

Kenngrößen des Impedanztensors

Christof Peter, Göttingen

1 Einleitung

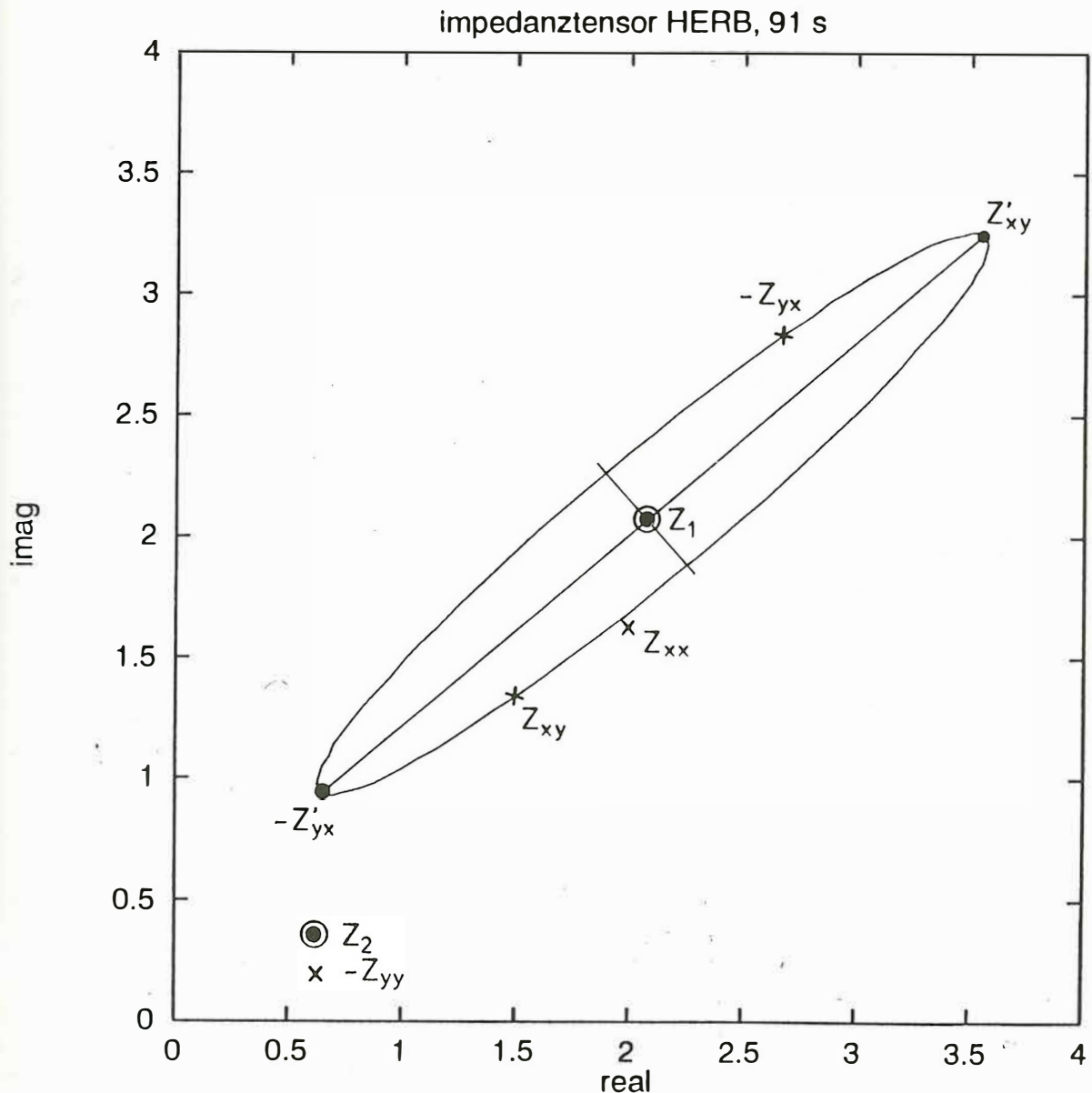


Abb. 1: Impedanztensor für 91 s der Station HERB bei Herborn im Rheinischen Schiefergebirge. Der Punkt Z_1 ist gerade im Mittelpunkt der Ellipse die Z_{xy} und $-Z_{yx}$ beschreiben, Z_2 ist der Mittelpunkt der Ellipse von Z_{xx} und Z_{yy} . Z'_{xy} und Z'_{yx} sind die Extrempunkte der Nebendiagonalen.

Bei der Handhabung des magnetotellurischen Impedanztensors \underline{Z} tritt immer wieder die Frage auf, wie man die acht Werte des Tensors angemessen berücksichtigt. Zunächst stellt der Tensor vier Punkte in der komplexen Ebene dar (Abbildung 1). Das Koordinatensystem, in dem der Tensor dargestellt wird, ist willkürlich gewählt. Meistens sind wegen des einfachsten Meßaufbaus die Achsen entlang geomagnetisch Nord und Ost gewählt. Bei Drehung des Koordinatensystems, in dem der Tensor dargestellt wird, mit der Rotationsmatrix

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschreiben die vier Punkte des rotierten Tensors $\underline{Z}' = \underline{D} \cdot \underline{Z} \cdot \underline{D}^{-1}$ bei der Rotation drei gleichartige Ellipsen, und zwar so, daß nach 90° Drehung

$$Z'_{xy} = -Z_{yx}, \quad Z'_{yx} = -Z_{xy}, \quad Z'_{xx} = Z_{yy}, \quad Z'_{yy} = Z_{xx}$$

wird. Die Mittelpunkte der drei Ellipsen sind

$$Z_1 = \frac{Z_{xy} - Z_{yx}}{2}, \quad Z_2 = \frac{Z_{xx} + Z_{yy}}{2} \quad \text{und} \quad -Z_1.$$

Der Tensor ist also mit *einer* Ellipse (z.B. durch Mittelpunkt, Hauptachsen und Neigungswinkel) und einem weiteren Punkt bis auf das Koordinatensystem vollständig bestimmt (Abbildung 1). Das Koordinatensystem kann z.B. durch den Rotationswinkel, bei dem die Hauptachsen extremal werden, festgelegt werden.

Die Maximierung der Länge der großen Hauptachse führt auf den Winkel

$$\tan \alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\operatorname{Re}(Z_3 Z_4^*)}{|Z_4|^2 - |Z_3|^2},$$

wobei $Z_3 = Z_{xy} + Z_{yx}$ und $Z_4 = Z_{xx} - Z_{yy}$. Die Länge der kleinen Achse wird dabei minimal. Dieser Winkel entspricht gerade dem Swiftwinkel (Minimierung von $|Z_{xx}|^2 + |Z_{yy}|^2$). Ohne weitere Annahmen über die Struktur, die den Impedanztensor bestimmt, ist er dem Tensor als charakterisierende Größe eigen.

2 Parameter

Wie man sofort sieht, ist die Länge der großen Achse $|Z'_3|$, die der kleinen $|Z'_4|$. Damit ist die Elliptizität

$$\beta = \frac{|Z'_4|}{|Z'_3|}.$$

Das Verhältnis der Beträge der beiden Ellipsenmittelpunkte ist die Skewness, hier gehen wie auch bei der Elliptizität alle vier Tensorelemente, aber in der Form der rotationsinvarianten Größen Z_1 und Z_2 ein.

$$s = \frac{|Z_2|}{|Z_1|}.$$

Bei starker Anisotropie dominieren allerdings die großen Anteile den Quotienten. Das kann man vermeiden, betrachtet man

$$xskew = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{|Z'_{xx}|}{|Z'_{xy}|} + \frac{|Z'_{yy}|}{|Z'_{yx}|} \right).$$

Hier wird das Verhältnis der zu jeweils einer E-Feldkomponente gehörigen Tensorelemente betrachtet. Der Faktor $1/2$ dient lediglich dazu, die Vergleichbarkeit zur Skewness s zu erreichen.

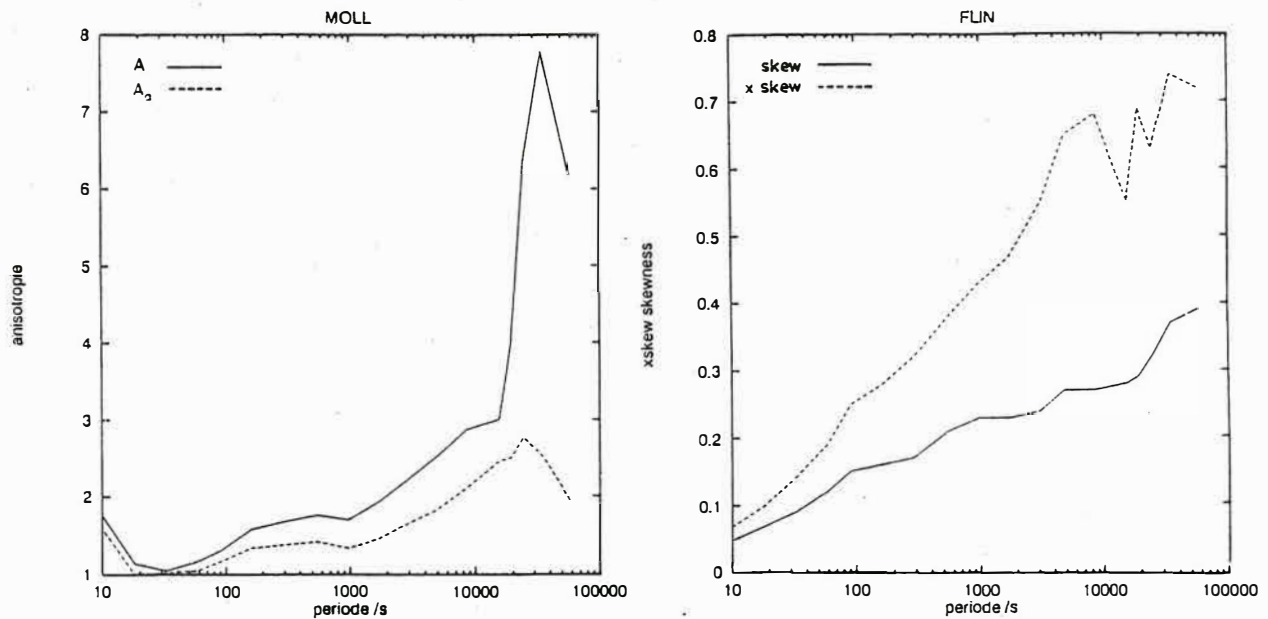


Abb. 2: Rechts: Xskewness und Skewness der Station FLIN. Für die große Anisotropie stellt die Xskewness ein sensibleres Maß für die Mehrdimensionalität dar.
 Links: Anisotropie für MOLL. Die allgemeinere Anisotropie A_a ist etwas glatter, zeigt aber im Prinzip den gleichen frequenzabhängigen Kurvenverlauf

Ein Vergleich der beiden Skewnesses ist in Abbildung 2 für die Station FLIN, die eine hohe Anisotropie hat, zu sehen. Die physikalische Struktur des Untergrundes spiegelt sich in der Ellipse wider: ist die Elliptizität nahe 1, so ist der Impedanztensor gleichmäßig besetzt, der Tensor ist 3-dimensional, was auf sehr komplizierten Untergrund schließen läßt. Für einen idealen 1- oder 2-dimensionalen Untergrund wird die Elliptizität wie auch die Skewness 0, die Ellipse ist linear polarisiert, der Tensor ist 2-dimensional. Liegt der Mittelpunkt zusätzlich noch beim Ursprung des Koordinatensystems, ist der Tensor 1-dimensional. Liegt der 2-dimensionale Fall vor, so liegen alle Informationen in den Nebendiagonalelementen, deren Verhältnis durch die Anisotropie ausgedrückt wird

$$A = \frac{|Z'_{xy}|}{|Z'_{yx}|}$$

Wollte man sich bei der Anisotropie nicht nur auf die Nebendiagonalen beschränken, sondern die Anisotropie von den zu jeweils einer Komponente des E-Feldes gehörigen Elementen betrachten, so müßte man eine allgemeinere Anisotropie einführen, die die obige Definition für den 2-dimensionalen Fall als Spezialfall enthält:

$$A_a = \frac{|Z'_{xx}| + |Z'_{xy}|}{|Z'_{yx}| + |Z'_{yy}|}$$

Ein Beispiel für die Anisotropie der Station MOLL ist in Abbildung 2 dargestellt.

3 Widerstandsableitung

Doch was bedeuten nun die Elemente des vollbesetzten Tensors? Falls die Hauptdiagonalen in der Größe des Datenfehlers liegen, ist die Zuordnung zu E- und B-Polarisation einfach. Es liegen zwei scheinbare Widerstände und zwei Phasen vor, die jeweils die Struktur in Feldern

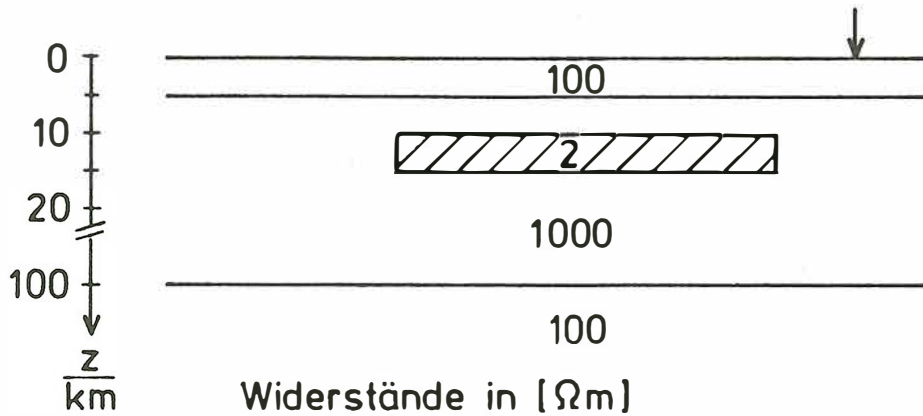


Abb. 3: 2-dimensionales Modell zum Vergleich der Impedanztensorzerlegung

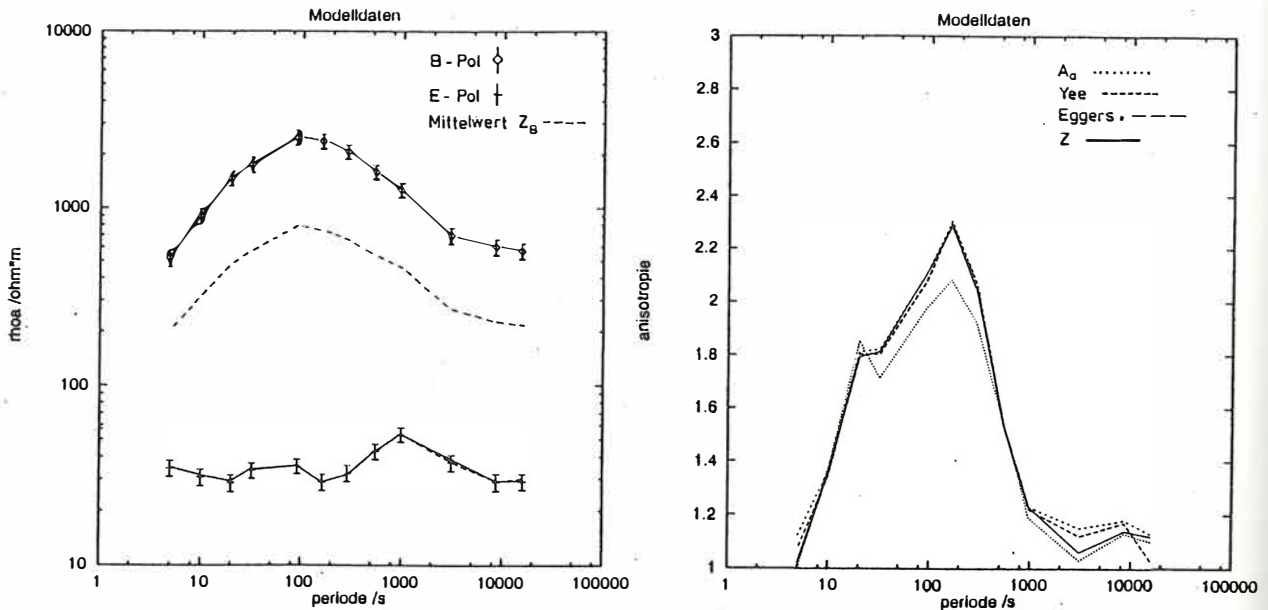


Abb. 4: Links: ρ_a Kurven der Modelldaten. Die Kurven der verschiedenen Methoden stimmen für E- und B-Polarisation fast überein, so daß sie nicht mehr unterschieden werden können. Rechts: Anisotropie aus den Nebendiagonalen, den Eggers Eigenwerten, den Yee und Paulson Eigenwerten und A_a . Die Kurven sind kaum zu unterscheiden. Nur die A_a Kurve hat ein deutlich kleineres Maximum, da sie sehr sensibel auf die Hauptdiagonalen reagiert.

unterschiedlicher Richtung beschreiben. Für eine 1-dimensionale Näherung hat Berdichevsky eine Mittelung der Nebendiagonalen vorgeschlagen

$$Z_B = \frac{Z_{xy} - Z_{yx}}{2},$$

die aber wirklich nur bei 1-dimensionalen Strukturen mit kleiner Anisotropie sinnvoll ist (Abbildung 4).

Eggers und später Yee and Paulson schlugen eine Eigenwertzerlegung des Impedanztensors vor. Eggers bildete komplexe Pseudoeigenwerte $\lambda_{1,2}$ des auf Hauptachsen rotierten Tensors

$$\det \begin{pmatrix} Z'_{xx} & Z'_{xy} - \lambda_{1,2} \\ Z'_{yx} + \lambda_{1,2} & Z'_{yy} \end{pmatrix} = 0$$

Yee and Paulson nutzten reelle rotationsinvariante Eigenwerte $\sigma_{1,2}^2$

$$\det(\underline{\underline{Z}}^+ \underline{\underline{Z}} - \sigma_{1,2}^2 \cdot \underline{\underline{I}}) = 0$$

Um die verschiedenen Möglichkeiten aus der Zerlegung des Impedanztensors zu vergleichen, habe ich $Z'_{xy}, Z'_{yx}, Z_B, \lambda_{1,2}$ und $\sigma_{1,2}$ benutzt, um Anisotropie und scheinbaren Widerstand (Abbildung 4) zu berechnen. Um auch die 'wahre' Widerstandsverteilung zu kennen, benutzte ich ein 2-dimensionales Modell mit einem eingelagerten guten Leiter, wie in Abbildung 3 zu sehen ist. Die Modelldaten wurden mit einem Fehler vom 5% belegt, mit zufälligen Hauptdiagonalelementen von 5% der Nebendiagonalen versehen, mit einer reellen Matrix verzerrt, um eine stärkere Anisotropie zu erhalten und um 30° rotiert. Wegen der reinen 2-D Struktur liefern alle Methoden fast identische gleichen ρ_a -Kurven und sind nicht mehr zu unterscheiden. Nur Z_B liegt, wie zu erwarten, in der Mitte, zeigt aber den Kurvenverlauf der großen Komponente. Durch die große Anisotropie der Impedanzen zeigt die Z_B Kurve nur noch den Verlauf der B-Polarisation, und die Form der Kurve der E-Polarisation verschwindet völlig.

4 Anwendung

Die Anwendung der verschiedenen Methoden auf Meßdaten zeigt für die Anisotropie einer Station ein weitgehend gleiches Bild. Es gibt aber insgesamt bei den von mir vermessenen Stationen drei Klassen des Kurvenverlaufs.

In Abbildung 6 sind für die drei Klassen Beispiele der Station HERB, MOLL am Rande des Leinetalgrabens und FLIN südlich des Harzes dargestellt. Die HERB-Klasse zeigt ein Maximum bei ca. 600 s, und zu langen Perioden wird die Anisotropie wieder sehr klein. Die MOLL-Klasse zeigt zunächst recht kleine Werte, zu den längeren Perioden aber einen steilen Anstieg, ein Absinken kann aus den Daten nicht abgeleitet werden. Die FLIN-Klasse scheint eine Synthese der beiden vorherigen zu sein. Sie zeigt sowohl ein Maximum bei etwa 600 s, als dann auch einen erneuten Anstieg bis zu den längsten Perioden. Während sich für das 600 s Maximum eine Erklärung durch eine anisotrop leitende Schicht in der mittleren Kruste anbietet, kann

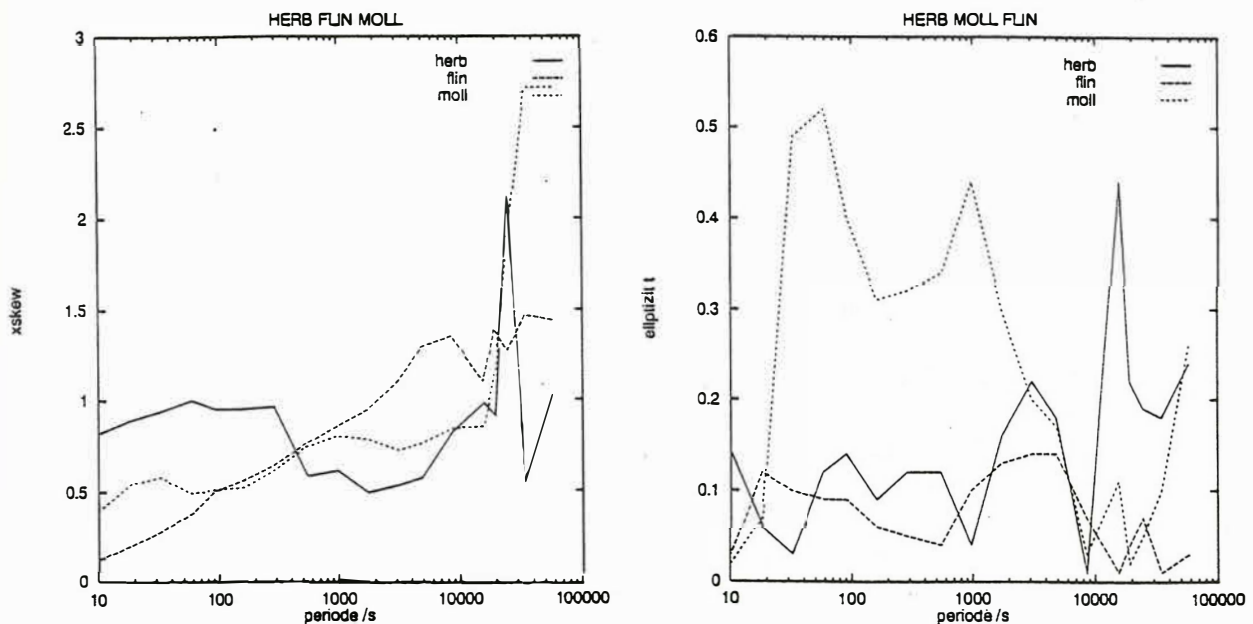


Abb. 5: Für die drei Stationstypen HERB, MOLL und FLIN Elliptizität und Skewness.

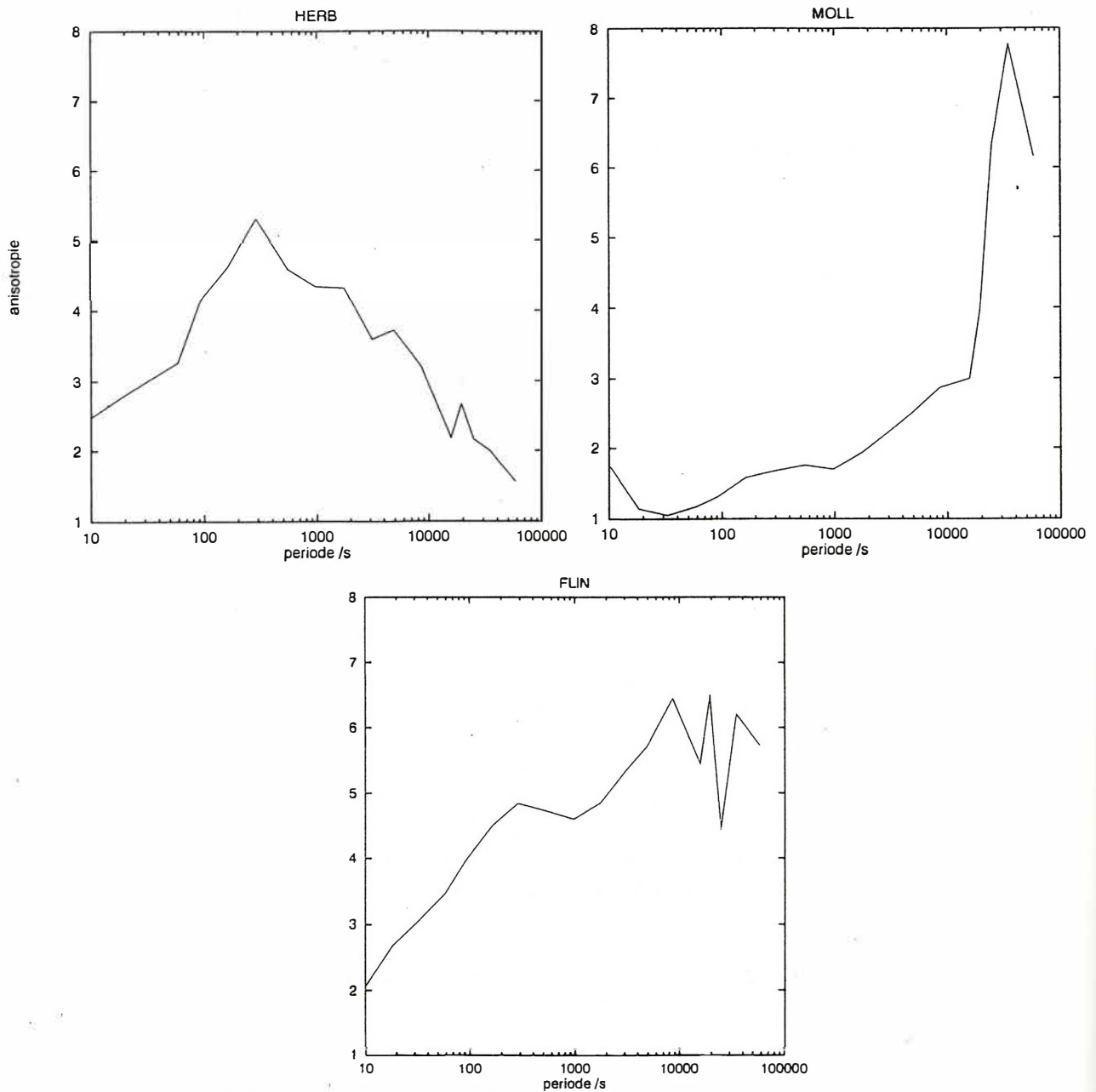


Abb. 6: Drei Klassen von Anisotropie lassen sich unterscheiden

über das Maximum bei den langen Perioden nur spekuliert werden. Interessant sind auch die Unterschiede der Verläufe von Skewness und Elliptizität in Abbildung 5. In der Skewness sind FLIN und MOLL fast gleich, HERB zeigt ein Abfallen der Skew, bei der Elliptizität springen die großen Werte von MOLL hervor (was nach Anisotropie und Skew durchaus 1-dimensional aussah). Obwohl MOLL nach den Anisotropie- und Skewnesswerten vor allem bei den kurzen Perioden eher eindimensional aussah, zeigt die Elliptizität bis über 0.5, daß dies nicht so ist. Anisotropie und Skewness sind also keineswegs ausreichend, um die Dimensionalität des Tensors zu beurteilen.

Die ρ_a -Kurven in Abbildung 7 zeigen deutlich, daß MOLL und FLIN bei längeren Perioden einen gleichen Verlauf haben, ab 100 s aber auseinandergehen. Hier wird ein sehr lokaler Einfluß bei MOLL bestimmend, vielleicht im Zusammenhang mit dem Leinetalgraben (Peter, 1994). Die Kurve von HERB hat einen völlig anderen Verlauf.

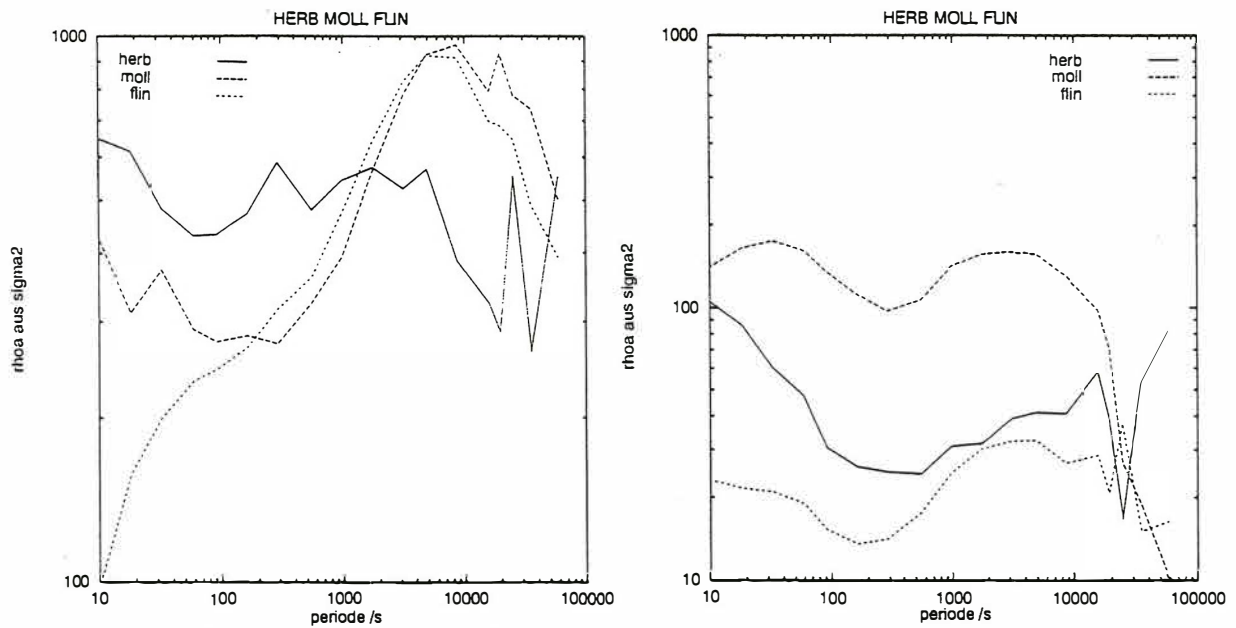


Abb. 7: Die ρ_a Kurven der MOLL und FLIN Klassen sind im Bereich großer Perioden fast identisch, HERB zeigt einen völlig anderen Verlauf.

5 Schluß

Der Impedanztensor läßt sich über verschiedene Parameter beschreiben. Der dem Tensor eigene Vorzugswinkel der Achsen der Tensorellipse vermeidet die Willkür des Koordinatensystems der Darstellung. Die Interpretation der Parameter des Impedanztensors zeigt über die gewohnten Widerstandsdarstellungen hinaus interessante Informationen. Es zeigen sich beim Vergleich vieler Stationen drei Klassen von Impedanztensoren, die sich in Elliptizität, Anisotropie und Skewness jeweils unterschiedlich verhalten. Anisotropie und Skewness alleine liefern wie z.B. bei MOLL keine sicheren Aussagen über die Dimensionalität des Tensors. Gleichartige Kurven der Parameter lassen auf gleichartige Strukturen des Untergrundes schließen.

Literaturverzeichnis

- EGGERS, D.E. An Eigenstate formulation of the magnetotelluric impedance tensor. *J. Geophys.*, 47, 1982, 1204-1214
- PETER, CH. Erdmagnetische und tellurische Variationen, beobachtet an drei Orten im Rheinischen Schiefergebirge. Diplomarbeit, Inst. für Geophysik, Göttingen, 1991
- PETER, CH. Modellinterpretation der Göttinger D-Anomalie, in diesem ETS Kolloquiumsband, Hoechst, 1994.
- PETER, CH. Die Göttinger D-Anomalie, Arbeitsstand der Untersuchung, in ETS Kolloquiumsband, Borkheide, 1992.
- YEE E, PAULSON, K.V. The canonical decomposition and its relationship to other forms of the magnetotelluric impedance tensor analysis. *J. Geophysics*, 61, 1987, 173-189