Vortrag Dr. Siebert, Göttingen

Ein Verfahren zur unmittelbaren Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung mit der Tiefe bei zweidimensionalen induzierenden Magnetfeldern mit veränderlicher Periode

Donnerstag, den 10.10.1963

Die Aufgabe, die sich die erdmagnetische Tiefensondierung gestellt hat, nämlich die Ermittlung der elektrischen Leitfähigkeit im Untergrund aus den Beobachtungen erdmagnetischer Variationen an der Erdoberfläche, ist von der Theorie bisher stets so behandelt worden, daß Leitfähigkeitsmodelle vorgegeben wurden und durch Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den Beobachtungen zwischen mehr und weniger brauchbaren Modellen unterschieden wurde und allenfalls noch bei den brauchbaren Modellen gewisse freie Parameter den Beobachtungen bestmöglich angepaßt wurden. Bereits auf dem vorjährigen Symposion in Kassel wurde darauf hingewiesen, daß versucht werden sollte, aus den Beobachtungen an der Erdoberfläche die Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund unmittelbar, d.h. ohne die Annahme eines Modells, zu bestimmen. Es wurde auch schon festgestellt, daß ein solches Verfahren auf der Verwendung von Störungen unterschiedlicher Periode beruhen muß, da sich das Problem nur dadurch von dem Problem der Potentialtheorie unterscheidet, aus der Feldverteilung außerhalb der Quellen oder Wirbel auf diese zu schließen, was bekanntlich nicht eindeutig möglich ist. Dagegen ist bei Verwendung der Periode als eines zusätzlichen Parameters eine eindeutige Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung denkbar; denn man kann vermuten, daß bei einer Variation der Periode von sehr kleinen bis zu sehr großen Werten nach und nach die Leitfähigkeit jeder Tiefe, von der Oberfläche angefangen bis zu entsprechend großen Tiefen, für den jeweiligen Induktionsvorgang vorherrschend ist, sich in den Beobachtungswerten widerspiegelt und dadurch bestimmt werden kann.

Im folgenden soll ein Verfahren entwickelt werden, nach dem auf die eben beschriebene Weise quantitativ aus beobachtbaren Größen an der Erdoberfläche die Leitfähigkeit als Funktion der Tiefe berechnet werden kann. Das Verfahren ist beschränkt auf den Fall inhomogener zweidimensionaler induzierender Magnetfelder in einem

Halbraum, dessen Leitfähigkeit nur von der Tiefe abhängt und somit in jeder Horizontalebene konstant ist. Es soll also keine Leitfähigkeitsanomalie vorliegen. Als Ausgangsgleichungen dienen wieder die Maxwell-Gleichungen für quasistationäre Vorgänge im Halbraum mit $\mu = 1$, (elektromagnetisches Maßsystem):

(1) $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\sigma\, \mathfrak{E}$ (2) $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{H}}$

Wegen $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ folgt nach Einführung des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ durch

(3) $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ mit $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$

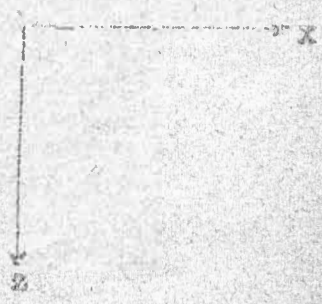
aus (1) und (2) auf bekannte Weise für $\mathfrak{A}$ die Gleichung

(4) $\Delta \mathfrak{A} = 4\pi\sigma \dot{\mathfrak{A}}$

In (4) darf die Leitfähigkeit σ noch räumlich variabel sein. Zur Spezialisierung auf den zweidimensionalen Fall wird gesetzt:

(5) $\mathfrak{H} = (X, 0, Z)$ mit $X = X\,(x, z)$ und $Z = Z\,(x, z)$.

Dann ist



(6) $\mathfrak{A} = (0, A, 0)$ mit $A = A\,(x, z)$

Die Ebene $z = 0$ sei die Beobachtungsebene.
Mit (5) und (6) folgt aus (3)

(7a) $X = -\dfrac{\partial A}{\partial z}$ und (7b) $Z = \dfrac{\partial A}{\partial x}$

Schließlich reduziert sich (4) für $\mathfrak{A}$ nach (6) auf

(8) $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 4\pi\sigma(z)\,\dot{A}$

Zur Lösung von (8) dient der Separationsansatz

(9) $A = f(x) \cdot g(z) \cdot e^{i\omega t}$

Mit β^2 als Separationskonstante ergibt sich für $f(x)$ eine einfache Schwingungsgleichung mit der (speziellen) Lösung:

(10) $f(x) \sim e^{i\beta x}$

Führt man die Abkürzung

(11) $\alpha^2 = 4\pi\omega = \dfrac{8\pi^2}{\tau}$

ein, so lautet die Differentialgleichung für $g(z)$ nach der Separation

(12) $\dfrac{d^2 g}{dz^2} - (\,i\alpha^2\sigma(z) + \beta^2)\, g = 0$

Der bisherige Weg zur Lösung von (8') ist derselbe, wie man ihn die Modellrechnungen benutzt. Jedoch wird dann so fortgefahren, daß in (12) für σ eine spezielle Verteilung angenommen und dafür g(z) bestimmt wird. Bei der vorliegenden Methode werden dagegen über σ keine weiteren Annahmen gemacht. Dies ist möglich, weil nach den vorher angestellten Überlegungen die Lösung von (12) allem in ihrer Abhängigkeit von der Periode τ interessiert, und nach (11): in Abhängigkeit vom Parameter α, beginnend mit groß Man wird somit dazu geführt, die gesuchte Lösung von (12) als Reihenentwicklung nach fallenden Potenzen von α anzusetzen. Di Lösungsverfahren entspricht der in der physikalischen Literatu sog. WBK-Methode (vgl. E. Kamke: Differentialgleichungen I (Gewöhnliche Differentialgleichungen), p. 138, 6. Aufl. 1959, Lei Als erster Schritt wird die folgende Transformation vorgenomme

(13) $g(z) = e^{-\alpha \int^{z} y(\zeta)\, d\zeta}$ mit $\alpha > 0$.

Durch die Festsetzung $\alpha > 0$ erhält man die Randbedingung

(14) $\int_0^z y(\zeta)\, d\zeta \to +\infty$ für $z \to +\infty$

damit A für $z \to +\infty$ verschwindet.

Einsetzen von (13) in (12) führt auf eine Riccatische Differen gleichung für y :

(15) $\alpha \frac{dy}{dz} - \alpha^2 y^2 + i\alpha^2 \sigma + \beta^2 = 0$

Für y wird nun der zuvor begründete Potenzreihenansatz nach fa den Potenzen von α gemacht

(16) $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(z)\, \alpha^{-n}$

Einsetzen von (16) in (15) und Vergleich der Koeffizienten von α^{-n} führt auf folgende Ausdrücke für die Koeffizienten y_n:

$$\alpha^2:\ y_0 = \sqrt{i\sigma} \qquad ;\ \alpha^1:\ y_1 = \frac{1}{2y_0}\frac{dy_0}{dz}$$

(17)
$$\alpha^0:\ y_2 = \frac{1}{2y_0}\left(\frac{dy_1}{dz} - y_1^2 + \beta^2\right)\ ;\ \alpha^{-1}:\ y_3 = \frac{1}{2y_0}\left(\frac{dy_2}{dz} - 2\ \ldots\right.$$

$$\alpha^{1-n}:\ y_{n+1} = \frac{1}{2y_0}\left(\frac{dy_n}{dz} - \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu y_{n+1-\nu}\right) \quad \text{für } n \geq 2$$

Das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{i\sigma}$ muß positiv genommen werden; da ist auch der Realteil der Wurzel positiv und y_0 genügt der Ra bedingung (14). Durch die Verknüpfung von y_0 mit σ lassen sich auch die übrigen y_n durch σ und seine Ableitungen nach z ausdrücken. Für die ersten vier Näherungen (17) erhält man dabei die Ausdrücke

$$y_0 = \sqrt{i\sigma} \quad ; \; y_1 = \frac{1}{4\sigma}\frac{d\sigma}{dz}$$

(18)
$$y_2 = \frac{1}{8\sqrt{i\sigma}}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{d^2\sigma}{dz^2} - \frac{5}{4\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2 + 4\,\beta^2\right]$$

$$y_3 = \frac{1}{16 i\sigma^2}\left[\frac{d^3\sigma}{dz^3} - \frac{9}{2\sigma}\frac{d\sigma}{dz}\frac{d^2\sigma}{dz^2} + \frac{15}{4\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^3 - 4\,\beta^2\frac{d\sigma}{dz}\right]$$

Jedes folgende y_n enthält also u.a. die nächst höhere Ableitung von σ nach z. Auf diese Weise läßt sich y in (16) aus den drei Grundgrößen σ, α und β aufbauen.

Einsetzen von (10) und (13) in (9) ergibt eine spezielle Lösung für A und durch Multiplikation der rechten Seite mit a (β) und Integration über alle Werte der Separationskonstanten β die für den vorliegenden Fall allgemeine Lösung. Sie lautet

(19) $$A = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\beta)\,\exp\left\{ i\,(\beta x + \omega t) - \alpha \int_0^z y\,(\zeta,\alpha,\beta)\,d\zeta \right\} d\beta$$

Nach (7a) und (7b) lassen sich aus (19) sofort die beiden Feldkomponenten X und Z berechnen. Sie lauten an der Oberfläche (z=0) des Halbraumes

(20) $$X(x,0,\alpha) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} y(0,\alpha,\beta)\; a(\beta)\; e^{i(\beta x+\omega t)}\, d\beta$$

(21) $$Z(x,0,\alpha) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \beta\; a\,(\beta)\; e^{i(\beta x+\omega t)} d\beta$$

Durch Anwendung der Fourier-Transformation auf (21) erhält man

(22) $$a(\beta) = \frac{1}{2\pi i\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} Z\,(\xi,0,\alpha)\; e^{-i(\beta\xi+\omega t)} d\xi$$

Einsetzen von a(β) nach (22) in (20) ergibt

(23) $$X(x,0,\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} y(0,\alpha,\beta)\,\frac{d\beta}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} Z\,(\xi,0,\alpha)\; e^{i\beta(x-\xi)} d\xi$$

Aus Stetigkeitsgründen können X und Z hier auch als die Feldkomponenten unmittelbar über dem Halbraum angesehen werden. Sie sind also durch das in Abhängigkeit von α beobachtete Störungsfeld $\mathfrak{F}$ auf einem x-Profil gegeben. Damit ist in (23) nur noch y unbekannt und kann ebenfalls in Abhängigkeit von α berechnet werden, woraus nach (16) und (18) σ und seine Ableitungen für z = 0 folgen. Dieser Vorgang wird noch klarer durch die folgenden Umformungen. Differenziert man X nach x, so geht (23) über in

$$(24)\quad \frac{dX(x,0,\alpha)}{dx} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,(0,\alpha,\beta)\,d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} Z\,(\xi,0,\alpha)\,e^{i\beta(x-\xi)}d\xi$$

Nun enthält y nach (18) Glieder, die unabhängig von β sind. In diesen Fällen läßt sich das verbleibende Doppelintegral in (24) sofort angeben, denn es gilt die Fourier-Integraldarstellung

$$(25)\quad Z\,(x,0,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\xi,0,\alpha)\,e^{i\beta(x-\xi)}d\xi$$

Weiter enthält y nach (18) Glieder mit β^2. In diesen Fällen ist das Doppelintegral in (24) wegen (25) proportional der zweiten Ableitung von Z nach x:

$$(26)\quad \frac{d^2Z(x,0,\alpha)}{dx^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \beta^2\,d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} Z\,(\xi,0,\alpha)\,e^{i\beta\,(x-\xi)}d\xi$$

Entsprechend läßt sich verfahren, wenn in den höheren Näherungen für y höhere Potenzen in β vorkommen.

Einsetzen von $y\,(0,\alpha,\beta)$ nach (16) mit (18) in (24) ergibt mit (25) und (26) für die ersten vier Näherungen nach Division durch Z die Beziehung

$$(27)\quad \boxed{\begin{aligned}
\frac{1}{Z(x,0,\alpha)}\frac{dX(x,0,\alpha)}{dx} &= (1+i)\sqrt{\frac{\sigma(0)}{2}}\,\alpha^1 + \frac{1}{4\sigma(0)}\left.\frac{d\sigma}{dz}\right|_0 \alpha^0 + \\
&+ \frac{1-i}{8\sqrt{2\sigma(0)}}\left[\frac{1}{\sigma(0)}\left.\frac{d^2\sigma}{dz^2}\right|_0 - \frac{5}{4\sigma^2(0)}\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2_0 - \frac{4}{Z(x,0,\alpha)}\frac{d^2Z(x,0,\alpha)}{dx^2}\right]\alpha^{-1} \\
&- \frac{i}{16\sigma^2(0)}\left[\left.\frac{d^3\sigma}{dz^3}\right|_0 - \frac{9}{2\sigma(0)}\left(\frac{d\sigma}{dz}\frac{d^2\sigma}{dz^2}\right)_0 + \frac{15}{4\sigma^2(0)}\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^3_0 + \right. \\
&\left. + \frac{4}{Z(x,0,\alpha)}\frac{d^2Z(x,0,\alpha)}{dx^2}\cdot\left.\frac{d\sigma}{dz}\right|_0\right]\alpha^{-2} \pm \dots
\end{aligned}}$$

Für die Anwendung von (27) genügt es, die Größen dX/dx, Z, d^2Z/dx^2 usw. an irgendeiner Stelle x des Profils in Abhängigkeit von α bzw. τ zu kennen. Man bildet daraus die in (27) vorkommenden Quotienten dieser Größen, die bei Berücksichtigung der i.a. vorhandenen Phasenunterschiede komplexe Zahlen sind. Es ist ratsam, dann Real- und Imaginärteil dieser Quotienten getrennt unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate durch Potenzreihen nach fallenden Potenzen von α darzustellen, beginnend mit dem Glied mit α^1. Zusammenfassen der jeweils beiden Reihen für Real- und Imaginärteil, Einsetzen in (27) und Koeffizientenvergleich nach Potenzen von α führt zur sukzessiven Bestimmung $\sigma(0)$, $d\sigma/dz|_0$, $d^2\sigma/dz^2|_0$, $d^3\sigma/dz^3|_0$ usw. Setzt man nun die Leitfähigkeitsverteilung mit der Tiefe in Form einer Mac Laurinschen Reihe an:

$$(28)\quad \sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n\sigma}{dz^n}\bigg|_0 z^n = \sigma(0) + \frac{d\sigma}{dz}\bigg|_0 z + \frac{1}{2}\frac{d^2\sigma}{dz^2}\bigg|_0 z^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\sigma}{dz^3}\bigg|_0 z^3 + \dots$$

so sind die darin auftretenden Ableitungen von σ nach z bei z = 0 gerade die Größen, die aus (27) bestimmt werden können. Damit ist nach (28) die Leitfähigkeit als Funktion der Tiefe bekannt.

Wie aus (27) ersichtlich ist, müssen zur Anwendung des Verfahrens so hohe Frequenzen vorliegen, daß der Koeffizient von α^1 mit aller Genauigkeit bestimmt werden kann. Ob Frequenzen auftreten, die hoch genug sind, erkennt man daran, daß der Quotient dX/Zdx in diesem Bereich hoher Frequenzen linear mit α ansteigt und einen Phasenwinkel von 45^0 besitzt. Diese Bedingungen sind allerdings mit wachsender Frequenz wiederum nur solange richtig, wie der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden kann. Nach den zu Beginn gemachten Voraussetzungen ist der Frequenzbereich, bei dem der Verschiebungsstrom eine Rolle spielt, für dieses Verfahren nicht brauchbar.

Die Tiefe, bis zu der die Leitfähigkeit nach (27) und (28) ermittelt werden kann, hängt neben der zu untersuchenden Leitfähigkeitsverteilung selbst vor allem von der unteren Grenze des verwendeten Frequenzbereiches und dem Grad der in (27) benutzten Entwicklung ab. Der Umstand, daß man in der Praxis mit einer nicht zu hohen Anzahl von Näherungen auskommen möchte, wodurch auch für σ nach (28) nur die ersten Glieder bestimmt werden, hat zur Folge, daß das Verfahren schlecht zum Nachweis von Leitfähigkeitssprüngen in irgendeiner Tiefe geeignet ist. In Fällen, in denen etwa aus geologischen Überlegungen mit merklichen Leitfähigkeitssprüngen zu rechnen ist, empfiehlt es sich nach wie vor, die Methode der Leitfähigkeitsmodelle zu benutzen.

Zu einer ersten Überprüfung des vorliegenden Verfahrens wurde ein exakt behandelbares Leitfähigkeitsmodell gewählt und die Lösung dieses Falles mit den Ergebnissen aus (27) verglichen. Die vorgegebene Leitfähigkeitsverteilung lautet

$$(29)\quad \sigma(z) = \sigma_0 e^{2\gamma z}$$

Ferner wurde angenommen, daß das induzierende Feld eine x-Abhängigkeit wie exp $(i\gamma x)$ besitzt. Dann lautet die einzige auftretende Komponente des Vektorpotentials als Lösung von (8) für diesen Fall

$$(30)\quad A = A_0 H_1^{(1)} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\sigma_0}\, i^{3/2}\, e^{\gamma z} \right) e^{i(\gamma x + \omega t)}$$

wobei $H_1^{(1)}$ die erste Hankel-Funktion erster Ordnung bezeichnet. Aus (30) lassen sich die Feldkomponenten und ihre Ableitungen berechnen. Die in (27) benötigten Quotienten können dann für großes Argument, entsprechend großem α, entwickelt werden und führen so zu einer Potenzreihe nach fallenden Potenzen von α, die unmittelbar mit (27) verglichen werden kann. Bis zu der in (27) angeführten Näherung ergab sich identische Übereinstimmung, wobei noch (29) in der Form der Potenzreihe (28) verwendet wurde. Dies Ergebnis besagt jedoch nicht mehr als die Richtigkeit des mathematischen Formalismus.

Für die praktische Anwendung des Verfahrens fehlen bisher noch jegliche Erfahrungen. Die erste Bedingung für eine Anwendung ist, Fälle zu finden, in denen die gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. Die Forderung nach zweidimensionalen induzierenden Magnetfeldern wird näherungsweise in begrenzten Gebieten von den Feldern der Polarlichtzonenströme und des äquatorialen Elektrojets erfüllt, bei denen auch mehr oder weniger periodische Schwankungen mit unterschiedlichen Perioden beobachtet werden. Wie schwierig es ist, in diesen Fällen selbst bei Approximation der Ströme durch Linienströme mit der Methode der verschiedenen Leitfähigkeitsmodelle zu arbeiten, zeigt bereits die Kompliziertheit der Behandlung des oszillierenden Linienstroms über einem homogenen leitenden Halbraum (vgl. F. Pollaczek: Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung, Elektr. Nachrichten-Technik 3, 339-359, (1926)). Der Versuch sollte daher gemacht werden, das vorliegende Verfahren bei der zur Zeit durchgeführten erdmagnetischen Tiefensondierung in Peru anzuwenden.

Im übrigen bleibt zu untersuchen, ob das Verfahren auf den Fall beliebiger induzierender Felder und auch auf die Ermittlung von Leitfähigkeitsanomalien (d.h. bei zusätzlicher Änderung der Leitfähigkeit auch in horizontaler Richtung) erweitert werden kann.