

Magnetische Induktionsfeldtomographie

R. Tietz

Institut für Geophysik und Geologie

Talstraße 35

04103 Leipzig

BRD

1 Einleitung

Tomographische Erkundungsverfahren nehmen in der geologischen Forschung einen immer breiteren Raum ein. Insbesondere in der Seismik und bei Ultraschalluntersuchungen an Gesteinen sind sie hervorragend zur Strukturaufklärung einsetzbar. In jüngster Zeit haben sich derartige Verfahren auch immer mehr in der Geoelektrik durchgesetzt, wobei Dipol-Dipol-Anordnungen, bei denen an zwei Elektroden Strom eingespeist und an weiteren zwei Elektroden das sich ausbildende Potential abgegriffen wird, eine besondere Bedeutung besitzen. Jedoch weniger bekannt ist die Tatsache, daß auf der Basis rein magnetischer Messungen Tomographie mit hoher Auflösung möglich ist. In diesem Artikel wird ein neuartiges elektromagnetisches Tomographieverfahren vorgestellt, das zur Ermittlung des Leitfähigkeitsbildes im Boden und zur Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung beliebig geformter Testproben genutzt werden kann und das im Gegensatz zu den üblichen Methoden nicht auf der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beruht. Dabei wird sich herausstellen, daß man in der magnetischen Induktionstomographie auf lokalisierbare Magnetfelder angewiesen ist. Insbesondere scheitert jeder Versuch, mit Dipol-Dipol-Anordnungen zu arbeiten. Konkrete Rechnungen und Experimente wurden mit „Flußschlauchfeldern“ durchgeführt. Die Ergebnisse sind sehr ermutigend und widerlegen die Übertragbarkeit des Äquivalenzprinzips der Magnetik auf Problemstellungen, bei denen quasistationäre Ströme auftreten.

2 Grundgleichungen

Bei der Herleitung der Tomographie-Grundgleichungen gehen wir vom quasistationären Maxwell-System

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{B}_{,t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4)$$

aus, erweitert um die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (5-a)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B}, \quad (5-b)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \vec{a}_{,t}, \quad (5-c)$$

die den Zusammenhang zwischen der dielektrischen Verschiebung \vec{D} und dem elektrischen Feld \vec{E} , dem Magnetfeld \vec{H} und der magnetischen Induktion \vec{B} sowie der Stromdichte \vec{j} und dem elektrischen Feld \vec{E} (Ohmsches Gesetz) herstellen. Wir beschränken uns im weiteren nur auf den Fall relativ niederfrequenter Ströme (< 1 MHz) bzw. auf Meßobjekte, die klein im Vergleich zur Wellenlänge einer sich im Medium fortpflanzenden elektromagnetischen Welle gleicher Frequenz sind. Es sei jedoch angemerkt, daß dieses Verfahren im Unterschied zu den gängigen Methoden nicht auf der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen basiert, sondern ein reines Induktionsverfahren darstellt. Obendrein betrachten wir folgende Situation:

- μ und ϵ mögen nur geringfügig vom Ort abhängen. In diesem Fall darf man die Glieder in $\log \mu$ und $\log \epsilon$ vernachlässigen.
- Effekte, hervorgerufen durch induzierte Polarisation, werden ebenfalls nicht berücksichtigt ($\rho = 0$).

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich als Lösungsformel für das Vektorpotential $\vec{a}(\vec{r}, t)$ im Vollraum die Formel

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6)$$

die wir auf die in Abb. 1 dargestellte Meßanordnung anwenden wollen, in der sich sowohl die Primärspule Sp1 als auch die Sekundärspule Sp2 im Gebiet G1 befinden, das mit einem Medium M1 (i.a. Luft) homogen ausgefüllt ist.

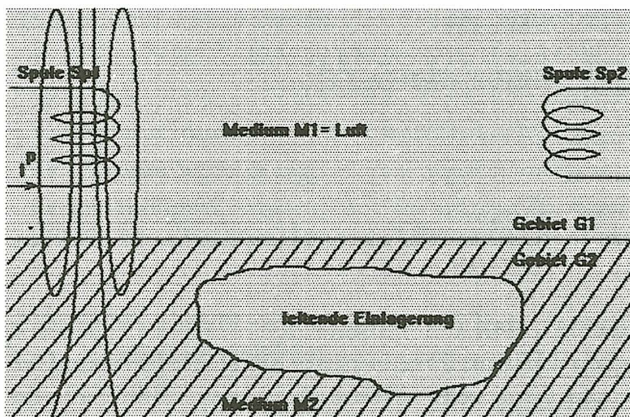


Abb. 1: Meßanordnung der Magnetfeldtomographie

Wir gehen weiterhin davon aus, daß elektrisch leitende Bereiche nur im Medium M_2 des Gebietes G_2 vorkommen. Angenommen, im Primärkreis fließe ein Strom $I^{(p)}$, der in den Medien M_1 und M_2 ein Vektorpotential $\vec{a}^{(p)}$ erzeugt, das wiederum in M_2 die Induktionsstromdichte $\vec{j}^{(i)}$ generiert. Dann wird durch die Ströme $I^{(p)}$ und $\vec{j}^{(i)}$ ein Gesamtvektorpotential $\vec{a}(\vec{r}, t)$ hervorgerufen, welches im Sekundärkreis L_2 eine Spannung U induziert. Sp2 empfängt somit gleichzeitig das Bodensignal aus dem Gebiet G_2 und das direkte Signal von Sp1. Die obige Situation drücken wir mathematisch durch das Integralgleichungssystem

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left(\int_{\lambda^{(p)}} d\vec{r}' \frac{I^{(p)}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{V_2} dV' \frac{\vec{j}^{(i)}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (7)$$

aus. Unter Einbeziehung des Induktionsgesetzes

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{f} = \int_A \text{rot } \vec{a} d\vec{f} = \int_{\lambda^{(s)}} \vec{a} d\vec{r} \quad (8)$$

und von (5-c) entstehen die Relationen

$$\Phi = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left(\int_{\lambda^{(s)}} d\vec{r} \int_{\lambda^{(p)}} d\vec{r}' \frac{I^{(p)}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\lambda^{(s)}} d\vec{r} \int_{V_2} dV' \frac{\vec{j}^{(i)}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (9)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{j}^{(i)}(\vec{r}, t) &= \sigma(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) = -\sigma(\vec{r}) \vec{a}_{,t}(\vec{r}, t) = \\ &= \frac{\mu\mu_0 \sigma(\vec{r})}{4\pi} \left(\int_{\lambda^{(p)}} d\vec{r}' \frac{I^{(p)}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{V_2} dV' \frac{\vec{j}^{(i)}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_{,t} \end{aligned} \quad (10)$$

(10) entspricht einer verallgemeinerten Fredholmschen Integralgleichung 2. Art, die man gewöhnlich iterativ löst. Das Ergebnis, gleich für $U = -\dot{\Phi}$ formuliert, ist die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} U &= -L^{\text{ps}} \dot{I}^{(p)} + \alpha \ddot{I}^{(p)} \int_{V_2} dV_0 \sigma(\vec{r}_0) L_1(\vec{r}_0) \\ &\quad - \alpha^2 \overset{(3)}{I}^{(p)} \int_{V_2} dV_0 \sigma(\vec{r}_0) \int_{V_2} dV_1 \sigma(\vec{r}_1) L_2(\vec{r}_0, \vec{r}_1) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \pm \alpha^{(n+1)} \overset{(n)}{I}^{(p)} \int_{V_2} dV_0 \sigma(\vec{r}_0) \cdots \int_{V_2} dV_{n-1} \sigma(\vec{r}_{n-1}) L_n(\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_{n-1}) \mp \cdots \end{aligned} \quad (11)$$

In (11) wurde bereits berücksichtigt, daß der eingeprägte Strom $I^{(p)}(\vec{r}, t)$ in Sp1 bei den von uns betrachteten kleinen Frequenzen nicht mehr vom Ort, sondern nur noch von der Zeit abhängt, d.h. $I^{(p)}(\vec{r}, t) = I(t)$. $\dot{I}^{(p)}$, $\ddot{I}^{(p)}$ und $\overset{(n)}{I}^{(p)}$ bedeuten die ein-, zwei- bzw. n -fache zeitliche Ableitung des Stromes

nach der Zeit. Der Übersichtlichkeit halber haben wir den Vorfaktor $(\frac{\mu\mu_0}{4\pi})$ mit α abgekürzt und die Gegeninduktivität

$$L^{ps} = \alpha \int_{\lambda^{(s)}} \int_{\lambda^{(p)}} \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (12)$$

und die Volumengegeninduktivitäten

$$L_n(\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_{n-1}) = \alpha \int_{\lambda^{(s)}} \int_{\lambda^{(p)}} \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0| \cdots |\vec{r}_{n-1} - \vec{r}_n|} \quad (13)$$

eingeführt. Wie man sofort sieht, ist (11) eine nichtlineare Reihe in dem zu bestimmenden Modellparameter σ . Für manche Feldberechnungen ist es günstiger, vom ungestörten Primärfeld

$$\vec{a}^{(p)}(\vec{r}, t) = \alpha I^{(p)} \int_{\lambda^{(p)}} \frac{d\vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (14)$$

statt vom eingepägten Strom $I^{(p)}$ auszugehen. Diskretisiert erhält man schließlich für (11) in linearer Näherung

$$T_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_0 - U_0^{ps}}{\omega} = - \sum_j \tilde{\sigma}(\vec{r}_j) V_j \int_{\lambda_k^{(s)}} \frac{d\vec{r}_k \cdot \vec{a}_{0(k)}^{(p)}(\vec{r}_j, t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \quad (15-a)$$

und in quadratischer

$$T_k = - \sum_j V_j \tilde{\sigma}(\vec{r}_j) \left(\int_{\lambda_k^{(s)}} \frac{d\vec{r}_k \cdot \vec{a}_{0(k)}^{(p)}(\vec{r}_j, t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} - i \sum_{j_1} V_{j_1} \tilde{\sigma}(\vec{r}_{j_1}) \int_{\lambda_k^{(s)}} \frac{d\vec{r}_k \cdot \vec{a}_{0(k)}^{(p)}(\vec{r}_{j_1}, t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j| |\vec{r}_j - \vec{r}_{j_1}|} \right). \quad (15-b)$$

Dabei sind wir von einer harmonischen Anregung

$$\vec{a}^{(p)}(\vec{r}_n, t) = \vec{a}_0^{(p)}(\vec{r}_n) \exp i\omega t \quad (16)$$

ausgegangen. $\tilde{\sigma}$ bezeichnet die mit dem Faktor α skalierte Leitfähigkeit σ . Der zusätzliche Index k numeriert die jeweilige geometrische Spulenordnung relativ zum Untergrund. Es gibt nun eine Vielzahl verschiedener Spulenkonfigurationen bzw. Primärfeldverteilungen, die für eine tomographische Aufnahmetechnik geeignet erscheinen, aber nur wenige erweisen sich als erfolgversprechend, worauf wir im nächsten Abschnitt näher zu sprechen kommen.

3 Diskussion

Für das Verständnis der Tomographie ist von entscheidender Bedeutung, sich über das ihr zugrundeliegende geometrische Rekonstruktionsprinzip Klarheit

zu verschaffen. Rein empirisch wird man nämlich feststellen, daß desto kontrastreichere Bilder entstehen, desto lokalisierter das Primärfeld ist. Was verbirgt sich hinter dem Begriff lokalisiertes Feld, und wie läßt sich der Effekt verstehen? Wir meinen damit einfach eine Feldkonfiguration, mit der es möglich ist, Informationen bevorzugt aus eingeschränkten Teilgebieten von M_2 zu gewinnen, so daß leitende Bereiche nur dann eine merkliche Meßantwort liefern, wenn sie von dem räumlich begrenzten Primärfeld getroffen werden, mit anderen Worten, die Einlagerungen exakt lokalisierbar sind. Einer vollkommen ähnlichen Situation steht man in der Seismik bzw. der Ultraschalltomographie gegenüber, wo sich die Meßsignale strahlenförmig ausbreiten. So kann es z.B. passieren, daß ein Strahl auf ein Hindernis stößt und absorbiert wird, während ein paralleler, aber weit genug entfernter Strahl daran vorbeigeht und keine Veränderung erleidet. Das Kernproblem besteht demzufolge darin, die Theorie so zu konstruieren, das in ihr ein Strahl- oder Beam-Konzept Platz findet, in der sich das Testfeld und damit das Meßsignal räumlich begrenzen läßt. Daß ein derartiges Prinzip auch in der Induktionsfeldtomographie einführbar ist, wollen wir am linearen Inversionsproblem demonstrieren.

Um das lineare Gleichungssystem (15-a), das wir in der Form

$$T_k = \sum_j G_{kj} \tilde{\sigma}(\vec{r}_j), \quad G_{kj} = -V_j \int_{\lambda_k^{(s)}} \frac{d\vec{r}_k \cdot \vec{a}_{0(k)}^{(p)}(\vec{r}_j, t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \quad (17)$$

schreiben, im Rahmen der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate zu lösen, geht man bekanntlich zu den Gleichungen

$$\sum_k T_k G_{kq} = \sum_j M_{qj} \tilde{\sigma}(\vec{r}_j), \quad M_{qj} = \left(\sum_i G_{ki} G_{ij} \right) \quad (18)$$

bzw.

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T} = \mathbf{M} \tilde{\sigma} \quad (19)$$

über. Der Kontrast der Tomogramme wird bestimmt durch das Verhalten der Singulärwerte der Matrix \mathbf{M} bei einer entsprechenden Singulärwertzerlegung (SVD). Ein schnelles Verschwinden der Singulärwerte führt zu schlechtem Kontrast, da der Rang der Matrix \mathbf{M} effektiv nicht größer als die Anzahl der wesentlich von Null verschiedenen Singulärwerte sein kann, d.h. die Dimension des Kernes der Abbildung \mathbf{M} wird sehr groß und damit die Dimension des Restvektorraumes, der die eigentliche Abbildung vermittelt, sehr klein. Ein solches Verhalten zeigen insbesondere alle Dipol-Dipol-Anordnungen. Deshalb stößt man in der Literatur auf die weit verbreitete Meinung, daß magnetische Tomographieverfahren zur Bodenerkundung nur wenig oder überhaupt nicht geeignet sind. Gestützt werden jene Auffassungen obendrein durch das aus der Magnetik bekannte Prinzip der äquivalenten Schicht. Wir werden jedoch nachweisen, daß lokalisierte Primärfeldverteilungen, wie z.B. magnetische Flußschläuche, durchaus als Testfelder geeignet sind, da sie im Vergleich zu den gewohnten Dipolanordnungen ein völlig anderes Singulärwertspektrum aufweisen. Zu diesem Zweck müssen wir die Gegeninduktivitäten

L^{ps} und L_1 bzw. das Integral

$$L_1' = \int_{\lambda_k^{(s)}} \frac{d\vec{r}_k \cdot \vec{a}_{0(k)}^{(p)}(\vec{r}_j, t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \quad (20)$$

für die uns interessierenden Anordnungen bestimmen. Der Kürze halber verzichten wir auf eine detaillierte Herleitung der Ergebnisse. So erhält man z.B. für eine Dipol-Dipol-Anordnung, bestehend aus einer kleinen Sende- und Empfangsspule, die weit entfernt von den Einlagerungen angebracht sind (siehe Abb. 1), als Gegeninduktivitäten L^{ps} und L_1 die Formeln

$$L^{\text{ps}} = \frac{\mu\mu_0\pi r_1^2 r_2^2 N_1 N_2}{8l^3} \{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)[2 - 3(\vec{n} \cdot \vec{e}_0)^2] - 3(\vec{n} \cdot \vec{e}_1')(\vec{n} \cdot \vec{e}_2')\} \quad (21)$$

und

$$L_1 = \frac{\pi\mu\mu_0 r_1^2 r_2^2 N_1 N_2}{4l_1^2 l_2^2} \{(\vec{n}_1 \cdot \vec{e}_1')(\vec{n}_2 \cdot \vec{e}_2') + (\vec{n}_1 \cdot \vec{e}_0)(\vec{n}_2 \cdot \vec{e}_0)(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)\}. \quad (22)$$

In (21) und (22) bedeuten \vec{e}_1 und \vec{e}_2 die Normalen auf den Querschnittsflächen der Spulen Sp1 und Sp2. Die restlichen Vektoren \vec{e}_0 , \vec{e}_1' und \vec{e}_2' werden als Spatprodukte definiert, nämlich $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 \times \vec{e}_0$ bzw. $\vec{e}_2' = \vec{e}_2 \times \vec{e}_0$. Die Größen l_1 und l_2 bezeichnen die Abstände zwischen den Spulen Sp1 bzw. Sp2 zum Aufpunkt P in M2, und \vec{n}_1 und \vec{n}_2 seien die zugehörigen Normalenvektoren in Richtung P. l ist der Abstand zwischen beiden Spulen und \vec{n} der entsprechende Normalenvektor in dieser Richtung. N_1 und N_2 sind die Windungszahlen der Spulen.

Von Wichtigkeit sind nun die beiden Spezialfälle, in denen die Vektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 parallel liegen oder senkrecht aufeinander stehen. Im ersten Fall vereinfachen sich (21) und (22) zu

$$L^{\text{ps}} = \frac{\mu\mu_0\pi r_1^2 r_2^2 N_1 N_2}{8l^3} (2 - 3 \sin^2(\alpha)), \quad \alpha = \angle(\vec{n}, \vec{e}) \quad (23)$$

und

$$L_1 = \frac{\pi\mu\mu_0 r_1^2 r_2^2 N_1 N_2}{4l_1^2 l_2^2} \{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) + (\vec{n}_1 \cdot \vec{e})(\vec{n}_2 \cdot \vec{e})\}, \quad (24)$$

wobei $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{e}$ gesetzt wurde und α den Winkel zwischen \vec{n} und \vec{e} darstellt. Im zweiten Fall ergeben sich die Beziehungen

$$L^{\text{ps}} = \frac{3\mu\mu_0\pi r_1^2 r_2^2 N_1 N_2}{8l^3} (\vec{n} \cdot \vec{e}_1)(\vec{n} \cdot \vec{e}_2) \quad (25)$$

und

$$L_1 = \frac{\pi\mu\mu_0 r_1^2 r_2^2 N_1 N_2}{4l_1^2 l_2^2} (\vec{n}_1 \cdot \vec{e}_2)(\vec{n}_2 \cdot \vec{e}_1), \quad (26)$$

d.h. wenn die Verbindungslinie beider Spulen innerhalb einer der Querschnittsflächen von Sp1 oder Sp2 liegt, ist $L^{\text{ps}} = 0$, was man auch erwartet, ganz im Gegensatz zur Volumengegeninduktivität (26), die nicht verschwindet. Eine derartige Spulenanordnung eignet sich ausgezeichnet zur

Störspannungsunterdrückung des Primärfeldes, da nur noch das Bodensignal registriert wird. Ganz ähnliche Beziehungen gewinnt man für den Fall, daß die Primärspule Sp1 eine große Schleife ist, die sowohl die Meßspule Sp2 als auch die zu erkundenden Einlagerungen zentral umschließt. Die zu (21) und (22) äquivalenten Formeln haben die Gestalt

$$L^{ps} = \frac{\mu\mu_0\pi r_2 N_1 N_2}{2r_1^2} (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \quad (27)$$

und

$$L_1 = \frac{\pi\mu\mu_0 l_1 r_2^2 N_1 N_2}{4l_2^2 r_1} \{(\vec{n}_1 \cdot \vec{e}'_1)(\vec{n}_2 \cdot \vec{e}'_2) + (\vec{n}_1 \cdot \vec{e}_0)(\vec{n}_2 \cdot \vec{e}_0)(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)\}. \quad (28)$$

Es sei noch einmal deutlich darauf hingewiesen, daß letztere beiden Formeln nur nahe des Mittelpunktes von Sp1 richtig sind. Die Symbole in (27) und (28) entsprechen denen in (21) und (22). Bei einem Vergleich von (22) und (28) fällt auf, daß sich beide Gleichungen nur im Vorfaktor unterscheiden, die geometriebedingte Winkelabhängigkeit dagegen ist identisch. Allerdings fällt die Induktivität L_1 nur quadratisch mit dem Abstand l_2 , im Gegensatz zu (21), wo sie mit der dritten Potenz verschwindet. Wir werden jedoch sehen, daß Dipolanordnungen, egal in welcher Ausführung sie auftreten, für tomographische Aufnahmen sehr schlecht geeignet sind. Bessere Resultate liefern z.B. magnetische Flußschläuche. Angenommen, es sei möglich, einen Flußschlauch so zu erzeugen, daß innerhalb eines zylinderförmigen Gebietes die magnetische Induktion \vec{B} konstant und außerhalb nahezu Null wäre. Für eine solche Spulen-Flußschlauchkonfiguration (siehe Abb. 4), in der zusätzlich der Einheitsvektor \vec{q} der Flußschlauchachse senkrecht auf dem Normalenvektor \vec{e} der Querschnittsfläche der Meßspule steht, wodurch eine direkte Überkopplung des Primärfeldes \vec{B} verhindert wird, läßt sich das Integral L'_1 in Dipolnäherung exakt bestimmen. Eine längere Rechnung führt uns zum Ergebnis

$$L'_1 = \frac{B_0 R_0^2 R}{2l^2 (R^2 + R_0^2/4)} (\vec{n} \cdot \vec{q}) \sin \phi. \quad (29)$$

In (29) setzen wir voraus, daß sich der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Meßspule befindet und daß das Bezugssystem durch die drei Basisvektoren $\vec{e}_0 = \vec{e} \times \vec{q}$, \vec{e} und \vec{q} gebildet wird. ϕ ist der Winkel zwischen \vec{e} und dem Projektionsvektor \vec{x}' des Aufpunktvektors \vec{x} der Länge l in die (\vec{e}_0, \vec{e}) -Ebene, R der Abstand des Aufpunktes von der Flußschlauchachse und R_0 der Radius des Flußschlauches. Bewegt man jetzt einen kleinen Testkörper innerhalb der (\vec{e}_0, \vec{q}) -Ebene, so springt ϕ beim Durchgang durch die Flußschlauchachse un stetig von -90 zu $+90$ Grad, woraus für L'_1 die Formel

$$L'_1 = \frac{B_0 R_0^2 |\sin(2\alpha)|}{4l((l \sin \alpha)^2 + R_0^2/4)} \operatorname{sgn} \phi, \quad \alpha = \angle(\vec{n}, \vec{q}) \quad (30)$$

folgt. Um zu entscheiden, welche der vorgeschlagenen Anordnungen im Sinne des oben dargelegten Beam-Konzeptes für eine tomographische Bearbeitung geeignet ist, muß man sich, wie bereits erwähnt, das Singulärwertspektrum

der zugehörigen Matrix $\tilde{\mathbf{G}}$ aus (19) anschauen. Zur Vereinfachung der Situation wollen wir die Integrale

$$G_{kj} = -I_0^{(p)} V_j L_1^{(k)}(\vec{r}_j) = -I_0^{(p)} \alpha V_j \int_{\lambda_k^{(s)}} \int_{\lambda_k^{(p)}} \frac{d\vec{r}_k \cdot d\vec{r}_1}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j| |\vec{r}_j - \vec{r}_1|} \quad (31)$$

bzw.

$$G_{kj} = -V_j \int_{\lambda_k^{(s)}} \frac{d\vec{r}_k \cdot \vec{a}_{0(k)}^{(p)}(\vec{r}_j, t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \quad (32)$$

nur für ein zweidimensionales Meßfeld mit 7x6 Zellen auswerten.

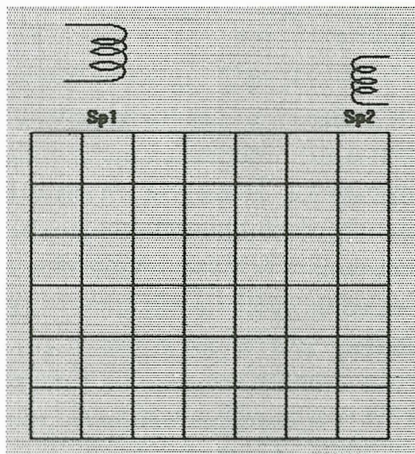


Abb. 2: 2-dim. Meßfeld mit 42 Meßzellen

Im Diagramm Abb. 3 sind die Singulärwertspektren verschiedener Dipol-Dipol-Anordnungen im Vergleich zur Flußschlauchkonfiguration abgebildet. Die Abszisse numeriert den jeweiligen Singulärwert n und die Ordinate seine relative Größe. Die Kurve „Dipol-Dipol oben“ zeigt die Singulärwerte für eine Sender-Empfänger-Kombination, in der beide Spulen jeweils in konstanter Höhe über der Meßebe gehalten werden. Arretiert man die Spulen in diskreten Schritten genau oberhalb der einzelnen Meßspalten, so gibt es 49 derartige Stellungen. Die Kurve „Dipol-Dipol oben/unten“ unterscheidet sich von letzterer Anordnung nur dadurch, daß die eine der beiden Spulen auf einer Horizontalen oberhalb und die zweite auf einer anderen Horizontalen unterhalb der Meßebe bewegt werden. Wie man sieht, verschwinden die Singulärwerte für $n > 7$ bzw. $n > 14$ fast vollständig. Die Aufstellungshöhen der Spulen spielen dabei qualitativ gesehen keine Rolle. Beide Kurven spiegeln eindrucksvoll das bekannte Äquivalenzprinzip der Magnetik wider, das besagt, daß eine reale Permeabilitätsverteilung im Inneren eines Körpers durch eine fiktive oberflächennahe Schichtbelegung simuliert werden kann. Eine derartige Mehrdeutigkeit widerspricht aber dem Tomographieprinzip, d.h. mit derartigen Meßkonfigurationen ist tatsächlich keine Tomographie möglich. Um zu testen, ob sich die Situation vielleicht durch ein Schwenken der Spulenachse der Sendespule und damit durch ein richtungsorientiertes

Scannen der Meße ebene verbessern läßt, wurde die Kurve „Drehdipol-Dipol“ berechnet, bei der sich die Sendespule genau in der Mitte oberhalb der Meße ebene befindet und in 7 diskreten Winkelschritten im Bereich zwischen 0 und 180 Grad gedreht wird, während man die Empfangsspule unterhalb der Spalten des Meßegebietes positioniert. Die entsprechenden Singulärwerte fallen jedoch noch stärker als die der Anordnung „Dipol-Dipol oben“ ab. Auch ein vollständiges Umfahren des gesamten Meßegebietes (Kurve „Dipol-Dipol oben/unten rechts/links“) bringt keinen Fortschritt. Im Gegensatz dazu liefert eine Flußschlauchanordnung, wie sie in Abb. 4 zu sehen ist, ein völlig anderes Bild. Die Singulärwerte konvergieren zwar langsam gegen Null, jedoch in einer Weise (Abb. 3), daß selbst der 42. Singulärwert noch nennenswert von Null verschieden ist, d.h. das Gleichungssystem (19) ist sehr gut konditioniert. Der Grund dafür ist klar. Während in den ersten vier Fällen das Dipolfeld das Meßegebiet wenig lokalisiert überstreicht und die Meßeantwort durch die oben erwähnte fiktive Oberflächenschicht simuliert werden kann, ist dies im letzten Fall auf Grund der Selektivität des Testfeldes nicht mehr möglich. Um das Gesagte durch ein real gemessenes Tomogramm zu erhärten, haben wir eine Kugel nach dem Flußschlauchprinzip zweidimensional tomographiert. Dabei konnten wir die entsprechenden Winkelabhängigkeiten, die durch die Gleichung (30) vorausgesagt werden, voll bestätigen. Insbesondere wechselt das Meße signal beim Durchgang durch die Flußschlauchachse das Vorzeichen. Die Kugel befand sich auf einer Kreisscheibe ungefähr im halben Radius vom Mittelpunkt entfernt. Als Inversionsverfahren diente ein SIRT-Algorithmus, wie man ihn üblicherweise in der Ultraschalltomographie verwendet. Die Lage und die ungefähre Größe der Kugel werden durch das Tomogramm (Abb. 4) recht gut wiedergegeben.

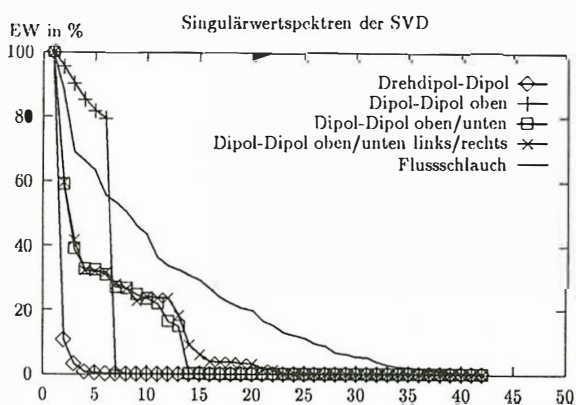


Abb. 3: Singulärwertzerlegung verschiedener Meße anordnungen

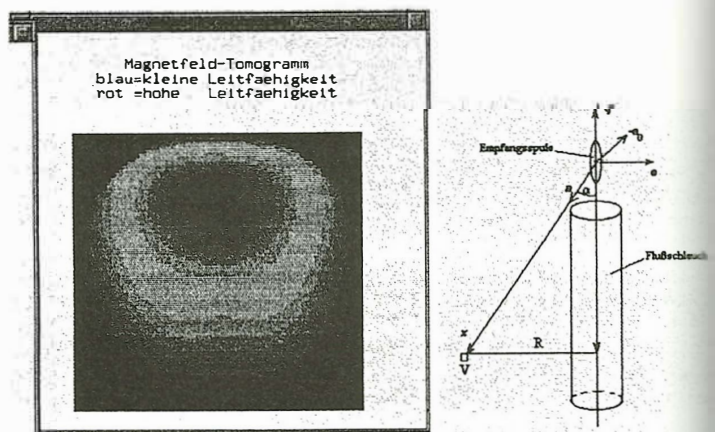


Abb. 4: Flußschlauchtomogramm einer Kugel, Flußschlauchanordn

Literatur

- [1] E. Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik (Teil I): VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1989