P. Weidelt

Phasenbeziehungen für die B-Polarisation

1. Einleitung

Es ist wohlbekannt, daß bei eindimensionalen Widerstandsverteilungen die Phase φ der magnetotellurischen Impedanz nur im Bereich $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ liegen kann. In diesem Beitrag soll gezeigt werden, daß diese Phasenbeschränkung erhalten bleibt, wenn die Klasse der Modelle auf zweidimensionale Widerstandsverteilungen mit anregendem Magnetfeld in Streichrichtung (B-Polarisation oder TM-Mode) erweitert wird. Dabei darf die Widerstandsverteilung sogar eine beliebige ortsabhängige Anisotropie aufweisen. Zudem braucht die Trennfläche Erde-Luft nicht eben zu sein, sondern kann eine weitgehend beliebige, jedoch hinreichend glatte Topographie besitzen.

In der Praxis werden bisweilen Impedanzen im zweiten und sogar dritten Quadranten beobachtet [z.B. die EMSLAB-Messung Fig. 3 in Egbert (1990)]. Obgleich ein E-Polarisationsmodell (elektrisches Feld in Streichrichtung) bei (pathologischer) Topograpie der Trennfläche Erde-Luft auch Phasen außerhalb des Bereichs $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ liefern kann (s. Abschnitt 4), erfordern die EMSLAB-Messungen zu ihrer Erklärung höchstwahrscheinlich ein dreidimensionales Modell, sind aber auf keinen Fall durch ein B-Polarisationsmodell beliebiger Komplexität deutbar. In der B-Polarisation läßt sich aus der Phase auch nicht schließen, ob die *Anisotropie* der Widerstandsverteilung im vorliegenden Induktionsprozeß von besonderer Bedeutung ist.

2. Die Phase der B-Polarisation

Es soll nun gezeigt werden, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Oberflächenimpedanz der B-Polarisation stets im ersten Quadranten liegt. Der Fall isotroper Widerstandsverteilung wurde bereits von Weidelt & Kaikkonen (1994) behandelt. Wir betrachten zunächst eine ebene Trennfläche Erde-Luft mit dem inhomogen und anisotrop leitenden Halbraum in $z \geq 0$. Es sei $\hat{\underline{x}}$ der Einheitsvektor in Streichrichtung. Dann nimmt das Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r}) = B(\underline{r})\hat{\underline{x}}$ im Lufthalbraum $z < 0$ den konstanten Wert $\underline{B}(\underline{r}) = B_0\hat{\underline{x}}$ an. In $z \geq 0$ fließen die Ströme in der (y, z)-Ebene, in der wir die räumlich variable anisotrope Widerstandsverteilung

$$\underline{\underline{\varrho}} = \begin{pmatrix} \varrho_{yy} & \varrho_{yz} \\ \varrho_{yz} & \varrho_{zz} \end{pmatrix},$$

annehmen. Da die Energie-Dissipation in jedem Volumenelement positiv sein muß, ist $\underline{\underline{\varrho}}$ positiv-definit. Notwendig und hinreichend dafür sind die Bedingungen

$$\varrho_{yy} > 0 \text{ und } \varrho_{yy}\varrho_{zz} - (\varrho_{yz})^2 > 0.$$

Die Widerstandswerte sollen nach unten und oben beschränkt sein, d.h. es gelte $0 < \mathrm{Det}(\underline{\underline{\varrho}}) < \infty$. Da $\underline{\underline{\varrho}}$ nicht durch gyrotrope Felder (z.B. Magnetfelder) bestimmt wird, verlangt das Onsager-Theorem [z.B. Landau & Lifschitz (1966), Abschnitt 122], daß $\underline{\underline{\varrho}}$ symmetrisch ist.

Mit dem Zeitfaktor $\exp(+i\omega t)$, $\omega \geq 0$ und $\underline{E}$ und $\underline{J}$ als Vektoren des elektrischen Feldes und der elektrischen Stromdichte lauten die Feldgleichungen

$$\partial_z B = \mu_0 J_y, \qquad -\partial_y B = \mu_0 J_z,$$

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -i\omega B,$$

$$E_y = \varrho_{yy} J_y + \varrho_{yz} J_z, \qquad E_z = \varrho_{yz} J_y + \varrho_{zz} J_z.$$

Daraus ergibt sich durch Elimination von $\underline{E}$ und $\underline{J}$ als Differentialgleichung für B

$$\nabla \cdot (\tilde{\underline{\underline{\varrho}}} \cdot \nabla B) = i\omega\mu_0 B \tag{1}$$

mit dem um $\pi/2$ um die x-Achse rotierten Widerstandstensor

$$\tilde{\underline{\underline{\varrho}}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\varrho}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_{zz} & -\varrho_{yz} \\ -\varrho_{yz} & \varrho_{yy} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Ansatz

$$B/B_0 =: b\exp(i\psi)$$

zerfällt (1) in zwei gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen für Betrag und Phase von B,

$$\nabla \cdot (\tilde{\underline{\underline{\varrho}}} \cdot \nabla b) = b(\nabla\psi)^T \cdot \tilde{\underline{\underline{\varrho}}} \cdot \nabla\psi \geq 0, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot (b^2 \tilde{\underline{\underline{\varrho}}} \cdot \nabla\psi) = \omega\mu_0 b^2 > 0. \tag{3}$$

Die rechte Seite von (2) ist nicht-negativ, weil mit $\underline{\underline{\varrho}}$ auch $\tilde{\underline{\underline{\varrho}}}$ positiv definit ist.
Die Oberflächenimpedanz ist gegeben durch

$$Z(y,0) = -\mu_0 E_y(y,0)/B_0 = -\varrho_{yy}(y,0)[\partial_z B(\underline{r})/B_0]|_{z=0} = -\varrho_{yy}(y,0)[\partial_z b(\underline{r}) + i\partial_z\psi(\underline{r})]|_{z=0}. \tag{4}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß Betrag und Phase ihre Maxima an (allen Punkten) der Erdoberfläche $z = 0$ annehmen, so daß b und ψ nicht anwachsen können, wenn man sich von der Erdoberfläche in den Leiter bewegt.

Zunächst ist leicht zu einzusehen, daß $f := b$ oder $f := \psi$ kein Maximum im *Inneren* des Halbraums $z > 0$ haben kann. Dies erfordert nämlich als notwendige Bedingungen, daß an seinem Ort $\nabla f = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \partial^2_{yy} f & \partial^2_{xy} f \\ \partial^2_{xy} f & \partial^2_{zz} f \end{pmatrix} \tag{5}$$

negativ definit ist. Diese Bedingung ist notwendig, weil f bei jeder infinitesimalen Entfernung vom Maximum nur *abnehmen* darf. Notwendig und hinreichend dafür, daß (5) negativ definit ist, sind die Bedingungen

$$\partial^2_{yy} f < 0 \text{ und } \partial^2_{yy} f \partial^2_{zz} f - (\partial^2_{yz} f)^2 > 0.$$

Mit $\partial^2_{yy} f < 0$ ist dann auch $\partial^2_{zz} f < 0$. Am Ort des Maximums ($\nabla f = 0$) lauten die linken Seiten von (2) und (3) explizit

$$\varrho_{zz}\partial^2_{yy} f + \varrho_{yy}\partial^2_{zz} f - 2\varrho_{yz}\partial^2_{yz} f.$$

Wegen

$$\varrho_{yz} < \sqrt{\varrho_{yy}\varrho_{zz}} \text{ und } \partial^2_{yz} f < \sqrt{\partial^2_{yy} f \partial^2_{zz}}$$

gilt

$$\begin{aligned} &\varrho_{zz}\partial^2_{yy} f + \varrho_{yy}\partial^2_{zz} f - 2\varrho_{yz}\partial^2_{yz} f < \\ &\varrho_{zz}\partial^2_{yy} f + \varrho_{yy}\partial^2_{zz} f + 2\sqrt{\varrho_{yy}\varrho_{zz}\partial^2_{yy} f \partial^2_{zz} f} = -[\sqrt{\varrho_{zz}|\partial^2_{yy} f|} - \sqrt{\varrho_{yy}|\partial^2_{zz} f|}]^2 < 0, \end{aligned}$$

so daß am Ort eines Maximums die linken Seiten von (2) und (3) negativ wären, während die rechten Seiten dort nicht-negativ sind. Deshalb existieren keine Maxima im Inneren des Halbraums $z \geq 0$ und müssen vielmehr auf seiner Berandung liegen. Nimmt man für $y \to \pm\infty$ eine geschichtete Widerstandsverteilung $\underline{\underline{\varrho}}(z)$ an (die für beide Seiten unterschiedlich sein kann), so folgt aus (2) und (3)

$$\begin{aligned} b'(z) &= -\frac{1}{\varrho_{yy}(z)}\int_z^\infty \varrho_{yy}(\zeta) b(\zeta)[\psi'(\zeta)]^2 d\zeta < 0, \\ \psi'(z) &= -\frac{\omega\mu_0}{\varrho_{yy}(z) b^2(z)}\int_z^\infty b^2(\zeta) d\zeta < 0. \end{aligned}$$

Deshalb nehmen b und ψ auf der rechten und linken Begrenzung des Halbraums $z \geq 0$ mit der Tiefe ab. Auf dem unteren Rand ($z \to \infty$) gilt $b \to 0$ und $\psi \to -\infty$, so daß die Maxima von b und ψ bei $z = 0$ angenommen werden. Hier ist $b = 1$ und $\psi = 0$. Die Ableitungen in (4) sind daher nicht-positiv. Tatsächlich sind sie strikt negativ, denn aus der Annahme $\partial_z\psi|_{z=0} = 0$ würde mit (3) und $\partial_y\psi \equiv 0$ bei $z = 0$ folgen, daß

$$\partial^2_{zz}\psi|_{z=0} = \omega\mu_0/\varrho_{yy}(y, 0) > 0,$$

und ψ somit sein Maximum nicht bei $z = 0$ hätte. Auch die Annahme $\partial_z b|_{z=0} = 0$ führt mit (2) und $\partial_y b \equiv 0$ bei $z = 0$ auf das widersprüchliche Ergebnis

$$\partial^2_{zz} b|_{z=0} = (\partial_z\psi|_{z=0})^2 > 0,$$

das eine *Zunahme* von b mit der Tiefe impliziert. Deshalb ist $\partial_z b|_{z=0} < 0$ und $\partial_z\psi|_{z=0} < 0$, so daß nach (4) die Impedanz der B-Polarisation im ersten Quadranten liegt.

Die oben für eine ebene Erdoberfläche ∂C abgeleiteten Phasenbeschränkungen gelten tatsächlich für jeden Punkt P einer Trennfläche ∂C mit beliebiger (2D-) Topographie. Es muß nur angenommen werden, daß ∂C für $y \to \pm\infty$ horizontal verläuft und am Punkt P hinreichend glatt ist, so daß die Krümmung dort existiert. Es sei $\underline{\hat{n}}$ der am Ort P in den Leiter C weisende Normaleneinheitsvektor und $\underline{\hat{t}}$ der tangentiale Einheitsvektor, definiert durch $\underline{\hat{t}} = \underline{\hat{n}} \times \underline{\hat{x}}$. Dann ist wiederum $\underline{B}(P) = B_0\underline{\hat{x}}$ und die Maxima von b und ψ werden auf ∂C angenommen. Hier ist $b = 1$, $\psi = 0$ und

$$Z(P) = -\mu_0 E_t(P)/B_0 = -\varrho_{yy}(P)\partial_n B/B_0|_{\partial C} = -\varrho_{yy}(P)(\partial_n b + i\partial_n\psi)|_{\partial C}. \tag{6}$$

Für $f = b$ oder $f = \psi$ ist $\partial_t f(P) \equiv 0$ und

$$\nabla^2 f(P) = \partial^2_{nn} f(P) + \kappa(P)\partial_n f(P).$$

Dabei ist $\kappa(P)$ die Krümmung von ∂C am Ort P. Sie ist positiv bzw. negativ, wenn die Trennfläche bei P (von der Luft aus gesehen) konvex bzw. konkav gekrümmt ist. Durch Widerspruch folgt dann wiederum aus (3) und (2), daß $\partial_n \psi$ und $\partial_n b$ bei P strikt negativ sind, und somit auch hier die Phasenschranken gelten.

3. Dispersionsrelationen

Die Existenz von Dispersionsrelationen zwischen Real- und Imaginärteil der Impedanz Z ist dadurch gesichert, daß nach (4) oder (6) Z als kausale Übertragungsfunktion zwischen E_y und dem Quellfeld $B_0/2$ in der unteren Frequenzhalbebene holomorph ist. Für die Anwendung interessanter sind Dispersionsrelationen zwischen scheinbarem Widerstand $\varrho_a(\omega)$ und Phase $\varphi(\omega)$, die wegen

$$Z = \sqrt{\omega\mu_0\varrho_a}\exp(i\varphi)$$

äquivalent sind zu den Dispersionsrelationen zwischen Real- und Imaginärteil von $\log Z$. Sie existieren nur, wenn auch $\log Z$ in der unteren Frequenzhalbebene holomorph ist, d.h. wenn Z dort weder Singularitäten noch Nullstellen besitzt. (Eine derartige kausale Übertragungsfunktion wird als *minimalphasig* bezeichnet.)

Betrachet werden deshalb jetzt komplexe Frequenzen $\omega - ip$, $p \geq 0$. Dann lautet (1)

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\tilde{\varrho}}} \cdot \nabla B) = (p + i\omega)\mu_0 B$$

und aus (2) wird

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\tilde{\varrho}}} \cdot \nabla b) = b[p\mu_0 + (\nabla\psi)^T \cdot \underline{\underline{\tilde{\varrho}}} \cdot \nabla\psi] > 0.$$

Durch ganz analoge Überlegungen wie für reelle Frequenzen läßt sich dann zeigen, daß der Realteil von Z in der unteren Frequenzhalbebene positiv ist, so daß Z dort nicht verschwindet, $\log Z$ also holomorph ist und Dispersionsrelationen zwischen scheinbarem Widerstand und Phase existieren. Ohne vollständige Begründung der analytischen Eigenschaften von Z wurden sie bereits von Fischer & Schnegg (1980) angegeben und von denselben Autoren [Fischer & Schnegg (1993)] für zwei Viertelräume numerisch verifiziert. Die Relationen lauten

$$\begin{aligned}
\log\frac{\varrho_a(\omega)}{\varrho_a(\infty)} &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty [\frac{\pi}{4} - \varphi(x)]\frac{x\,dx}{x^2-\omega^2}, \\
\varphi(\omega) &= \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{\pi}\int_0^\infty \log\frac{\varrho_a(x)}{\varrho_a(\infty)}\frac{dx}{x^2-\omega^2},
\end{aligned}$$

wobei $\varrho_a(\infty) = \varrho(P)$ ist.

4. Die Phase der E-Polarisation

Die Übertragung des im Abschnitt 2 dargestellten im Prinzip einfachen Beweisganges von der B- auf die E-Polarisation hat bisher zu keinem Erfolg geführt. Dies liegt entscheidend daran, daß in der E-Polarisation die Maxima von Amplitude und Phase des E-Feldes zwar auch (irgendwo!) an der Erdoberfläche angenommen werden, im Gegensatz zur B-Polarisation aber im allgemeinen nicht mit dem Meßpunkt zusammenfallen, so daß mit einfachen Mitteln keine Aussage über das Vorzeichen des Normalgradienten möglich ist.

Obgleich numerische Experimente vermuten lassen, daß für Meßpunkte auf der *ebenen* Erdoberfläche die Phase der E-Polarisation auch nur im Bereich $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ liegen wird, können bei beliebiger (pathologischer) Topographie der Erdoberfläche Phasen oberhalb von π auftreten. Dies soll ein einfaches Beispiel verdeutlichen.

Wenn man im E-Polarisationsmodell einen sehr schmalen (in Streichrichtung unendlich ausgedehnten) Kanal in die Erde gräbt, wird dadurch - im Gegensatz zur B-Polarisation - das elektromagnetische Feld nicht gestört, da die Ströme tangential zur Berandung des Kanals fließen. Ein Meßpunkt im Inneren der Erde (z.B. im Bohrloch oder auf dem Ozeanboden) kann man sich deshalb über einen derartigen Kanal mit der Erdoberfläche verbunden denken und als Meßpunkt an einer Erdoberfläche mit etwas ungewöhnlicher Topographie deuten.

Wir betrachten nun Messungen am Ozeanboden mit sehr schlecht leitender Kruste und oberem Mantel in der Nähe eines Kontinentalrandes. Die induzierten Ströme fließen so, daß sie das Erdinnere gegen das induzierende Magnetfeld abzuschirmen versuchen. Wegen des schlecht leitenden Untergrundes erfolgt im Ozean die Kompensation des äußeren Feldes fast vollständig durch die im Ozean induzierten Ströme, so daß - unter Annahme einer Schichtung - das Magnetfeld am Meeresboden sehr schwach ist. Durch die Nähe des Kontinentalrandes kommt es jedoch zu einem ausgeprägten Küsten-Effekt, der nahe der Küste in einer Konzentration der ozeanischen Ströme besteht. Mit dieser Stromkonzentration verbunden ist ein anomales horizontales Magnetfeld, das an der Ozeanoberfläche die Richtung des induzierenden Feldes besitzt, unterhalb der Ströme (am Ozeanboden) in die Gegenrichtung weist und hier wegen des schwachen Normalfeldes den dominierenden Anteil des Magnetfeldes darstellt. Da das elektrische Feld durch den Küsteneffekt weit weniger modifiziert wird, kann die Phase der Impedanz durch das invers gerichtete anomale Magnetfeld um etwa π gedreht werden. Diese qualitativen Betrachtungen lassen sich durch Modellrechnungen quantifizieren. (Das obige Beispiel entstammt einer Diskussion mit Pascal Tarits.)

5. Literatur

Egbert, G.D., 1990. Comments on 'Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor' by E. Yee and K.V. Paulson, *Geophys. J. Int.*, **102**, 1-8.

Fischer, G. & Schnegg, P.-A., 1980. The dispersion relations of the magnetotelluric response and their incidence on the inversion problem, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **62**, 661-673.

Fischer, G. & Schnegg, P.-A., 1993. The magnetotelluric dispersion relations over 2-D structures, *Geophys. J. Int.*, **115**, 1119-1123.

Landau, L.D. & Lifschitz, E.M., 1966. Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 5 (Statistische Physik), Akademie-Verlag, Berlin.

Weidelt, P. & Kaikkonen, P., 1994. Local 1-D interpretation of magnetotelluric B-polarization impedances, *Geophys. J. Int.*, **117**, 733-748.