

M. Seichter

Der Ψ -Algorithmus zur Auswertung von Widerstandssondierungen

1. Einleitung

Die Umsetzung geoelektrischer Meßdaten in ein Modell eines geschichteten Untergrundes (Umkehraufgabe) ist ein nichtlineares Problem. Der Datenkern (die Modell und Daten verbindende Größe) ist nur für spezielle Fälle exakt bestimmbar (nach FLATHE (1955): Der spezifische Widerstand der letzten Schicht muß entweder Null oder Unendlich sein. Im allgemeinen Fall empfiehlt sich eine iterative Annäherung an die Lösung.

Die meisten Verfahren zur 1D-Interpretation von Widerstandssondierungskurven lösen die Umkehraufgabe indirekt durch Minimierung eines Fehlerfunktional. Es seien hier das Gradientenverfahren (KOEFOED 1979) und die MARQUARDT-Inversion (1963) erwähnt. Der von SCHMUCKER (1978) entwickelte Ψ -Algorithmus linearisiert dagegen das Gleichungssystem durch Logarithmierung der Komplexen Impedanz (Magnetotellurik) bzw. der Kernfunktion (Gleichstromgeoelektrik). Diese Vorgehensweise ermöglicht die Lösung der Umkehraufgabe für die Schichtwiderstände ohne Zuhilfenahme eines Fehlerfunktional und ohne Vorgabe eines Startmodells.

Zur Auswertung magnetotellurischer Sondierungen ist der Ψ -Algorithmus eines der gängigen Verfahren. In diesem Artikel soll auf seine Optimierung im Bereich der Gleichstromgeoelektrik eingegangen und an einem Beispiel seine Anwendbarkeit auch auf komplexe Widerstandsmessungen gezeigt werden.

2. Theoretische Grundlagen des Ψ -Algorithmus

a) Magnetotellurik

Zur Linearisierung des Datenkerns wird die "Logarithmische Impedanz" gebildet:

$$\Psi(f, z) = 2 \ln \left[\frac{Z(f, z)}{Z_0(f)} \right] \quad , \quad (1)$$

wobei $Z(f, z) = \frac{E_z}{H_y}$: komplexe Impedanz des Feldes
und $Z_0(f) = \sqrt{i\omega\mu_0\rho_0}$: Impedanz eines homogenen Halbraums.

Die gesuchte Widerstandsverteilung $\rho(z)$ wird nun durch ein geschichtetes Modell in der Weise wiedergegeben, daß die Schichtdicken d_m in einem konstanten Verhältnis zur Skintiefe $\sqrt{2\rho/\omega\mu_0}$ stehen; also gilt $d_m/\sqrt{\rho_m} = \text{const.}$ für alle $m = 1, \dots, M - 1$: Sehr dünne, gutleitende Schichten sind äquivalent zu weniger dünnen, weniger gutleitenden Schichten. Somit kann für die Modellrechnung eine einheitliche Schichtdicke d_0 angesetzt werden. Bei geeigneter Vorgabe dieses d_0 werden iterativ die Schichtwiderstände bestimmt.

b) Gleichstromgeoelektrik

Hier wird die Kernfunktion logarithmiert:

$$\Psi(\lambda, z) = \ln G(\lambda, z) \quad (2)$$

wobei für G an der Grenzfläche z_m gilt (SLICHTER 1933):

$$G(\lambda, z_m + 0) = G_m = \frac{A_m e^{-\lambda z_m} + B_m e^{\lambda z_m}}{A_m e^{-\lambda z_m} - B_m e^{\lambda z_m}} \quad (3)$$

Die Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche z_{m+1} lautet

$$\Psi_m^+ = \Psi_{m+1} + \ln \frac{\rho_{m+1}}{\rho_m} \quad (4)$$

Hier sei ein $u_m := \frac{B_m}{A_m} e^{2\lambda z_m}$ definiert, so daß $G_m = \frac{1+u_m}{1-u_m}$ gilt.

Dann ist $\Psi_m = \ln G_m = 2 \operatorname{arctanh}(u_m)$, da $|u_m| < 1$.

Das Verhältnis der logarithmierten Kernfunktionen an der Obergrenze und an der Untergrenze der m -ten Schicht definiert den Parameter

$$\gamma_m := \frac{\Psi_m}{\Psi_m^+} = \frac{\operatorname{arctanh}(u_m)}{\operatorname{arctanh}(u_m e^{2\lambda d_0})} \approx e^{-2\lambda d_0} \quad (5)$$

Die angegebene Näherung kann gemacht werden, falls $G_m \approx 1$, was geringe Widerstands-
kontraste zwischen angrenzenden Schichten verlangt. Bemerkenswert ist, daß γ_m bei An-
wendung dieser Näherung nicht mehr von den Schichtwiderständen abhängt. Damit läßt
sich ein Startmodell für die Ψ -Iteration ohne Vorgabe von Schichtwiderständen berech-
nen, das erfahrungsgemäß bereits in der Nähe der Lösung liegt. Dadurch wird die weitere
Iteration erst ermöglicht.

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt die Rekursionsformel des Ψ -Algorithmus:

$$\Psi_m = \gamma_m \left[\Psi_{m+1} + \ln \frac{\rho_{m+1}}{\rho_m} \right] \quad \text{Basis: } \Psi_M = 0 \quad (6)$$

Die Umkehraufgabe wird ausgedrückt durch:

$$y_n = \sum_{m=1}^M g_{nm} x_m \quad (7)$$

y_n sind die hankeltransformierten und logarithmierten Daten:

$$y_n = \Psi_1(\lambda_n) + x_1 = \ln \left[G_1(\lambda_n) \cdot \frac{\rho_1}{\rho_0} \right], \quad G_1(\lambda_n) = 1 + \frac{1}{\lambda_n} \sum_n H_k \frac{\rho_a(r_{n+k}) - \rho_1}{\rho_1 \cdot r_{n+k}}$$

$x_m = \ln \left[\frac{\rho_m}{\rho_0} \right]$ sind die zu bestimmenden Modellparameter (ρ_0 : Referenzwiderstand),

g_{nm} ist der Datenkern, zusammengesetzt aus den γ_m (siehe SEICHTER 1992).

Ψ -Iteration:

1. *Schritt:* Neben der Anzahl Schichten M und der einheitlichen Schichtdicke d_0 muß für den Iterationsanfang auch der spezifische Widerstand der ersten Schicht ρ_1 vorgegeben werden. Untersuchungen zeigen (SEICHTER 1993), daß innerhalb weiter Grenzen diese Vorgabe des ρ_1 das Endmodell nicht beeinflusst. Mit diesen Angaben wird der erste Datenkern berechnet durch $\gamma_m^{(0)} = e^{-2\lambda d_0}$. Dann wird durch lineare Ausgleichsrechnung (Lösungsmatrix $H = (G^T G)^{-1} G^T$) Gleichung (7) gelöst und ein Startmodell $x_m^{(1)}$ gewonnen.

i. Schritt:

Aus den $x_m^{(i-1)}$ werden die $\gamma_m^{(i-1)}$ ausgerechnet, die einen neuen Datenkern $g_{nm}^{(i-1)}$ ergeben. Nach erneuter linearer Ausgleichsrechnung ergibt sich ein $x_m^{(i)}$.

Da beim Ψ -Algorithmus die Modellanpassung im λ -Bereich der Hankeltransformation stattfindet, wird bei jedem Schritt der Anpassungsfehler im λ -Bereich (ϵ_λ) ermittelt, der die Übereinstimmung zwischen Datenkern und Modell anzeigt, aber anders als bei den indirekten Verfahren die Rechnung selbst nicht beeinflusst:

$$\epsilon_\lambda^{(i)} = \sqrt{\frac{1}{N-M} \sum_{n=1}^N \left[y_n - \sum_{m=1}^M g_{nm}^{(i)} x_m^{(i)} \right]^2} \quad (8)$$

Abbruch:

- 1) Eine vorgegebene Anzahl an Iterationsschritten wird erreicht oder
- 2) Der Fehler ϵ_λ ändert sich zwischen zwei Iterationsschritten kaum noch ($\Delta\epsilon_\lambda < 10^{-6}$).

Nach Ablauf der Iteration wird noch der Anpassungsfehler des Endmodells im Ortsbereich bestimmt:

$$\epsilon_r = \sqrt{\frac{1}{N-M} \sum_{n=1}^N \left[\ln \rho_a^{\text{Mess}} / \ln \rho_a^{\text{Modell}} \right]^2} \quad (9)$$

Die direkte Lösung der Umkehraufgabe durch den Ψ -Algorithmus ermöglicht eine Abschätzung der Unsicherheiten bei der Bestimmung der Schichtwiderstände:

$$d\rho_m = \rho_m \cdot \sinh \left(\sqrt{\sum_n [h_{mn} f_n]^2} \right) \quad (10)$$

$H = h_{mn}$: Lösungsmatrix des letzten Iterationsschrittes

f_n : Vektor der Meßfehler der ρ_a -Werte

ρ_m : spezifischer Widerstand der m -ten Schicht des Modells

Es genügt, für f_n einen Schätzwert des Fehlers der Messung vorzugeben.

3. Die Optimierung der Schichtdicken

Die Anwendung des Ψ -Algorithmus auf Gleichstromsondierungskurven hat gezeigt, daß in der Praxis die Annahme einer einheitlichen Schichtdicke d_0 nicht sinnvoll ist, da eine Beziehung zwischen Schichtdicken und Schichtwiderständen wie in der Magnetotellurik nicht existiert. Deshalb werden für die Gleichstromgeoelektrik "Schichtgewichte" W_m eingeführt, die mit d_0 die Schichtdicken d_m ergeben:

$$d_m = W_m \cdot d_0 \quad (11)$$

Der Algorithmus ändert sich dadurch nicht wesentlich (die Näherung wird zu $\gamma_m \approx e^{-2\lambda W_m d_0}$).

Insgesamt ergibt sich folgende Hierarchie der Optimierungsebenen:

- 1) W_m -Optimierung (vergleichsweise grob)
- 2) d_0 -Optimierung (halbautomatisch, fein)
- 3) Ψ -Iteration (automatisch, exakt)

d_0 -Optimierung:

Bei vorgegebenen W_m wird das d_0 variiert, wobei zu jedem d_0 eine Ψ -Iteration durchgeführt wird, die die am besten dazu passenden Schichtwiderstände errechnet. Zur Bestimmung des besten d_0 kann entweder das Minimum des Anpassungsfehlers im Ortsbereich ϵ_r (" d_0 ortsorientiert") oder des Anpassungsfehlers im λ -Bereich (" d_0 λ -orientiert") verwendet werden. Die Untersuchungen haben keine eindeutige Präferenz für das eine oder andere Fehlerkriterium ergeben. Bei guter Wahl der Schichtgewichte liegen die beiden Minima nahe beieinander (auf der d_0 -Achse).

Zur automatischen d_0 -Optimierung wurde das iterative Verfahren nach BRENT [PRESS et al., 1986] zur Minimumsuche in einer Dimension benutzt, welches die inverse parabolische Interpolation mit dem Verfahren des Goldenen Schnittes verbindet. Vor dem Start des Suchverfahrens ist dabei die Angabe dreier Punkte nötig, die das Minimum "einklammern", sowie eine minimale Schrittweite für den Iterationsabbruch.

W_m -Optimierung:

Das Schichtgewicht der ersten Schicht wird gleich Eins gesetzt, die restlichen $M-2$ Schichtgewichte variieren, wobei für jeden neuen Punkt im Lösungsraum der W_m eine d_0 -Optimierung durchgeführt werden muß. Einen solchen W_m -Lösungsraum für ein Dreischichtmodell, bei dem nur das W_2 variiert wird, veranschaulicht Abbildung 1.

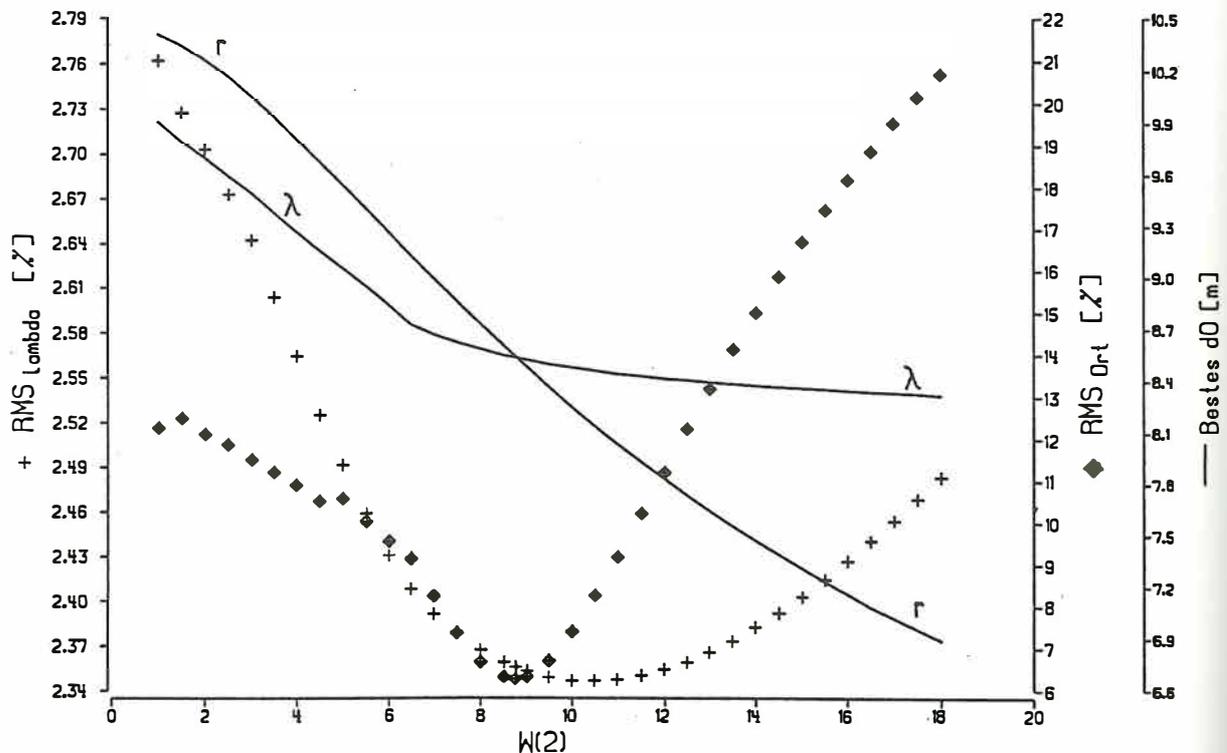


Abbildung 1: W_2 -Diagramm eines Dreischichtmodells

Die der Modellrechnung von Abb.1 zugrundeliegende Meßkurve wurde im Bramwald aufgenommen. Die gezeigten Anpassungsfehler gehören zu Modellen, bei denen das d_0 so ausgewählt wurde, daß es im Minimum des ϵ_λ bei der d_0 -Variation lag. Die Anpassungsfehler (+: ϵ_λ ; Karos: ϵ_r) beziehen sich auf die daraus resultierenden Modelle. Die λ -orientierten d_0 sind als durchgezogene Linie mit einem "λ" gekennzeichnet, die jeweiligen ortsorientierten d_0 als Linie mit einem "r". Für beide gilt die Achse mit der Aufschrift "Bestes d_0 ".

Es hat sich gezeigt (SEICHTER 1992), daß für die W_m -Optimierung der Fehler im Ortsbereich ein besseres Kriterium ist als der Fehler im eher unanschaulichen λ -Bereich. In Abb. 1 wird darüber hinaus eine weitere Eigenschaft erkennbar: Das Minimum im Ortsbereich liegt in unmittelbarer Nähe der Stelle, wo sich im Diagramm die Linien schneiden, also wo sich bei der Variation des d_0 (eine Optimierungsebene darunter) sowohl für ϵ_λ als auch für ϵ_r das gleiche Minimum ergibt. In einem Diagramm, welches beide Fehler in Abhängigkeit von d_0 zeigte, wären bei Vorgabe von $W_2 = 8.78$ (bei entsprechender Skalierung) zwei übereinanderliegende parabelförmige Kurven sichtbar. Diese besondere Stelle bei der W_m -Variation ist weitaus genauer bestimmbar als das Minimum des Fehlers im Ortsbereich. Bei allen W_m -Untersuchungen, bei denen nur ein Schichtgewicht verändert wurde, existierte eine solche " d_0 -Gleiche", und sie lag immer zumindest in der Nähe des Minimums von ϵ_r . Die d_0 -Gleiche ist als Kriterium für die Wahl des besten Schichtdickenverhältnisses ebenso geeignet wie das ϵ_r ; ihre Suche läßt sich jedoch kaum automatisieren.

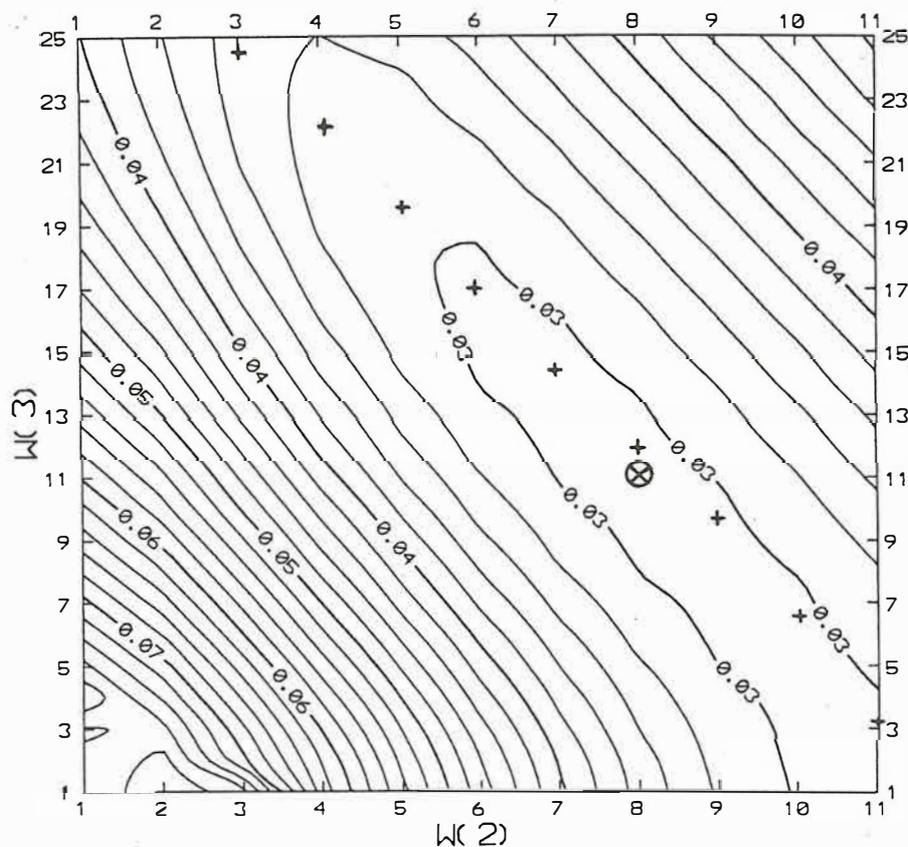


Abbildung 2: Isolinienkarte des Anpassungsfehlers des W_m -Lösungsraumes

W_m -Optimierung bei Modellen mit 4 Schichten

Bei einer W_m -Untersuchung an Vierschichtmodellen sind zwei Parameter zu variieren. Graphisch ist dies durch einen 3D-Plot oder eine Isolinienkarte darstellbar.

Abbildung 2 zeigt den W_m -Lösungsraum zu einer Meßkurve, die in der Nähe von Bad Sachsa aufgenommen wurde. Der Lösungsraum der Schichtgewichte W_2 und W_3 wurde dafür abgetastet ($W_2=1,2,\dots,11$; $W_3=1,2,\dots,25$), wobei zu jeder Schichtgewichtskombination eine d_0 -Optimierung (nach dem ϵ_λ) durchgeführt wurde. Zur Arbeitserleichterung wurde dabei eine " W_m -Automatik" verwendet, bei deren Programmierung die Erfahrung ausgenutzt wurde, daß sich das beste d_0 bei Erhöhung eines Schichtgewichtes in systematischer Weise verringert, wodurch geeignete Umklammerungen der Minima für die d_0 -Automatik leicht errechnet werden können.

Folgende Eigenschaften sind in Abbildung 2 erkennbar:

- Das Minimum des ϵ_r (Kreis) liegt mit 2.93 (es hebt sich kaum von den umliegenden Punkten ab).
- Die Struktur des Lösungsraumes ist sehr glatt und ähnelt einem Tal.

- Es sind keine Nebenminima auszumachen (die Unregelmäßigkeiten bei kleinen W_2 und W_3 entstehen durch fehlende Daten an dieser Stelle).
- Die Modelle bei großen W_2 und kleinen W_3 weisen bei niedrigem Anpassungsfehler sehr hohe Unsicherheiten ($d\rho_m$, Gleichung (10)) bei der Bestimmung der Schichtwiderstände auf und kommen daher kaum in Betracht.
- Die d_0 -Gleichen, eingetragen als Plus-Zeichen, laufen fast auf einer Geraden.

Daraus folgt die Vorgehensweise für eine schnelle W_m -Optimierung:

Man erreiche bei Variation des W_3 und festgehaltenem W_2 die Talsohle und schreite bei Änderung des W_2 in dieser fort. Dabei kann man sich entweder am Minimum des ϵ_λ oder an den d_0 -Gleichen orientieren.

4. Der Einfluß von Datenfehlern auf das Modell

Eine interessante Fragestellung in der Geoelektrik ist die nach Art und Ausmaß der Wirkung von Meßfehlern auf die Modellfindung. Verrauscht man eine durch Lösen der Vorwärtsaufgabe erzeugte, fehlerfreie ρ_a -Kurve durch eine Zufallsfunktion und vergleicht anschließend die Modellierungsergebnisse der fehlerfreien und der verrauschten ρ_a -Kurve, so läßt sich der Einfluß der Meßfehler studieren: In Abbildung 3 ist der W_m -Lösungsraum der fehlerfreien ρ_a -Kurve TM4 dargestellt, die unter Vorgabe der Schichtdicken 1, 2.5, 12 m und der Schichtwiderstände 60, 8, 120, 35 Ωm erzeugt wurde. In der Nähe der Schichtgewichtskombination $W_2 = 2.5$ und $W_3 = 12$ bildet sich erwartungsgemäß ein Trichter im Lösungsraum heraus, in dem der Anpassungsfehler ϵ_r auf Null zurückgeht. Die Struktur des Lösungsraumes ist ansonsten ebenso glatt und talförmig wie bei der Meßkurve Bad Sachsa in Abbildung 2.

Im Weiteren wurde die ρ_a -Kurve TM4 mit Zufallsvariablen $X(i)$ aus einer GAUSS'schen Verteilung mit einem Mittel von 0 und einer Varianz von 1 verrauscht (Funktion "GASDEV" aus PRESS et al. 1986):

$$\rho_a(i) = \rho_a^{\text{TM4}}(i) \cdot (1 + X(i) \cdot s_0) \quad (12)$$

Mit dieser Vorgehensweise wurden die ρ_a -Testkurven TM5 und TM6 mit $s_0 = 0.03$ und TM7 mit $s_0 = 0.01$ gewonnen. Die tatsächlichen relativen quadratischen Abweichungen der Testkurven von TM4 und die Ergebnisse der Modellrechnungen zeigt die untenstehende Tabelle:

Tabelle 1: Vergleich zwischen Modellen gestörter und ungestörter Daten

Kurve	s_0	Abw.	d(1)	d(2)	d(3)	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	ϵ_r
TM4	0	0	1.00	2.50	12.00	60.0	8.0	125.0	35.0	0.00
TM5	0.03	2.77	1.04	2.08	17.70	59.1	6.9	92.0	33.6	2.26
TM6	0.03	2.32	1.04	2.08	19.72	59.6	6.9	95.5	29.0	2.00
TM7	0.01	1.12	1.04	2.08	11.44	59.0	6.8	119.7	35.7	1.03

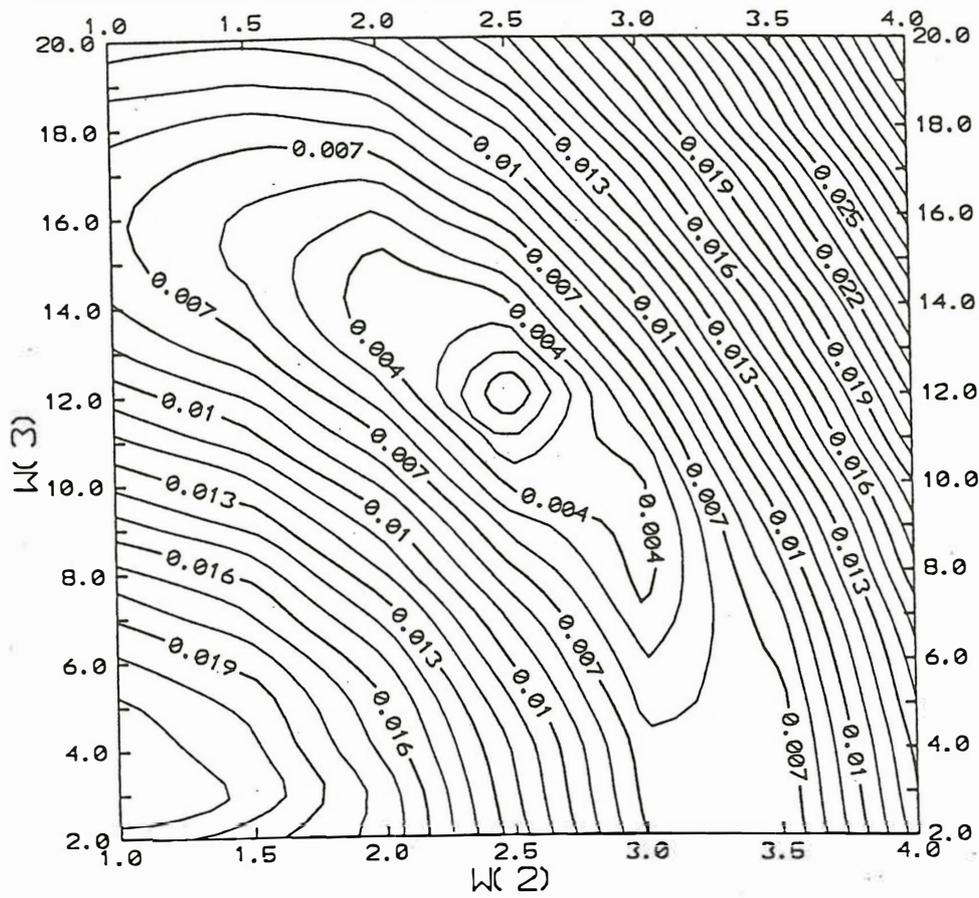


Abbildung 3: Isolinienkarte des Anpassungsfehlers des W_m -Lösungsraumes von TM4

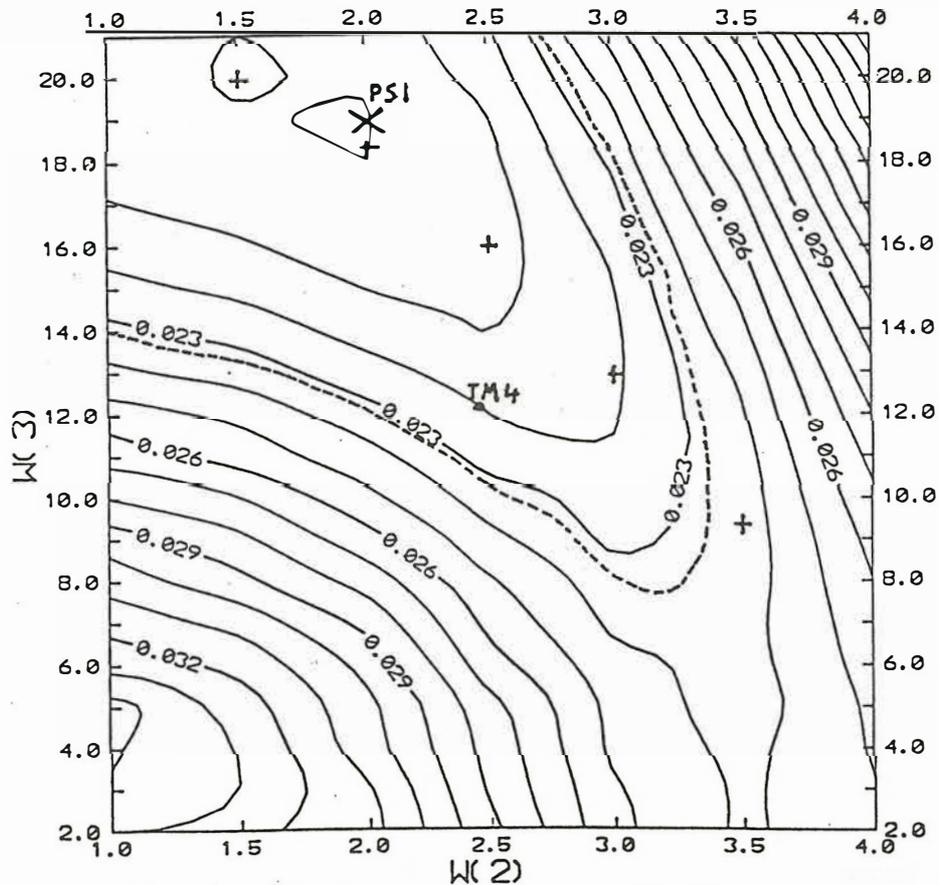


Abbildung 4: Isolinienkarte des Anpassungsfehlers des W_m -Lösungsraumes von TM6

Aus der Auswertung der Testmodelle läßt sich entnehmen, daß schon ein relativ kleiner Meßfehler auch bei bester Modellierung eine große Verschiebung der resultierenden Schichtparameter bewirkt. Außerdem fällt auf, daß die Anpassungsfehler der jeweiligen "besten" Modelle stets geringer sind als die tatsächlichen Meßfehler. Diese "Überinterpretation" führt letztlich zu der relativ starken Verschiebung. In der Literatur wird daher manchmal empfohlen, die Iteration bei Erreichen des angenommenen Meßfehlers der Apparatur abzubrechen.

In Abbildung 4 ist gestrichelt diese Grenze der Anpassung angegeben, die vom "Meßfehler" 2.32 % diktiert wird. Innerhalb der Grenze können sich die beiden Parameter aufhalten, wenn alle anderen Modellparameter ideal gewählt wären. In der Tat befinden sich die Schichtgewichte von TM4 noch innerhalb dieses Bereiches. Das Problem bei der Auswertung realer Meßdaten liegt darin, daß die "wahre" Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund nicht bekannt ist. So bleibt einem Anwender ohne gute Kenntnis der geologischen Verhältnisse des Meßgebietes nichts anderes übrig, als den Anpassungsfehler des Modells an die Daten so gering wie möglich zu halten, vorausgesetzt, er verwendet eine für die Meßkurve charakteristische Anzahl von Schichten. Eine Überinterpretation entsteht vor allem durch zu viele Schichten im Modell.

Vergleich mit indirekten Verfahren:

Auch das Gradientenverfahren (KOEFOED 1979) wurde auf die Testkurven angewendet. Dabei ergab sich (SEICHTER 1993), daß einerseits das Endmodell dieses indirekten Interpretationsverfahrens stark von dem vorgegebenen Startmodell abhängt, und daß andererseits der Ψ -Algorithmus immer in unmittelbare Nähe des globalen Minimums gelangt. Der Vorteil des Ψ -Algorithmus besteht in dieser Hinsicht darin, daß über die Hälfte der Modellparameter (die M Schichtwiderstände) direkt ausgerechnet werden. Für das Beispiel eines Vierschichtmodells besteht für den Ψ -Algorithmus der Lösungsraum statt aus sieben Dimensionen lediglich aus dreien, was das Auftreten von Nebenminima merklich einschränkt (d_0 und W_m seien bei dieser Betrachtung zu Schichtdicken zusammengefaßt). Es erscheint also sinnvoll, zunächst mit dem Ψ -Algorithmus in die Nähe des globalen Minimums zu gelangen und das Ergebnis durch die Anwendung eines indirekten Verfahrens bei Bedarf zu verfeinern.

5. Anwendung des Ψ -Algorithmus auf komplexe Widerstandsmessungen

Durch Untersuchungen an Gesteinsproben wurde deutlich, daß die Leitfähigkeit eine frequenzabhängige, komplexe Größe ist. Bei niedrigen Frequenzen (10^{-3} – 10^3 Hz) zeigen Realteil und Imaginärteil der komplexen Leitfähigkeit σ^* nahezu die gleiche Potenzabhängigkeit von der Frequenz. Mit der Meßmethode der spektralen induzierten Polarisation (SIP) lassen sich über diese Beziehung Amplitude und Phase des spez. Widerstandes ermitteln.

Die in Abbildung 5 gezeigte SIP-Meßkurve wurde mit einer mehrkanaligen PHOENIX-Apparatur in Schlumberger-Anordnung bei Elsnig gewonnen. Die rechten Kurven im Diagramm zeigen die Amplituden in Ωm , die linken die Phase in mRad, wobei die durchgezogenen Linien für die Messung stehen, die gestrichelten sich aus dem errechneten Modell ergeben.

Bemerkenswert an dieser Meßkurve ist, daß der Realteil von σ^* - abgesehen von einer dünnen, hochohmigen Deckschicht - im Untergrund fast konstant ist, während starke Kontraste im Imaginärteil (bzw. in der Phase) auftreten.

Komplexe Widerstandssondierung

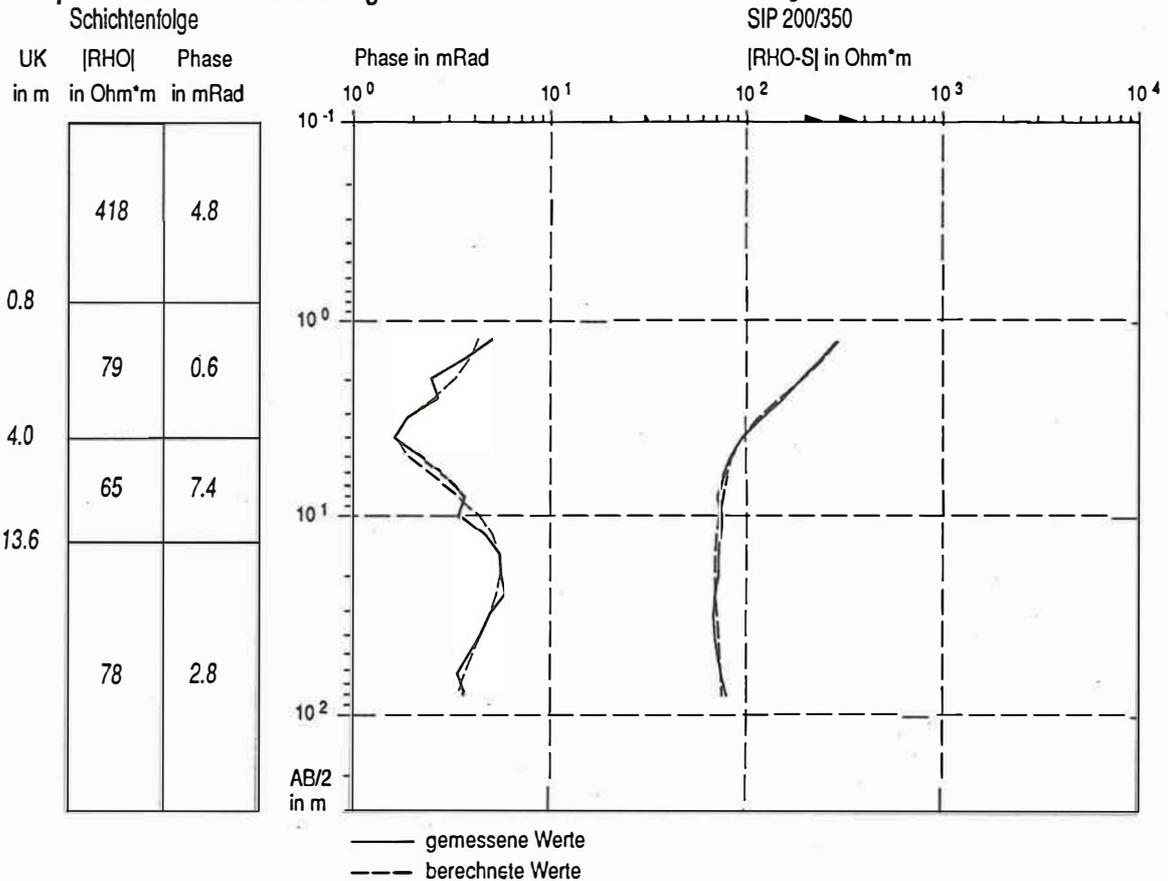


Abbildung 5: Beispiel der Anwendung auf eine Komplexe Widerstandssondierung

In Zusammenarbeit mit A. WELLER und P. WEIDELT (Braunschweig) wurde das Computerprogramm zum Ψ -Algorithmus so modifiziert, daß nun auch komplexe Widerstandssondierungen damit ausgewertet werden können. Für das vorliegende Modell wurden die Schichtdicken für die Ψ -Iteration nach einem mit dem MARQUARDT-Algorithmus erzeugten Vergleichsmodell vorgegeben. Die Ψ -Iteration konvergiert auch für komplexe Widerstände und erzeugt ein Modell, das mit dem des MARQUARDT-Verfahrens fast übereinstimmt. Damit ist gezeigt, daß der Ψ -Algorithmus auch auf komplexe Widerstandskurven anwendbar ist.

6. Literatur

- FLATHE, H.: A practical method of calculating geoelectrical model graphs for horizontal stratified media. *Geoph. Prosp.* 19, 197-217, 1955.
- KOEFOD, O.: Resistivity Sounding Measurements. *Geosounding Principles 1*, Elsevier 1979.
- MARQUARDT, D. W.: An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 11, 431-441, 1963.

- PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A. & VETTERLING, W. T.: Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge 1986.
- SCHMUCKER, U.: Eindimensionale Interpretation logarithmischer Sondierungsdaten mit zusätzlicher Anpassung der Tiefen von Schichtgrenzen. *Protokollband Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung*, Neustadt/Weinstraße 1978.
- SEICHTER, M.: Vergleich geoelektrischer Interpretationsverfahren. *Protokollband Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung*, Borkheide 1992.
- SEICHTER, M.: Die Anwendung des Ψ -Algorithmus auf Gleichstromsondierungskurven im Vergleich zu anderen Interpretationsverfahren. *Diplomarbeit*, Göttingen 1993.
- SLICHTER, L. B.: The interpretation of the resistivity prospecting method for horizontal structures. *Physics* 4, 307-322, 1933.
- WELLER, A., BÖRNER, F.: Determination of permeability at shallow depth. *54th EAEG Meeting*, P148, Paris 1992.