H. Rodemann, NLfB, Hannover

Einige Diskretisierungs-Effekte bei Modellrechnungen zur Geoelektrik nach der Methode der finiten Differenzen

Wenn man Modellrechnungen mit finiten Differenzen für die Geoelektrik durchführt (oder für andere Methoden mit Stromquellen), findet man einige Fehler im Vergleich mit analytischen Lösungen.

Die zu diskretisierende 3-D-Differentialgleichung ist

$$\operatorname{div} (\sigma * \operatorname{grad} V) = - \operatorname{div} j_{p}$$

mit σ = elektrische Leitfähigkeit
V = elektrisches Potential
j_{p} = primäre Stormdichte.

Einige Diskretisierungs-Effekte werden im folgenden diskutiert. Dabei werden Fehler-Verteilungen, die aus Standard-Diskretisierungen mit 6 Nachbarn folgen, denjenigen gegenübergestellt, die sich aus einer Kombination der 26-Nachbar-Formel mit 6-Nachbar-Diskretisierungen ergeben. Hierbei werden die 6-Nachbar-Formeln nur verwendet, wenn the Leitfähigkeit lokal inhomogen ist, oder wenn die Gitterabstände lokal nicht-äquidistant sind. In den meisten Fällen zeigt diese Kombination eine Reduktion des maximalen Fehlers um einen Faktor von 5 bis 10. Bei den Rechnungen werden die Punkte als "Nichtwerte" verwendet, bei denen der Betrag des analytischen Potentials kleiner als ein bestimmter Wert ist. Meistens wurde der Wert von 1 mV für diese Grenze verwendet. Dabei wurde für die Stromstärke bei jeder Elektrode der Wert von +-1 Ampere benutzt. Das Längen-Inkrement war meistens 1 Meter, und die Leitfähigkeit 1 S/m.

Die Effekte mit 6-Nachbar-Formeln können wie folgt beschrieben werden:

1. Im Falle eines Halbraums mit homogener Leitfähigkeit, einer Elektrode an der Oberfläche und bei äquidistantem Gitter zeigt sich eine Verteilung von relativen Fehlern, die sich mit wachsender Entfernung von der Quelle vermindern. Sie hat eine ausgeprägte Azimuthal-Abhängigkeit (4-fache Rotations-Symmetrie). Die Extrema hängen von der Position relativ zum benutzten Koordinaten-System ab.
   Der maximale relative Fehler beträgt ca. 8 %. Die räumliche Verteilung der Fehler hängt nicht vom Wert der Leitfähigkeit oder der Position in Metern ab, sondern von der Position in Gitter-Einheiten.

2. Falls eine zweite Elektrode anderer Polarität und gleicher Stromstärke hinzugefügt wird, passiert folgendes:
   Wenn die Elektroden mindestens 16 Gitter-Einheiten voneinander entfernt sind und auf der gleichen Koordinatenlinie liegen, dann entspricht ihre individuelle Fehler-Verteilung nahezu derjenigen von einer Elektrode.
   Wenn der Abstand vermindert wird, dann ergibt sich eine

gegenseitige Beeinflussung der Elektroden bezüglich der Fehler. Dieser Effekt ist von Bedeutung, wenn bei Modellrechnungen die sogenannte inverse Schlumberger-Anordnung verwendet wird (Elektroden innen, Sonden außen), um mit einer Rechnung eine ganze Reihe von Elektroden-Positionen zu behandeln.
Der maximale relative Fehler wächst bis zu einer Grenze von 65% im Fall einer minimalen Distanz von einer Gitter-Einheit an.

3. Wenn zwei Elektroden diagonal zum Koordinatensystem angeordnet werden (z.B. x(el1)=0, y(el1)=0, z(el1)=z(el2)=0, x(el2)=2, y(el2)=2 in Gitter-Einheiten), dann ergibt sich eine andere Fehler-Verteilung. Hierbei verkleinert sich jedoch, wie im Fall 2, der maximale Fehler mit anwachsender Distanz zwischen den Elektroden.

4. Verwendet man ein nicht-äquidistantes Gitter mit einer Elektrode im Zentrum eines kartesischen Koordinaten-Systems mit z.B. $dx(i+1)/dx(i)=1.25$ $(x>0)$, und $dx(i-1)/dx(i)=1.25$ $(x<0)$, wobei dx das x-Inkrement sein soll, und das entsprechende für y und z, dann ergibt sich ein negativer Fehler, der sich weiter ausbreitet als die beschriebene Fehler-Verteilung bei einem äquidistanten Gitter.

5. Beim Übergang von einem homogenen Halbraum zu zwei Viertelräumen kann die Fehler-Reduktion der 26-Nachbar-Formel weiterhin lokal genutzt werden (in Gebieten, wo die Leitfähigkeit lokal homogen und das Gitter äquidistant ist). In anderen Gebieten wird die 6-Nachbar-Formel verwendet. Diese Kombination führt zu reduzierten Fehlern, außer im Fall, daß eine Elektrode in der Nähe einer Diskontinuität liegt.

6. Für den Fall einer Deich-Struktur gilt das gleiche wie bei 2 Viertelräumen.

Für die Vergleiche wurden drei analytische Lösungen verwendet:

- Halbraum
- 2 Viertelräume (Mundry, 1979)
- Ein Deich in einem Halbraum (Hanstein, Univ. Köln, persönliche Mitteilung)

Ein schneller PC wurde für die meisten Rechnungen benutzt.
Programmiersprache: Power Basic, u.a. zur leichten Erzeugung von Farb-Displays.
Typische Gitter: 22x22x18 bzw. 32x32x9 Gitter-Linien. Die relativ kleinen Gitter sind für Läufe mit analytischen Randwerten ausreichend.
Das gleiche Programm, in Fortran geschrieben, läuft auf einer VAX zur Erhöhung der Gitter-Größe.

Die folgenden Methoden wurden benutzt:

1. Das Gauß-Seidel-Verfahren (iterative Lösung)

2. Die Standard-6-Nachbar-Formel (Finite Differenzen) für nicht äquidistantes Gitter und maximal 8 verschiedene Leitfähigkeiten, die an einem Punkt "zusammentreffen". Zur Entwicklung der FD-Formeln wurde die Methode der Volumen-Integration verwendet, vgl. (Oristaglio & Hohmann, 1984),

siehe auch (Brewitt-Taylor & Weaver, 1976), deren Methode auf die entsprechenden Resultate führt.

3. Eine 26=(3^3-1)-Nachbar-FD-Formel für lokal äquidistantes Gitter und lokal homogene Leitfähigkeit. Im Fall eines Würfels mit einer Kantenlänge von zwei Gitter-Einheiten ist es möglich, drei verschiedene Diskretisierungen für den Laplace-Operator zu formulieren, wobei unterschiedliche Nachbarn zum Mittelpunkt verwendet werden:
   a. 6 Flächen-Mittelpunkt-Nachbarn (wie bei den Standard-Formeln)
   b. 12 Kanten- Mittelpunkt-Nachbarn
   c. 8 Ecken- Nachbarn.

   Wenn man eine Punktquelle in einer in Grenzen beliebigen Position relativ zum Würfel annimmt (oder Überlagerungen solcher Punktquellen), dann ist es möglich, diese drei FD-Laplace-Operatoren zu mischen, so daß eine Genauigkeit der Ordnung O(h^6) statt der O(h^2)-Genauigkeit der 6-Nachbarn-Formel resultiert. Das Verhältnis der Koeffizienten ist

   a:b:c = 37:46:7.

   Zusammen mit H. Pape war es möglich, eine hiervon geringfügig verschiedene Kombination von Diskretisierungen des Laplace-Operators zu finden:

   a:b:c = 40:40:10.

   Es reduziert die Diskretisierungs-Fehler um einen Faktor zwischen 5 und 10, außer in Fällen, wo sich eine Elektrode in der Nähe eines Leitfähigkeits-Kontrasts befindet.

4. Analytische Werte wurden für die lateralen und unteren Randbedingungen verwendet, um die Tests auf Diskretisierungs-Effekte zu konzentrieren.

Andere mögliche Methoden:

- Eine Option, normale and anomale Teile der Leitfähigkeiten und Potentiale zu benutzen, kann verwendet werden, zeigt jedoch relativ große Fehler, wenn sich eine Elektrode in der Nähe eines Leitfähigkeits-Kontrasts befindet (ähnlich zur Kombination der 6-Nachbarn- und 26-Nachbarn-Diskretisierung). Es ist geplant, eine modifizierte 6-Nachbar-Diskretisierung bei der Potentialtrennung (entsprechend einem Vorschlag von Prof. Weidelt) zu versuchen.

- An einer 26-Nachbar-Diskretisierung von nicht-äquidistanten Gittern bei lokal homogener Leitfähigkeit wird gearbeitet.

- Für Anwendungen in der Elektromagnetik wurde in der Arbeitsgruppe von Prof. Weaver (Univ. Victoria, Canada) kürzlich eine allgemeine 26-Nachbar-Formel entwickelt, die sowohl eine inhomogene Leitfähigkeit wie ein nicht-äquidistantes Gitter berücksichtigt (Weaver, pers. Mitt.). Die Formel soll abgesehen von der Genauigkeits-Erhöhung die Stabilität der Modellrechnungen verbessern.

Abschließende Bemerkungen:

Die Benutzung von modifizierten Diskretisierungs-Formeln macht es möglich, in den meisten Fällen Fehler-Muster zu reduzieren. Andere Methoden zur Fehler-Reduktion sind

- feinere Gitter
- Die Trennung von Leitfähigkeiten und Potentialen in normale und anomale Teile.
- eine geeignete Mischung dieser Methoden.

Außer Überlegungen zu FD-Fehlern müssen Rechengeschwindigkeit und Speicher-Bedarf in Betracht gezogen werden.
Ein anderer Gleichungs-Löser kann für die modifizierte Diskretisierung vorteilhaft sein, obwohl die Gauß-Seidel-Methode für kleinere Gitter schnell genug arbeitet.

Ein anderer Aspekt der Diskretisierung, unabhängig von Genauigkeitsüberlegungen, besteht im Übergang von einem kontinuierlichen System zu einem künstlich quantisierten System, bei dem zusätzlich zur quantisierten Länge auch die Stromrichtung quantisiert ist. Dadurch wird u.a. eine isotrope Leitfähigkeit in eine "Isotropie" einer mehr oder weniger kleinen Zahl (z.B. 6 oder 26) von Stromrichtungen verwandelt. Bestimmte diagonale Richtungen sind verboten. Dies resultiert in Systemen von künstlichen "Diskretisierung-Strömen", die sich im Vergleich zu (nicht-diskreten) analytischen Modellrechnungen als Fehler bemerkbar machen.

Vielleicht ist dieses künstliche System, abgesehen von praktischen Vorteilen, z.B. der großen Zahl der möglichen Leitfähigkeits-Verteilungen, interessanter als das kontinuierliche System:
Auf einer viel kleineren Längenskala als bei der Geoelektrik beschreibt es die physikalischen Phänomene besser. Die Diskrepanz zu analytisch-kontinuierlichen Lösungen würde dabei im Unterschied zum vorliegenden Vergleich eher als Fehler der kontinuierlichen Lösungen interpretiert werden.

Literatur:

Brewitt-Taylor, C.R. & Weaver, J.T., On the finite difference solution of two-dimensional induction problems, Geophys. J. R. astr. Soc., 47, 375-396, 1976.

Mundry,E., Geoelektrische Modellkurven in der Nähe vertikaler Störungen, NLfB-Bericht 80 147, Hannover, 1979.

Oristaglio, M.L. & Hohmann, G.W., Diffusion of electromagnetic fields into a two-dimensional earth: a finite-difference approach, Geophysics, 49, 870-894, 1984.

Der Autor möchte Prof. Dr. P. Weidelt, TU Braunschweig, und Dr. H. Pape, NLfB Hannover, für hilfreiche Diskussionen danken.