

Ulrich Schmucker, Göttingen

## Zur Modell(er)findung in 2D

### 1 Einleitung

Heute mehr als je ist es die Überzeugung aller Ernstgesinnten, daß die elektromagnetische Tiefenforschung wieder eine praktische Aufgabe habe. Dies ist nicht nur im Sinne von anwendungsorientierten Aufgaben zu verstehen, zu deren Lösung EM Sondierungen zweifellos beitragen können. Vielmehr sollen ganz allgemein aus unseren Sondierungen abgeleitete Aussagen über Leitfähigkeiten in allen Tiefen gemeint sein, sofern sie nur unsere Kenntnisse in möglichst objektiver und gesicherter Weise vermehren.

Die neue Herausforderung besteht in der zunehmenden Verfügbarkeit großer, mit hoher Genauigkeit bestimmter Datensätze, bestehend aus Übertragungsfunktionen an vielen Orten und in den verschiedensten Formen, die über einen weiten Frequenzbereich durch *ein* Modell der Leitfähigkeit zu erklären sind. Wollte man ein solches Modell durch mehr oder weniger systematisches Probieren finden, so ist diese Art der Modellfindung kaum noch durchführbar angesichts der Vielzahl der zu interpretierenden Daten.

Auch ist es eine allgemeine Erfahrung, daß dabei leicht hochkomplizierte Modelle mit vielen Einzelheiten herauskommen, denen zwar die Daten nicht widersprechen, die aber von ihnen auch nicht gefordert werden. Nicht, daß ein intuitives, einfühlsames Vorgehen grundsätzlich abzulehnen wäre. Doch die unumgänglichen Vorgaben lassen sich zumeist nicht klar begründen und ausdrücken. Auch verbleibt oft das unbefriedigende Gefühl, das zu finden, was man selbst oder was andere gerne haben möchten.

Dieser Beitrag behandelt ein Verfahren der Modellfindung, das von einer gewissen Stufe an unabhängig von dem Interpretierenden abläuft. Die notwendigen Vorgaben und Abgrenzungen schränken zwar die Zahl der "zugelassenen" Modelle ein, doch diese Willkür geschieht in einer überschaubaren und nachvollziehbaren Weise.

In der Definition einer globalen Maßzahl, die das Zusammenpassen von Modell und Daten quantifiziert, steckt eine weitere unvermeidbare Willkür, zumal dabei möglicherweise über die individuellen Anpassungsfehler sehr unterschiedlicher Daten gemittelt werden muß. Schließlich können mit der Modellfindung noch frei wählbare Forderungen an die Glattheit des Modells, seine Genauigkeit und Auflösbarkeit verbunden werden.

Verbleibt die prinzipielle Frage, wie objektiv eine Modellfindung für EM Sondierungsdaten überhaupt sein kann. In Weidelts Habilitationsschrift (1978; A2) findet sich der Eindeutigkeitsbeweis der Umkehraufgabe in 2D. Doch wie bei der 1D-Umkehraufgabe ist damit kein beschreitbarer Weg gefunden, wie man zu einer eindeutigen Lösung kommt. Man ist daher, wenn man es mit wirklichen Daten zu tun hat, auf approximative Verfahren verwiesen, von denen das hier vorgestellte nur eines von vielen, im Prinzip gleichwertigen ist - von Occam's razor bis zu Akaike's Bayesian Information Criterion ABIC. In der Wahl des Verfahrens, die eine erneute Einschränkung der Lösungsvielfalt bedeutet, äußert sich eine letzte fundamentale Subjektivität im Sinne der Überschrift.

## 2 Vorgaben, Modellparameter, Daten

Im unteren Halbraum ( $z < 0$ ) kartesischer Koordinaten sei  $A$  ein in  $z$  und in  $y$  begrenzter, in  $x$  unendlich ausgedehnter Bereich, in dem die Leitfähigkeit  $\sigma$  von ihrem Normalwert  $\sigma_n$  ausserhalb in gleiche Tiefe abweicht (Abb. 1). Dabei sei  $\sigma_n$  eine reine Funktion der Tiefe  $z$  und  $\sigma$  unabhängig von  $x$ . Die resultierende 2-dimensionale Leitfähigkeitsanomalie ist so beschrieben durch die ausserhalb von  $A$  verschwindende Differenz

$$\sigma_a(y, z) = \sigma(y, z) - \sigma_n(z). \quad (1)$$

Ersetzt man  $\sigma$  durch den Kehrwert  $\rho$  des spezifischen Widerstandes, gilt mit  $\rho_a = \rho - \rho_n$  und  $\rho_n \sigma_n = 1$

$$\rho_a = -\sigma_a \rho_n \rho, \quad \sigma_a = -\rho_a \sigma_n \sigma. \quad (2)$$

Die Vorgaben bestehen zunächst in der gewählten Lage der Begrenzungen von  $A$  (in  $y$  entsprechend der Lage der Meßstationen und in  $z$  nach der vermuteten maximalen Eindringtiefe), dann in der Festlegung eines geschichteten Normalmodells  $\sigma_n$  (aufgrund von Sondierungen an weit entfernten Meßorten im Normalbereich). Beide Vorgaben werden im weiteren Verlauf der Rechnung nicht mehr verändert. Eine dritte und letzte Vorgabe besteht in der Unterteilung von  $A$  in  $M$  homogene Teilbereiche  $A_m$ , innerhalb derer  $\sigma_a$  und  $\rho_a$  als konstant betrachtet werden. Sie stellen die aus den Daten abzuleitenden  $M$  Modellparameter dar, wobei  $\sigma_a$  die Modellbeschreibung für Daten der  $E$ -Polarisation liefern wird und  $\rho_a$  die Modellbeschreibung für Daten der  $B$ -Polarisation. Näheres hierzu im nachfolgenden Abschnitt.

Seien  $\underline{E}_n$  und  $\underline{B}_n$  die zu  $\sigma_n$  gehörigen Normalfelder, die sich in gedachter Abwesenheit der Leitfähigkeitsanomalie durch induzierende Quellen im oberen Halbraum für eine bestimmte Frequenz im unteren Halbraum ergeben würden. Tatsächlich werden in  $A$  und in der Umgebung von  $A$  veränderte Felder  $\underline{E} = \underline{E}_n + \underline{E}_a$  und  $\underline{B} = \underline{B}_n + \underline{B}_a$  auftreten. Ihre Differenzen gegenüber dem Normalfeld liefern als beobachtbare Anomalien des tellurischen und magnetischen Feldes die gewünschte Information über die Leitfähigkeitsanomalie  $\sigma_a$ . Als Daten dienen daher die Übertragungsfunktionen für das *anomale* Feld, bezogen auf den jeweiligen Normalwert in unendlicher Entfernung von  $A$ . Es sind dies insgesamt vier Übertragungsfunktionen, nämlich diejenigen für die Horizontal- und Vertikalkomponente des anomalen Magnetfeldes bei  $E$ -Polarisation sowie jeweils eine Übertragungsfunktion für das tellurische Feld in den beiden Polarisationen. Wird vereinfachend angenommen, daß das induzierende Quellenfeld aus dem oberen Halbraum (das im 2D-Fall gleichfalls nur von  $y$  und  $z$  abhängen darf) quasi-homogen in  $y$ -Richtung ist, so ist das horizontale Normalfeld an der Erdoberfläche auch für  $E$ -Polarisation eine Konstante, während die Vertikalkomponente des Normalfeldes verschwindet. Die Impedanz  $Z_n$  des Normalfeldes in  $E_{nx} = Z_n B_{ny}$ ,  $E_{ny} = -Z_n B_{nx}$  ist dann gleichfalls näherungsweise eine Konstante.

Indem mit  $E_x = Z_{xy} B_{ny}$  und  $E_y = -Z_{yx} B_{nx}$  auch das veränderte tellurische Feld mittels der Impedanzen  $Z_{xy}$  und  $Z_{yx}$  auf das magnetische Normalfeld bezogen wird, ergibt sich folgende allgemeine Darstellung für die zu interpretierenden anomalen Feldkomponenten:

$$\begin{aligned} B_{ay} &= B_y - B_{ny} = d_D \cdot B_{ny}, \\ B_{az} &= B_z = z_D \cdot B_{ny}, \\ E_{ax} &= E_x - E_{nx} = (Z_{xy}/Z_n - 1) \cdot E_{nx}, \\ E_{ay} &= E_y - E_{ny} = (Z_{yx}/Z_n - 1) \cdot E_{ny}. \end{aligned} \quad (3)$$

Hierin sind  $d_D$ ,  $z_D$  und  $(Z_{xy}/Z_n - 1)$ ,  $(Z_{yx}/Z_n - 1)$  die zu interpretierenden Übertragungsfunktionen in der Form von komplexen Schätzwerten einer Folge von diskreten Frequenzen.

In der praktischen Durchführung wird es in der Regel keine "Normalstation" geben, die wirklich außerhalb der Reichweite der Anomalie liegt. Man beginnt daher die Rechnungen mit empirischen Übertragungsfunktionen, die sich auf eine günstig gelegene Referenzstation beziehen. Sobald ein erstes Modell in dem noch zu beschreibenden iterativen Prozess gefunden worden ist, wird für dieses Modell die Anomalie in  $B_y$  am Ort der Referenzstation bestimmt und für den zweiten Durchgang die Übertragungsfunktionen auf einen unendlich fernen Bezugsort umgerechnet.

Sei etwa  $d'_D$  die auf die Referenzstation (Subskript r) bezogene empirische Übertragungsfunktion für  $B_{ay}$  an einem Meßort. Dann ist hier

$$B_y = (1 + d'_d)B_{ry}.$$

Die Modellrechnung ergebe (nach einer gewissen Zahl von Iterationen) für diesen Ort den theoretischen Wert  $d^*_D$ , jetzt bezogen auf das wahre Normalfeld. Mit

$$B_{ry} = (1 + d^*_D)B_{ny}$$

lautet dann die korrigierte Übertragungsfunktion für die nächstfolgende Iteration

$$(1 + d'_D)(1 + d^*_D) - 1,$$

so daß im Verlauf des iterativen Prozesses immer neue Daten verwendet werden. Entsprechendes gilt für die Umrechnung der anderen Übertragungsfunktionen. Es ist so unvermeidbar, daß in die Definition der Daten nicht nur vorläufige Ergebnisse von 2D Modellrechnungen eingehen, sondern im Falle der tellurischen Anomalien in  $Z_n$  auch die Vorgabe des Normalmodells selbst. - In den Programmen ist im übrigen vorgesehen, daß die Übertragungsfunktionen für  $B_{az}$  und  $E_{ax}$  (wie sonst üblich) auf das örtliche horizontale Magnetfeld  $B_y$  bezogen sind. In diesem Falle wird  $d^*_D$  für jede Meßstation berechnet und zur Korrektur benutzt.

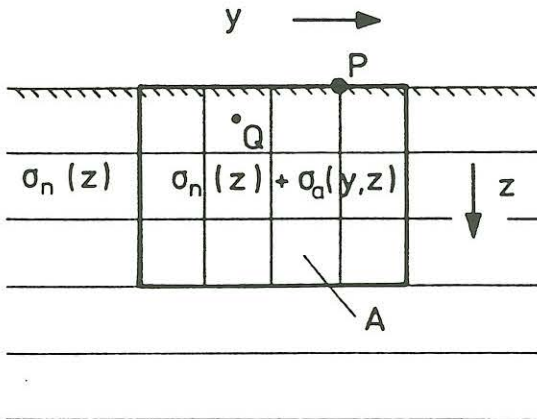
Die besondere Form der Dateneingabe wird durch die verwendete Integraldarstellung anomaler Felder bedingt. Außerdem bewirkt sie zweierlei: Zum einen definiert sie einen einheitlichen Datensatz von dimensionslosen Zahlen, die alle in gleicher Größenordnung liegen und so gemeinsam ohne weitere Angleichung interpretiert werden können. Dies gilt insbesondere auch für ihre quadratischen Anpassungsfehler, deren Summe dann problemlos im Sinne einer Ausgleichsrechnung minimiert werden kann.

Zum zweiten werden bei  $E$ -Polarisation die Induktionsanomalien in jeweils nur einer Feldkomponente interpretiert. (Bei  $B$ -Polarisation ist ohnehin nur die tellurische Anomalie beobachtbar.) Würde man in der üblichen Weise  $B_{az}$  und  $E_{ax}$  auf das örtliche  $B_y$  beziehen, wären die resultierenden Übertragungsfunktionen zusätzlich von dem anomalen Verhalten von  $B_y$  abhängig, was u.U. zu sich kompensierenden Anpassungsfehlern führen könnte.

### 3 Linearisierung und Datenkern

Bekanntlich lassen sich die anomalen Felder  $\underline{E}_a$  und  $\underline{B}_a$  mittels GREENscher Funktionen aus dem jeweiligen Gesamtfeld in  $A$  wie folgt ableiten (Berdichevsky und Dmitriev, 1976): Sei  $P(\underline{r})$  ein Aufpunkt, an dem das anomale Feld berechnet werden soll,  $Q(\underline{r}')$  ein Quellpunkt in  $A$  (Abb. 1). Dann lautet die Integralgleichung für  $E_{ax}$  im Falle einer 2D-Anomalie und  $E$ -Polarisation

$$E_{ax}(\underline{r}) = -i\omega\mu_0 \int_A \sigma_a(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}') E_x(\underline{r}') dA \quad (4)$$



mit  $G(\underline{r}, \underline{r}')$  als GREENsche Funktion für das gewählte Normalmodell  $\sigma_n$ . Sie ist das elektrische Feld in  $P$ , das ein durch  $Q$  gehender oszillierender Linienstrom erzeugen würde, wenn es keine Anomalie gäbe. Differentiation bezüglich der Aufpunktkoordinaten ergibt entsprechende Integraldarstellungen für die anomalen magnetischen Feldkomponenten  $B_{ay} = -\partial E_{ax} / \partial z \cdot (i\omega)^{-1}$  und  $B_{az} = +\partial E_{ax} / \partial y \cdot (i\omega)^{-1}$ .

Abb. 1

$$B_{ay}(\underline{r}) = \mu_0 \int_A \sigma_a(\underline{r}') G_z(\underline{r}, \underline{r}') E_x(\underline{r}') dA \quad (5)$$

$$B_{az}(\underline{r}) = -\mu_0 \int_A \sigma_a(\underline{r}') G_y(\underline{r}, \underline{r}') E_x(\underline{r}') dA$$

$$\text{mit } G_z = \partial G / \partial z \text{ und } G_y = \partial G / \partial y.$$

Die Integralgleichung zur Gewinnung von  $B_{ax}$  aus  $B_x$  bei  $B$ -Polarisation ist komplizierter, da zusätzlich zur Flächenintegration Berandungsintegrale auftreten, wenn man  $A$  in homogene Teilbereiche  $A_j$  mit den Umrandungen  $S_j$  zerlegt. Differenziert man sie bezüglich  $z$  in  $z = +0$ , so erhält man für das an der Oberfläche beobachtbare anomale tellurische Feld

$$E_{ay}(y, 0) = i\omega\rho_n(+0) \cdot \int_A R(\underline{r}') G_z(\underline{r}, \underline{r}') B_x(\underline{r}') dA \quad (6)$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \sum_j \int_{S_j} \{R_j^+ - R_j^-\} \cdot \rho_n(z') G_{zn'}(\underline{r}, \underline{r}') B_x(\underline{r}') dS_j$$

mit  $R = \rho_a / \rho_n$ ;  $R_j^+ - R_j^-$  bezeichnet den Sprung von  $R$  beim Durchgang durch die Randkurve  $S_j$  von innen nach außen.

Die unter den Integralen erscheinenden GREENschen Funktionen sind interpretierbar als Magnetfeld einer Dipolkette mit oszillierenden Momenten durch  $Q$  am Aufpunkt  $P$ , unterscheiden sich also von denen für  $E$ -Polarisation;  $G_z$  ist wieder ihre Ableitung bezüglich der

Aufpunktcoordinate und  $G_{zn}$ , die Ableitung von  $G_z$  bezüglich der Quellpunktkoordinaten in Richtung der Umrandungsnormalen.

In allen Integraldarstellungen erscheinen explizit die gesuchten Modellparameter:  $\sigma_a$  bei  $E$ -Polarisation und  $\rho_a = R\rho_n$  bei  $B$ -Polarisation. Die GREENSchen Funktionen werden allein durch das Normalmodell bestimmt, sind also bekannt. Damit beruht die Nicht-Linearität der Umkehraufgabe allein auf den einzubeziehenden inneren Feldern  $E_x$  und  $B_x$  am Quellpunkt, die in ihren anomalen Anteilen implizit von  $\sigma_a$  und  $\rho_a$  abhängen. Für genügend tiefe Frequenzen und  $E$ -Polarisation sind jedoch diese Anteile vergleichsweise klein, so daß man im Sinne einer BORNschen Näherung unter den Integralen  $E_x$  durch seinen Normalwert  $E_{nx}$  ersetzen darf.

Bei  $B$ -Polarisation hingegen besitzt der anomale Feldanteil einen endlichen, durch die "Gleichstromverzerrung" vorgegebenen asymptotischen Wert, wenn die Frequenz gegen Null strebt. Die Möglichkeiten, in diesem Fall  $B_x$  durch  $B_{nx}$  zu ersetzen, sind dementsprechend begrenzter als bei  $E$ -Polarisation. In jedem Fall dürfen die Leitfähigkeitskontraste zwischen dem anomalen Bereich und seiner Normalumgebung nicht zu groß sein, wenn diese Näherung auch bei hohen Frequenzen verwendbar bleiben soll. Die inneren Felder streben dann in beiden Polarisationen gegen die örtliche 1D-Lösung.

Mit der BORNschen Näherung, die die nicht-lineare mehr-dimensionale Umkehraufgabe in ein lineares Problem verwandelt, soll nun folgender iterativer Prozess zur Modellfindung eingeleitet werden. Er sei zunächst für  $E$ -Polarisation beschrieben:

Sei  $E_x^{(j)}$  eine vorgegebene Näherungslösung für das innere Feld  $E_x$  nach dem  $j$ -ten Iterationsschritt. Dann ist der Datenkern  $F_{nm}^{(j)}$  für die nächstfolgende Iteration, der die Daten  $y_n$  (hier die Übertragungsfunktionen für  $E_{ax}$ ,  $B_{ay}$  und  $B_{az}$ ) mit den gesuchten Modellparametern  $x_m$  (hier  $\sigma_a$  in den Teilbereichen  $A_m$  des anomalen Bereichs) näherungsweise linear verbindet, im Falle des anomalen tellurischen Feldes

$$F_{nm}^{(j)} = -i\omega\mu_0 \int_{A_m} G(\underline{r}, \underline{r}') E_x^{(j)} dA_m, \quad (7)$$

wie man Gl. (4) in der Form

$$E_{ax}(\underline{r}) \approx \sum_m \sigma_a(A_m) F_{nm}^{(j)}$$

unmittelbar entnimmt. Für  $d_D$  oder  $z_D$  als Daten sind die Datenkerne entsprechend Gl. (5) abzuändern. Die datenbezogene Indizierung des Datenkerns mit "n" bezieht sich dabei zum einen auf die Lage des Meßortes, der in  $\underline{r}$  enthalten ist, und zum anderen auf die Frequenz. - Die Frequenzabhängigkeiten von  $G$  und  $E_x$  sind nicht explizit angegeben.

Der iterative Prozess beginnt mit der schon genannten Näherung  $E_x^{(0)} = E_{nx}$ . Zusammen mit der GREENSchen Funktion, die für alle vorkommenden Frequenzen und Meßorte vorher berechnet sein muß, ergibt dies nach Gl. (7) den Datenkern  $F_{nm}^{(0)}$  für den ersten Iterationsschritt. Man löst dann das lineare System

$$y_n = \sum_m F_{nm}^{(0)} x_m^{(1)} + \Delta y_n, \quad (8)$$

beispielsweise im Sinne einer Ausgleichsrechnung, die  $\sum_n |\Delta y_n|^2$  minimiert, und erhält ein erstes Modell  $x_m^{(1)}$ . Durch die Anpassungsfehler  $\Delta y_n$  wird zum einen dem Näherungscharakter des linearen Ansatzes Rechnung getragen, zum anderen Datenfehlern, die den vorgelegten Datensatz möglicherweise inkompatibel mit jeder denkbaren exakten Lösung machen. Mit dem gefundenen Modell wird eine 2D-Vorwärtsrechnung durchgeführt. Das Ergebnis ist ein verbessertes, zur ersten Lösung *exakt* passendes inneres Feld  $E_x^{(1)}$  und ein neuer Datenkern  $F_{nm}^{(1)}$  für den zweiten Iterationsschritt. Alles weitere versteht sich von selbst.

Im Verlauf des iterativen Prozesses, sofern er konvergiert, werden in dieser Weise Modell und Datenkern immer besser aufeinander abgestimmt. Der Prozess wird beendet, wenn die Differenz von Modellen aufeinander folgender Iterationen einen gewissen Schwellenwert unterschreitet. Er ist so bemessen worden, daß man mit höchstens acht Iterationen auskommt. Die zum Schluß auftretenden Differenzen waren in jedem Fall viel kleiner als die gleichfalls berechneten Modellfehler.

Im übrigen sind divergierende Lösungen in den nachfolgend beschriebenen Beispielen nie beobachtet worden. Wohl aber konnte es passieren, daß sich im Verlauf der iterativen Modellfindung negative Leitfähigkeiten (oder spez. Widerstände) einstellten. Es ist nicht versucht worden, dieses durch das Einführen von Nebenbedingungen zu verhindern. Vielmehr wurde in solchen Fällen das MARQUARTsche Glättungsverfahren der Lösungen angewandt. Negative Leitfähigkeiten traten nämlich in der Regel dann auf, wenn bei einer zu geringen Überbestimmung die Lösungen stark oszillierten. Zur Stabilisierung wurden die Diagonalelemente der Koeffizientenmatrix der Normalgleichung um eine Konstante  $\alpha^2$  erhöht, deren Zahlenwert schrittweise vergrößert wurde, bis die negativen Lösungen verschwanden.

Bezeichnet  $\underline{F} = (F_{nm})$  die aus den Datenkernen gebildete Matrix, so lautet deren verallgemeinerte Inverse

$$H = (\underline{F}^T \underline{F} + \alpha^2)^{-1} \underline{F}^T = (h_{mn}).$$

Aus den Elementen der so definierten Lösungsmatrix  $H$  folgen in

$$\bar{x}_m = \sum_n h_{mn} y_n$$

die für  $\alpha > 0$  geglätteten Modellwerte und in

$$\delta x_m^2 = \sum_n h_{mn}^2 \delta y_n^2$$

deren quadratische, aus den Datenfehlern  $\delta y_n$  abgeleitete Fehler.

Bei der Modellfindung aus den Übertragungsfunktionen für  $E_{ay}$  könnte man im Prinzip genauso vorgehen und aus der Integralgleichung (6) für  $B$ -Polarisation einen entsprechenden Datenkern ableiten. Es hat sich aber gezeigt, daß  $E_{ay}$  in weit größerem Maße durch die Umrandungsintegrale als durch das Flächenintegral bestimmt wird. Letzteres wird erst bei solchen Frequenzen dominant, bei denen sich die inneren Felder der örtlichen 1D-Lösung nähern. Folgendes alternative Vorgehen hat sich bewährt:

Das Flächenintegral in Gl. (6) wird auf die linke Seite zu den Daten gebracht und der Datenkern für die zu bestimmenden Modellparameter  $x_m$  (hier  $R_m = \rho_a/\rho_n$  in den Teilbereichen  $A_m$ ) allein aus dem Umrandungsintegral abgeleitet. Im ersten Integrations-schritt wird das Flächenintegral zunächst ganz weggelassen. Dann, sobald ein erstes Modell  $x_m^{(1)}$  gefunden worden ist, wird das Flächenintegral für diese Lösung berechnet und von den Daten abgezogen. Dann wird der iterative Prozess mit diesen neuen "Daten" fortgesetzt und bei jedem nächstfolgenden Iterationsschritt genauso verfahren.

Eine gemeinsame Interpretation von Daten der  $E$ - und  $B$ -Polarisation stößt auf prinzipielle Schwierigkeiten. Da nach Gl. (2)  $R = -\sigma_a\rho_n - \sigma_a\rho_a$ , gilt, kann der Modellparameter für  $B$ -Polarisation nicht durch denjenigen für  $E$ -Polarisation linear ausgedrückt werden und umgekehrt. Man kann näherungsweise so vorgehen, daß man den Datenkern auf  $-\sigma_a\rho_n$  statt  $R$  als Modellparameter bezieht, das verbleibende Umrandungsintegral mit  $\sigma_a\rho_a$  anstelle von  $R$  zu den Daten auf die linke Seite stellt und im übrigen so verfährt wie mit dem Flächenintegral. Erste Versuche mit synthetischen Modelldaten beider Polarisationen waren jedoch wenig erfolgversprechend.

Abschließend sei folgendes vermerkt: Das hier beschriebene Verfahren ist bereits von P. Weidelt auf die  $B_z$ -Daten der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie angewandt worden. Auch die Dissertation von Z. Xiong behandelt es in einer Erweiterung auf 3D Anomalien. Außerdem vermittelte der EM Workshop in Neuseeland den Eindruck, daß in der Angewandten Elektromagnetik mit künstlicher Anregung in ganz ähnlicher Weise verfahren wird. Sonst wird das 2D-Inversionsproblem in anderer Weise behandelt, etwa nach dem Gradientenverfahren, in dem ein vorgegebenes Startmodell schrittweise verbessert wird. Der Datenkern enthält in diesem Falle die FRECHET-Ableitungen des Datenfunktionals bezüglich der gesuchten Modellfunktion.

In jedem Falle ist das in dieser oder jener Weise linearisierte Umkehrproblem ein "schlechtgestelltes" Problem und die einzelnen Verfahren unterscheiden sich auch dadurch, in welchem Ausmaß eine Glättung der Lösung notwendig ist und wie sie vorgenommen wird. Die Vorteile der hier verwendeten Linearisierung mittels GREENscher Funktionen lassen sich so zusammenfassen.

- Durch die Trennung des normalen und anomalen Anteils wird nur der für Leitfähigkeitsanomalien relevante Feldanteil für die Modellfindung benutzt.
- Die unvermeidliche Vielfalt von gleichwertigen Lösungen wird so in die Vorgaben verlegt und kann hier durch Variieren der Vorgaben systematisch untersucht werden. Näheres hierzu im 6. Abschnitt.
- Die Lösungen der linearen Systeme im Ablauf des iterativen Prozesses scheinen stabiler zu sein als bei Verfahren, die die Gesamtfelder interpretieren. Für  $\alpha^2 = 0$  sind diese Lösungen sogar eindeutig für das gewählte Lösungskriterium eines überbestimmten Systems.
- Da in jedem Iterationsschritt das Modell vollständig neu berechnet wird, lassen sich die Fehler der Eingabedaten in solche der Modellparameter übertragen.

## 4 Modellstudien

Zunächst soll in Abb. 2 an einem einfachen Modell beispielhaft gezeigt werden, welche Merkmale die Übertragungsfunktionen des anomalen Feldanteils auszeichnen. Zur Verdeutlichung sind sie durch die jeweilige Feldkomponente gekennzeichnet, etwa durch  $B_{ay}$  für  $d_D$ . Das gewählte Modell besteht aus einem homogenen Normalmodell von  $10 \Omega\text{m}$  und einem anomalen Bereich von  $1 \Omega\text{m}$ . Die Sondierungskurven beziehen sich auf den markierten Meßort in der Mitte. Nur diejenige für  $B_{az}$  gehört zu einem Meßort an der Grenze des anomalen Bereichs. Der Frequenzbereich von drei Dekaden ist so gewählt worden, daß die anomalen Felder für  $E$ -Polarisation zwischen ihren asymptotischen Werten bei tiefen und hohen Frequenzen liegen, um so günstige Voraussetzungen für ihre Interpretation zu schaffen.

Die Induktionsanomalien des Magnetfeldes, die zu tiefen und hohen Frequenzen hin verschwinden, durchlaufen so in der zweiten Dekade Maximalwerte des Realteils, wenn die Strombündelung den anomalen Bereich in allen Tiefen voll erfaßt. Die Phasen ändern in dieser Dekade das Vorzeichen, was einen charakteristischen Nulldurchgang des Imaginärteils ergibt. Für die tellurische Anomalie  $E_{ax}$  erfolgt in dem gleichen Frequenzbereich der Übergang zur örtlichen 1D Lösung, wobei der Imaginärteil ein gleichfalls charakteristisches Minimum durchläuft.

Die tellurische Anomalie  $E_{ay}$  für  $B$ -Polarisation variiert vergleichsweise nur wenig, da ihre beiden asymptotischen Werte endlich sind ( $E_{ay} = -0.9$  für  $f \rightarrow 0!$ ) und zudem dichter beieinander liegen als bei  $E$ -Polarisation. Dies erklärt die schwierige Interpretation von Daten der  $B$ -Polarisation, die zwar den oberflächlichen Leitfähigkeitskontrast gut wiedergeben, nicht aber die tieferen Teile des anomalen Bereichs.

In Abb. 2 ist für die markierte Frequenz gezeigt, welche Beiträge die drei Schichten des anomalen Bereichs zu den Realteilen der anomalen Feldwerte bei  $E$ -Polarisation liefern. Sie ergeben sich aus einer entsprechenden Aufteilung der Flächenintegrale in den Gl. (4) und (5). Es zeigt sich, daß alle Schichten etwa zu gleichen Teilen beitragen, daß also in diesem mittleren Frequenzbereich Oberflächendaten durch anomale Leitfähigkeiten im gesamten anomalen Bereich bestimmt werden und entsprechend interpretiert werden können.

Für  $E_{ay}$  wird eine andere Aufteilung gewählt, um zu zeigen, daß der wesentliche Beitrag von dem Umrandungsintegral kommt und damit von der Ladungsbelegung der Randkurve. Insbesondere der Imaginärteil ergibt sich so als kleine Differenz von zwei großen Beiträgen von den seitlichen Rändern einerseits sowie dem oberen und unteren Rand andererseits. Dies erklärt die im Folgenden auftretende Schwierigkeit, fehlerbehaftete Beobachtungsdaten bei  $B$ -Polarisation richtig zu interpretieren.

Abb. 3 zeigt die Ergebnisse einer Modellfindung mit den anomalen Feldern jeweils einer Komponente an einem Meßort für vier Frequenzen innerhalb einer Dekade. Zur Simulation von Datenfehlern sind ihnen normal verteilte Zufallszahlen mit einer rms-Streuung von  $\delta = 10\%$  des jeweiligen Absolutbetrages überlagert worden. Zu beachten ist, daß die gewählten Frequenzen bei  $B$ -Polarisation um eine Dekade niedriger liegen müssen als bei  $E$ -Polarisation, um ein vergleichbares Ergebnis zu erhalten. Zu bestimmen ist also  $M = 1$



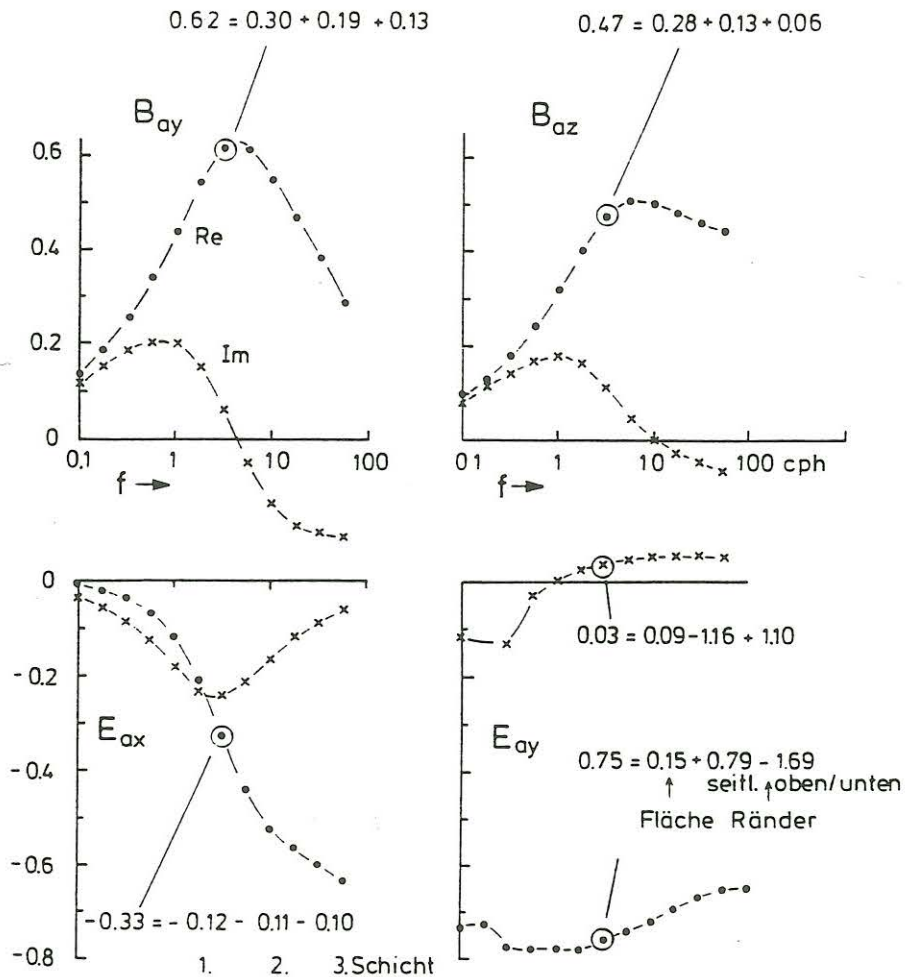


Abb. 2

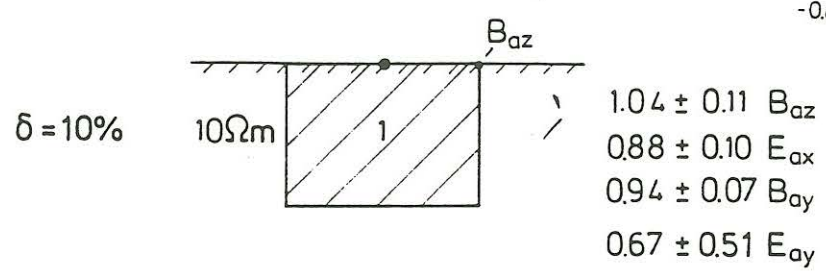
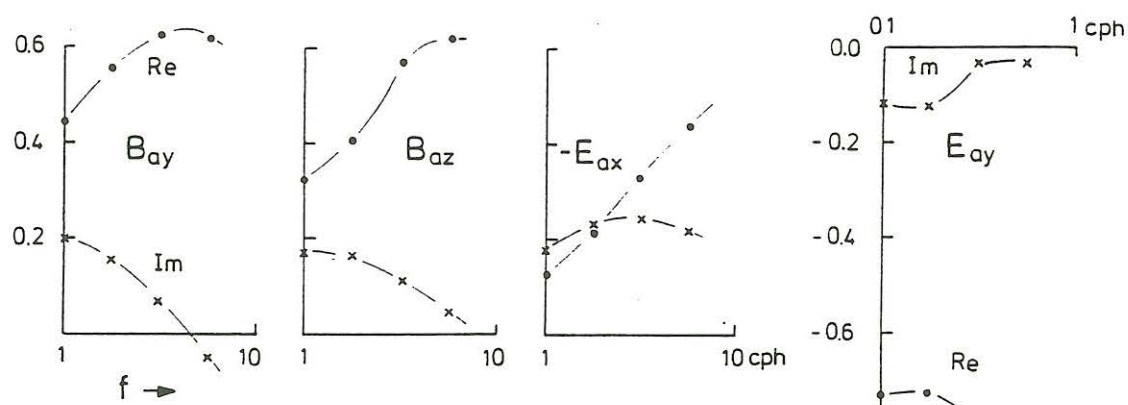
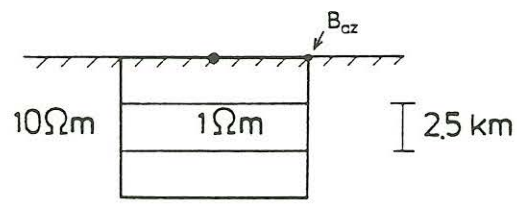
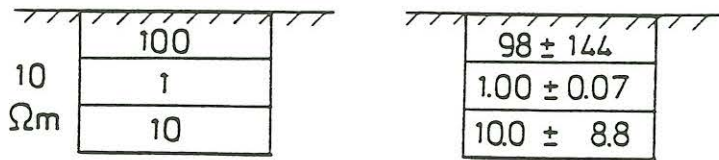
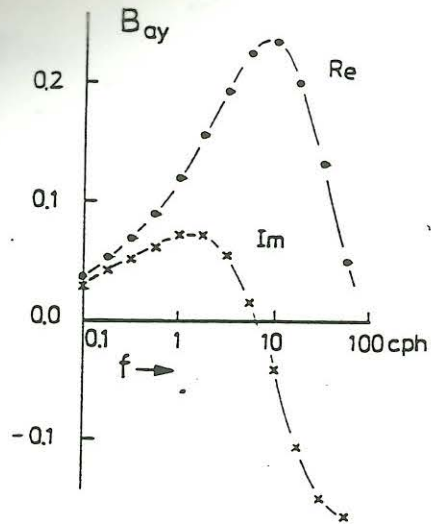


Abb. 3



$\delta = 1\%$

Abb. 4

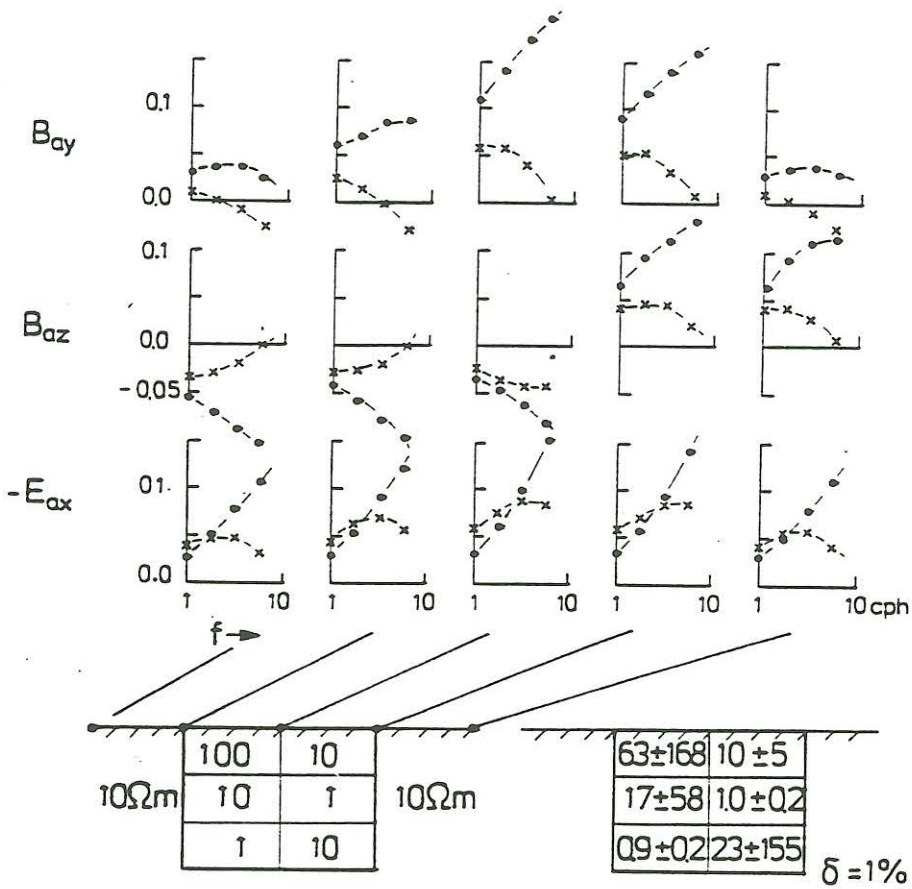


Abb. 5

Modellparameter aus  $N = 8$  Eingabedaten. Die Leitfähigkeit des Halbraums sowie die Grenzen des anomalen Bereichs werden vorgegeben. Aus den Daten läßt sich dann die Leitfähigkeit der Anomalie innerhalb der Fehlergrenzen richtig ableiten, wobei die Daten der  $E$ -Polarisation in allen drei Komponenten zu vergleichbaren Genauigkeiten führen. Für die Daten der  $B$ -Polarisation ergeben sich aus den schon genannten Gründen sehr viel größere Modellfehler.

Läßt man die Datenfehler weg, so lassen sich die Modell aus den Daten in jedem Fall exakt zurückgewinnen. Dies gilt auch für die nachfolgenden Beispiele mit drei und sechs Modellparametern. Dabei wird die Zahl der Eingabedaten in der Weise erhöht, daß die linearen Gleichungen im Verlauf des iterativen Prozesses durch einfache Ausgleichsrechnung mit  $\alpha = 0$  lösbar bleiben.

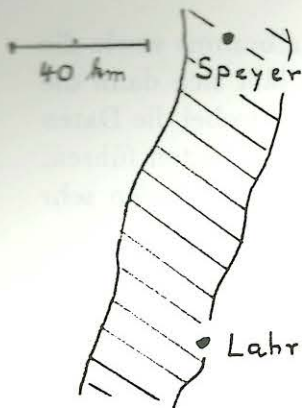
Zunächst sei der anomale Bereich in  $M = 3$  Schichten von  $100 \Omega\text{m}$ ,  $1 \Omega\text{m}$  und  $10 \Omega\text{m}$  unterteilt. Jetzt sind zwölf Frequenzen in drei Dekaden oder  $N = 24$  notwendig zur Rückgewinnung des Modells aus Daten der  $E$ -Polarisation, wobei wiederum die Aussagekraft der drei Komponenten etwa gleich ist. Abb. 4 zeigt die Interpretation von  $B_{ay}$  mit 1 % Fehlern. Die resultierenden großen Modellfehler in den schlechter leitenden Schichten zeigen den gestiegenen Schwierigkeitsgrad der Interpretation, insbesondere für die dritte Schicht.

Eine weitere Unterteilung in  $M = 6$  Teilbereiche mit zusätzlichen vertikalen Grenzen erfordert dann die Einbeziehung von Daten an mehreren Meßorten (Abb. 5). Insgesamt werden Daten der  $E$ -Polarisation an fünf Orten und für vier Frequenzen in allen Komponenten gemeinsam interpretiert, was die Zahl der Eingabedaten auf  $N = 120$  erhöht. Wiederum dürfen die Datenfehler 1 % nicht überschreiten, wenn auf Glättung der Lösungen verzichtet werden soll.

Zusammenfassend ist dieser Erprobung des Verfahrens mit synthetischen Modelldaten folgendes zu entnehmen: Auch Modelle mit in der Tiefe unterteilten anomalen Bereichen lassen sich aus fehlerbehafteten Daten rekonstruieren, sofern nur die Überbestimmung genügend groß ist und die Frequenzen in dem eingangs beschriebenen Übergangsbereich für anomale Felder liegen. Dies gilt aber nur für Daten der  $E$ -Polarisation, die mit Vorteil gemeinsam interpretiert werden sollten, während die für sich zu interpretierenden Daten der  $B$ -Polarisation kaum zur Modellfindung beitragen, wenn auch in tieferen Schichten anomale Leitfähigkeitsunterschiede existieren.

## 5 Interpretation von Sondierungen im Rheingraben

Das Verfahren wird nunmehr auf empirische Übertragungsfunktionen angewandt, die aus Beobachtungen an zwei Meßorten im Rheingraben gewonnen worden sind:



“Speyer” in der Grabenmitte und “Lahr” am östlichen Grabenrand, aus lokal bedingten Umständen nicht in gleicher Höhe. Das Meßprogramm ist 1982 von X. Kong durchgeführt worden, mit Unterstützung durch K. Bahr, die Datenanalyse unter Mithilfe von E. Steveling. Durch den kombinierten Einsatz von Induktionsspulenmagnetometern und fluxgate-Magnetometern konnten sowohl Pulsationen als auch Variationen ausgewertet werden. Die Datenanalyse ergab so die in Abb. 6 gezeigten Schätzwerte der Übertragungsfunktionen zu zwölf Frequenzen zwischen 0.5 cph (2 Std.) und 192 cph (18.75 s).

Interpretiert werden die Übertragungsfunktionen für  $E_{ax}$  und  $B_{ay}$  in Speyer sowie für  $B_{az}$  in Lahr. Dabei ist  $x$  in Richtung des Grabens, also etwa nach Norden, so daß die genannten Feldkomponenten dem anomalen Anteil für  $E$ -Polarisation zuzuordnen sind. Alle Übertragungsfunktionen beziehen sich auf  $B_{ry}$  mit Lahr als Referenzstation. Die Umrechnung auf  $B_{ny}$  für eine unendlich ferne Normalstation erfolgt, wie im 2. Abschnitt beschrieben, während der iterativen Modellfindung. Für Speyer wird die Verträglichkeit der  $B$ -Polarisation mit dem gefundenen Modell abschließend geprüft. Die nicht berücksichtigten Feldkomponenten waren entweder zu klein ( $B_{az}$  in Speyer) oder zu sehr durch lokale Gegebenheiten bestimmt ( $E_{ax}$ ,  $E_{ay}$  in Lahr).

Die beobachteten Anomalien sowohl des magnetischen als auch des tellurischen Feldes zeigen die charakteristischen Merkmale eines Grabeneffektes für gutleitende Sedimente in einem hochohmigen Halbraum. Man vergleiche hierzu die empirischen Sondierungskurven in Abb. 6 mit den Modellkurven in Abb. 2. Daher wird ein dem Rheingraben entsprechender anomaler Bereich von 32 km Breite und 4 km Mächtigkeit fest vorgegeben, in dessen Mitte Speyer und an dessen Rand Lahr gelegen ist.

In einer ersten Folge von Interpretationen wird untersucht, welchen Einfluß die Wahl des Normalmodells auf die erzielte Anpassung hat. Der anomale Bereich ist dabei nicht unterteilt ( $M = 1$ ) und das in Abb. 7 gezeigte Beispiel beschränkt sich auf die Interpretation von  $E_{ax}$  ( $N = 24$ ). Die Modellfindung kann so über reine Ausgleichsrechnungen erfolgen ( $\alpha = 0$ ). Um die jeweils erzielten Anpassungen zu verdeutlichen, wird zu jedem Modell ein pauschaler Anpassungsfehler  $\epsilon$  (nach der letzten Iteration) angegeben mit

$$\epsilon^2 = \left\langle \left| y_n - \sum_m F_{nm} x_m \right|^2 \right\rangle,$$

wobei die Mittlung über die benutzten Frequenzen, Meßorte und Komponenten erfolgt. Außerdem werden die jeweiligen Modelldaten gemeinsam mit den (umgerechneten) empirischen Daten gezeigt, um aus den individuellen Anpassungsfehlern auf etwaige systematische Abweichungen oder “Trends der Residuen” schließen zu können.

Abb. 7 ist in diesem Sinne das Ergebnis einer systematischen Suche nach einem Normalmodell bester Anpassung. Es zeigt sich, daß diese sich im vorliegenden Fall gegenüber einem einfachen Halbraum entscheidend verbessert, wenn man unter dem anomalen Bereich des Rheingrabens eine 600 Siemens Schicht in der mittleren Kruste einführt. Die

T=7200 1800 600 200 75 25  
3600 900 300 150 50 18.75s

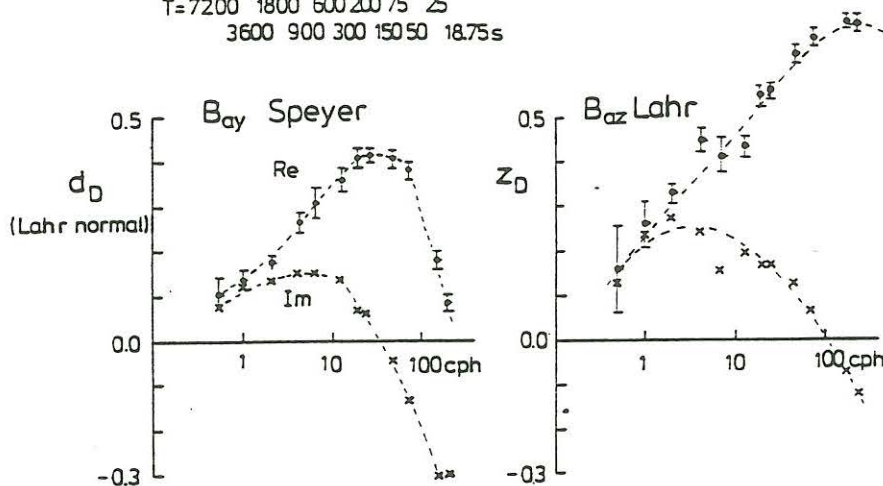


Abb. 6

Erdmagnetische Tiefensondierung

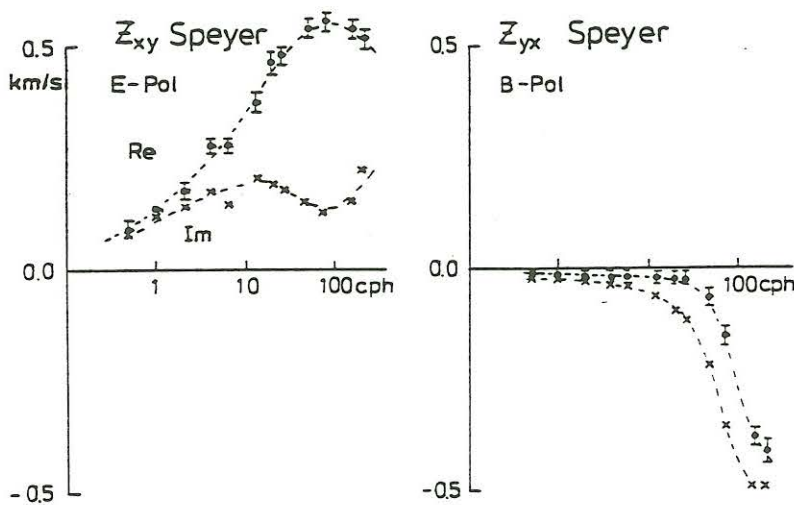
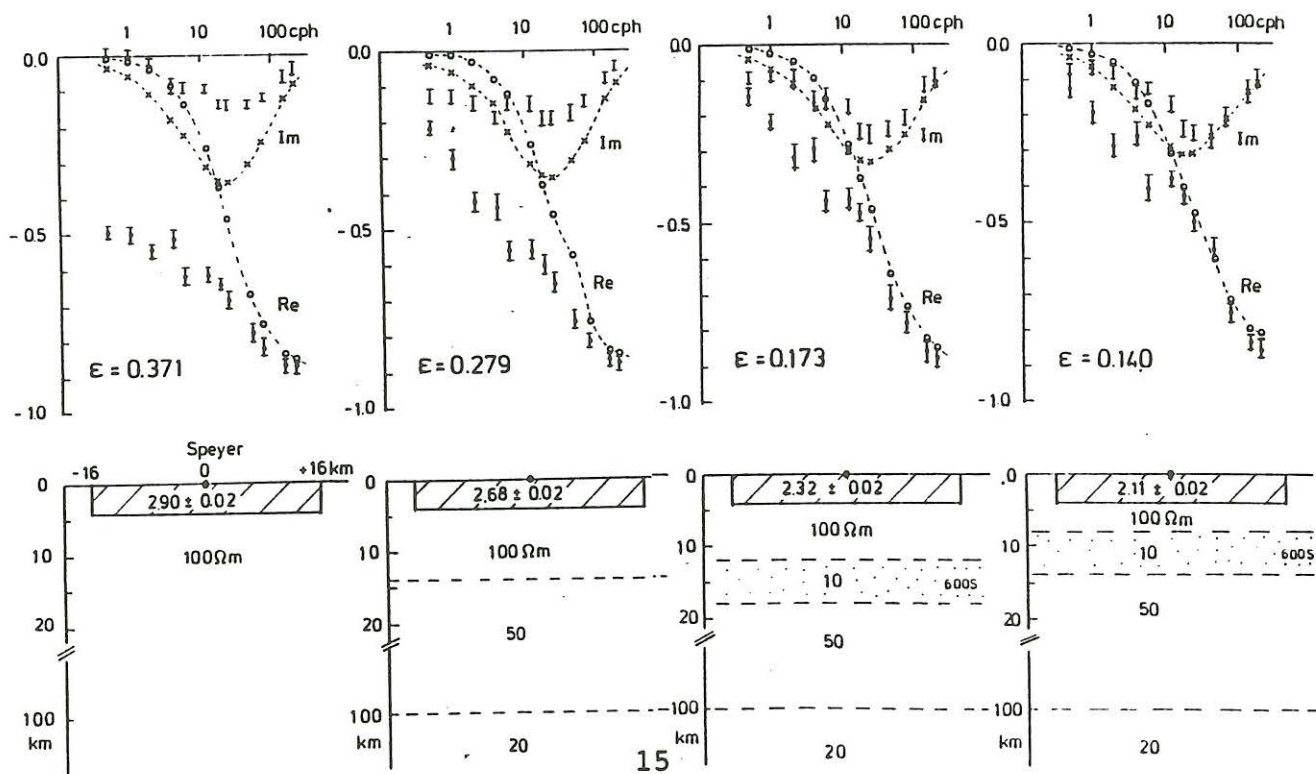
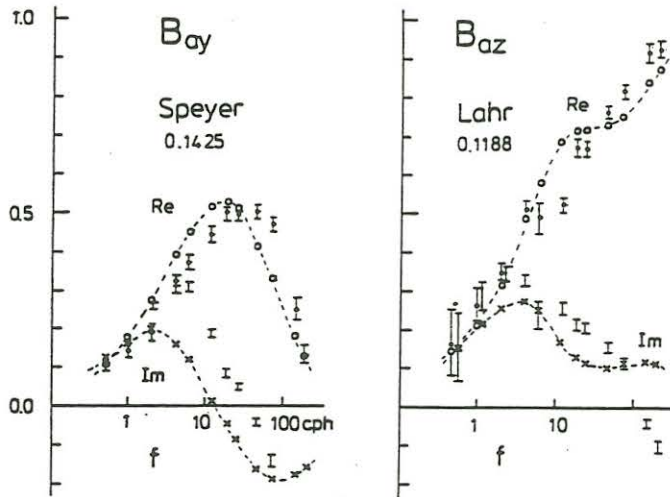


Abb. 7

Magnetotellurik

$E_{ax}$  (Speyer)  $M=1$   $N=24$   $\alpha=0.0$





	Speyer		Lahr		
100Ωm	1.31 ±0.02	3.25 ±0.26	3.25 ±0.26	1.31 ±0.02	100
100	4.14 ±0.64	1.26 ±0.05	1.26 ±0.05	4.14 ±0.64	100

### ETS Modell

M=4 N=48 α=0.2

ε = 0.1312 (23.8%)

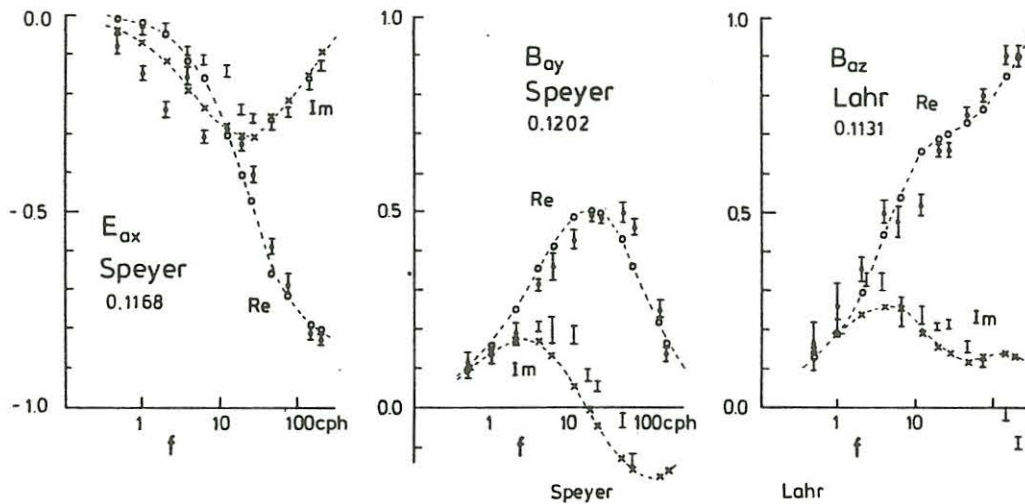
### A Matrix

```

93 14 1 -3
14 64 -4 9
1 -4 92 9
-3 9 9 85

```

Abb. 8



ε = 0.1167  
(21.9%)

	Speyer		Lahr		
100Ωm	1.30 ±0.02	2.38 ±0.10	2.38 ±0.10	1.30 ±0.02	100
100	9.90 ±3.33	1.77 ±0.09	1.77 ±0.09	9.90 ±3.33	100

### E-Pol. Modell

M=4 N=72 α=0.2

### A-Matrix

```

94 10 1 -3
10 74 -3 8
1 -3 95 5
-3 8 5 89

```

Abb. 9 16

Leitfähigkeiten des anomalen Bereichs verändern sich dabei nur wenig. Alle folgenden Rechnungen werden mit dem so gefundenen optimalen Normalmodell durchgeführt.

In Abb. 8 wird eine Interpretation für einen achtfach symmetrisch unterteilten anomalen Bereich ( $M = 4$ ) mit den Daten der magnetischen Induktionsanomalie ( $N = 48$ ) vorgenommen. Es ergibt sich eine signifikante Strukturierung, allerdings ist dabei die unten rechts angegebene Auflösungsmatrix zu berücksichtigen, da eine Stabilisierung mit  $\alpha = 0.2$  notwendig war. Nimmt man  $E_{ax}$  hinzu, bestätigt sich diese Strukturierung (Abb. 9): Die hochohmigen Bereiche in der zweiten Schicht (2 - 4 km) links und rechts entsprechen der Reduzierung der Sedimentmächtigkeiten zu den Rändern hin. Bemerkenswert sind die geringen spez. Widerstände in der Mitte der gleichen Schicht, die eine gewisse Zunahme der Leitfähigkeiten mit zunehmender Tiefe im Zentralbereich des Grabens andeuten.

Abschließend sei vermerkt, daß diese *gemeinsame* Auswertung aller Komponenten für  $E$ -Polarisation zu den besten Anpassungen führt, wie ein Vergleich mit den Anpassungsfehlern in Abb. 7 und Abb. 8 zeigt. Die für das Modell in Abb. 9 berechnete tellurische Anomalie für  $B$ -Polarisation erklärt auch die beobachtete  $E_{ay}$ -Anomalie in Speyer, von einer systematischen Diskrepanz im Realteil abgesehen (Abb. 10). Möglicherweise wirkt sich hier eine örtliche 3D Verzerrung des tellurischen Feldes aus. Im übrigen zeichnen sich in dem untersuchten Frequenzbereich die anomalen Feldwerte für  $B$ -Polarisation durch eine auffallend geringe Frequenzabhängigkeit aus mit entsprechend nachteiligen Folgen für ihre Interpretation.

## 6 Ausblick

Inzwischen ist der von Dr. Jones verteilte Datensatz COPROD 2 (im Rahmen eines Vergleichs von 2D Inversionsverfahren) in gleicher Weise interpretiert worden. Er umfaßt in seiner verkürzten Version die beiden Impedanzen  $Z_{xy}$  und  $Z_{yx}$  sowie die Übertragungsfunktionen für  $B_{ax}$  an 20 Meßorten für 4 Frequenzen. Die letztgenannten Übertragungsfunktionen erwiesen sich z.T. aber als widersprüchlich und wurden weggelassen, ebenso die der  $B$ -Polarisation zugeordneten Impedanzen. Somit verblieben  $N = 160$  Daten zur Bestimmung der anomalen Leitfähigkeit in bis zu  $M = 24$  Teilbereichen in acht Schichten, was wiederum eine gewisse Glättung der Lösungen erforderte. Im Unterschied zu anderen Verfahren zeigte der hier beschrittene Weg eine Modellfindung bei einer stufenweise Erhöhung von  $M$ , welche Details der Lösung von den Daten tatsächlich gefordert werden, um die bestmögliche Anpassung zu erreichen. Wie schon im Rheingraben sind die verbleibenden Anpassungsfehler aber deutlich größer als die mittleren Datenfehler.

Dies könnte bedeuten, daß die interpretierten Daten inkonsistent sind mit den gewählten Vorgaben - sofern sie überhaupt konsistent sind mit irgendeinem 2D Modell. Es wird daher zur Zeit versucht, die Vorgaben selbst iterativ wie folgt zu verbessern: Die COPROD2-Daten zum Beispiel enthalten randlich gelegene Stationen mit etwa gleichbleibenden Impedanzen (nach von Dr. Jones vorgenommener "static shift" Korrektur). Ihre 1D-Interpretation mit dem  $\psi$ -Algorithmus liefert das Normalmodell für den ersten iterativen Prozess der Modellfindung. Die Auswirkungen der gefundenen 2D-Anomalie auf die Impedanzen der Randstationen werden bestimmt und entsprechende 2D-Korrekturen berechnet. Die korrigierten Impedanzen der Randstationen werden erneut eindimensional

interpretiert und der iterative Prozess mit einem neuen Normalmodell wiederholt. Dies wird so lange fortgesetzt bis sich gleichbleibende Korrekturen für die Randstationen ergeben.

Ein zweiter kritischer Punkt bei den Vorgaben betrifft die Wahl der Grenzen des anomalen Bereichs. Hier scheint sich folgendes Vorgehen zu bewähren: Nach der ersten Modellfindung werden 1D-Korrekturen für *alle* Meßorte berechnet und angebracht. Ergeben die nachfolgenden 1D-Interpretationen der korrigierten Impedanzen, daß ausserhalb des im ersten Durchgang gewählten anomalen Bereichs signifikante laterale Leitfähigkeitsunterschiede auftreten, wird dieser in entsprechender Weise vergrößert.

Schließlich soll künftig versucht werden, auch Übergangsanomalien zu interpretieren, in denen die Normalstrukturen bis zur unteren Grenze des anomalen Bereichs links und rechts verschieden sind. Indem man die GREENSchen Funktionen auf die jeweils näher gelegene Normalstruktur bezieht, lassen sich die Integrale in den Darstellungen des anomalen Feldes zumindest näherungsweise auswerten. Der anomale tellurische Feldanteil ist dabei in gleicher Weise auf das tellurische Normalfeld an der Oberfläche der nächstgelegenen Normalstruktur zu beziehen.

#### Literatur

M.N. Berdichevsky und V.I. Dmitriev: Distortion of magnetic and electric fields by near-surface lateral inhomogeneities. *Acta Geod. Geophys. Mont. Hung.* 11, 447 - 483, 1976.

P. Weidelt: Entwicklung und Erprobung eines Verfahrens zur Inversion zweidimensionaler Leitfähigkeitsstrukturen in *E*-Polarisation. *Habilitationsschrift Univ. Göttingen* 1978.

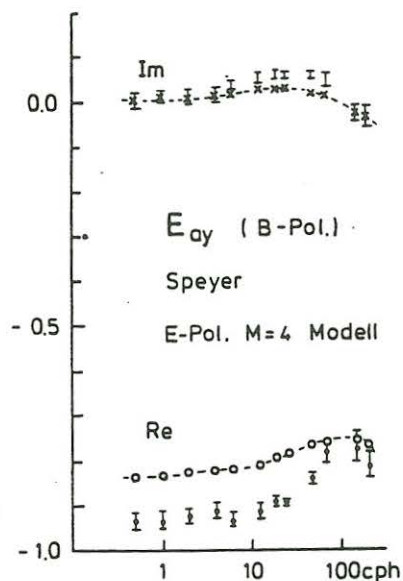


Abb. 10 18