Vortrag Dr. Helbig, München

Ergänzung zum Vortrag von Prof. Kertz

Donnerstag, den 10.10.1963

Der Vortragende hatte Gelegenheit, im Anschluß an die XIII. Generalversammlung der IUGG in La Jolla mit U. Schmucker, C. Cox und Jean Filoux über deren Arbeiten auf dem Gebiet der Tiefensondierung zu sprechen. Dabei handelte es sich um folgende Projekte: Fortsetzung der in Kalifornien senkrecht zur pazifischen Küste angelegten magnetischen Profile auf See hinaus durch elektrische Messungen (Cox und Filoux). Numerische Berechnungen der über einer zweidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung induzierten elektrischen und magnetischen Felder (Cox). Schmucker schlug vor, Pulsationen an der Oberfläche und der Unterkante einer leitfähigen Schicht zu registrieren (entweder Registrierungen in Bohrlöchern oder Bergwerken (Molasse, Peissenberg?) oder auf See).

Von besonderem Interesse für die Untersuchungen im Rahmen des Schwerpunktprogramms "Tiefensondierung" dürften die numerischen Berechnungen der Induktionskurven sein. Die in La Jolla für Diskussionen zur Verfügung stehende Zeit war sehr kurz, deshalb ist versucht worden, auf Grund der Bemerkungen von C. Cox und U. Schmucker das Verfahren zu rekonstruieren:

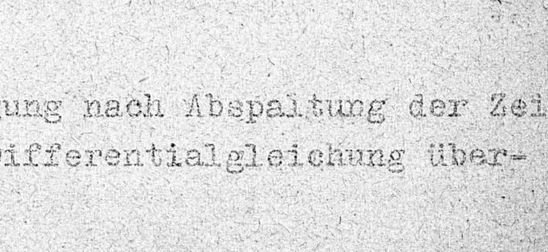
Wenn man die Verschiebungsströme vernachlässigen kann, gehorcht das Vektorpotential $\vec{A}$ der Diffusionsgleichung

$$\Delta \vec{A} = 4\pi\sigma \dot{\vec{A}} ,$$

die für stationäre sinusförmige Erregung nach Abspaltung der Zeitabhängigkeit in eine Helmholtz'sche Differentialgleichung übergeht:

$$\partial^2 A_{x,y}/\partial x^2 + \partial^2 A_{x,y}/\partial z^2 = i\cdot 4\pi\sigma\omega A_{x,y}$$

Ersetzt man jetzt die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung durch Differenzenquotienten, so läßt sich für eine Komponente und für einen beliebigen Punkt (z.B. den Punkt 0 in der nebenstehenden Figur) schreiben:



$$\Delta_x^2 A/h^2 + \Delta_z^2 A/h^2 = \frac{A(1)+A(2)+A(3)+A(4)-4A(0)}{h^2} = 4\pi\sigma\omega i A(0)$$

oder $\underline{A(0) = (A(1)+A(2)+A(3)+A(4))/4(1+\pi\sigma\omega h^2 i)}$

Diese Gleichung ist die Grundgleichung des "Relaxationsverfahrens" für die Helmholtzsche Differentialgleichung. Bei seiner Anwendung werden erst die Randwerte eingetragen, dann gibt man zunächst allen Punkten plausible Werte (z.B. aufgrund einer graphischen Lösung). Anschließend werden die Werte schrittweise systematisch verbessert, in dem man an jeder Stelle die Grundgleichung anwendet. Eine ausführliche Literatur existiert über den Grenzfall $\sigma = 0$ (Laplacesche Differentialgleichung), z.B. in P. Moon and D.E. Spencer, Field Theory for Engineers, The Van Nostrand Series in Electronics and Communications, Princeton 1961, Abschnitt 1.03 (29 Titel). Vermutlich lassen sich die Schlüsse von der Laplace-Gleichung auf die Helmholtzgleichung ohne weiteres verallgemeinern. Die Grundgleichung läßt sich ohne Schwierigkeiten mit Hilfe einer Tischrechenmaschine anwenden, für umfangreichere Rechnungen empfiehlt sich eine elektronische Rechenmaschine. Die Programme von C. Cox sind elektronisch gerechnet worden.

Das Verfahren konvergiert immer, doch ist damit noch nicht sicher gestellt, daß die Lösungen auch entsprechend genau sind. Die Fehler lassen sich in zwei Gruppen einteilen: Fehler, die durch zu frühes Abbrechen entstehen - derartige Fehler dürften bei elektronischer Rechnung ohne weiteres auszuschließen sein - und Fehler, die dadurch entstehen, daß man die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzt hat. Für diese zweite Klasse von Fehlern sind zwei Verfahren zu nennen: einmal kann man das Problem zunächst mit einem groben Gitter (großes <u>h</u>) lösen, dann wiederholt man mit einem verfeinerten Gitter. In einem charakteristischen Gebiet rechnet man noch mit einer dritten Gittergröße. In diesem Gebiet sind dann für die allen drei Gittern gemeinsamen Punkte jeweils drei verschiedene Lösungen verfügbar, aus denen sich auf unendlich feines Gitter (quadratisch) extrapolieren läßt. Für die übrigen Bereiche verwendet man dann die gleiche Extrapolationsformel. Ein anderes Verfahren geht von der Theorie endlicher Differenzen aus. Für das Korrekturglied ergibt sich eine partielle Differentialgleichung, die selbst wiederum nach der Relaxationsmethode gelöst werden kann.

Die Lösung für den Grenzfall verschwindender Leitfähigkeit (d.h. die Leitfähigkeit ist entweder 0 oder unendlich) ist sehr viel einfacher, insbesondere läßt sie sich sehr leicht graphisch ermitteln (Literatur bei Moon und Spencer, über 30 Titel). Es wäre vielleicht interessant zu untersuchen, in welcher Weise die beiden Lösungen ineinander übergehen. Möglicherweise könnte man mit einiger Erfahrung angeben, wie die mit der graphischen Methode gewonnenen Lösungen bei endlicher Leitfähigkeit zu modifizieren sind.