_{yx} / R	$\beta \delta / 2k$
\hat{S}_{yy}	$(\rho_{yy} + \sqrt{\rho_1 \rho_2}) / R$	$\beta^2 \delta / 2k + (\rho_{zz} / i\omega \mu_0 \varepsilon) \cdot k$

Anhang A3 Halbräume mit isotropen und anisotropen Schichten

In einer isotropen Schicht mit dem spezifischen Schichtwiderstand ρ besitzen alle partikulären Lösungen die gleiche vertikale Wellenzahl, so daß sich die Potentialansätze (3.9) und (3.10) vereinfachen lassen zu

$$\hat{\Psi} = Ae^{-Kz} + Be^{+Kz}, \quad \hat{\Phi} = Kae^{-Kz} - Kbe^{-Kz}$$

mit $K^2 = i\omega \mu_0 / \rho + k^2$. Von den Koeffizienten des toroidalen Potentials ist K als Faktor abgespalten worden, um eine einheitliche Dimensionierung dieser Koeffizienten in isotropen und anisotropen Schichten zu erreichen.

Nunmehr soll wie bei der Berechnung des Normalfeldes davon ausgegangen werden, daß nur *eine* der M Schichten anisotrop ist, und zwar die m 'te Schicht. Ist $m < M$, so kann

für den isotropen Halbraum unter ihr etwa der Waitsche Algorithmus benutzt werden. Er liefert die C-Werte für die Oberfläche dieses Halbraums in der Tiefe $z_{m+1} + 0$ und damit definitionsgemäß in

$$KC_{TE} = (A + B)/(A - B), \quad KC_{TM} = (a + b)/(a - b)$$

die Verhältnisse B/A und b/a aufsteigender und absteigender Lösungen in der $(m+1)$ 'ten Schicht. Es genügt also, ihren Schichtvektor nur mit den Koeffizienten der absteigenden Lösungen zu besetzen:

$$\underline{v}_{m+1} = (A_{m+1}, K_{m+1}a_{m+1}, 0, 0)^T.$$

Die zugehörige Schichtmatrix in der Kontinuitätsbeziehung $\underline{F}_{m+1} \underline{v}_{m+1} = \underline{F}_m \underline{v}_m^+$ muß neu formuliert werden, da die beiden Moden für $z > z_{\max}$ unabhängig sind mit nicht definierten γ -Verhältnissen. Ihre ersten beiden Spalten ergeben sich aus den genannten Verhältnissen aufsteigender und absteigender Lösungen, ihre frei verfügbaren letzten beiden Spalten werden so besetzt, daß die Matrix umkehrbar ist:

$$\underline{F}_{m+1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} K \cdot C_{TE} / R & 0 & 1/R & 0 \\ 0 & 1/r & 0 & KC_{TM} / r \\ K/R & 0 & -K/R & 0 \\ 0 & \beta/r & 0 & -\beta/r \end{pmatrix}$$

mit $K^2 = i\omega \mu_0 \rho_{m+1} + k^2$, $R = 1 + KC_{TE}$, $r = 1 + KC_{TM}$ und $\beta = \rho_{m+1} K^2 C_{TM} / i\omega \mu_0$. Ihre Inverse ist dann

$$\underline{F}_{m+1}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/K & 0 \\ 0 & 1 & 0 & KC_{TM} / \beta \\ 1 & 0 & -C_{TE} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\beta \end{pmatrix}$$

Der Anschluß des Schichtvektors \underline{v}_{m+1} an denjenigen der ersten Schicht erfolgt also jetzt durch das Matrixprodukt

$$\underline{N} = \underline{F}_{m+1}^{-1} \underline{F}_m \underline{E}_m \underline{F}_m^{-1} \underline{F}_{m-1} \cdots \underline{E}_1 \underline{F}_1.$$

Für $m > 1$ vereinfachen sich auch die Schichtmatrizen in den isotropen Schichten $\ell = m - 1, m - 2, \dots, 1$. Es gilt

$$\underline{F}_\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ K & 0 & -K & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

mit $K^2 = i\omega \mu_0 / \rho_\ell + k^2$, $\beta = \rho_\ell K^2 / i\omega \mu_0$ und der Kehrmatrix

$$\underline{\underline{F}}_\ell^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/K & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/\beta \\ 1 & 0 & -1/K & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1/\beta \end{pmatrix}$$

Da die Potentiale in diesen Schichten nicht mehr unabhängig von einander sind, bleiben die Schichtvektoren vollbesetzt:

$$\underline{v}_\ell = (A_\ell, K_\ell a_\ell, B_\ell, K_\ell b_\ell)^T.$$

Der Umstand, daß aber alle Lösungen die gleiche vertikale Wellenzahl erhalten, kann wie folgt genutzt werden:

Bei großen Wellenzahlen können sich numerische Schwierigkeiten mit den Exponentialfunktionen der E-Matrix ergeben. Um sie zu vermeiden, wird von den Elementen von $\underline{\underline{E}}_\ell$ der Faktor $\cosh(K_\ell d_\ell)$ abgespalten. Die Matrix ist dann auf der Diagonalen besetzt mit $1 \pm \tanh(K_\ell d_\ell)$, also für $k \rightarrow \infty$ mit 0 und 2. Beim Durchgang durch die Schichtfolge ergibt sich als Abspaltungsprodukt $\cosh(K_{m-1} d_{m-1}) \cdot \cosh(K_{m-2} d_{m-2}) \cdots \cosh(K_1 d_1)$, das sich aber bei Bildung der Matrixprodukte $N_{22}^{-1} N_{21}$ und $N_{21}^{-1} N_{22}$ heraushebt. Bei einer sehr dicken isotropen Schicht oberhalb der anisotropen Schicht sollte diese aus Gründen numerischer Stabilität mehrfach unterteilt werden.

Es verbleibt die Aufgabe, falls die erste Schicht isotrop ist, die Matrizen zur Potentialdarstellung von \underline{j}_a und \underline{E}_a neu zu formulieren. Man erhält

$$\underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} k+K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{U}}_2 = \begin{pmatrix} k-K & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

mit $K^2 = i\omega \mu_0 / \rho_1 + k^2$ und $\beta = \rho_1 K^2 / i\omega \mu_0 = 1 + k^2 \rho_1 / i\omega \mu_0$.