

Autoren: Prof. Angenheister und cand.phys. Latka  
Einiges zur Anwendung der Magnetotellurik; das Verfahren  
von Cagniard

Donnerstag, den 10.10.1963

1. Die Theorie des Verfahrens von Cagniard

a) Voraussetzungen:

- 1) Der Untergrund bestehe aus horizontalen Schichten. (Die Tiefen der horizontalen Grenzflächen seien  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ . Die nte Schicht ist unendlich dick.)
- 2) Innerhalb jeder Schicht ist das Material homogen und isotrop.
- 3) Die Schichten sind in horizontaler Richtung unendlich ausge dehnt.
- 4) Das elektrische und das magnetische Feld weisen in keiner der horizontalen Richtungen eine räumliche Variation auf.

b) Die Differentialgleichung des Vektorpotentials  $\vec{A}$  im Untergrund ( $\epsilon \neq 0$ ), die für den Fall der quasistationären Ströme aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden kann ( $\Delta \vec{A} = 4\pi\epsilon \vec{A}$ ) vereinfacht sich unter den genannten Voraussetzungen zu

$$(1) \quad \frac{\partial^2 A_{x,y}}{\partial z^2} = a^2 A_{x,y} \quad ; \quad a^2 = 14\pi\omega\epsilon,$$

sofern die Zeitfunktionen periodisch sind und durch  $e^{i\omega t}$  beschrieben werden können.

Folgender Ansatz befriedigt diese Differential-Gleichung:

$$(2) \quad \begin{aligned} A_x &= (B_x e^{za} + C_x e^{-za}) e^{i\omega t} \\ A_y &= (B_y e^{za} + C_y e^{-za}) e^{i(\omega t + \delta)} \end{aligned}$$

Aus  $\vec{F} = \text{rot } \vec{A}$  und  $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$  ergibt sich hiermit für die Komponenten der Felder in der kten Schicht:

$$(3) \quad \begin{aligned} F_{x,k} &= -a_k (B_{y,k} e^{zak} - C_{y,k} e^{-zak}) e^{i(\omega t + \delta)}; \quad a_k = \sqrt{i4\pi\omega\epsilon_k} \\ F_{y,k} &= a_k (B_{x,k} e^{zak} - C_{x,k} e^{-zak}) e^{i\omega t} \\ E_{x,k} &= -i\omega (B_{x,k} e^{zak} + C_{x,k} e^{-zak}) e^{i\omega t} \\ E_{y,k} &= -i\omega (B_{y,k} e^{zak} + C_{y,k} e^{-zak}) e^{i(\omega t + \delta)} \end{aligned}$$

Im Aussenraum ( $\sigma = 0$ ) ist das Vektorpotential  $\vec{A}$  gleich:

$$(4) \quad \begin{aligned} A_{x,0} &= (B_{x,0} + C_{x,0}z) e^{i\omega t} \\ A_{y,0} &= (B_{y,0} + C_{y,0}z) e^{i(\omega t + \delta)} \end{aligned}$$

Die Feldkomponenten im Aussenraum sind dann:

$$(5) \quad \begin{aligned} F_{x,0} &= C_{y,0} e^{i(\omega t + \delta)} \quad ; \quad F_y = C_{x,0} e^{i\omega t} \\ E_{x,0} &= -i\omega(B_{x,0} + C_{x,0}z) e^{i\omega t} \quad ; \\ E_{y,0} &= -i\omega(B_{y,0} + C_{y,0}z) e^{i(\omega t + \delta)} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $B_{x,0}$ ;  $C_{x,0}$ ;  $B_{y,0}$ ;  $C_{y,0}$ ;  $B_{x,1}$  ..... werden durch die Randbedingungen an den  $n$  Grenzflächen (einschließlich Erdoberfläche) bestimmt, und zwar muß jede der 4 Komponenten für sich an jeder der  $n$  Grenzflächen stetig sein. Da die Felder in der untersten unendlich mächtigen Schicht mit steigendem  $z$  gegen null gehen müssen, sind  $B_{x,n} = 0$  und  $B_{y,n} = 0$ . Im ganzen müssen dann  $2(2n + 1)$  Koeffizienten aus einem System von  $2 \cdot 2n$  unabhängigen, linearen Gleichungen bestimmt werden, d.h. 2 Koeffizienten sind frei wählbar. Dies können z.B.  $C_{y,0}$  und  $C_{x,0}$  sein (z.B. Vorgabe der beiden Komponenten des Magnetfeldes an der Erdoberfläche). Völlig frei wählbar ist außerdem der Phasenwinkel  $\delta$ .

c) 3 Schichten  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ;  $z_0 = 0, z_1, z_2$ . Für das Folgende sei vorausgesetzt, daß alle Koeffizienten  $B_{x,k}, C_{x,k}$  ..... bestimmt worden sind. Das Verhältnis  $E_x/F_y$  (oder  $E_y/F_x$ ) kann dann laut

(3) nach einigen Umformungen in folgender Form geschrieben werden:

$$(6) \quad \frac{E_{x,k}}{F_{y,k}} = \frac{|E_{x,k}| e^{i(\omega t + \varphi_k)}}{|F_{y,k}| e^{i(\omega t + \psi_k)}} = \frac{|E_{x,k}|}{|F_{y,k}|} e^{i(\varphi_k - \psi_k)}$$

$$= -\frac{i\omega}{a_1} \bar{F} = -\frac{i\omega}{a_1} |\bar{F}| e^{i(\varphi_k - \psi_k)};$$

daraus folgt für  $z = 0$  (Erdoberfläche):

$$(7) \quad \left| \frac{E_{x,0}}{F_{y,0}} \right| = \sqrt{\frac{\rho_1}{2T}} |\bar{F}| = \sqrt{\frac{\rho_1}{2T}} f\left(\frac{T\rho_1}{z_1^2}; M_2, M_3, v_2\right);$$

hierbei ist  $z_1$  die Dicke der oberen Schicht,  $v_2 = z_2/z_1$ ;

$\mu_2 = \rho_2 / \rho_1$ ;  $\mu_3 = \rho_3 / \rho_1$ . Die Funktion  $f$  ist reell, dimensionslos und zeitunabhängig. Es folgt dann weiter:

$$(8a) \quad \frac{|E_{x,0}|}{|F_{y,0}|} \sqrt{\frac{2T}{\rho_1}} = f \quad \text{oder}$$

$$(8b) \quad \left( \frac{|E_{x,0}|}{|F_{y,0}|} \right)^2 \cdot \frac{2T}{\rho_1} = \frac{\rho_s}{\rho_1} = f^2$$

Die letzte Gleichung ist die Definitionsgleichung für den scheinbaren spezifischen Widerstand  $\rho_s$ . - Für ein vorgegebenes Modell mit den Parametern  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $v_2$  kann  $f^2$  als Funktion von  $T\rho_1/z_1$  berechnet werden.

Die Behandlung der Phasendifferenz  $\varphi_k - \psi_k$  und Modelle mit mehr als 3 Schichten sollen hier nicht erörtert werden.

d) Ist die zeitliche Variation der Felder nicht periodisch, so sind die Registrierungen der 4 Feldkomponenten harmonisch zu analysieren. Auf jedes Glied der Fourier-Reihe kann der oben grob skizzierte Mechanismus angewendet werden. Da 5 Parameter des Modells bei einem 3-Schichtenmodell frei wählbar sind, würden 5 verschiedene Perioden zur Bestimmung des Modells ausreichen. Die Betrachtung der Modellkurven lehrt, daß sehr unterschiedliche Perioden zur Bestimmung der Form und Lage der Kurven notwendig sind (Bandbreite von mehreren Oktaven). Hieraus ergibt sich auch die Berechtigung, die Perioden bei einer ersten vorläufigen Auswertung nach Augenmaß zu bestimmen. - Im allgemeinen wird man bestrebt sein, durch Auswertung möglichst vieler Effekte in den Registrierungen die "Bandbreite" zu erweitern. Theoretisch könnte durch die Auswertung eines einzigen Effektes, bei dem sehr viele unterschiedliche Perioden beobachtet wurden, das dem Untergrund zuzuordnende Modell bestimmt werden.

e) Zur Bestimmung des Modells verfährt man wie folgt:

Man zeichnet die Werte  $\rho_s / \rho_1$  eines 3-Schichtenmodells gegen  $T\rho_1/z_1^2$  in ein doppelt logarithmisch geteiltes Papier ein. Die Form der Kurve ist dann durch die Parameter  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $v_2$  bestimmt; die absoluten Größen von  $\rho_1$  und  $z_1$  dagegen bestimmen die Lage der Kurve im Koordinatensystem. Mit Hilfe von solchen Modellkurven

kann man aus einer experimentell aufgenommenen Kurve die Widerstände und Dicken der vorliegenden Schichten berechnen:

Aus den Registrierungen entnimmt man das Verhältnis der Amplituden  $|E_x|/|E_y|$  oder  $|E_y|/|E_x|$  für eine Periode. Bei einem einzelnen Effekt, z.B. bei einer Bay, ist es nicht immer leicht, diejenige Periode anzugeben, der bei einer Entwicklung der Funktionen  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$ , ... in eine Fourier-Reihe die größte Amplitude zugeordnet würde (Maximum des Spektrums). Die Erfahrung lehrt, daß dies bis auf einen Faktor 1,5 bis 2 möglich ist (Schätzfehler geringer als eine Oktave). Auch das Verhältnis der Amplituden ist im allgemeinen bis auf den Faktor 1,5 bis 2 bestimmbar. - Durch die so gewonnene Punktwolke der Werte  $|E_x|/|E_y|$ , usw. legt man dann - meist nach Augenmaß - eine Kurve. Es ist ratsam, die Werte dieser geglätteten Kurve nach der Beziehung (8b) umzurechnen, so daß man den spez. Widerstand  $\rho_s(T)$  erhält; dagegen ist nicht zu empfehlen, die einzelnen Werte  $|E_x|/|E_y|$ , usw. auf  $\rho_s$  umzurechnen, da sich die Streuung laut (8b) erheblich vergrößert, worauf K. Sengpiel hingewiesen hat.

Man zeichnet die so berechnete Meßkurve  $\rho_s$  über  $T$  im selben Maßstab wie die Modellkurven auf transparentes Papier (z.B. haben die Punkte der Werte 1 und 10 auf den Achsen beider Koordinatensysteme gleichen Abstand). - Die beiden Blätter werden aufeinander gelegt und achsenparallel so verschoben, daß sich die Meßkurve mit einer Modellkurve möglichst gut deckt. Nun bestimmt man die Koordinaten irgend eines Punktes (der nicht auf der Kurve zu liegen braucht) in beiden Koordinatensystemen. Er habe die Koordinaten  $(a, b)$  im  $(\rho_s, T)$ -System und  $(a', b')$  im  $(\rho_s/\rho_1, T\rho_1/z_1^2)$ -System. Es gilt  $\rho_s = a$ ,  $\rho_s/\rho_1 = a'$  und  $T = b$ ,  $\rho_1 T/z_1^2 = b'$ . Durch Eliminieren von  $\rho_s$  und  $T$  erhält man:

$$\rho_1 = a/a' \quad ; \quad z_1 = \sqrt{ab/a'b'}$$

Zweckmäßigerweise wählt man für  $(a', b')$  den Punkt  $(1;1)$ . (s. Fig. 1, S. 38)

Mißt man das elektrische Feld  $E$  in mV/km und das Magnetfeld in  $\mathcal{H}$ , so berechnet sich  $\rho_s$  laut Gleichung (8b) aus den beobachteten Amplituden der Registrierung  $|E_{x,0}|$  und  $|E_{y,0}|$  zu

$$\rho_s = (|E_{x,0}| / |E_{y,0}|)^2 \cdot 0,2 \cdot T \text{ } [\Omega \cdot \text{m}].$$

f) Das Verhältnis der beiden anderen Feldkomponenten  $E_y/F_x$  liefert die gleiche Funktion f, sofern die oben genannten Voraussetzungen erfüllt sind.- Im Rahmen dieser Modellrechnungen wurden 2 Feldkomponenten (z.B.  $F_{x,0}$  und  $F_{y,0}$ ) als unabhängig voneinander eingeführt; die Funktion f hängt nur von der Struktur des Untergrundes ab. Liefert die Auswertung der beiden Komponentenverhältnisse  $(E_x/F_y)_{z=0}$  und  $(E_y/F_x)_{z=0}$  unterschiedliche Modelle, so ist mindestens eine der Voraussetzungen dieser Theorie nicht erfüllt: z.B. die Schichten liegen nicht horizontal; oder es liegt Anisotropie vor.

## II. Auswertung der in der Literatur veröffentlichten Messungen

Es sollte geprüft werden, wie weit die Messungen der Magnetotellurik anhand von 3-Schichtenmodellen ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3, z_0=0, z_1, z_2$ ) interpretiert werden können. Dabei wurde bislang die Geologie an der Oberfläche und der Einfluß der Oberflächenleitfähigkeit auf die Messung des elektrischen Feldes nicht berücksichtigt. Es wurde also zunächst nicht geprüft, ob die Voraussetzungen der Theorie von Cagniard erfüllt waren. (Wenn z.B. die betrachtete Station nahe der Grenze zwischen Sedimentbecken und Kristallin liegt, so ist die dritte der oben genannten Bedingungen nicht erfüllt.) In der beigefügten Tabelle sind die Ergebnisse dieser Auswertung zusammengestellt.

Als Modellkurven wurden die von S.P. Srivastava, J.L. Douglass, S.H. Ward (1963) angegebenen Kurven verwendet. Diese Autoren nehmen Bezug auf die Arbeit von M.V. Kolmakov, N.P. Vladimirov (1961).

- In Fig. 2 (s.S. 39) sind die Modellkurven dieser Autoren wiedergegeben. In Fig. 3 (s.S. 40) sind die bekannten Modellkurven von L.Cagniard beigefügt. - In Fig. 4 (s.S. 41) und 5 (s.S. 42) sind die Werte des scheinbaren spezifischen Widerstandes  $\rho_s$  als Funktion von T aufgetragen, so wie sie den einzelnen Veröffentlichungen für die verschiedenen Stationen entnommen werden konnten.-Man erkennt, daß die Auswertung der beiden Komponenten einer Station keineswegs die gleichen Kurven ergeben. Es sind daher die beiden Komponenten für sich ausgewertet worden. Aus der Tabelle ist zu ersehen, welche Unterschiede in den Modellen sich hieraus ergeben.

Für die Stationen Meanook (Alberta, Kanada), Beiseker (Alberta, Kanada), Niemegek (Deutschland), Ückermünde (Deutschland) und

Auswertung von Meßkurven verschiedener Autoren

Beobachtungsort Autor	$\frac{E}{F}$	$z_1$ km	$z_2$ km	$\rho_1$ [ $\Omega$ m]	$\rho_2$ [ $\Omega$ m]	$\rho_3$ [ $\Omega$ m]
Meanook, Alberta (9)	$\frac{E}{F}$	3,5 - 4	140-180	6-8	1100-1700	60-80
Meanook, Alberta (10) nach (6)	$\frac{y}{x}$	2,5-3,5	100-160	4-5	700-1100	40-50
Meanook, Alberta (10) nach (6)	$\frac{y}{x}$	2 - 3	80-120	4-5	700-1100	40-50
Beiseker, Alberta (9)	$\frac{y}{x}$	3-3,5	60-70	6-7	550-750	6-7
Beiseker, Alberta (9)	$\frac{y}{x}$	?	?	?	?	?
Niemegk (10)	$\frac{y}{x}$	6,5-7,5	190-210	3,5-4,5	700-900	30-40
Niemegk (10)	$\frac{y}{x}$	6-8	180-240	1-3,5	300-400	30-40
Uckermünde (10)	$\frac{y}{x}$	6-8	145-240	1-3	100-600	1-15
Uckermünde (10)	$\frac{y}{x}$	$\leq 10$	?	$\leq 3$	?	?
Fürstenfeldbruck (10) nach (1)	$\frac{y}{x}$	$\leq 10$	?	$\leq 25$	$\geq 20 \cdot \rho_1$	?
Göttingen (10) nach (7)	$\frac{y}{x}$	60-70	?	40-50	?	?
Göttingen (10) nach (7)	$\frac{y}{x}$	70-80	?	25-35	?	?
Littleton-Massa- chusetts (10,3)	?	$\leq 45$	?	$\leq 6000$	?	?
Bansko, Bulgarien (5)	$\frac{y}{x}$	$\leq 30$	?	$\leq 30$	?	?
Bansko, Bulgarien (5)	$\frac{y}{x}$	$\leq 30$	?	$\leq 30$	?	?
Burgas, Bulgarien (5)	$\frac{y}{x}$	$\leq 25$	?	$\leq 16$	?	?
Burgas, Bulgarien (5)	$\frac{y}{x}$	$\leq 95$	?	$\leq 300$	?	?
Borok, USSR (8)	$\frac{y}{x}$	2-3	80-135	1-2	200-400	10-20
Borok, USSR (8)	$\frac{y}{x}$					

Die Meßkurven wurden mit Modellkurven aus den Arbeiten (2), (4) und (9) verglichen.  $x \hat{=} NS$ ,  $y \hat{=} EW$

Die Zahlen in Klammern geben die Nummern des Literaturverzeichnis an.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{F} \\ \frac{y}{x} \end{array} \right\} = \frac{E_y}{F_x}$$

Borok (USSR) liefert die Auswertung ein 3-Schichtenmodell, das einer Einteilung von Erdkruste und oberem Mantel in folgende 3 Schichten etwa entspricht: 1) Sediment (2 bis 8 km mächtig,  $1 \leq \rho_1 \leq 8$  [ $\Omega m$ ]), 2) Grundgebirge mit Teilen des Palaeozoikums, + Kristallin (Metamorphikum, Gneis, Granit) + tiefere Erdkruste + Teile des oberen Erdmantels (etwa 80 bis 200 km mächtig,  $100 \leq \rho_2 \leq 1700$  [ $\Omega m$ ]), 3) oberer Mantel (ab etwa 80 bis 200 km,  $5 \leq \rho_3 \leq 80$  [ $\Omega m$ ]).- Für die Station Fürstenfeldbruck (Deutschland) lassen sich nur die beiden oberen Schichten grob abschätzen.- Bei der Station Göttingen läßt sich anhand des bisher vorliegenden Materials die Schicht 1 ( $z_1, \rho_1$ ) nicht nachweisen.- Bei den übrigen Stationen ergab die Auswertung nur Abschätzungen für die obere Schicht. (Sediment).-

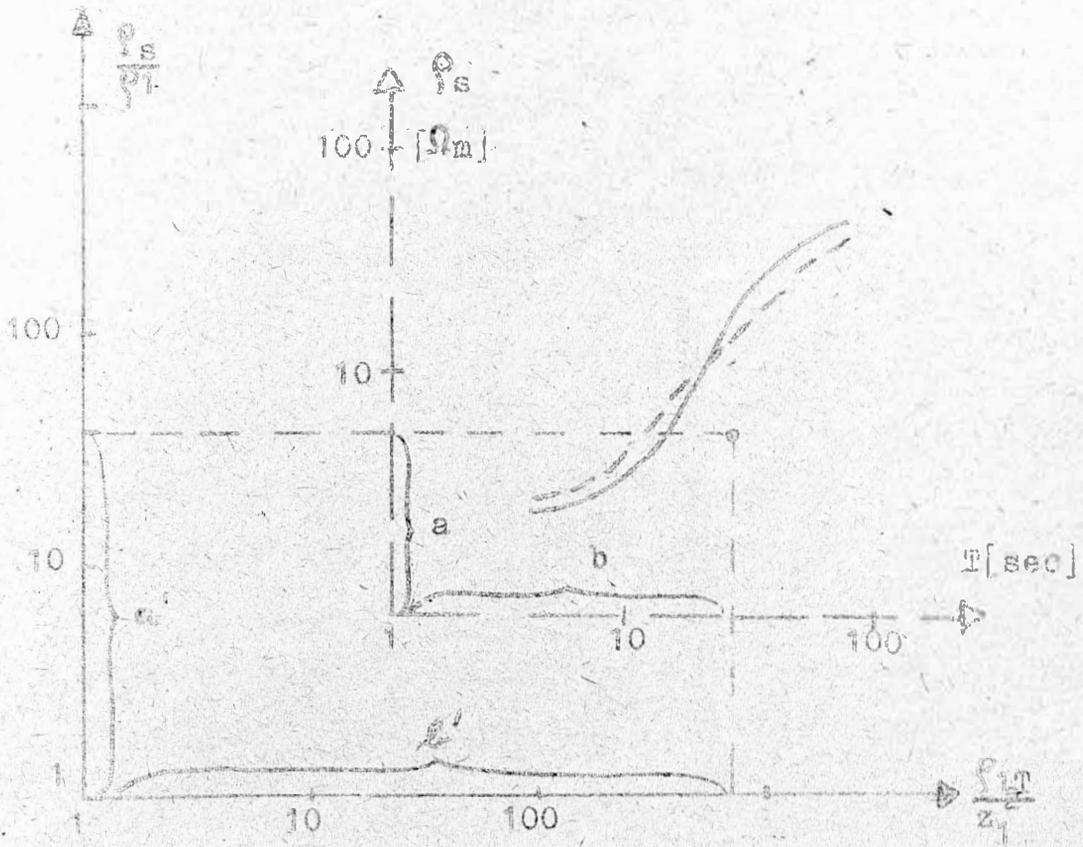
Eine befriedigende Auswertung ist nur möglich, wenn der scheinbare spezifische Widerstand  $\rho_s$  über einen Periodenbereich von 5 bis 50 000 sec bekannt ist.

#### Literatur:

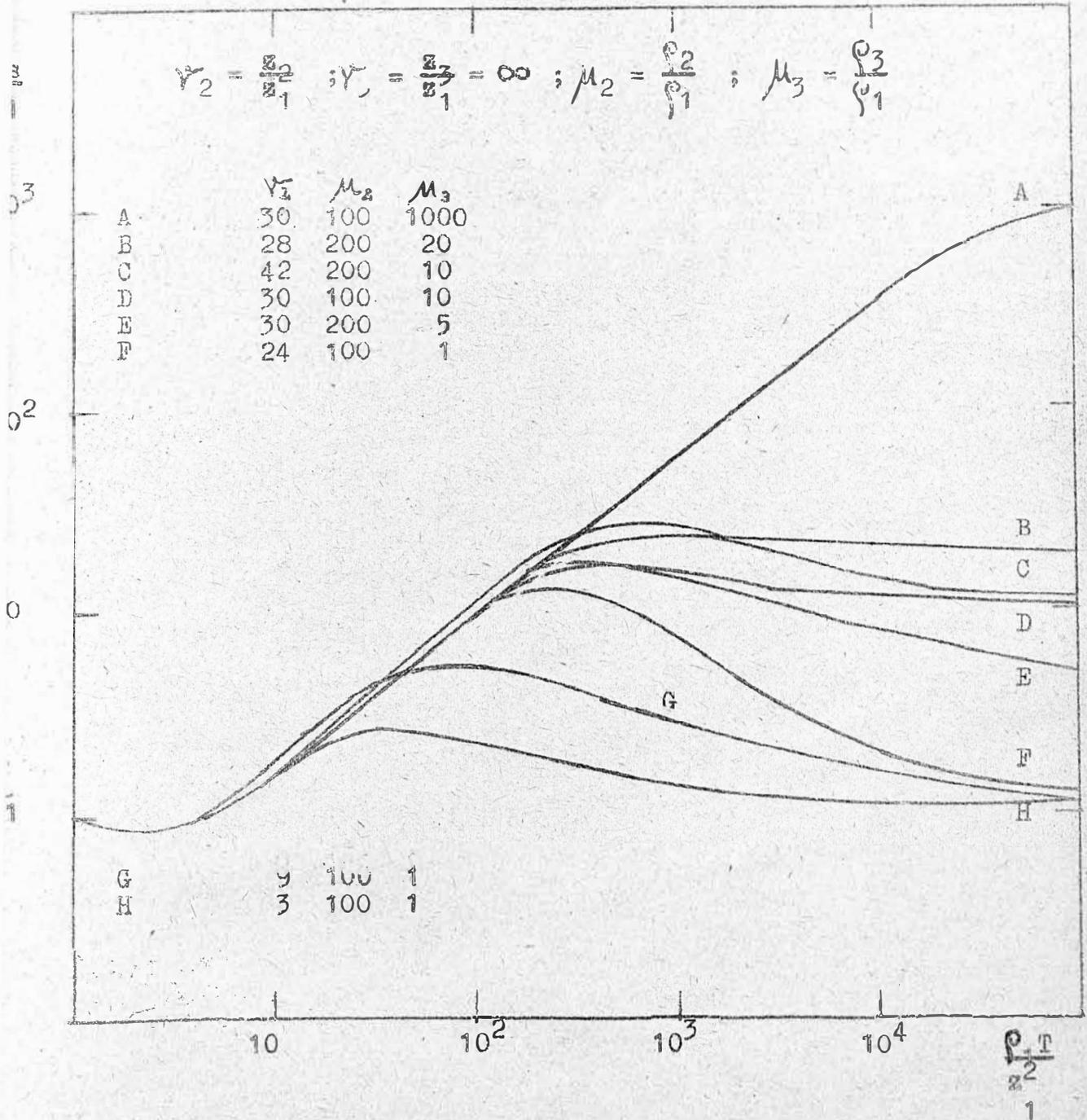
- (1) Burkhart, K., 1955: Mikropulsationen des Erdstroms und der erdmagnetischen Horizontalkomponenten, Z.f. Geophysik, Jg. 21, S. 57-73
- (2) Cagniard, L., 1953: Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting, Geophysics, v. 19, pp. 605-635
- (3) Cantwell, T. and T.R. Madden, 1960: Preliminary report on crustal magnetotelluric measurements, J. Geoph. Res., v. 65, 12, pp. 4202-4205

- (4) Kolmakov, M.V. and Vladimirov, N.P., 1961: On the equivalence of magnetotelluric sounding curves, *Izvestiya Acad. Sci. USSR*, Nr. 4, pp.544-552. (Engl. Ausgabe: *Bulletin (Izvestiya)*, 1961,4, pp.349-354)
- (5) Lengning, K., E. Ritter und H. Wiese, 1963: Auswertung der geomagnetischen und geoelektrischen Registrierungen in Südosteuropa im Januar und Februar 1961, *Gerlands Beitr. z. Geophys.*, Bd. 72, 4, S. 240-252
- (6) Niblett, E.R. and C. Sayn-Wittgenstein, 1960: Variation of electrical conductivity with depth by the magnetotelluric method, *Geoph.*, v. 25, pp. 998-1008
- (7) Repsold, H., 1959: Ergebnisse der Messung natürlicher Erdströme bei Göttingen, *Z.f. Geoph.*, Jg. 25, s. 97-103
- (8) Rokityanski, I.I., 1962: Deep magnetotelluric sounding at the Borok observatory, *Izvestiya Acad. Sci.*, Nr. 5, pp. 679-680 (Engl. Ausgabe: *Bulletin (Izvestiya)* 1962, 5, pp. 439-440)
- (9) Srivastava, S.P., J.L. Douglass and S.H. Ward, 1963: The application of the magnetotelluric and telluric methods in central Alberta, *Geophysics*, v. 28, 3, pp. 426-446
- (10) Wiese, H., 1962: Geomagnetische Tiefentellurik, Teil I: Die elektrische Leitfähigkeit der Erdkruste und des oberen Erdmantels, *Geofis. pura e appl.*, v. 51, pp. 59-78

Figur 1

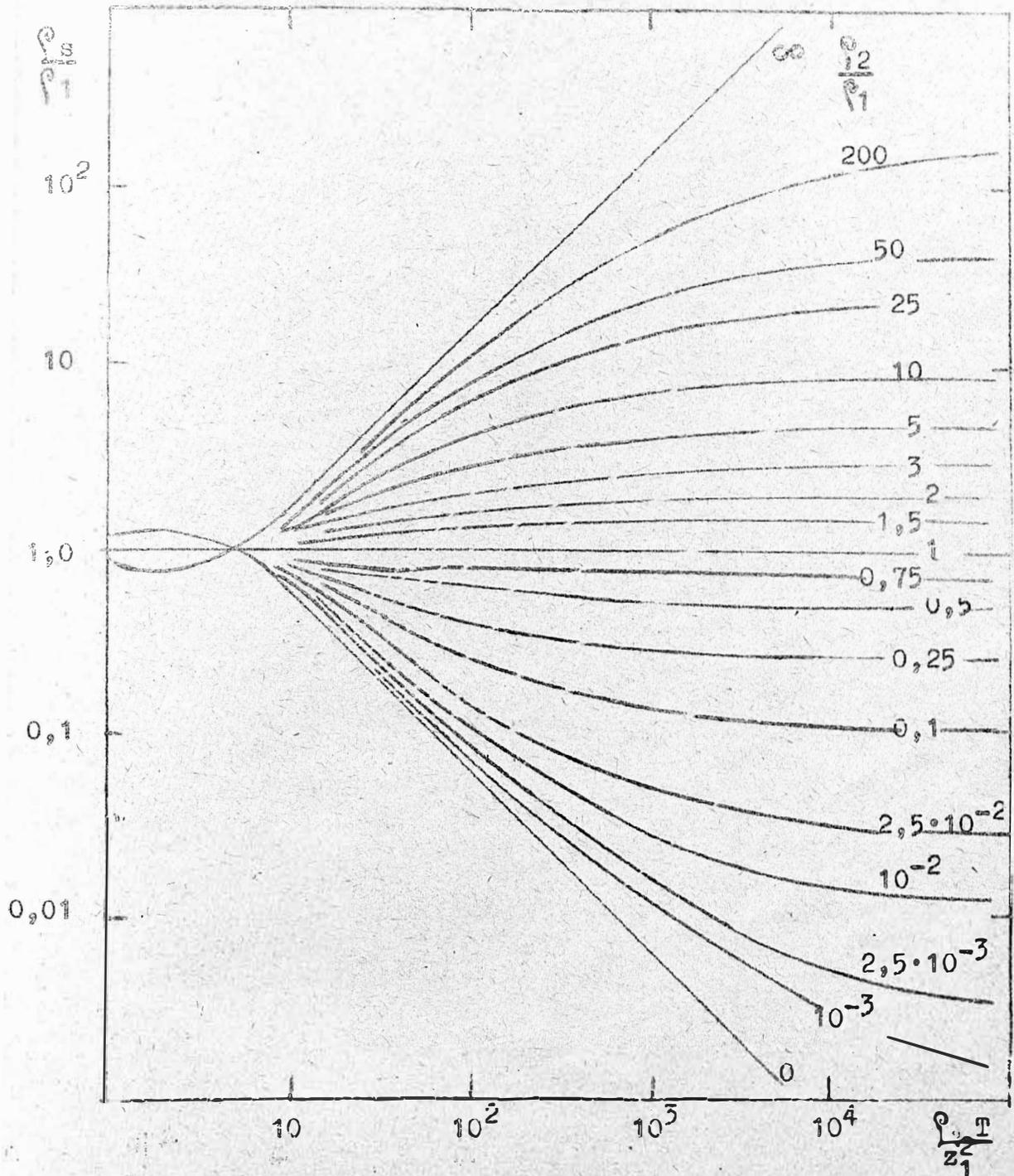


Figur 2



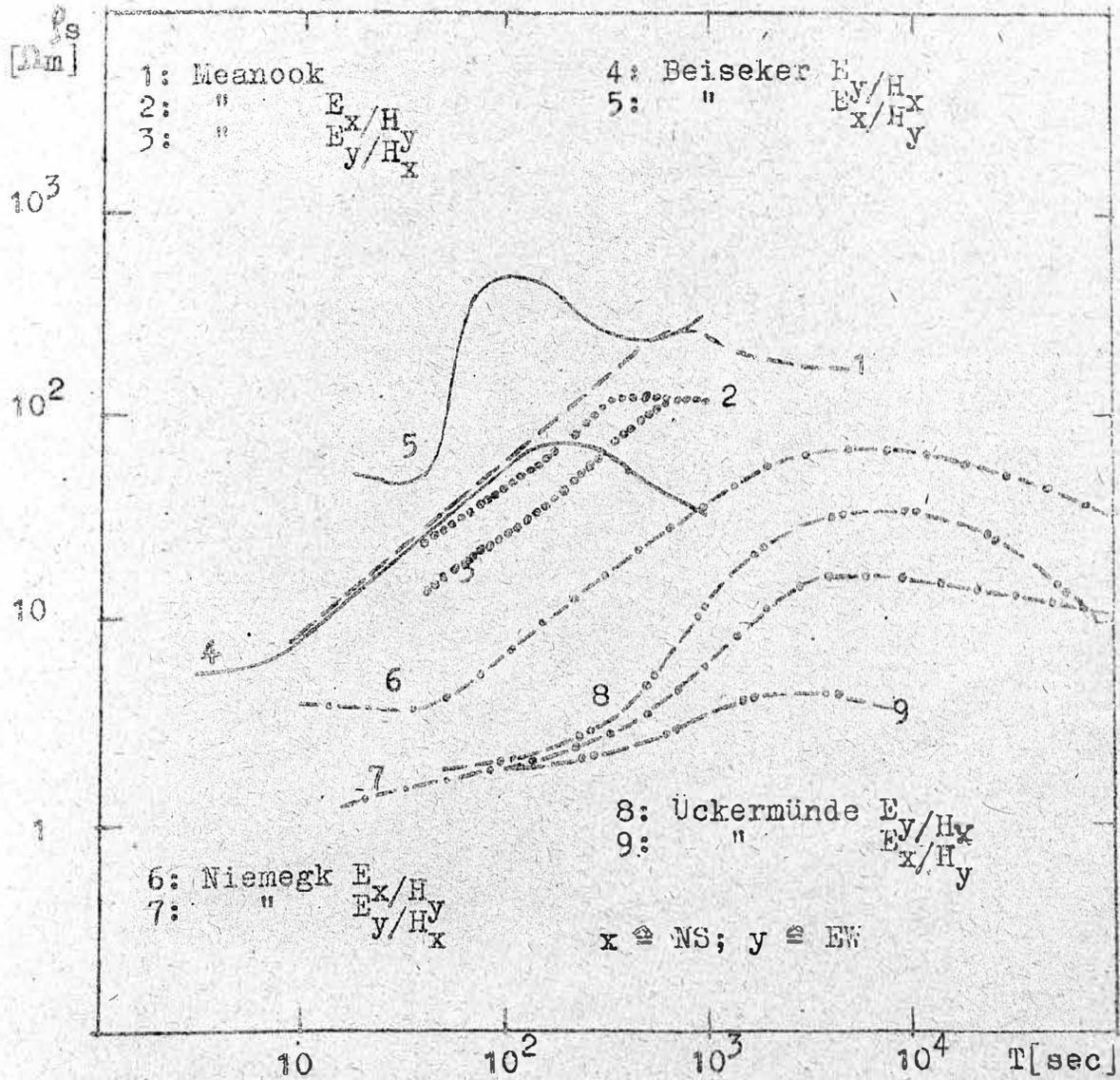
3-Schichten-Modelle nach Srivastava, Douglass und Ward;  
 $\rho_s$  scheinbarer spezifischer Widerstand,  $\rho_1$  spezifischer Widerstand der Schicht 1; T Periode;  $z_1$  Dicke der Schicht 1.

Figur 3



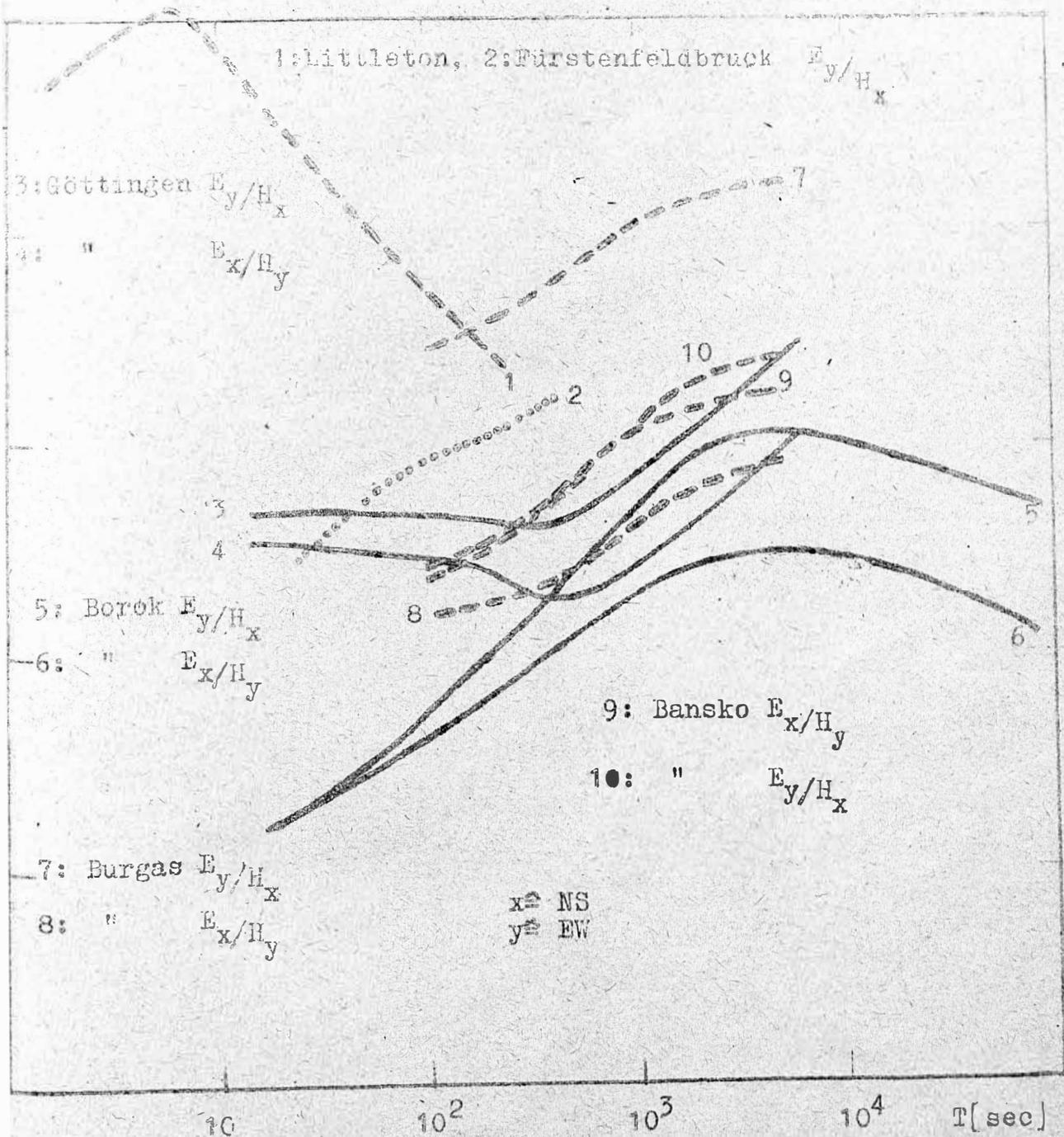
2-Schichtenmodell nach Cagniard,  $\rho_s$  scheinbarer spezifischer Widerstand,  $\rho_1$  spezifischer Widerstand der Deckschicht; T Periode ;  $z_1$  Dicke der Deckschicht.

Figur 4



Scheinbarer spezifischer Widerstand  $\rho_s$  gemessen an den angegebenen Stationen ( laut Angaben in der Literatur 1963)

Figur 5



Scheinbarer spezifischer Widerstand  $\rho_s$  gemessen an den angegebenen Stationen (laut Angaben in der Literatur bis 1963)