

Komponentenverfahren

Donnerstag, den 10.10.1963

Die Grundaufgabe der Erdmagnetischen Tiefensondierung besteht in der Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund. Zur Lösung dieser Aufgabe kommt den Variationen des erdmagnetischen Feldes wegen ihrer Großräumigkeit und ihres Periodenumfanges eine zentrale Bedeutung zu. Die vorliegende Arbeit befaßt sich speziell damit, ein Verfahren für die Auswertung der Variationen mit dem Ziel der Leitfähigkeitsbestimmung zu entwickeln, das einerseits keinerlei Bedingungen hinsichtlich der Quellen sowie der Zusammensetzung der Variationen stellt und zum anderen deren zeitlichen Ablauf, d.h. ihr gesamtes "Periodenangebot", mit als Informationsquelle einbezieht. Die Untersuchungen beschränken sich auf zweidimensionale Verteilungen - es geht demnach im einzelnen das Bestreben dahin, eine Aussage über die zweidimensionale Leitfähigkeitsverteilung in einem Vertikalschnitt durch die ebene Erde aus den längs der Erdoberfläche registrierten Variationen zu gewinnen. Den beiden Parametern des Ergebnisses, der Horizontal- und der Vertikal-Koordinate, entsprechen die beiden Parameter, Horizontal-Koordinate und Periode, bei den eingegebenen Daten.

Teil I Theorie des Verfahrens

Die Herleitung der Grundlagen des Verfahrens geht von zwei Punkten aus: Einmal stehen Registrierungen an der Erdoberfläche, mit anderen Worten zeitlich-variable Randwerte, zur Verfügung, während Informationen über die Verhältnisse im Untergrund gesucht sind. Diese Fragestellung weist in die Richtung der Randwertaufgaben, speziell auf den Greenschen Satz, der sich als wirksames Mittel zur Lösung von Randwertaufgaben erwiesen hat. Allerdings kann es sich hier nicht um eine Randwertaufgabe im üblichen Sinne handeln, da bei diesen die Randwerte und die gesuchten Werte außerhalb bzw. innerhalb des Randes von gleicher Dimension sind; hier aber handelt es sich bei den Randwerten um Magnetfeldkomponenten, während die gesuchte Größe die elektrische Leitfähigkeit ist.

Der zweite Ansatzpunkt ergibt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen, die bei Berücksichtigung der in vorliegenden Fall zulässigen Vereinfachungen auf eine parabolische Differentialgleichung führen:

Es sind dies die folgenden Vereinfachungen:

1. Verschiebungsströme werden vernachlässigt.
2. Die Permeabilität wird identisch = 1 gesetzt.
3. Raumladungen werden ausgeschlossen.

Von den Maxwell'schen Gleichungen - geschrieben in elektromagnetischen c-g-s-Einheiten - bleiben dann mit $j = \sigma \xi$ die beiden folgenden Beziehungen übrig:

$$\text{rot } \xi = 4\pi \sigma \xi ; \text{ rot } \xi = -\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Anwendung der Operationen rot auf die 1. Beziehung liefert

$$\text{rot rot } \xi = 4\pi \text{ rot } \sigma \xi$$

An dieser Stelle wird wichtig, ob die elektrische Leitfähigkeit σ ortsunabhängig oder ortsabhängig ist. Im 1. Falle erhält man

$$\text{rot rot } \xi = 4\pi \sigma \text{ rot } \xi = -4\pi \sigma \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

und über

$$\text{rot rot } \xi = \text{grad div } \xi - \Delta \xi : \Delta \xi = 4\pi \sigma \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (1)$$

Dies ist eine parabolische Differentialgleichung für das magnetische Feld.

Im Falle der ortsabhängigen Leitfähigkeit ist die Einführung eines Vektorpotentials Ω mit $\xi = \text{rot } \Omega$ und $\text{div } \Omega = 0$ für das Magnetfeld förderlich. Die 2. Maxwell'sche Beziehung wird dann integrierbar und auf genau entsprechendem Wege gewinnt man die Gleichung

$$\Delta \Omega = 4\pi \sigma \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

die nunmehr auch für ortsabhängige Leitfähigkeit gültig ist.

Übrigens zeigt eine kurze Überlegung, daß die Parallelität zwischen der parabolischen Differentialgleichung für das Magnetfeld und der Wärmeleitungsgleichung bei ortsunabhängiger Leitfähigkeit beim Übergang auf den Fall der ortsabhängigen Leitfähigkeit verloren geht: Ist g der Vektor der Wärmeströmung, dann gilt für ein Volumenelement $d\tau$

$$\text{div } g \, d\tau = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{oder mit } dQ = c\rho \, dm \, dT \text{ u. } dm = \rho \, d\tau$$
$$\text{div } g = -c\rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

wobei c die spezifische Wärme und ρ die Massendichte ist. Mit dem Fourierschen Ansatz $q = -k \text{ grad } T$ gilt

$$\textcircled{2} \quad \text{div } k \text{ grad } T = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

wo k und T die Wärmeleitfähigkeit bzw. die Temperatur bedeuten. Man sieht, daß nur im Falle räumlich-konstanter Wärmeleitfähigkeit k die Beziehung $\textcircled{2}$ in die bekannte Wärmeleitungsgleichung übergeht.

Die Beschränkung auf zweidimensionale Betrachtung erlaubt es, das Vektorpotential auf eine skalare Flächenfunktion zu reduzieren. Das Magnetfeld soll dementsprechend nur in der betrachteten Ebene Komponenten besitzen und das Vektorpotential stets senkrecht auf dieser Fläche stehen. Bezeichnet man diese Skalarfunktion mit $A(x, z)$, so gilt:

$$(3) \quad H_x = H = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad H_z = Z = \frac{\partial A}{\partial x}$$

Die zu Beginn erwähnten beiden Ausgangspunkte, der Zusammenhang mit einer Randwertaufgabe und die Gültigkeit einer parabolischen Differentialgleichung, führen darauf, als mathematischen Ansatz den Greenschen Satz für die parabolische Differentialgleichung zu benutzen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit (Figuren!) wird die Formulierung mit zunächst nur einer Raumkoordinate (z) gewählt und der Übergang auf zwei Raumkoordinaten später vollzogen. Nach Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, Band VI, schreibt sich der Greensche Satz für ein Gebiet F mit dem Rand S in allgemeiner Form:

$$\int_F [vL(u) - uM(v)] dz dt = \int_F \left(\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial K}{\partial t} \right) dz dt = \int_S I \cos(n, z) dt + \int_S K \cos(n, t) dz$$

Hierin sind $L(u)$ und $M(v)$ die jeweils zugrundeliegenden bzw. die dazu adjungierten Differentialausdrücke, im vorliegenden Falle also die parabolischen. Die Größen I und K sind Funktionen von u und v und bestimmen sich aus der Gleichsetzung der unter den linken Integralzeichen stehenden Klammern. Speziell für die parabolische Differentialgleichung werden L , M , I und K :

$$(4) \quad L_p = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\pi\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$(5) \quad M_p = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 4\pi\sigma \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$(6) \quad I_p = v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$(7) \quad K_p = -4\pi\sigma u v$$

Diese Spezialisierung liefert die folgende, zunächst für beliebige in der Fläche F einschließlich ihres Randes S zweimal differenzierbare Funktionen u und v gültige Beziehung:

$$(8) \int_{\Sigma} \left\{ v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\pi\sigma \frac{\partial u}{\partial t} \right) - u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 4\pi\sigma \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right\} dz dt = \int_{CA}^{BA} I_p \cos(\alpha, z) dt + \int_{A,C}^{B,D} K_p \cos(\alpha, t) dz$$

$$= \int_{ED}^{CA} I_p dt - \int_{A,C}^{BD} K_p dz = \int_{BD}^{CA} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt + 4\pi\sigma \int_{A,C}^{BD} uv dz \quad (\text{S. 92})$$

Erfüllen u und v die parabolische Differentialgleichung bzw. ihre adjungierte, so fällt die gesamte linke Seite der Gleichung (8) weg. Auf der rechten Seite wird für v die Hauptlösung V der adjungierten Differentialgleichung eingesetzt, während u als die jeweils interessierende, die parabolische Differentialgleichung erfüllende Größe interpretiert wird. Unter der Hauptlösung von (5) wird diejenige Lösung verstanden, die, ausgehend von $t = -\infty$ bis zum Zeitpunkt $t = \tau$ zu einem "Einheitspol" "zusammenläuft", d.h. sie ist bis auf die Zeitumkehr identisch mit der Hauptlösung U von (4), die ihrerseits das zeitliche "Auseinanderlaufen" eines Einheitspoles vom Zeitpunkt $t = \tau$ beginnend bis $t = \infty$ beschreibt.

Es gilt: $U = \sqrt{\frac{\sigma}{t-\tau}} e^{-\frac{\pi\sigma(t-\tau)^2}{t-\tau}}$ und $V = \sqrt{\frac{\sigma}{\tau-t}} e^{-\frac{\pi\sigma(\tau-t)^2}{\tau-t}}$
 V ist nur für Werte von $t < \tau$ erklärt. Anschaulich gesprochen beschreibt U den zeitlichen Verlauf im "Aufpunkt" z eines zur Zeit $t = \tau$ in den "Quellpunkt" z gelegten δ -Funktions-Charakter besitzenden Einheitspoles. Die Form von U entspricht einer allmählich auseinanderlaufenden Gaußschen Glocken-Kurve. Damit ergibt die Beziehung (8):

$$(9) 0 = \int_{CA}^{BA} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt + 4\pi\sigma \int_{A,C}^{BD} uv dz$$

Wählt man einen Halbstreifen von $t = -\infty$ bis $t = \tau$ als Integrationsgebiet (s. Fig. 2, S. 92), so fällt unter normalen Voraussetzungen ein Integrationsweg heraus und es bleibt

$$0 = 4\pi\sigma \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} u(z, 0) V(\tau-z, 0) dz + \int_0^{\tau} u(\tau, z) V(\tau-z, \tau) dz + \int_0^{\tau} \left[u(z, \tau) \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}^z dz \right\}$$

woraus für $u = 0$ zu Beginn des Vorganges sowie auf Grund des δ -Funktions-Charakters von V folgt:

$$(10) u(\tau, \tau) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_0^{\tau} \left(u(0, t) \left(\frac{\partial V}{\partial z}(\tau-z, t) \right)_{z=0} - V(\tau, t) \left(\frac{\partial u}{\partial z}(z, t) \right)_{z=0} \right) dt$$

Damit ist eine Darstellung des Wertes u an der Stelle ξ zum Zeitpunkt τ aus den Werten von u und $\frac{\partial u}{\partial z}$ im Punkte $z = 0$ zu allen Zeiten zwischen $t = 0$ und $t = \tau$ gegeben.

Nach der Theorie der Randwertaufgaben läßt sich von dieser Darstellung übergehen auf zwei andere, die nur noch entweder die Größen $u(0, t)$ oder $\frac{\partial u}{\partial z}(0, t)$ allein enthalten. Hierfür ist V durch die sogenannte Greensche Funktion G zu ersetzen, die folgenden 3 Bedingungen zu genügen hat:

1. Entweder a) $G_1 = 0$ Auf dem Rande, d.h. für $z = 0$
 oder b) $\frac{\partial G_2}{\partial z} = 0$
2. $M(G) = 0$, d.h. $G_{1,2}$ muß Lösung der adjungierten Differentialgleichung sein, und
3. Sie muß das raumzeitliche Verhalten eines Einheitspoles beschreiben.

Die Bedingungen in 2. und 3. werden bereits durch V erfüllt. Die Anpassung an Bedingung 1. wird durch das Spiegelungsprinzip erreicht, d.h. $G_{1,2}$ wird "aufgebaut" aus V nach

$$(10a) \quad G_{1,2} = \sqrt{\frac{c}{v-b}} \left(e^{-\frac{v(z+\xi)^2}{v-b(\tau-t)}} \mp e^{-\frac{v(z-\xi)^2}{v-b(\tau-t)}} \right)$$

wobei das Minuszeichen für den Fall 1a) und das Pluszeichen für 1b) steht. Man erhält dann durch Einsetzen der Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial z}\right)_{z=0} = -4\pi \sqrt{\frac{c}{v-b}} \xi e^{-\frac{v\xi^2}{v-b\tau}} \quad \text{bzw.} \quad (G_2)_{z=0} = 2\sqrt{\frac{c}{v-b}} e^{-\frac{v\xi^2}{v-b\tau}} \quad \text{in (10)}$$

$$(11) \quad u(\xi, \tau) = \sqrt{c} \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0, t)}{\sqrt{v-b(\tau-t)}} e^{-\frac{v\xi^2}{v-b(\tau-t)}} dt \quad \text{und}$$

$$(12) \quad u(\xi, \tau) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{c}} \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial u}{\partial z}(0, t)}{\sqrt{v-b(\tau-t)}} e^{-\frac{v\xi^2}{v-b(\tau-t)}} dt$$

Für Gleichung (11) läßt sich zeigen, daß die rechte Seite - wie es nach der Bedeutung der Randwerte auch sein muß - für $\xi \rightarrow 0$ gegen $u(0, \tau)$ strebt. Die Darstellung der Werte $u(\xi, \tau)$ geht also stetig in die Randwerte über.

Der Übergang zu 2 Raumkoordinaten ist ohne Schwierigkeiten durchführbar. An die Stelle der eindimensionalen Gleichungen (11) und (12) treten dann die folgenden:

$$(13) \quad u(\xi, \eta, \tau) = -c \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, t) e^{-\frac{v[(\xi-x)^2 + \eta^2 + \tau^2 - t^2]}{v-b(\tau-t)}}}{(v-b(\tau-t))^2} dx dt$$

$$(14) \quad u(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial u}{\partial z}(x, t) e^{-\frac{v[(\xi-x)^2 + \eta^2 + \tau^2 - t^2]}{v-b(\tau-t)}}}{v-b(\tau-t)} dx dt$$

Neu ist jetzt aber, daß in diesen Beziehungen u als Vektorpotential gedeutet werden und der Übergang zu den Komponenten des Magnetfeldes durch Differenzieren vollzogen werden kann.

An sich ist (14) im Fall konstanter Leitfähigkeit für jede der drei Feld-Komponenten für sich gültig. In dem später interessierenden Falle $\gamma \rightarrow 0$ würde diese Darstellung aber in eine identische Gleichung, $u = u$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ übergehen. Der Kernpunkt des Verfahrens liegt nun in der Deutung von u als Vektorpotential und im Übergang von u auf verschiedene Komponenten des Magnetfeldes (Komponentenverfahren!). Mit Hilfe der Gleichungen (3) erhält man aus (14) durch Differenzieren nach ξ

$$Z(\xi, \eta, \tau) = \int_0^{\tau+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, t) \frac{\xi-x}{(\tau-t)^2} e^{-\frac{\pi\sigma[(\xi-x)^2 + \eta^2]}{\tau-t}} dx dt$$

Diese Beziehung stellt eine Umrechnungsformel dar, die die Berechnung der Z-Komponente aus der H-Komponente gestattet, ähnlich wie das aus der Potentialtheorie für stationäre Felder bekannt ist. Sie liefert die Z-Komponente im Punkte ξ, η zur Zeit τ aus den Werten der H-Komponente auf der gesamten Randgeraden $\eta = 0$ und zu allen Zeiten von $t = 0$ bis $t = \tau$. Offenbar läßt sich diese Darstellung ohne weiteres durch Übergang auf $\eta = 0$ auf die Randgerade ausdehnen, d.h. es gilt

$$(15) \quad Z(\xi, 0, \tau) = \int_0^{\tau+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, t) \frac{\xi-x}{(\tau-t)^2} e^{-\frac{\pi\sigma|\xi-x|^2}{\tau-t}} dx dt$$

Diese Umrechnungsbeziehung gilt für zeitlich-variable Magnetfelder, die im Gegensatz zu den stationären Feldern der Potentialtheorie nicht mehr nur außerhalb oder nur innerhalb des Randes Quellen besitzen, sondern sowohl außerhalb wie innerhalb, wobei aber die inneren Quellen durch die zeitliche Änderung der äußeren induziert sind. Darüber hinaus bedeutet die Herleitung dieser Beziehung aus den Darstellungen der Werte des Vektorpotentials im Inneren aus seinen Randwerten, wobei diese Darstellungen ^{bei} Annäherung an den Rand gegen die Randwerte streben müssen, daß unter den in den Gleichungen vorkommenden Komponenten Z und H stets die Gesamtkomponenten, d.h. die Summen aus den äußeren und inneren Anteile zu verstehen sind. Es handelt sich also um eine Umrechnungsformel, die den Vorgang der Induktion mit einbezieht.

Übrigens läßt sich durch einfache Überlegungen auch ein unmittelbarer Übergang von den Formeln (13) und (14) zu solchen für stationäre Felder vollziehen. Man kommt dabei auf die bekannten Gleichungen:

$$Z(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \frac{\xi-x}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} dx, \text{ d. h. } Z(\xi, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(x)}{\xi-x} dx \text{ und}$$

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \frac{\eta}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx$$

Anhand der Gleichung (15) sei kurz der Fortgang der Herleitung erläutert. Die Komponente H soll später als unabhängig von x betrachtet, d.h. es soll ein über die gesamte Erdoberfläche homogenes Horizontalfeld vorausgesetzt werden. Das tatsächliche Horizontalfeld ist danach längs der Erdoberfläche in einen homogenen und einen inhomogenen Anteil aufzuteilen.

Geht man aber in Gleichung (15) - sie gilt wohlgerne für konstante Leitfähigkeit - mit einem von x unabhängigen H ein, d.h. nimmt man H aus der Integration über x heraus und führt die Integration des verbleibenden Integranden über x durch, so wird der gesamte Ausdruck Null. (Integrand entspricht der Ableitung der Gaußschen Normalverteilung). Das muß aber auch sein, denn bei homogenem Horizontalfeld und konstanter Leitfähigkeit kann eine Vertikalkomponente nicht entstehen. Umgekehrt muß aber bei beliebiger von der x-Koordinate abhängiger Leitfähigkeitsverteilung auch von einem Horizontalfeld, das seinerseits nicht von x abhängt, infolge der nunmehr inhomogenen Stromdichteverteilung im Untergrund eine Vertikalkomponente erzeugt werden.

Es besteht jetzt die Aufgabe, die bisher gefundenen Beziehungen auf den Fall der örtlich-variablen Leitfähigkeit zu übertragen. Hierzu ist von der Gleichung

$$(16) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\sigma(x, z) \frac{\partial u}{\partial t}$$

auszugehen. Ganzanalog zu dem bisherigen Vorgehen erhält man schließlich die der Gleichung (10) entsprechende Beziehung

$$(17) u(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi\sigma(\xi, \eta)} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (u \frac{\partial V}{\partial \eta} - V \frac{\partial u}{\partial \eta}) dx dt$$

Hierin ist u das Vektorpotential des Magnetfeldes, während V wieder den von ξ, x, η, z und $t-\tau$ abhängigen zeitlich-gespiegelten Verlauf (Vektorpotential)-Einheitspoles beschreibt, der zur Zeit $t=0$ im Punkte $x = \xi$ und $z = \eta$ (Quell-punkt) vorliegt und im Punkte x, z beobachtet wird (Aufpunkt). Dabei ist aber wichtig, daß V im Gegensatz zu den Verhältnissen bei konstanter

Leitfähigkeit nicht mehr lediglich vom Abstand zwischen Quellpunkt (ξ, η) und Aufpunkt (x, z) abhängt, sondern daß der zeitliche Ablauf des Einheitspoles z.B. an zwei verschiedenen Aufpunkten, die gleich weit vom Quellpunkt entfernt liegen, je nach der vorgegebenen Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit völlig unterschiedlich aussehen kann. Die Ortsabhängigkeit der Leitfähigkeit taucht also in Gleichung (17) nicht nur explizit bei σ sondern auch implizit bei V auf.

Auch im Falle der ortsabhängigen Leitfähigkeit ist jetzt auf eine Funktion G überzugehen, die den Bedingungen der Greenschen Funktion genügt. Bei entsprechender Anwendung des Spiegelungsprinzips ist hierzu jedoch die vorgegebene Leitfähigkeitsverteilung an der Randebene mitzuspiegeln. Es sind somit 2 Funktionen $G_{1,2}$ denkbar, die die erwähnten Bedingungen erfüllen. Allerdings ist eine der Gleichung (10a) entsprechende geschlossene Darstellung nicht mehr möglich, woran die bereits für V festgestellte Abhängigkeit von x, z über σ schuld ist. Es läßt sich jedoch zeigen, daß die Vertauschbarkeit von Quell- und Aufpunkt erhalten bleibt.

Ohne Rücksicht auf die Ermittlung von $G_{1,2}$ folgen aufgrund ihrer Eigenschaften die nachstehenden beiden Gleichungen

$$(18) \quad u(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi\sigma(\xi, \eta)} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0, t) \frac{\partial G_1}{\partial n}(\xi, x, \eta, 0, \tau-t) dx dt \quad \text{und}$$

$$(19) \quad u(\xi, \eta, \tau) = -\frac{1}{4\pi\sigma(\xi, \eta)} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0, t) G_2(\xi, x, \eta, 0, \tau-t) dx dt$$

Mit Hilfe der Beziehungen (3) und Differenzieren nach ξ folgt aus

$$(19) \quad Z(\xi, \eta, \tau) = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4\pi\sigma(\xi, \eta)} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, 0, t) G_2(\xi, x, \eta, 0, \tau-t) dx dt$$

und unter der Voraussetzung von $\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 0$ für $\xi = 0$:

$$(20) \quad Z(\xi, 0, \tau) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, 0, t) \frac{\partial G_2}{\partial \xi}(\xi, x, 0, 0, \tau-t) dx dt$$

wobei σ jetzt eine Konstante ist, da es für $\xi = 0$ nicht mehr von ξ abhängen soll. Diese Gleichung entspricht der Beziehung (15).

Setzt man - wie oben bereits angedeutet - H als homogen, d.h. von x unabhängig voraus ($H = H_0$), so läßt sich (20) folgendermaßen schreiben

$$Z(\xi, 0, \tau) = \left\{ H_0(0, t) \right\} - \frac{1}{4\pi\sigma} \int_0^{\tau} \left\{ \frac{\partial G_2}{\partial \xi}(\xi, x, \tau-t) dx \right\} dt$$

und mit Zusammenfassung des Ausdruckes in den geschweiften Klammern zu $g(\xi, \tau-t)$

$$(21) \quad z(\xi, 0, \tau) = \int_0^{\tau} H_1(0, t) g(\xi, \tau - t) dt$$

Das jetzt rechts stehende Integral entpuppt sich offenbar als ein Faltungsgesetz.

Die Anwendung des Faltungsgesetzes gestattet dann folgende Formulierung:

$$g^*(\xi, \omega) = \frac{z^*(\xi, \omega)}{H_1^*(\omega)},$$

wobei die gestrichelten Größen die Transformaten sein sollen. Die rechts stehenden Größen sind durch Analyse der Registrierung unmittelbar zu erhalten, so daß $g^*(\xi, \omega)$ und damit auch die zugehörige transformierte $g(\xi, t)$ ermittelt werden kann.

Unter $g(\xi, t)$ ist der nach ξ differenzierte und von ξ abhängige zeitliche Verlauf von zu Beginn des Vorganges in allen Punkten der Erdoberfläche gleichzeitig vorliegenden Vektorpotentiale der Einheitspole zu verstehen. Es entspricht dem zeitlichen Verlauf der Vertikalkomponente, die von der zu den Einheitspolen gehörenden homogenen Horizontalkomponente unter Einwirkung der in horizontaler Richtung inhomogenen Leitfähigkeitsverteilung hervorgerufen ist.

Sie enthält damit in komprimierter Form die Information über die anomale Verteilung der Leitfähigkeit im Untergrund.

Es bleibt jetzt die Aufgabe, aus den Registrierungen die Funktion $g(\xi, t)$ zu ermitteln und eine Leitfähigkeitsverteilung anzugeben, die für anfänglich an allen Punkten der Erdoberfläche vorliegende Einheitspole als zeitlichen Ablauf gerade die Funktion g liefert.

Teil II Praktische Durchführung des Verfahrens

1. Analyse der Registrierungen

Für die Analyse der Registrierungen soll ein numerisches Filterverfahren angewandt werden. Auf diese Weise erscheint es relativ einfach möglich einen magnetischen Sturm auszuwerten, so daß aus einem einheitlichen, zusammenhängenden Störungsvorgang ein verhältnismäßig breiter Periodenbereich erfaßt wird:

Zur Herleitung des Filterverfahrens geht man davon aus, eine aus n äquidistanten Werten bestehende und periodisch angenommene Zeitreihe als n -dimensionalen Vektor \underline{y} aufzufassen und nach n linear unabhängigen Basis-Vektoren y_k zu entwickeln. Als Basisvektoren dienen speziell Eigenvektoren eines Verschiebungsoperators V der, angewandt auf einen Vektor \underline{y} lediglich die Verschiebung aller Komponenten des Vektors um eine Stelle nach links (Periodizität beachten) bewirkt. Danach gelten die beiden Gleichungen

$$(22) \underline{y} = \sum_{k=0}^{n-1} k_k y_k \quad \text{und} \quad V y_k = \alpha_k y_k \quad (\text{Eigenvektoren})$$

Gesucht sind nun Operatoren H_k , die, angewandt auf einen Vektor \underline{y} einen bestimmten Basisvektor y_k herausfiltern, d.h. H_k so, daß

$H_k \underline{y} = k_k y_k$. Für den Aufbau dieser Operatoren dient ein Polynomansatz in V , der auf die (reelle) Beziehung führt

$$H_k = H_k + H_{n-k} = \sum_{v=0}^{n-1} v_{kv} V^v$$

Andererseits läßt sich in einem y_k -Diagramm (siehe Figur 3.8.92) ein Spektralfenster festlegen, das seinerseits als Vektor \underline{f}_k gedeutet und ebenfalls nach den Basisvektoren gemäß

$$\underline{f}_k = \sum_{v=0}^{n-1} v_{kv} y_v$$

entwickelt werden kann. Es zeigt sich nun, daß die Anwendung des obigen Operators H_k auf den Vektor \underline{y} tatsächlich wieder die Darstellung (22) mit Hilfe der Basisvektoren liefert, wobei jedoch jetzt die einzelnen Komponenten k_k mit den vorgegebenen Fensterkomponenten h_k multipliziert sind. Die Zusammenfassung je zweier der komplexen Basisvektoren zu einem reellen liefert die reelle Darstellung der phasengerecht herausgefilterten Teilwelle. Figur 3.8.93 (s.S.93) gibt ein Beispiel der hiernach gefilterten Registrierungen von ΔH an der Station Wildeck und ΔZ an der Station Fallersleben für den Sturm vom 26. Nov. 1957. Die Auswertung dieser Kurven führte zu den Figuren 5-7 (s.S.94-95), die die absoluten Beträge von ΔH und ΔZ , das Verhältnis ihrer Amplituden zueinander sowie die Phasenverschiebungen als Funktion der Frequenz wiedergeben. Eine Synthese der beiden letzten Darstellungen führt zu der gesuchten Funktion $g(\xi, t)$ für die Station Fallersleben.

2. Numerische Behandlung der parabolischen Differentialgleichung

Die Beschränkung auf 2 räumliche Koordinaten ermöglichte die

Reduktion des Vektorpotentials auf eine Skalarfunktion. Damit bildet die Gleichung (16)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\sigma(x, z) \frac{\partial u}{\partial t}$$

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen. Diese Gleichung wird ersetzt durch eine Differenzgleichung, wodurch an die Stelle der kontinuierlichen Funktionswerte $u(x, z, t)$ die abzählbaren Einzelwerte $u_{i,k,l}$ treten in den Gitterpunkten i, k, l . Der Differentialquotient nach der Zeit wird ersetzt durch

$$\frac{1}{l} (u_{i,k,l+1} - u_{i,k,l})$$

und entsprechend wird aus den 2. Differentialquotienten des 0

$$\frac{1}{h_x^2} (u_{i+1,k,l} + u_{i-1,k,l} - 2u_{i,k,l}) \text{ bzw. } \frac{1}{h_z^2} (u_{i,k,l+1} + u_{i,k,l-1} - 2u_{i,k,l})$$

Bei Gleichsetzung von $h_x = h_z = h$ ergibt sich

$$\frac{1}{h^2} (u_{i+1,k,l} + u_{i-1,k,l} + u_{i,k,l+1} + u_{i,k,l-1} - 4u_{i,k,l}) = \frac{4\pi\sigma}{l} (u_{i,k,l+1} - u_{i,k,l})$$

$$\text{oder } \frac{1}{4\pi\sigma h^2} (u_{i+1,k,l} + u_{i-1,k,l} + u_{i,k,l+1} + u_{i,k,l-1}) + u_{i,k,l} = u_{i,k,l+1}$$

Entscheidend ist die Auswahl von h und l . Eine beachtliche Verringerung der unvermeidlichen Abrundungsfehler wird erreicht, wenn das einzelstehende Glied $u_{i,k,l}$ beseitigt wird. Das erreicht man durch die Festsetzung

$$(23) \frac{1}{4\pi\sigma h^2} = \frac{1}{4}$$

und es bleibt

$$(24) \frac{1}{4} (u_{i+1,k,l} + u_{i-1,k,l} + u_{i,k,l+1} + u_{i,k,l-1}) = u_{i,k,l+1}$$

d.h. der nach Ablauf des nächsten Zeitintervalls l in einem bestimmten Punkt vorherrschende Wert entspricht dem Mittelwert der 4 Nachbarwerte zu Beginn des Zeitintervalls.

Die Forderung (23) bringt einen Zusammenhang zwischen den Intervalllängen und der elektrischen Leitfähigkeit herein, d.h., eine Änderung der Leitfähigkeit muß durch eine entsprechende Änderung der Intervalllängen aufgefangen werden. Es dient offenbar der Übersichtlichkeit, wenn man hierzu die räumlichen Intervalllängen benutzt.

Reduktion des Vektorpotentials auf eine Skalarfunktion. Damit bildet die Gleichung (16)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\sigma(x, z) \frac{\partial u}{\partial t}$$

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen. Diese Gleichung wird ersetzt durch eine Differenzengleichung, wodurch an die Stelle der kontinuierlichen Funktionswerte $u(x, z, t)$ die abzählbaren Einzelwerte $u_{i, k, l}$ treten in den Gitterpunkten i, k, l . Der Differentialquotient nach der Zeit wird ersetzt durch

$$\frac{1}{l} (u_{i, k, l+1} - u_{i, k, l})$$

und entsprechend wird aus den 2. Differentialquotienten des Ortes

$$\frac{1}{h_x^2} (u_{i+1, k, l} + u_{i-1, k, l} - 2u_{i, k, l}) \text{ bzw. } \frac{1}{h_z^2} (u_{i, k+1, l} + u_{i, k-1, l} - 2u_{i, k, l})$$

Bei Gleichsetzung von $h_x = h_z = h$ ergibt sich

$$\frac{1}{h^2} (u_{i+1, k, l} + u_{i-1, k, l} + u_{i, k+1, l} + u_{i, k-1, l} - 4u_{i, k, l}) = \frac{4\pi\sigma}{l} (u_{i, k, l+1} - u_{i, k, l})$$

$$\text{oder } \frac{1}{4\pi\sigma h^2} (u_{i+1, k, l} + u_{i-1, k, l} + u_{i, k+1, l} + u_{i, k-1, l}) + u_{i, k, l} = u_{i, k, l+1}$$

Entscheidend ist die Auswahl von h und l . Eine beachtliche Verminderung der unvermeidlichen Abrundungsfehler wird erreicht, wenn das einzelstehende Glied $u_{i, k, l}$ beseitigt wird.

Das erreicht man durch die Festsetzung

$$(23) \frac{1}{4\pi\sigma h^2} = \frac{1}{4}$$

und es bleibt

$$(24) \frac{1}{4} (u_{i+1, k, l} + u_{i-1, k, l} + u_{i, k+1, l} + u_{i, k-1, l}) = u_{i, k, l+1}$$

d.h. der nach Ablauf des nächsten Zeitintervalls l in einem bestimmten Punkt vorherrschende Wert entspricht dem Mittelwert aus den 4 Nachbarwerten zu Beginn des Zeitintervalls.

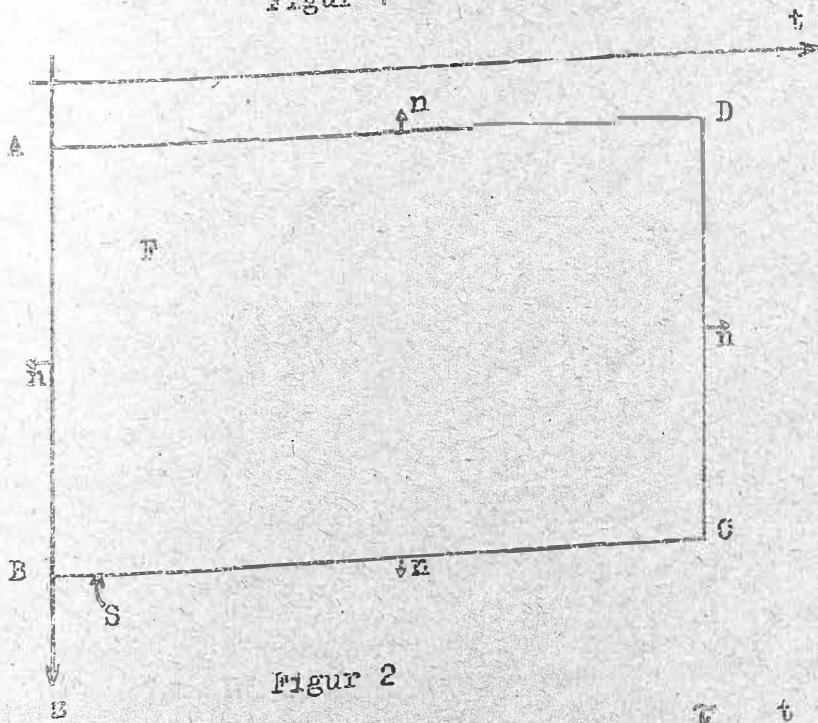
Die Forderung (23) bringt einen Zusammenhang zwischen den Intervalllängen und der elektrischen Leitfähigkeit herein, d.h., eine Änderung der Leitfähigkeit muß durch eine entsprechende Änderung der Intervalllängen aufgefangen werden. Es dient offenbar der Übersichtlichkeit, wenn man hierzu die räumlichen Intervalllängen benutzt.

Bisher liegen lediglich versuchsweise Berechnungen vor. Es lag ihnen folgendes Modell zugrunde: eine vertikale Grenzfläche trennt zwei Viertel Ebenen, wobei in der einen (rechts) die vierfache Leitfähigkeit gegenüber derjenigen in der anderen herrscht, d.h. rechts sind die äquidistanten Punkte des Gitternetzes halb so weit auseinander wie links.

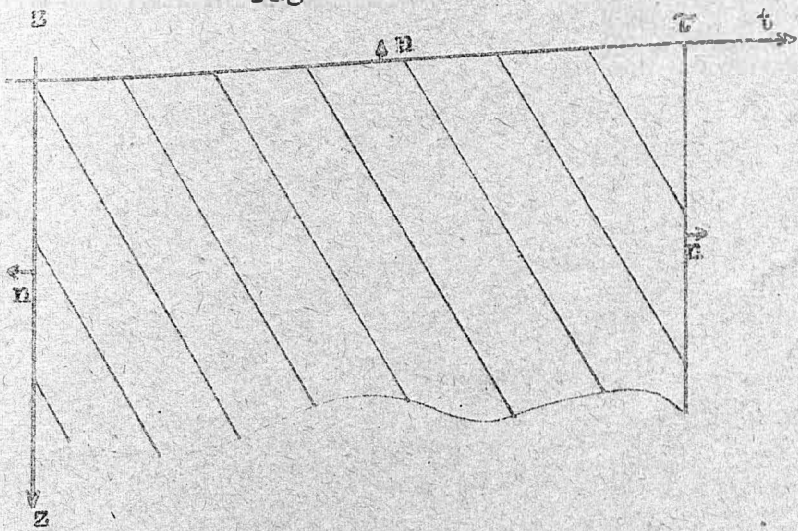
Die Berechnung ging aus von einem zu Beginn in jedem Punkte der horizontalen Trennungsebene der Halbebene, der Erdoberfläche, vorherrschenden Anfangswert 1, während allen übrigen Gitterpunkten der Wert 0 zugeordnet war. Mit Hilfe der Formel (24) wurden die jeweils am Abschluß der nächstfolgenden Zeitintervalle an den einzelnen Gitterpunkten vorherrschenden Werte berechnet, wobei sich die Werte entlang der Erdoberfläche aus der jeweiligen Differenz gegenüber dem Anfangswert bestimmten. Eine Differenziation dieser Werte nach x lieferte den Verlauf der Z -Komponente, die durch die zu den Einheitspolen des Vektorpotentials gehörige H -Komponente hervorgerufen wurde.

Das bisher vorliegende Ergebnis kann nur qualitativ beschrieben werden. Der Auslösungsvorgang entspricht gleichsam dem Abschalten eines homogenen (nach rechts gerichteten) H -Feldes. Damit beginnen Ströme zu fließen, die das H -Feld aufrechtzuerhalten suchen, d.h. in die Zeichenebene hineingerichtet sind. Die Ströme sind im Gebiet mit größerer Leitfähigkeit (rechts) größer als im Gebiet mit geringerer. Die unterschiedliche Stromstärke läßt sich als Hin- und Rückstrom deuten, wobei der Hinstrom rechts und der Rückstrom links fließt. Die bisherigen Rechenergebnisse liefern einen jedenfalls im Prinzip zu diesem Bild gehörigen Verlauf der Z -Komponente. Sie zeigen in unmittelbarer Nachbarschaft der Grenzfläche eine starke negative Vertikalkomponente und positive Vertikalkomponenten nach beiden Seiten anschließend, wobei jedoch im Bereich der höheren Leitfähigkeit eine schwächere Z -Komponente auftritt als im Bereich der geringeren Leitfähigkeit. Die Z -Komponente verschwindet mit zunehmender Entfernung von der Grenzfläche verhältnismäßig rasch.

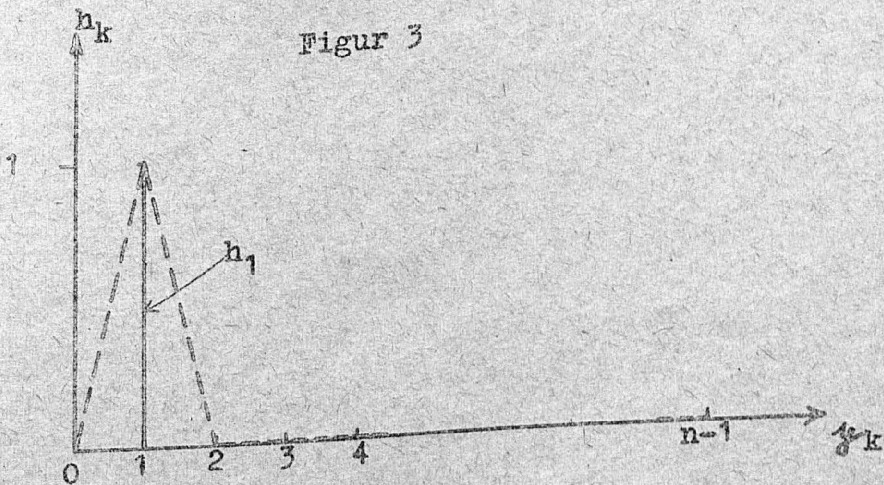
Figur 1



Figur 2



Figur 3

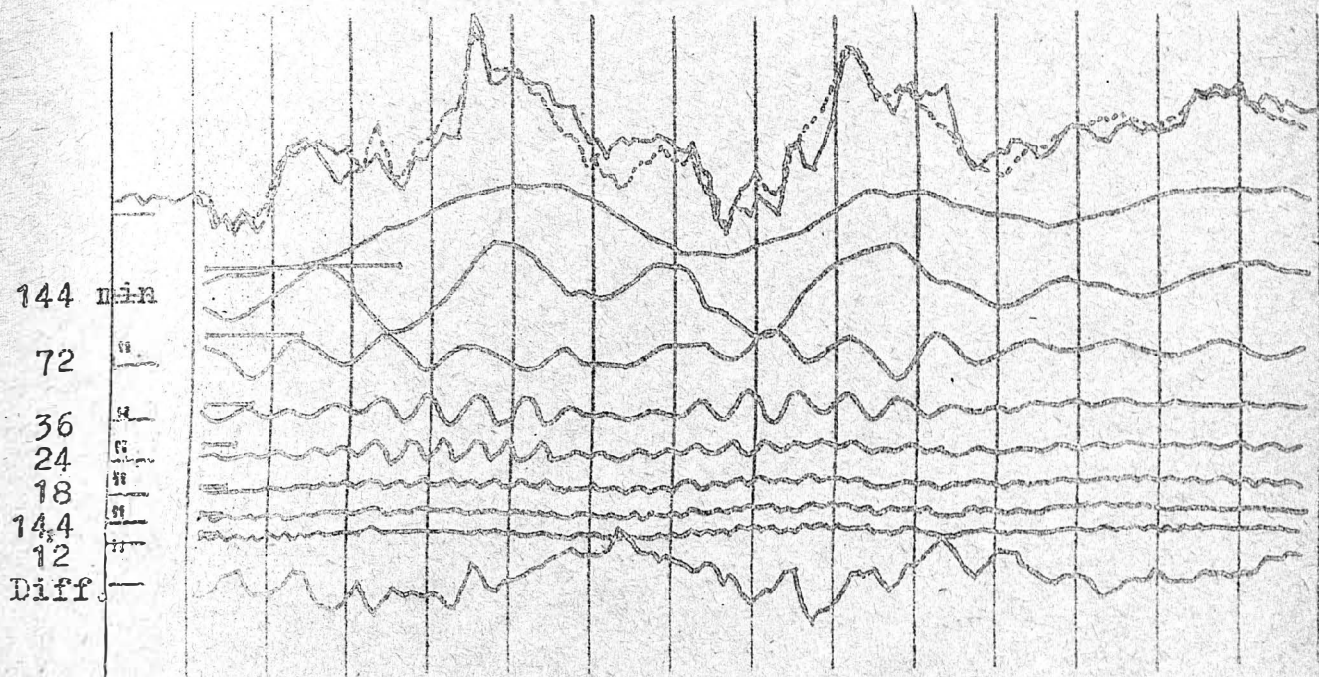


Anwendung des numerischen Filterverfahrens

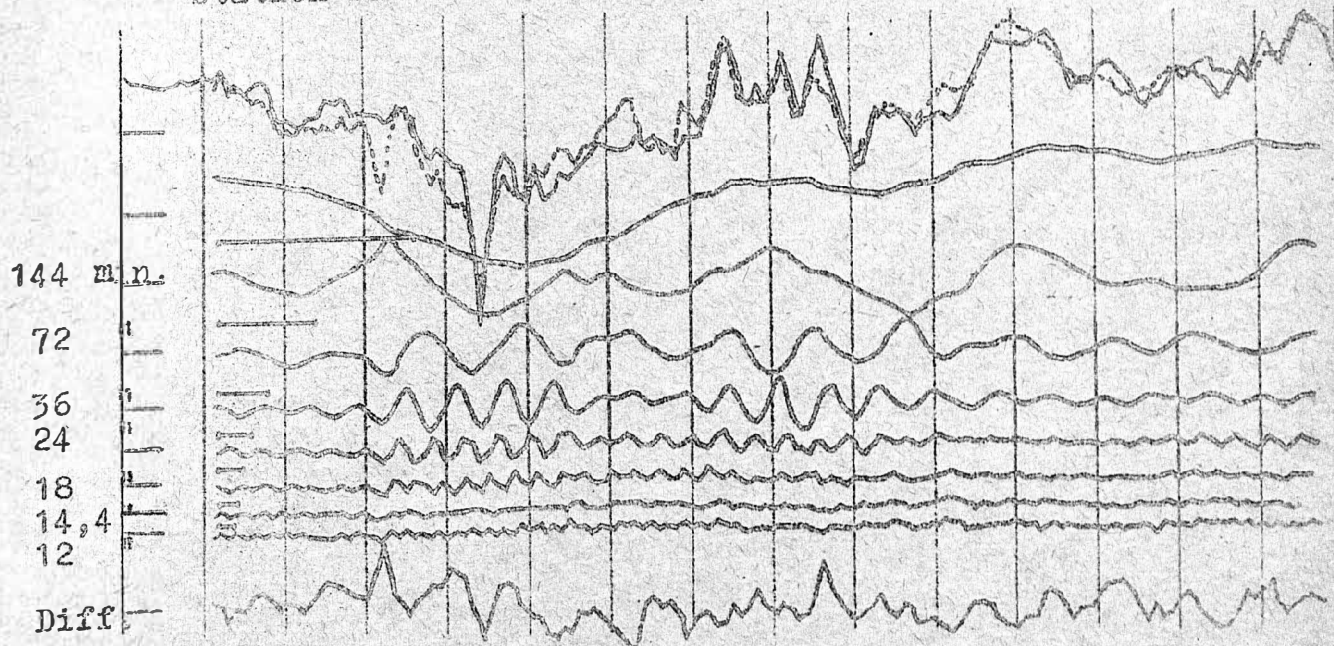
STURM vom 26. Nov. 1957

Äquidistante Werte, $\Delta t = 6 \text{ min}$

Station Wildeck ΔH (Wil ΔH)



Station Fallersleben ΔZ (Fal ΔZ)



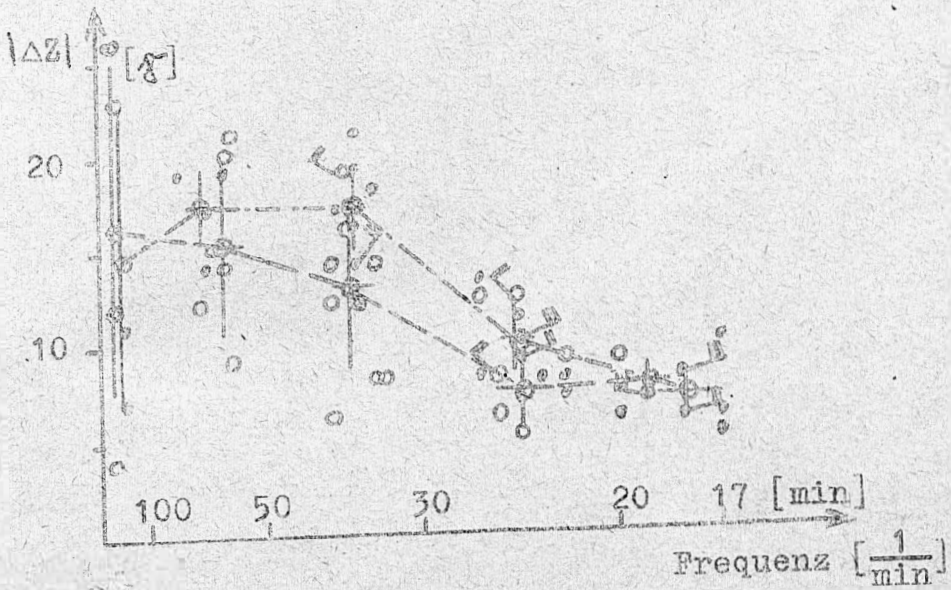
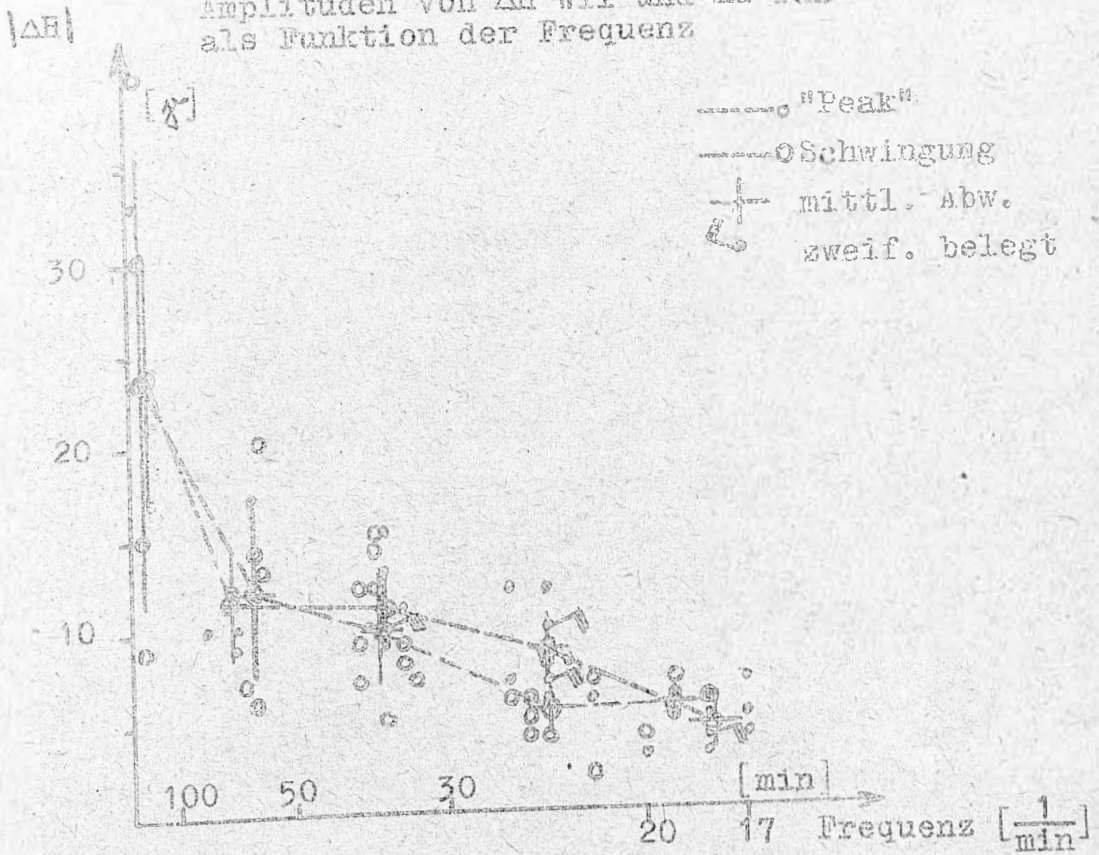
Originalkurve = —————

Σ-Kurve = - - - - -

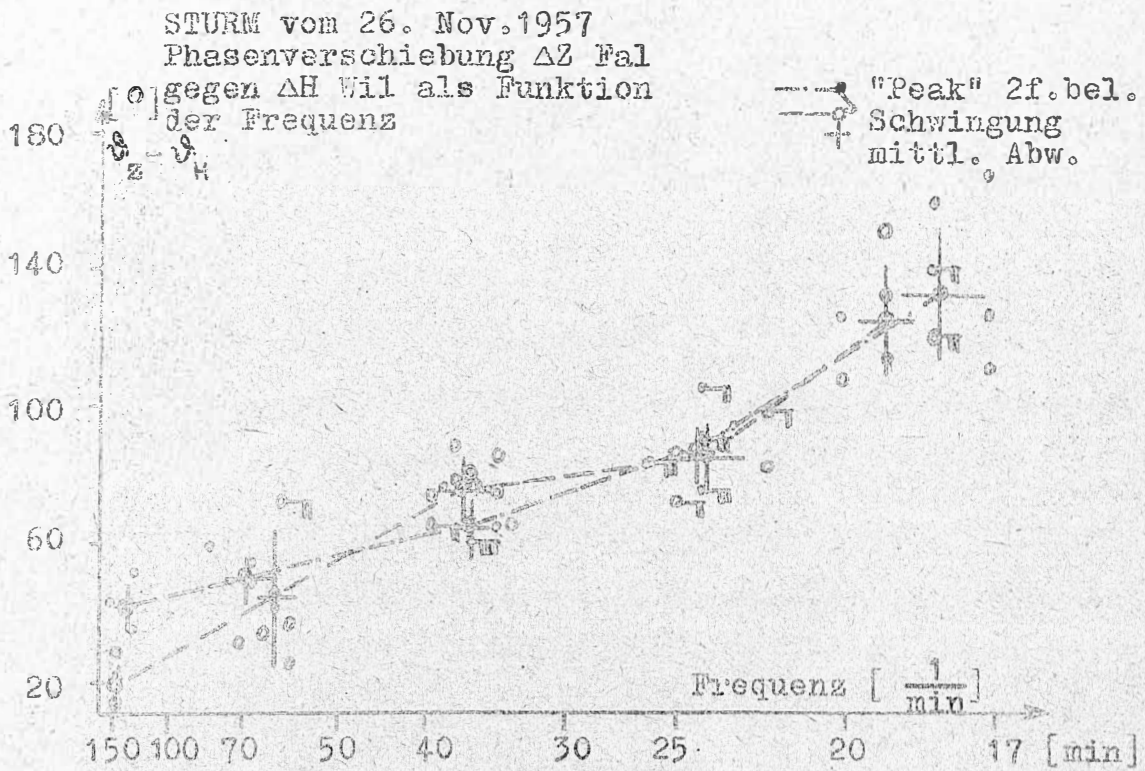
(Summe der berechneten Teilwellen)

Figur 5

STURM vom 26. Nov. 1957
Amplituden von ΔH Wil und ΔZ Wal
als Funktion der Frequenz



Figur 6



Figur 7

