

Vortrag Dipl. Phys. von Conbruch, München

Elektromagnetische Induktion im Zylinder
räumlich-variabler Leitfähigkeit

Freitag, den 11. 10. 1963

Den folgenden Betrachtungen liegt die Aufgabe zugrunde, die elektromagnetische Induktion im unendlich langen Zylinder räumlich-variabler Leitfähigkeit zu untersuchen. Die Leitfähigkeit σ ändert sich proportional zu einer beliebigen Potenz n des Abstandes von der Zylinderachse: $\sigma = \sigma_0 \left(\frac{a}{\rho}\right)^n$ (σ_0 bezeichnet die Oberflächenleitfähigkeit, a den Zylinderradius und ρ die variable Entfernung von der Zylinderachse). Außerhalb des Zylinders ($\rho > a$) ist die elektrische Leitfähigkeit null. Die Induktionsströme im Zylinder werden erregt durch transversale - d.h. senkrecht zur Zylinderachse gerichtete - magnetische Wechselfelder. Diese Magnetfelder sind außerhalb des Zylinders entweder räumlich homogen ($m=1$) oder aber ihr Betrag nimmt mit wachsendem Abstand von der Zylinderoberfläche wie ρ^{m-1} zu. Die Magnetfelder der Induktionsströme sind im Außenraum zweidimensionale 2^m -Pol-Felder; ihr Betrag nimmt wie $1/\rho^{m+1}$ mit wachsender Entfernung von der Zylinderoberfläche ab. Die äußeren induzierenden Magnetfelder werden als "inverse zweidimensionale Multipolfelder" bezeichnet, da ihre Vektorpotentiale durch Inversion der Vektorpotentiale der zweidimensionalen 2^m -Pol-Felder am Zylinder hervorgehen. Die Zeitvariationen der elektromagnetischen Felder sind sinusförmig. Außerdem werden die zeitlichen Änderungen so langsam angenommen, daß die physikalischen Vorgänge quasistationär verlaufen. Als Maßsystem werden elektromagnetische CGS-Einheiten verwendet.

Berechnet, graphisch dargestellt und diskutiert wird einmal die elektrische Stromdichte in der Oberfläche und in verschiedenen Tiefen des Zylinders. Außerdem wird das Magnetfeld der Induktionsströme sowie das Verhältnis der elektrischen zur magnetischen Feldstärke (E_z/H_ϕ) in der Zylinderoberfläche dargestellt. Untersucht werden die elektromagnetischen Felder und die Stromfunktionen in Abhängigkeit von der radialen Änderung der Leitfähigkeit,

der Geometrie des induzierenden Magnetfeldes und dem sogenannten "Induktionsparameter" γ . Die dimensionslose Größe γ enthält im wesentlichen die Oberflächenleitfähigkeit σ_0 , die Kreisfrequenz ω und den Zylinderradius a ($\gamma = \sqrt{4\pi\omega\sigma_0} a$).

Die Verteilung der Induktionsströme in dünnwandigen Leitern - wie dem Zylinder - hängt von verschiedenen Parametern ab. Als solche treten unter anderem - wie bei der Induktion in linearen Leitern - die Frequenz der Wechselfelder und die mindestens als homogen angenommene Leitfähigkeit auf. Der Einfluß der Frequenz auf die Verteilung der Induktionsströme macht sich darin bemerkbar, daß mit zunehmender Frequenz des erregenden Magnetfeldes die Stromfäden stärker an die Zylinderoberfläche gedrängt werden. Der gleiche Effekt tritt auf, wenn man die homogene Leitfähigkeit erhöht. Die Ursache für diese Erscheinung ist die Selbstinduktion der Ströme im Zylinder. Außerdem nimmt mit wachsendem Zylinderradius die Selbstinduktion der Ströme zu. - Die Stromverteilung im Zylinder wird auch durch die Ordnung m (positiv ganzzahlig) der inversen zweidimensionalen Multipolfelder beeinflusst. Während bei einem homogenen äußeren Magnetfeld ($m=1$) die Ströme in beiden Zylinderhälften in entgegengesetzter Richtung fließen, fließen bei einem erregenden inversen Quadrupolfeld ($m=2$) die Ströme bereits in benachbarten Quadranten in entgegengesetzter Richtung. Mit zunehmender Ordnung rücken die Ströme entgegengesetzter Richtung näher zusammen und werden dabei stärker an die Zylinderoberfläche gedrängt. Die Selbstinduktion der Ströme hängt also von der Geometrie des induzierenden Magnetfeldes ab. - Zusätzlich zu den im Zylinder homogener Leitfähigkeit auftretenden Erscheinungen werden in dem hier untersuchten Modell die Induktionsströme noch durch die radiale Änderung der Leitfähigkeit beeinflusst. Nimmt die Leitfähigkeit im Zylinder mit der Tiefe ab, so werden die Stromfäden im Vergleich zum Modell homogener Leitfähigkeit stärker an die Zylinderoberfläche gedrängt. Bei einer Zunahme der Leitfähigkeit mit der Tiefe werden andererseits die Induktionsströme merklich in das Innere des Zylinders hineingezogen. Es kann dabei der Fall auftreten, daß die größte Stromdichte nicht in der Oberfläche ($\rho=a$), sondern im Innern des Zylinders ($\rho < a$) induziert wird. Die Untersuchungen über die Stromdichte ergeben, daß nur

dann das Maximum der Stromdichte im Innern des Zylinders erzeugt wird, wenn der "Induktionsparameter" $\alpha_0 a$ hinreichend niedrig ist und die Potenz n der radialen Änderung der Leitfähigkeit ($\sigma = \sigma_0 \left(\frac{a}{r}\right)^n$) größer ist als die Ordnung m des äußeren inversen zweidimensionalen Multipolfeldes ($n > m$ mit $m = +1, +2, +3, \dots$).

Die Amplituden- und Phaseninduktionskurven sowohl der Stromdichte in der Zylinderoberfläche als auch des Magnetfeldes der Induktionsströme erlauben Rückschlüsse auf die radiale Verteilung der Leitfähigkeit im Innern des Zylinders. Die Untersuchungen zeigen aber, daß für schwache Selbstinduktion (z.B. $\alpha_0 a < 2$) das Magnetfeld der Induktionsströme in der Zylinderoberfläche in Bezug auf die Verteilung der Leitfähigkeit im Innern des Zylinders wesentlich empfindlicher ist als die Stromdichte. Für höhere Werte von $\alpha_0 a$ ist dies gerade umgekehrt. Man wird deshalb für längere Perioden der Wechselfelder die Beobachtung des Magnetfeldes und für kürzere Perioden die Registrierung des elektrischen Feldes zur Sondierung des Untergrundes bevorzugen.

Die Modellkurven können zur Deutung der Induktionsvorgänge der erdmagnetischen Variationen und zur Interpretation der Meßergebnisse der Angewandten Geoelektrik dienen.