

Bestimmung von D_{st} -Eindringtiefen (0.5 cpd – 1/30 cpd) mittels Z/H - und $Z : \mathcal{Y}$ -Methode

Nils Olsen, Kopenhagen

Die Grundgleichung zur Bestimmung der komplexen Eindringtiefe $C(\omega)$ allein aus Magnetfeldmessungen lautet

$$C(\omega) = \frac{-B_r(\omega)}{\nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}}(\omega)} = \frac{Z(\omega)}{\mathcal{Y}(\omega)} \quad (1)$$

mit

$$\mathcal{Y} = \nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}} = \frac{1}{a \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_{\vartheta}) + \frac{\partial}{\partial \lambda} B_{\lambda} \right]$$

als Divergenz der Horizontalkomponenten $\mathbf{B}_{\mathbf{H}} = (B_{\vartheta}, B_{\lambda})$.

$B_{\vartheta} = -H$, $B_{\lambda} = D$, $B_r = -Z$ sind die komplexen Fourierkoeffizienten der magnetischen Nord-, Ost- bzw. Vertikalkomponente zur Frequenz ω ; $a=6371$ km ist der Erdradius, ϑ die geomagnetische Co-Breite und λ ist die geomagnetische Länge.¹ Die Berechnung von $\nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}}$ kann durch *a-priori*-Annahmen über die Quellenstruktur der Horizontalkomponenten erfolgen („ Z/H -Verfahren“), oder z.B. mittels Kugelfunktionsentwicklung („ $Z:\mathcal{Y}$ -Verfahren“, [vgl. SCHMUCKER, 1979, 1985]).

Beschreibung der Methoden und Daten

Bei der Bestimmung von Eindringtiefen für den Periodenbereich von wenigen Tagen (D_{st}) wurde in der Vergangenheit überwiegend die Z/H -Methode mit der Annahme verwendet, daß sich das magnetische Potential des Quellenfelds durch einen einzigen Kugelfunktions-term P_1^0 beschreiben läßt. Dann gilt $\nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}} = -2H \cot \vartheta/a$ und C berechnet sich zu

$$C(\omega) = -\frac{a Z(\omega)}{2 H(\omega)} \tan \vartheta \quad (2)$$

was eine Bestimmung von C aus Magnetfeldmessungen einzelner Observatorien ermöglicht [z.B. SCHULTZ & LARSEN, 1987].

Untersuchungen zur Quellenstruktur von D_{st} zeigen jedoch, daß neben P_1^0 noch weitere Kugelfunktionsterme einen signifikanten Beitrag liefern. Da dies Einfluß auf die Bestimmung von C hat, soll hier zunächst ein Vergleich der Ergebnisse des Z/H - mit denen des $Z:\mathcal{Y}$ -Verfahrens – welches mehr Kugelfunktionsterme berücksichtigt – durchgeführt werden.

Zur Anwendung der Z/H -Methode wurde eine 40jährige Zeitreihe (1951 - 1990) des Observatoriums Fürstentfeldbruck (FUR) in Segmente von 30 Tagen unterteilt, von jedem Segment 18 Zeitharmonische (1/30 cpd - 0.6 cpd) bestimmt und mittels Parzen-Fenster geglättete Spektralwerte $Z \cdot Z$ und $Z \cdot H$ zu den sieben Perioden $T = 720, 360, 240, 144, 90, 65$ und

¹Zur Beschreibung der räumlichen Struktur magnetosphärischer Quellen ist das geomagnetische Koordinatensystem vorteilhafter im Vergleich zum geographischen Koordinatensystem.

48 h geschätzt. Robuste univariate Ausgleichsrechnung unter Verwendung von Gl. (2) mit der Annahme, daß H fehlerfrei ist, lieferte schließlich $C(\omega)$.

Im Gegensatz zur Z/H - kommt die $Z:\mathcal{Y}$ -Methode [SCHMUCKER, 1979, 1985; OLSEN, 1992] ohne *a-priori*-Annahmen über die Quellenstruktur aus, denn diese wird aus den Horizontalkomponenten \mathbf{B}_H vieler Observatorien geschätzt. An der Erdoberfläche läßt sich $\mathbf{B} = -\text{grad } V$ aus einem skalaren Potential V ableiten, für welches

$$V(\omega, \vartheta, \lambda) = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n v_n^m(\omega) P_n^m(\vartheta) e^{im\lambda}$$

angesetzt wird. Die Koeffizienten v_n^m werden durch Ausgleichsrechnung aus den Horizontalkomponenten *aller* Observatorien bestimmt, und der Vergleich des für ein bestimmtes Observatorien synthetisierten

$$\mathcal{Y}(\omega, \vartheta_l, \lambda_l) = \nabla_H \cdot \mathbf{B}_H = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n n(n+1) v_n^m(\omega) P_n^m(\vartheta_l) e^{im\lambda_l} \quad (3)$$

mit dem dort beobachteten $Z(\omega)$ liefert $C(\omega)$ für diesen Ort.

D_{st} -Eindringtiefen wurden mittels $Z:\mathcal{Y}$ -Methode von SCHMUCKER [1979] aus Daten von 20 Observatorien über 16 Monate bestimmt. Da sich in den letzten Jahren der Umfang von Stundenmittelwerten in maschinenlesbarer Form enorm erweitert hat, war es nun möglich, die $Z:\mathcal{Y}$ -Methode auf 90 Monate (1957.5–59, 1964–65, 1979–81) mit je etwa 90 Observatorien anzuwenden.

Für jedes 30-Tage Segment, jedes Observatorium und jede Komponente wurden wiederum 18 Zeitharmonische bestimmt und jeweils eine Kugelfunktionsanalyse pro Harmonische und Monat durchgeführt. Als maximaler Grad der Kugelfunktionsentwicklung wurde $N = 4$ gewählt, d.h. für jeden Monat wurden 24 Entwicklungskoeffizienten v_n^m bestimmt. Zur Stabilisierung der Analyse erwies es sich als vorteilhaft, Terme mit großem Grad n nach MARQUARDT „abzudämpfen“ [vgl. OLSEN, 1992]. Für jedes Observatorium und jeden Monat wurde \mathcal{Y} nach Gl. (3) synthetisiert und geglättete Spektren $Z \cdot Z$ und $Z \cdot \mathcal{Y}$ zu den sieben Perioden $T = 720, 360, 240, 144, 90, 65$ und 48 h geschätzt. Wie beim Z/H -Verfahren wurde schließlich $C(\omega)$ nach Gl. (1) mittels robuster univariater Ausgleichsrechnung bestimmt unter der Annahme, daß \mathcal{Y} fehlerfrei ist.

Ergebnisse

Obwohl weltweit verteilte Observatorien bei der Kugelfunktionsanalyse Verwendung fanden, sollen hier lediglich Ergebnisse für Europa gezeigt werden. Zur Lage der Observatorien siehe Abb. 1.

Abb. 2 vergleicht die Ergebnisse der Z/H -Methode (Δ) mit denen der $Z:\mathcal{Y}$ -Methode (\square); Eindringtiefen für $T = 10\,000 \dots 100\,000$ s stammen aus einer S_q -Analyse mittels $Z:\mathcal{Y}$ -Verfahren [OLSEN, 1992].

Die Z/H -Methode liefert systematisch größere Eindringtiefen. Insbesondere bei Perioden $T \approx 200\,000$ s ist $\text{Re}\{C\} = 800$ km um etwa 60 km größer als der Schätzwert des $Z:\mathcal{Y}$ -Verfahrens (und es tritt ein deutlicher Sprung zu C bei 1 cpd auf). Dies ist vermutlich auf eine Unterschätzung von $\nabla_H \cdot \mathbf{B}_H$ zurückzuführen – das Quellenfeld läßt sich eben doch nicht allein durch P_1^0 beschreiben – und der Übergang zwischen S_q und D_{st} wird

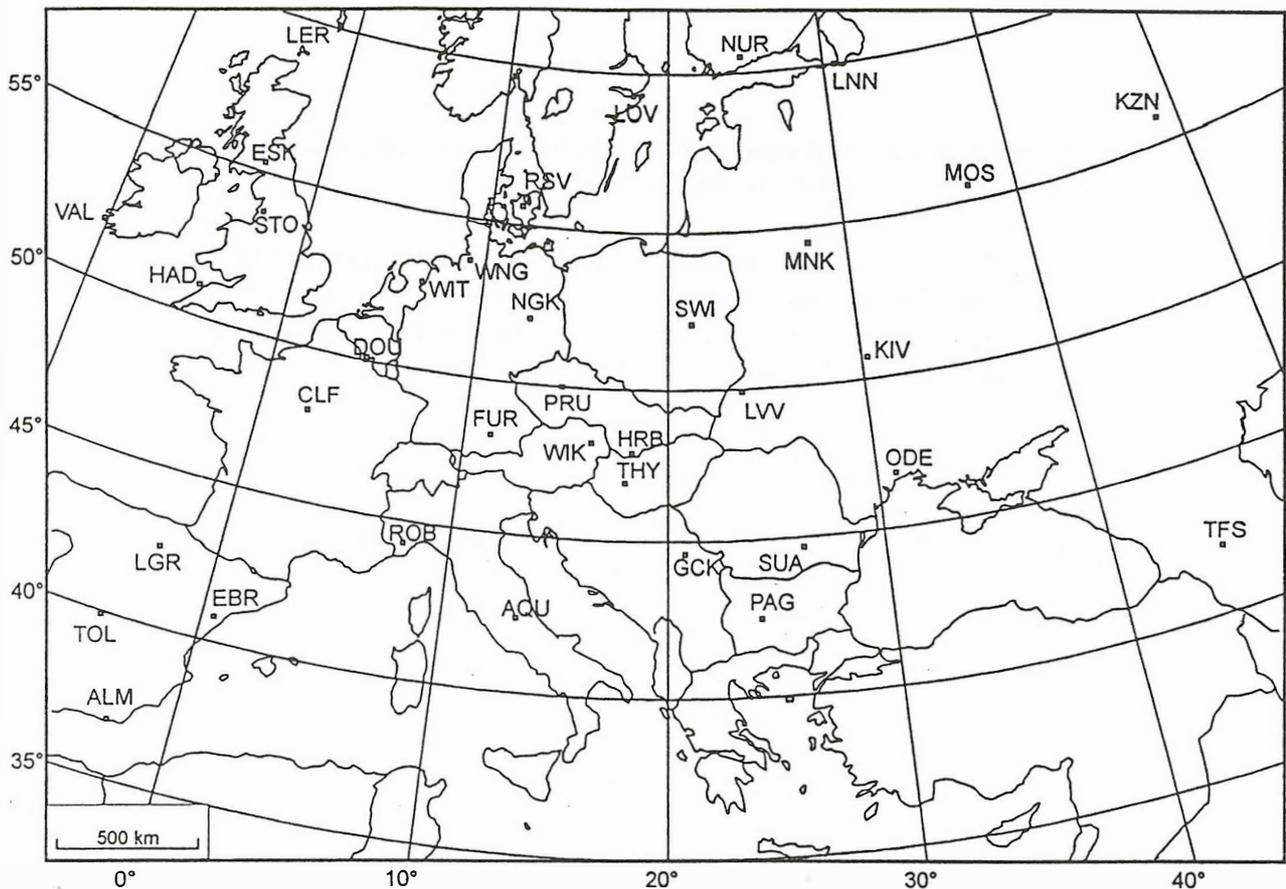


Abbildung 1: Lage der europäischen Observatorien.

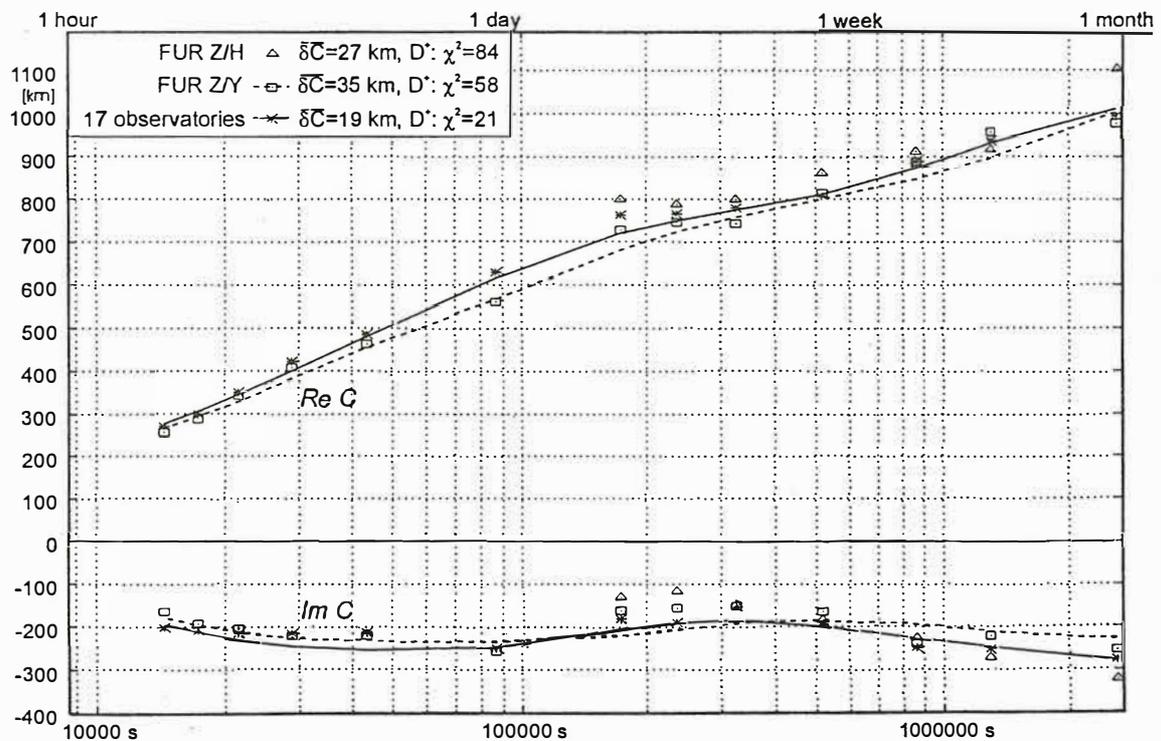


Abbildung 2: C-Response für 3 Datensätze: a) FUR, berechnet mit der Z/H-Methode (\triangle); b) FUR, Z/Y-Methode ($\dots\square\dots$); c) Mittel über 17 europäische Observatorien, Z/Y-Methode (\ast).

In den Eindringtiefen des Periodenbereichs von wenigen Stunden (S_q) sind in Europa systematische Unterschiede festzustellen: $\text{Re}\{C\}$ ist in Nordeuropa größer als in Mittel- und Südosteuropa, was auf eine Zunahme der Leitfähigkeit nach Süden und Osten hinweist [vgl. SCHMUCKER, 1990; OLSEN, 1992].

Um diese Tendenz anhand längerer Perioden zu überprüfen, wurden drei Gruppen von Observatorien gebildet (vgl. Abb. 1): eine nordwestliche Gruppe (mit den fünf Observatorien HAD, ESK, WIT, WNG RSV); eine mittlere (DOU, FUR, NGK, AQU, WIK) und eine südöstliche (THY, HRB, LVV, MNK, ODE, MOS, KZN).

Die mittleren Eindringtiefen der drei Gruppen sind zusammen mit den Eindringtiefen der D^+ -Modelle in Abb. 3 dargestellt. Im langperiodischen Bereich treten die Unterschiede zwischen Nordwest- und Südost-Europa weniger deutlich in Erscheinung; insgesamt ergeben sich in sich konsistente Bilder der Eindringtiefen für den gesamten Periodenbereich von 4 h bis 720 h.

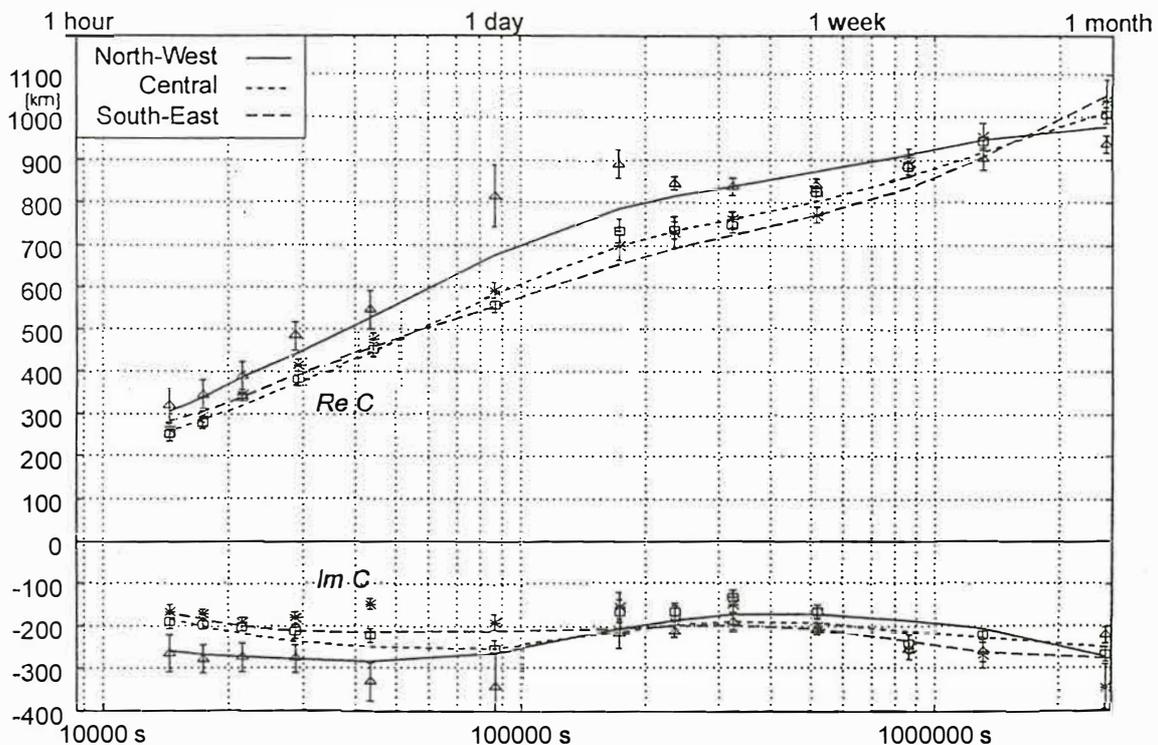
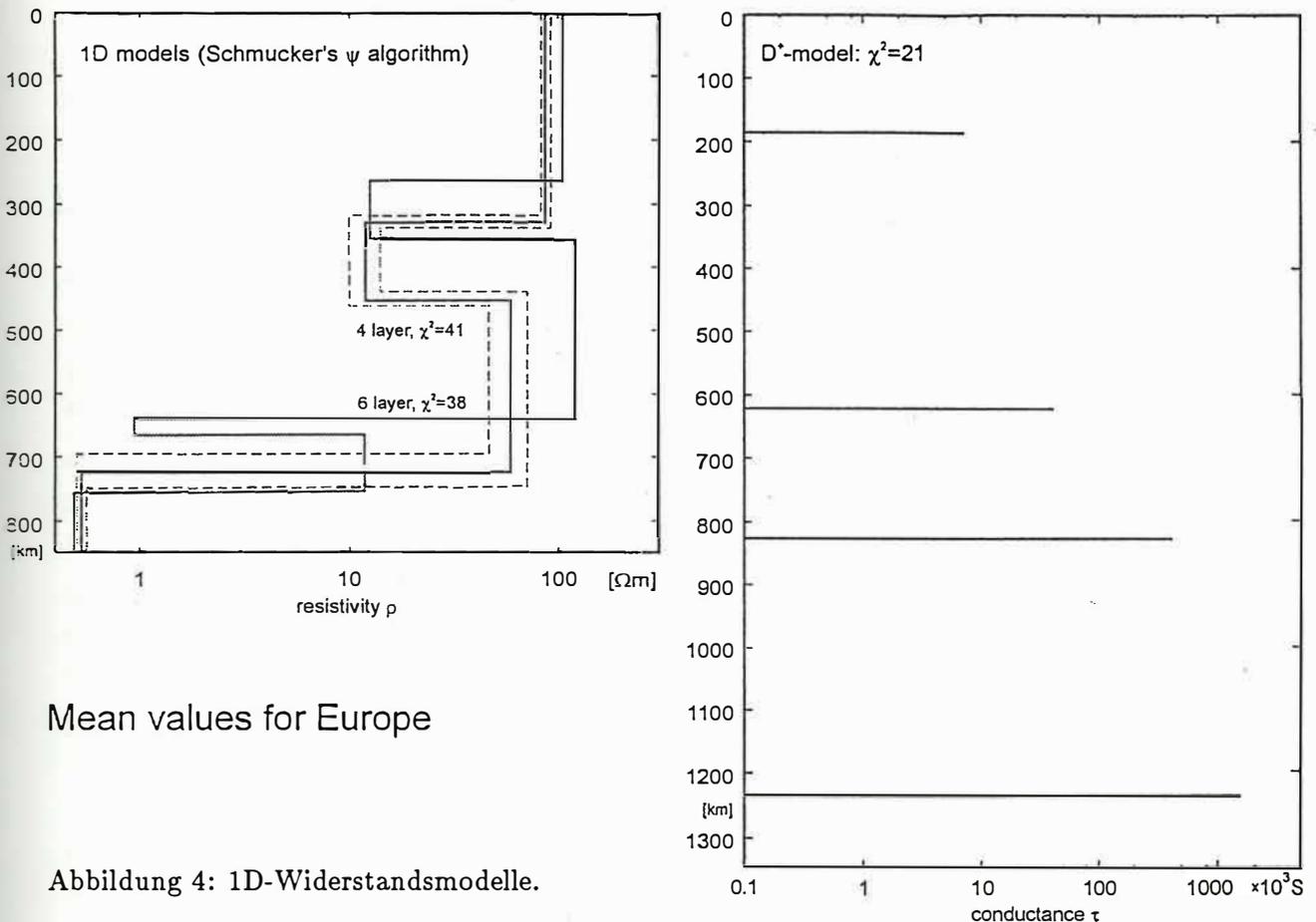


Abbildung 3: C -Response für Nordwest-Europa ($-\Delta-$), Mittel-Europa ($\cdots\square\cdots$) sowie Südost-Europa ($-*-$).

Beachte jedoch die viel zu großen Realteile der nordwestlichen Gruppe bei Perioden zwischen einem und drei Tagen. Dieser Datensatz ist nicht eindimensional interpretierbar, da $\text{Re}\{C\}$ nicht monoton mit der Periode T anwächst. Vermutlich deutet dies jedoch nicht auf eine echte 2D- oder 3D-Struktur hin, sondern ist auf Beiträge der polaren Elektrojets zurückzuführen: ihr Auftreten ist ganztägig moduliert und ihr Quellenfeld läßt sich aufgrund der Kleinskaligkeit nur schlecht durch Kugelfunktionen darstellen.

1D-Modelle

Abschließend seien 1D-Modelle der über 17 europäische Observatorien gemittelten Eindringtiefen angegeben. Der rechte Teil der Abb. 4 stellt das D^+ -Modell dar; der linke Teil zeigt mittels SCHMUCKERS ψ -Algorithmus gewonnene 4-Schicht- und 6-Schicht-Modelle.



Mean values for Europe

Abbildung 4: 1D-Widerstandsmodelle.

Diese bestehen aus einer schlechtleitenden Deckschicht von etwa 100 Ωm oberhalb von 250 km und einem sehr gut leitenden Halbraum ($\rho \approx 0.5 \Omega\text{m}$) ab einer Tiefe von etwa 750 km – vgl. Tabelle 2. Dazwischen liegt – beim 4-Schicht-Modell in 350 – 450 km Tiefe, beim 6-Schicht-Modell in 250 – 350 km Tiefe – eine gutleitende Schicht, deren Leitwerte von $\tau = 10.2 \cdot 10^3 \text{ S}$ bzw. $\tau = 7.34 \cdot 10^3 \text{ S}$ gut zu dem des D^+ -Modells ($\tau = 7.14 \cdot 10^3 \text{ S}$ in 190 km Tiefe) paßt. Das 6-Schicht-Modell zeigt eine zweite gutleitende Schicht in 650 km Tiefe mit Leitwert $\tau = 26.6 \cdot 10^3 \text{ S}$, vergleichbar mit der zweiten Schicht des D^+ -Modells ($\tau = 41.5 \cdot 10^3 \text{ S}$ in 625 km Tiefe). Der Anpassungsfehler des 6-Schicht-Modells ($\chi^2 = 38$) ist um lediglich 8% kleiner als der des 4-Schicht-Modells ($\chi^2 = 41$); dies entspricht der Abnahme der Anzahl Freiheitsgrade ($\nu = 2 \cdot 13 - 4 = 22$ beim 4-Schicht-Modell, $\nu = 20$ beim 6-Schicht-Modell). Beide Modelle erklären daher die Daten im Rahmen ihrer Fehler gleich gut (oder schlecht, da der Anpassungsfehler des D^+ -Modells mit $\chi^2 = 21$ deutlich kleiner ist). Abb. 5 zeigt die beobachteten scheinbaren Widerstände sowie Phasen zusammen mit den Modellwerten. Die größten Differenzen treten in der Phase bei 2 cpd und 3 cpd auf.

Tabelle 2: a und b: Schichtwiderstände ρ und Schichtdicken d der mit SCHMUCKERS ψ -Algorithmus gewonnenen 1D-Modelle. c: Leitwert τ und Tiefe z des D^+ -Modells.

a		b		c	
ρ [Ωm]	d [km]	ρ [Ωm]	d [km]	τ [S]	z [km]
87 ± 5	330 ± 10	105	265	$7.14 \cdot 10^3$	190
12 ± 2	123 ± 12	12.4	91	$41.5 \cdot 10^3$	625
58 ± 12	270 ± 27	120	285	$410 \cdot 10^3$	830
0.54 ± 0.03		0.95	25	$1530 \cdot 10^3$	1235
		11.8	89		
		0.49			
$\chi^2 = 41$		$\chi^2 = 38$		$\chi^2 = 21$	

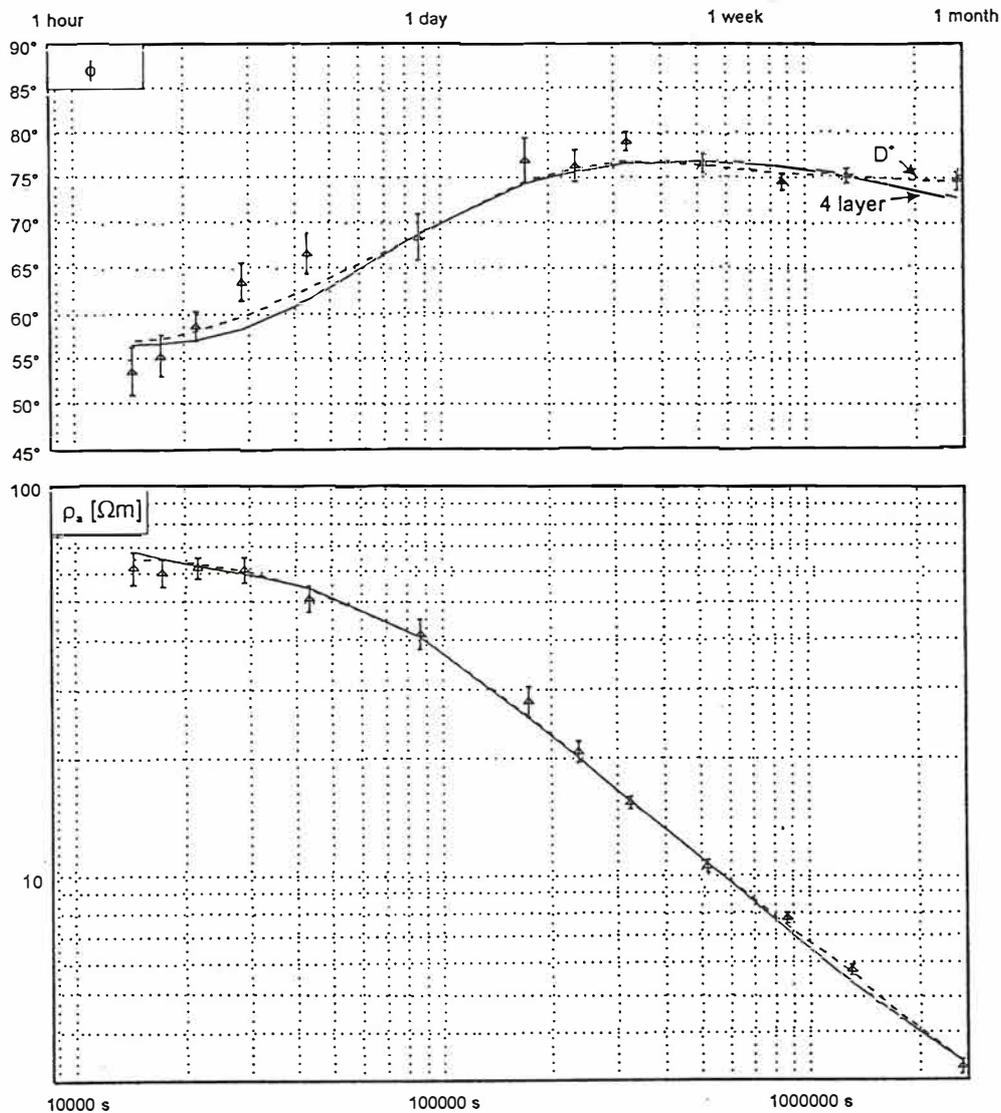


Abbildung 5: Beobachtete und modellierte Werte für scheinbaren Widerstand und Phase, Mittelwert für Europa.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Verwendung der $Z : \mathcal{Y}$ -Methode zu konsistenten Eindringtiefen für den gesamten S_q - und D_{st} -Periodenbereich von 4 h bis 720 h führt. Entscheidend ist jedoch eine möglichst genaue Darstellung des anregenden Feldes für einzelne Zeitsegmente. Dies konnte erreicht werden a) durch Verwendung vieler Kugelfunktionen, und b) durch die *separate* Analyse der einzelnen Zeitsegmente und anschließender Mittelung.

Ich danke R. Parker und A. Schultz für die Überlassung ihrer Programme zur Berechnung der D^+ -Modelle, sowie K. Bahr und U. Schmucker für zahlreiche Diskussionen.

Literatur

OLSEN, N., Day-to-Day C -Response Estimation for S_q from 1 cpd to 6 cpd Using the $Z : \mathcal{Y}$ -Method, *J. Geomagnet. Geoelectr.*, **44**, 433–447, 1992.

PARKER, R. L., The Inverse Problem of Electromagnetic Induction: Existence and Construction of Solutions Based On Incomplete Data, *J. Geophys. Res.*, **85**, 4421–4428, 1980.

SCHMUCKER, U., Erdmagnetische Variationen und die elektrische Leitfähigkeit in tieferen Schichten der Erde, *Sitzungsbericht und Mitteilungen Braunschweigische Wiss. Gesellschaft, Sonderheft*, **4**, 45–102, 1979.

SCHMUCKER, U., Magnetic and electric fields due to electromagnetic induction by external sources, Electrical properties of the earth's interior, in *Landolt-Börnstein, New-Series*, **5/2b**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1985.

SCHMUCKER, U., Die Eindringtiefen tagesperiodischer Variationen, in *Protokoll Koll. Elektromagnetische Tiefenforschung, Hornburg*, 31–66, 1990.

SCHULTZ, A. & J. C. LARSEN, On the electrical conductivity of the mid-mantle – I. Calculation of equivalent scalar magnetotelluric response functions, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **88**, 733–761, 1987.