

Effekte von Gasleitungen auf MT und VLF-R Sondierungen

Dünne metallische Leiter sind in besiedelten Gebieten, wie Deutschland, in Form von Gasleitungen, Eisenbahnschienen oder Zäunen weit verbreitet. Die numerische Modellierung solcher Störkörper ist im allgemeinen sehr problematisch, aufgrund der hohen Leitfähigkeit und der sehr kleinen Querschnittsfläche. Diese Eigenschaften machen es allerdings möglich, daß der Leiter durch einen Linienstrom approximiert werden kann. Dazu werden die elektromagnetischen Felder in einen normalen und anomalen Anteil zerlegt.

$$E = E^n + E^a \quad \text{und} \quad H = H^n + H^a$$

Der normale Anteil beschreibt die einfallende ebene Welle, und der anomale Anteil besteht aus den Feldern eines im Halbraum eingebetteten Linienstromes, der den metallischen Leiter darstellt.

Es wird ein unendlich langer Leiter angenommen, somit handelt es sich um ein 2-d Problem und kann in die beiden bekannten Moden zerlegt werden. Bei der TE-Mode (E-Polarisation) werden Ströme im Leiter entlang der Streichrichtung induziert, die wie in einem Linienstrom fließen. Bei der TM-Mode (H-Polarisation) fließen die Ströme quer zum Leiter, die im Leiter in sich geschlossenen Wirbelströme erzeugen nach außen hin nur sehr geringe Effekte und können vernachlässigt werden.

Die Approximation einer Gasleitung durch einen Linienstrom ist gültig, wenn der Leiterraadius r_a gegenüber den anderen Dimensionen, wie der Abstand oder Skineindringtiefe, klein ist. Der Strom im Leiter wird durch eine Impedanzbedingung an der Oberfläche des Leiters bestimmt (Tsubota & Wait 1980, Wait & Umashankar 1978). Im ersten Schritt wird angenommen, daß es sich um einen idealen Leiter ($\sigma_a = \infty$) handelt. Dann ist das elektrische Feld im Inneren des Leiters Null und am Rand ($y = r_a, z = h$) gilt wegen der Stetigkeit der Tangentialfelder,

$$E_x^n = -E_x^a = \mathbf{k}^2 U_1 = I Z_e .$$

Für das anomale Feld wird das Potential eines Linienstromes (siehe Kasten) eingesetzt, somit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen dem äußeren antreibenden Feld E_x^n und dem im Leiter fließenden Strom, der als externe Impedanz bezeichnet wird.

$$I = \frac{E_x^n}{Z_e} \quad \text{mit} \quad Z_e = \frac{\mathbf{k}^2}{2\pi\sigma} \int_0^\infty \left[1 + \frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda} e^{-2\alpha h} \right] \cos(\lambda r_a) \frac{d\lambda}{\alpha}$$

An der Erdoberfläche kann das Integral gelöst werden, und mit der Entwicklung für kleine Argumente (Abramowitz und Stegun 9.6.11) erhält man das gleiche Ergebnis wie bei Campbell (1978)

$$Z_e = \frac{1}{\pi \sigma r_a^2} [1 - \mathbf{k} r_a K_1(\mathbf{k} r_a)] = -\frac{\mathbf{k}^2}{2\pi \sigma} [\ln(\mathbf{k} r) + \gamma - \ln 2 - \frac{1}{2}]$$

Für einen realen Leiter mit einer endlichen Leitfähigkeit kann eine zusätzliche innere Impedanz definiert werden. Da die Quellen, hier nun die anomalen Felder E_x^a , H_ϕ^a auf dem Rand außerhalb liegen, muß eine homogene Helmholtzgleichung gelöst werden. Aufgrund der Zylindersymmetrie und der endlichen Felder im Inneren ist die Lösung eine modifizierte Besselfunktion $U_i = C I_0(\mathbf{k}_a r)$. Der Strom wird nach Biot-Savart durch das Magnetfeld ersetzt.

$$Z_i = \frac{E_x^a}{I} = \frac{E_x^a}{2\pi r H_\phi^a} \Big|_{r=r_a} = \frac{-\mathbf{k}_a^2 U_i}{-2\pi r_a \sigma_a \partial_r U_i} = \frac{\mathbf{k}_a I_0(\mathbf{k}_a r_a)}{2\pi r_a \sigma_a I_1(\mathbf{k}_a r_a)} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r_a^2 \sigma_a}$$

Die beiden Impedanzen sind quasi in Reihe geschaltet und können zu einer Gesamtimpedanz addiert werden. Da es sich bei der TE-Mode um eine rein induktive Ankopplung handelt, zeigt eine Isolierung des Leiters keine Auswirkung.

Die ebene Welle, d.h. das antreibende normale Feld, gebe ich vor mit

$$E_x^n = \frac{i\omega\mu_0}{\mathbf{k}} H_y^n e^{-\mathbf{k}z} \quad \text{mit} \quad H_y^n = 2H_0.$$

In der Abbildung werden die Auswirkungen eines metallischen Leiters anhand des scheinbaren Widerstandes (normiert mit dem Halbraumwiderstand), der Phase und dem Real- und Imaginärteil des 'Tippers' dargestellt.

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = \frac{\sigma}{\omega\mu_0} \left| \frac{E_x}{H_y} \right|^2, \quad \text{Phase} \left(\frac{E_x}{H_y} \right), \quad \text{Re} \left\{ \frac{H_z}{H_y} \right\}, \quad \text{Im} \left\{ \frac{H_z}{H_y} \right\}$$

Die Kurven lassen sich auf drei Parameter reduzieren, dem Leiterradius r_a , dem Leitfähigkeitskontrast zur Umgebung σ_a/σ und der normierten Entfernung y/p mit der Skineindringtiefe $p = \sqrt{\omega\mu_0\sigma}/2$.

Der Einfluß des metallischen Leiters ist bis zu einer Entfernung von etwa zwei Skintiefen zu beobachten. Ein wichtiger Faktor ist die innere Impedanz, die die endliche Leitfähigkeit des Leiters berücksichtigt. Bei sehr niedrigen Frequenzen hat der Halbraum wieder einen größeren Einfluß. Der ideale Leiter ist offenbar eine zu extreme Annahme, die selbst bei einem Kontrast von $10^9 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ nicht erfüllt wird. Der Realteil des 'Tippers' als Induktionspfeil zeigt stets vom Leiter weg. Der imaginäre Anteil wechselt bei einer endlichen Leitfähigkeit sein Vorzeichen.

Literatur

Abramowitz, M. & Stegun, I.A., 1970. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.

Felder eines Linienstromes in einem homogenen Halbraum

Darstellung der 2-dimensionalen Felder ($\partial_x \dots \equiv 0$) durch ein Vektor- bzw. Hertz-Potential $U(y, z)$

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \nabla \times \underline{A} \\ \underline{A} &= \sigma U \hat{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} -\mathbf{k}^2 U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \partial_z U \\ -\sigma \partial_y U \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}^2 = i\omega\mu_0\sigma$$

Zur Beschreibung des Quellfeldes $\underline{I} = I\hat{x}$ an der Stelle $(x, 0, h)$ wird im Vollraum die inhomogene Helmholtzgleichung durch eine 2-d Fourier-Transformation gelöst; mit $\alpha^2 = \lambda^2 + \mathbf{k}^2$, $\partial_{xx}^2 \xrightarrow{FT} -\lambda^2$:

$$[\partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2 - \mathbf{k}^2] \sigma U(y, z) = -I \delta(y) \delta(z - h) \quad \xrightarrow{FT} \quad \sigma \tilde{U}(\lambda, \gamma) = \frac{I}{\gamma^2 + \alpha^2} e^{-i\gamma h}$$

Die Rücktransformation (Gradstein 3.354.5 und 3.961.2), hier eine Kosinustransformation da der Kernel eine gerade Funktion ist, ergibt das Potential des Linienstromes im Vollraum

$$U(y, z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_0^\infty e^{-\alpha|x-h|} \cos(\lambda y) \frac{d\lambda}{\alpha} = \frac{I}{2\pi\sigma} K_0[\mathbf{k}\sqrt{y^2 + (z-h)^2}]$$

Für den Halbraum werden die Randbedingungen an der Erdoberfläche mit Transmissions- und Reflektionskoeffizienten erfüllt.

$$\text{im Lufthalbraum } z < 0: \quad U_0 = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_0^\infty T e^{-\alpha h} e^{\lambda z} \cos(\lambda y) \frac{d\lambda}{\alpha}$$

$$\text{im Halbraum } 0 < z < h: \quad U_1 = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_0^\infty [e^{\alpha(z-h)} + R e^{-\alpha(z+h)}] \cos(\lambda y) \frac{d\lambda}{\alpha}$$

$$\text{Stetigkeit von } E_x \text{ und } H_y \text{ bei } z = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda}, \quad T = \frac{2\alpha}{\alpha + \lambda}$$

Die Felder des Linienstromes an der Erdoberfläche sind:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu_0 I}{2\pi} 2 \int_0^\infty \frac{1}{\alpha + \lambda} e^{-\alpha h} \cos(\lambda y) d\lambda \\ H_y &= \frac{I}{2\pi} 2 \int_0^\infty \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} e^{-\alpha h} \cos(\lambda y) d\lambda \\ H_z &= \frac{I}{2\pi} 2 \int_0^\infty \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} e^{-\alpha h} \sin(\lambda y) d\lambda \end{aligned}$$

Campbell, W.H., 1978. Induction of auroral zone electric current within the Alaska pipeline, *Pageoph*, **116**, 1143-1173.

Gradstein, I.S. & Rysik, I.M., 1981. *Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln*, Harri Deutsch, Thun.

Tsubota, K. & Wait, J.R., 1980. The frequency and the time-domain response of a buried axial conductor, *Geophysics*, **45**, 941-951.

Wait, J.R. & Umashankar, K.R., 1978. Analysis of the earth resistivity response of buried cables, *Pageoph*, **117**, 711-742.

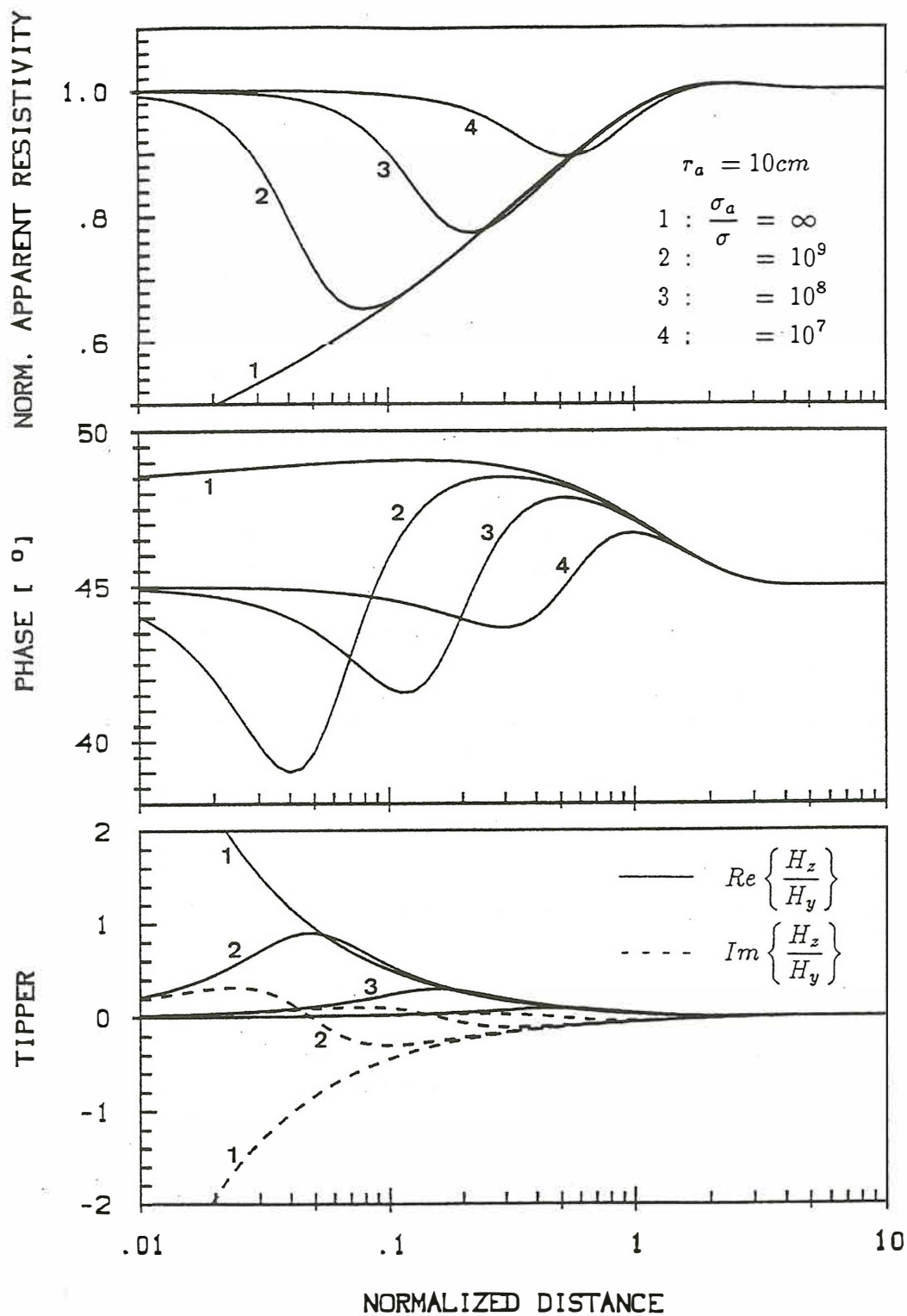


Abb.: Auswirkung eines idealen und realen Leiters (Metall $10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$) in einem 100, 10, $1\Omega\text{m}$ Halbraum auf den scheinbaren Widerstand, die Phase und den 'Tipper' als Funktion der Entfernung, normiert auf die Skineindringtiefe: $r/p = \sqrt{\omega\mu_0\sigma\tau^2/2}$.