

P. Weidelt

Eindimensionale MT: Schranken für scheinbaren Widerstand und Phase bei gegebener Dynamik des wahren Widerstandes

1. Problemstellung

Wir machen das folgende Gedankenexperiment: Gegeben sei ein unbeschränkter Vorrat von Materialien mit allen möglichen spezifischen Widerständen ϱ im vorgegebenen Bereich $0 < \varrho_- \leq \varrho \leq \varrho_+ < \infty$. Es induziere ein quasihomogenes Magnetfeld mit der Frequenz ω . Für alle denkbaren 1D-Schichtungen der Materialien wird der scheinbare Widerstand ϱ_a und die Phase φ in der (ϱ_a, φ) -Ebene aufgetragen. Gesucht ist die Trennkurve (Separatrix), die das von allen möglichen Schichtungen erreichbare Gebiet der (ϱ_a, φ) -Ebene von dem Gebiet trennt, das durch keine Schichtung erreichbar ist. Darüber hinaus interessiert die Widerstandsstruktur der Modelle auf der Separatrix.

Ist z.B. $\varrho_- = \varrho_+$, so lassen sich nur homogene Halbräume mit $\varrho_a = \varrho_- = \varrho_+$ und $\varphi = \pi/4$ aufbauen und das erreichbare Gebiet beschränkt sich auf einen Punkt. Wenn der Kontrast wächst, ist ein um $\varrho_a = \sqrt{\varrho_- \varrho_+}$, $\varphi = \pi/4$ zentriertes Gebiet erreichbar. Die Variabilität von ϱ_a wird im wesentlichen durch ϱ_- und ϱ_+ begrenzt. Wegen leichter Unter- und Überschwinger kann jedoch auch $\varrho_a < \varrho_-$ und $\varrho_a > \varrho_+$ vorkommen.

Die Lösung des Problems kann übersichtlich dimensionslos dargestellt werden, wenn man ϱ_a etwa auf $\sqrt{\varrho_- \varrho_+}$ bezieht und die Längen durch die Eindringtiefen

$$p_{\pm} = \sqrt{2\varrho_{\pm}/(\omega\mu_0)} \quad (1)$$

ausdrückt. Explizit geht die Frequenz ω nicht ein. Der entscheidende Parameter ist das Verhältnis ϱ_+/ϱ_- .

Eine physikalisch anschauliche Lösung des obigen Problems sieht so aus: Nach Vorgabe von ϱ_- und ϱ_+ betrachten wir eine periodische Wechsellagerung von Schichten mit den spezifischen Widerständen ϱ_- und ϱ_+ und den zugehörigen Schichtmächtigkeiten $(\pi/2)p_-$ und $(\pi/2)p_+$ und bestimmen den (periodischen) Verlauf von scheinbarem Widerstand ϱ_a und Phase φ als Funktion der *Tiefe*. Die Separatrix erhält man durch Auftragung dieser Größen in der (ϱ_a, φ) -Ebene. Beispiele mit ϱ_+/ϱ_- als Kurvenparameter zeigt Fig. 1. Mit wachsender Tiefe werden die Kurven im Uhrzeigersinn durchlaufen, an einer Grenzfläche ist $\varphi = \pi/4$.

2. Grundgleichungen

Zunächst werden die Grundgleichungen bereitgestellt. Der spezifische Widerstand der 1D-Schichtung sei $\varrho(z)$ (mit z positiv nach unten). Es induziere ein Magnetfeld in y -Richtung mit dem Zeitfaktor $\exp(i\omega t)$, $\omega > 0$. Da die Frequenzabhängigkeit für das Problem nicht

wichtig ist, wird ihre explizite Angabe im folgenden unterdrückt. Bei Vernachlässigung des Verschiebungsstromes lauten die Feldgleichungen

$$E'_x(z) = -i\omega B_y(z), \quad -\varrho(z)B'_y(z) = \mu_0 E_x(z), \quad (2)$$

Sie führen auf die Dgl.

$$f''(z) = \frac{i\omega\mu_0}{\varrho(z)} f(z) \quad (3)$$

mit

$$f(z) := -E_x(z)/E'_x(0) \quad (4)$$

und den Randbedingungen

$$f'(0) = -1, \quad f'(\infty) = 0. \quad (5)$$

Die Oberflächenimpedanz ist gegeben durch

$$Z := \frac{\mu_0 E_x(0)}{B_y(0)} = i\omega\mu_0 f(0), \quad (6)$$

mit

$$Z = \sqrt{i\omega\mu_0\varrho_a} \exp(i\varphi). \quad (7)$$

Wenn nötig unterscheiden wir zwischen dem *Meßwert* Z und dem *Funktional* $Z([\varrho]) = i\omega\mu_0 f(0, [\varrho])$ als Ergebnis einer Modellrechnung für das Widerstandsmodell $\varrho(z)$. Die Fréchet-Ableitung $F(z, [\varrho])$ des Funktionals $Z([\varrho])$ bezüglich einer kleinen Variation $\delta\varrho(z)$ ist definiert als

$$\delta Z([\varrho]) = \int_0^\infty F(z, [\varrho]) \delta\varrho(z) dz \quad (8)$$

und hängt mit $f(z, [\varrho])$ zusammen durch

$$F(z, [\varrho]) = \left\{ \frac{i\omega\mu_0}{\varrho(z)} f(z, [\varrho]) \right\}^2. \quad (9)$$

Betrachtet man z.B. den homogenen Halbraum $\varrho(z) = \varrho_0$ und ist $k := \sqrt{i\omega\mu_0/\varrho_0}$, so gilt

$$f(z) = \exp(-kz)/k, \quad Z = i\omega\mu_0/k = \sqrt{i\omega\mu_0\varrho_0}, \quad F(z) = k^2 \exp(-2kz).$$

Damit ergibt sich etwa für $\delta\varrho(z) = \delta\varrho_0 = \text{const.}$ das erwartete Resultat

$$\delta Z = \int_0^\infty k^2 \exp(-2kz) dz \delta\varrho_0 = (1/2)k\delta\varrho_0.$$

3. Problemlösung durch Variationsrechnung

Zur Lösung der im einleitenden Abschnitt definierten Aufgabe behandeln wir zunächst das folgende, scheinbar etwas eingengte Problem: Gegeben sind die Schranken ϱ_- und ϱ_+ sowie als *Meßwert* der scheinbare Widerstand ϱ_a . Gesucht ist das Widerstandsmodell $\varrho(z)$ mit den Eigenschaften

- $\varrho_a([\varrho]) = \varrho_a$,
- $\varrho_- \leq \varrho(z) \leq \varrho_+$,
- $\varphi([\varrho])$ ist minimal.

Diese drei Forderungen werden in die zugehörige Lagrange-Funktion $L([\varrho])$ eingebaut:

$$L([\varrho]) = \varphi([\varrho]) + \lambda \{ \varrho_a([\varrho]) - \varrho_a \} + \int_0^\infty [\mu_+(z) \{ \varrho(z) - \varrho_+ \} + \mu_-(z) \{ \varrho_- - \varrho(z) \}] dz. \quad (10)$$

Der erste Term der rechten Seite ist die zu minimierende Zielfunktion, der zweite Term mit dem Lagrangeschen Multiplikator λ sorgt für die Erfüllung der Daten $\varrho_a([\varrho]) = \varrho_a$, und der dritte Term mit den verallgemeinerten Multiplikatoren $\mu_\pm(z)$ trägt den Ungleichungen $\varrho_- \leq \varrho(z) \leq \varrho_+$ Rechnung. Während λ beide Vorzeichen haben kann, sind die Funktionen $\mu_\pm(z)$ nicht-negativ. Genauer gilt

$$\mu_-(z) \begin{cases} = 0, & \varrho(z) > \varrho_- \\ > 0, & \varrho(z) = \varrho_- \end{cases}, \quad (11)$$

$$\mu_+(z) \begin{cases} = 0, & \varrho(z) < \varrho_+ \\ > 0, & \varrho(z) = \varrho_+ \end{cases}. \quad (12)$$

Einen kurzen Überblick über die Behandlung von Extremalaufgaben mit Gleichungen und Ungleichungen als Nebenbedingungen gibt z.B. Pearson (1974), p. 1104-1180.

Notwendig für die Existenz eines Extremums ist das Verschwinden der ersten Variation von L bezüglich $\varrho(z)$. Wegen

$$\delta \log Z = \frac{\delta Z}{Z} = \frac{\delta \varrho_a}{2\varrho_a} + i\delta\varphi$$

ergeben sich mit \Im =Imaginärteil und \Re =Realteil die Variationen

$$\delta\varphi = \int_0^\infty \Im[F(z)/Z] \delta\varrho(z) dz, \quad \delta\varrho_a = 2\varrho_a \int_0^\infty \Re[F(z)/Z] \delta\varrho(z) dz,$$

so daß man als Extremalbedingung

$$0 = \Im[F(z)/Z] + 2\lambda\varrho_a \Re[F(z)/Z] + \mu_+(z) - \mu_-(z) \quad (13)$$

oder

$$D(z) := \Im[F(z)/Z] + 2\lambda\varrho_a \Re[F(z)/Z] = \mu_-(z) - \mu_+(z) \quad (14)$$

erhält. Nach (11) und (12) ist

$$D(z) \begin{cases} > 0, & \varrho(z) = \varrho_- \\ = 0, & \varrho_- < \varrho(z) < \varrho_+ \\ < 0, & \varrho(z) = \varrho_+ \end{cases}. \quad (15)$$

Die Bedingung $D(z) \equiv 0$ kann in keinem *endlichen* Intervall I erfüllt werden; denn für $z \in I$ müßte gleichzeitig

$$D(z) = \Im[F(z)/Z] + 2\lambda\rho_a\Re[F(z)/Z] = 0$$

und

$$D'(z) = \Im[F'(z)/Z] + 2\lambda\rho_a\Re[F'(z)/Z] = 0$$

gelten. Diese zwei homogenen linearen Gleichungen für λ sind nur dann kompatibel, wenn $\Im[F'(z)/F(z)] = 2\Im[f'(z)/f(z)] = 0$. Nach (2), (4) und (6) gilt aber

$$\Im[f'(z)/f(z)] = -\Im[i\omega B_y(z)/E_x(z)] = -\Im[i\omega\mu_0/Z(z)] = -\omega\mu_0 \cos[\varphi(z)]/|Z(z)| < 0.$$

Die Ungleichung folgt daraus, daß auch im Leiter die Phase $\varphi(z)$ stets im Bereich $0 < \varphi(z) < \pi/2$ liegt. Deshalb kann die extremale Widerstandsstruktur nur aus einer Abfolge der spezifischen Grenzwiderstände ρ_- und ρ_+ bestehen.

Nach (15) liegen die Trennflächen dort, wo $D(z)$ sein Vorzeichen wechselt. $D(z)$ ist eine (stark gedämpfte) oszillierende Funktion mit unendlich vielen Nullstellen, so daß die Wechsellagerung der Schichten bis $z \rightarrow \infty$ reicht. Die Position der Schichtgrenzen sei $z = z_j, j = 0, 1, 2, \dots$ mit $z_j < z_{j+1}$. Mit $D(z_j) = 0$ und $D(z_{j+1}) = 0$ folgt mit (14) als Kompatibilitätsbedingung $\Im[F(z_{j+1})/F(z_j)] = 0$. Die Definition (9) liefert deshalb weiter

$$\Im[f^2(z_{j+1})/f^2(z_j)] = 0, \quad \arg[f(z_{j+1})/f(z_j)] = -\pi/2.$$

Die erste Gleichung wird erfüllt, wenn die Phasendifferenz $\arg[f(z_{j+1})/f(z_j)]$ ein ganzes Vielfaches von $\pi/2$ ist. Da die Phase mit der Tiefe abnimmt, muß diese Phasendifferenz negativ sein, und da zwei *benachbarte* Nullstellen betrachtet werden, ist die betragsmäßig kleinste Differenz zu wählen. Die Schichtdicken in der unendlichen Wechsellagerung von ρ_- und ρ_+ sind also so zu bestimmen, daß in jeder Schicht unterhalb von z_0 die Phase des elektrischen Feldes $f(z)$ um $\pi/2$ abnimmt.

Diese Bedingungen versuchen wir dadurch zu erfüllen, daß unterhalb von z_0 eine *periodische Schichtung* mit den Schichtmächtigkeiten d_{\pm} für ρ_{\pm} angenommen wird. Sind $\zeta_{\pm} := \sqrt{i\omega\mu_0\rho_{\pm}}$ die Halbraum-Impedanzen und Z_{\pm} die Impedanzen in der Wechsellagerung direkt über einer Schicht mit dem Widerstand ρ_{\pm} , so ergibt eine Feldfortsetzung durch eine Schicht mit $\rho = \rho_-$ bzw. ρ_+

$$\frac{f(z_{j+1})}{f(z_j)} = \frac{1 + \zeta_-/Z_-}{1 + \zeta_-/Z_+} \exp(-k_-d_-) \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(z_{j+1})}{f(z_j)} = \frac{1 + \zeta_+/Z_+}{1 + \zeta_+/Z_-} \exp(-k_+d_+), \quad (16)$$

wobei $k_{\pm} := \sqrt{i\omega\mu_0/\rho_{\pm}}$. Die Periodizität erfordert die Rekursionen

$$Z_- = \zeta_- \frac{Z_+ + \zeta_-t_-}{\zeta_- + Z_+t_-}, \quad Z_+ = \zeta_+ \frac{Z_- + \zeta_+t_+}{\zeta_+ + Z_-t_+}, \quad t_{\pm} := \tanh(k_{\pm}d_{\pm}). \quad (17)$$

Löst man (16) und (17) zusammen mit $\arg[f(z_{j+1})/f(z_j)] = -\pi/2$ nach d_{\pm} und Z_{\pm} auf, so ergibt sich

$$k_-d_- = k_+d_+ = (1+i)\pi/2 \quad \text{und} \quad Z_{\pm} = \sqrt{i\omega\mu_0\rho_{\pm}} \quad (18)$$

mit

$$\varrho_{a+}/\varrho_+ = \varrho_-/\varrho_{a-} = [\gamma(1-r) + \sqrt{\gamma^2(1-r)^2 + 4r}]^2/4 > 1.$$

Dabei ist

$$\gamma := t_{\pm} = \coth(\pi/2) = 1.09033 \quad \text{und} \quad r := \sqrt{\varrho_-/\varrho_+}.$$

Die Schichten haben die Mächtigkeit $d_{\pm} = (\pi/2)p_{\pm}$, wobei p_{\pm} die in (1) definierte lokale elektromagnetische Eindringtiefe ist. Physikalisch sind es $\lambda/4$ -Plättchen (Wellenlänge $2\pi p_{\pm}$), die eine Phasenverschiebung $\pi/2$ erzeugen. Im Gegensatz zu den optischen $\lambda/4$ -Plättchen wird das Feld jedoch stark gedämpft, so daß sich der Einfluß der periodischen Schichtung auf die allerersten Schichten beschränkt.

Da die Impedanzen Z_{\pm} die Phase $\varphi = \pi/4$ haben, wirkt der heterogen geschichtete Halbraum an den Schichtgrenzen wie ein homogener Halbraum. Dies ist physikalisch leicht einzusehen, da an einer Schichtgrenze die Phasenverschiebung des von unten einfallenden reflektierten Anteils des elektrischen Feldes gegenüber dem von oben einfallenden Feld ein ganzzahliges Vielfaches von π ist: Alle reflektierten Anteile haben die Schichten oberhalb des tiefsten Reflexionspunktes ein geradzahliges Mal durchlaufen und damit eine Phasendifferenz von einem geradzahligem Vielfachen von $\pi/2$ erhalten. Hinzu kommen Phasensprünge von π , die bei Reflexionen zum besseren Leiter auftreten.

Liegt direkt unterhalb der betrachteten Schichtgrenze eine Schicht mit $\varrho = \varrho_+$, so liefert die Wechsellagerung einen scheinbaren Widerstand $\varrho_{a+} > \varrho_+$. Denn die wichtigste Reflexion ist das an der nächsttieferen Grenzfläche zum guten Leiter mit dem Phasensprung π reflektierte E-Feld, das sich dem von oben einfallenden Feld mit der Phasenverschiebung 2π überlagert, dies somit verstärkt und nach (6) und (7) zu einer Erhöhung von ϱ_a führt. Umgekehrt hat auf dem guten Leiter die wichtigste Reflexion die Phasendifferenz π (kein Phasensprung), schwächt damit das E-Feld und führt zu $\varrho_{a-} < \varrho_-$.

Der Weg zur Konstruktion der extremalen Widerstandsverteilung, die $\varphi([\varrho])$ für vorgegebene Werte von ϱ_a, ϱ_- und ϱ_+ minimiert, ist nun klar: Da kleine Phasen auftreten, wenn der Widerstand mit der Tiefe ansteigt, besteht $\varrho(z)$ aus einer periodischen Sequenz von $\lambda/4$ -Blättchen, beginnend mit $\varrho(z) = \varrho_+$ in $z_0 < z < z_1$. Darüber liegt in $0 \leq z \leq z_0$ eine Schicht mit $\varrho(z) = \varrho_-$ und variabler Mächtigkeit z_0 , $0 \leq z_0 \leq d_-$, die so gewählt wird, daß $\varrho_a([\varrho]) = \varrho_a$. Die erreichbaren Impedanzen sind

$$Z(z_0) = \zeta_- \frac{Z_+ + \zeta_- t}{\zeta_- + Z_+ t}, \quad t := \tanh(k_- z_0).$$

Sie liefern als spezielle Werte für $\varrho_a(z_0)$ und $\varphi(z_0)$: $\varrho_a(0) = \varrho_{a+} > \varrho_+$, $\varrho_a(0.5d_-) = \varrho_-$, $\varrho_a(d_-) = \varrho_{a-} < \varrho_-$, $\varphi(0) = \varphi(d_-) = \pi/4$ und $\varphi < \pi/4$ dazwischen.

Ähnlich ergibt sich die *maximale* Phase, wenn man eine Schicht mit $\varrho(z) = \varrho_+$ und variabler Mächtigkeit z_0 , $0 \leq z_0 \leq d_+$, über einer periodischen Sequenz mit ϱ_- in der obersten Schicht anbringt. Die Ergebnisse zeigt Fig. 1: Hier sind in einem (ϱ_a, φ) -Diagramm für verschiedene Verhältnisse ϱ_+/ϱ_- (Kurvenparameter) und Werte von ϱ_a (Abszisse, obere Skala) der mögliche Bereich der Phasen (Ordinate) aufgetragen. Der

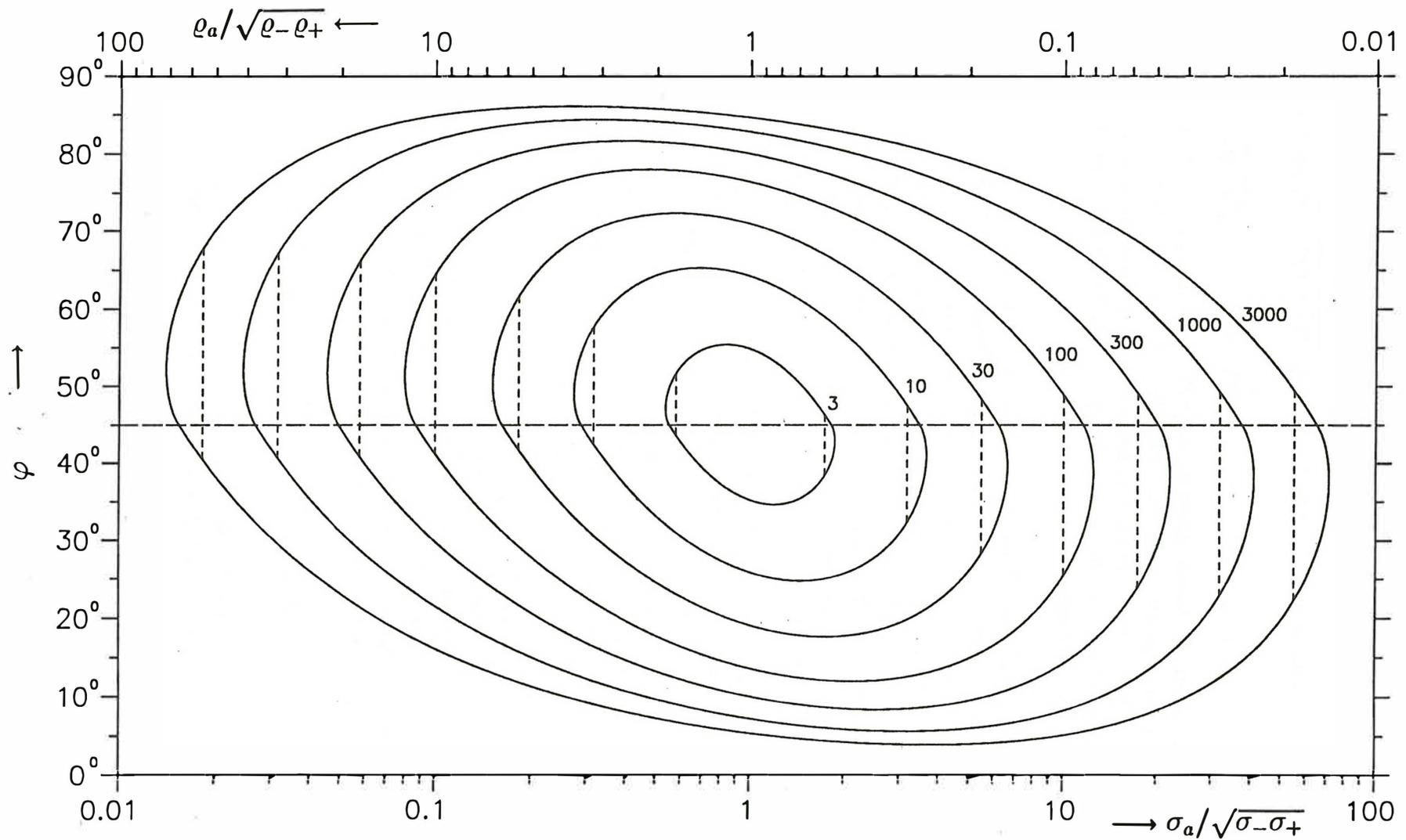


Fig.1: Wertevorrat von scheinbarem Widerstand ϱ_a und Phase φ für vorgegebene Schranken $\varrho_- \leq \varrho(z) \leq \varrho_+$ mit ϱ_+/ϱ_- als Kurvenparameter. Die gestrichelten vertikalen Linien begrenzen Unter- und Überschwinggebiete von ϱ_a mit $\varrho_a < \varrho_-$ und $\varrho_a > \varrho_+$.

Bereich der Kurven unterhalb bzw. oberhalb der $\varphi = 45^\circ$ -Linien gibt die untere bzw. obere Schranke für φ .

Identische Extremalbedingungen resultieren, wenn man die Extrema des scheinbaren Widerstandes für eine vorgebene Phase konstruiert. Dies war zu erwarten, da in der Lagrange-Funktion (10) und in den Extremalbedingungen (14) und (15) Zielfunktional und Datenfunktional formal nicht zu unterscheiden sind. Die in Fig. 1 dargestellten konvexen Bereiche enthalten deshalb die für ein vorgegebenes ρ_+/ρ_- -Verhältnis erreichbaren (ρ_a, φ) -Werte und lösen damit im Abschnitt 1 gestellte Aufgabe. Für Wertepaare außerhalb dieser Bereiche existiert kein Modell, die Punkte auf der Separatrix werden durch genau ein Modell erreicht und die Punkte innerhalb des Bereichs können durch unendlich viele Modelle realisiert werden (z.B. durch die Separatrix für ein kleineres ρ_+/ρ_- -Verhältnis). - Formal enthält z.B. die untere Hälfte der Trennkurven von Fig. 1 einfach die Impedanzen, die sich durch Variation der Mächtigkeit z_0 , $0 \leq z_0 \leq d_-$, einer ρ_- -leitenden Schicht über einer periodischen Schichtung mit ρ_+ in der obersten Schicht ergeben. - Die gestrichelten vertikalen Linien in Fig. 1 markieren die Grenzen zu den Unter- und Überschwung-Gebieten mit $\rho_a < \rho_-$ und $\rho_a > \rho_+$.

Wenn man einen leicht geänderten Standpunkt annimmt, läßt sich den Trennlinien in Fig. 1 eine einfache physikalische Deutung geben: Werden ρ_a und φ auf einem Abstieg durch die periodische $\lambda/4$ -Blättchenstruktur aufzeichnet, so durchläuft man die geschlossenen Linien von Fig. 1 im Uhrzeigersinn. Eine Phase von $\pi/4$ indiziert stets eine Grenzfläche.

Die exakten Extremwerte von ρ_a und φ unterscheiden sich nur geringfügig von den Extremwerten in einem einfachen Zweischichtmodell mit demselben Kontrast. Das Zweischichtmodell liefert z.B. für $\rho_+/\rho_- = 100$ die maximale Phase 77.42° , die sich von der extremalen Phase 78.00° kaum unterscheidet. Auch das maximale ρ_a für das Zweischichtmodell ist mit $1.2447\rho_+$ von dem Extremwert $1.2485\rho_+$ nicht zu unterscheiden.

4. Literatur

Pearson, C.E. [ed], 1974. Handbook of applied mathematics. Van Nostrand Reinhold Co., New York [etc.]