

Gaston FISCHER, Observatoire Cantonal, CH-2000 Neuchâtel, Schweiz

Die kausalen Dispersions-Relationen in der Magnetotellurik

I Einleitung

Bei traditionellen Laborexperimenten kann man in den meisten Fällen *Ursache* und *Wirkung* streng trennen (Kausalität) und bei hinreichend kleinen Ursachen ist die Verknüpfung der beiden meistens linear (keine Verzerrung). Misst man, z. B., bei der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ die elektrische Polarisierung $P(\omega)$ einer Probe in Abhängigkeit eines elektrischen Feldes $E(\omega)$, so kann man i. a. die Relation zwischen P und E mittels einer Suszeptibilität $\chi(\omega)$ formal ausdrücken :

$$P(\omega) = \chi(\omega) E(\omega) \quad . \quad (1)$$

Die lineare/kausale Verknüpfung zwischen $P(\omega)$ und $E(\omega)$ drückt sich aus durch die bekannten Kramers-Kronig Dispersions-Relationen (Kronig 1926, Kramers 1927) zwischen reellem und imaginärem Teil von $\chi(\omega) = \chi_1(\omega) + i\chi_2(\omega)$ [siehe z. B. Fischer und Schnegg, 1980]. Das gleiche gilt auch für einen linearen Verstärker mit begrenzter Bandbreite : Der Phasengang kann aus dem bekannten Amplitudengang genau abgeleitet werden.

In der Magnetotellurik (MT) werden magnetische und elektrische Felder gemessen, bezugsweise $H(\omega)$ und $E(\omega)$, und deren Verknüpfung wird durch einen Impedanztensor $Z(\omega)$ ausgedrückt. Es besteht deshalb die Versuchung, dass man zwischen den reellen und imaginären Teilen von $Z(\omega)$ die gleichen Dispersions-Relationen wie bei $\chi(\omega)$ erwarten darf. Dies ist jedoch von Egbert (1990) in Frage gestellt worden, denn die in der MT gemessenen Felder $H(\omega)$ und $E(\omega)$ können nicht als getrennte *Ursache* und *Wirkung* angesehen werden. Beide Felder sind eine Superposition von *externen* und *internen* Beiträgen, d. h. von *Ursache* und *Wirkung*. In der Tat gelingt es

Egbert (1990) synthetische 3-D Strukturen zu konstruieren, wo die Kausalitäts-Relationen verletzt werden.

Bei 1-D oder horizontal geschichteten Strukturen reduziert sich der Tensor bekanntlich zu einer skalaren Grösse $Z(\omega)$. Weiter kann in dieser Situation leicht gezeigt werden, dass an der Oberfläche das interne und das externe Magnetfeld, bzw. $H_i(\omega)$ und $H_e(\omega)$, praktisch identisch sind, und das beobachtete Totalfeld $H(\omega)$ ist einfach deren Summe. Betrachtet man nun die Magnetfelder als primär, dann kann man sich externes und internes elektrisches Feld, respektive $E_e(\omega)$ und $E_i(\omega)$, beide als Folge oder *Wirkung* gleicher Primärfelder $H(\omega)$ vorstellen. Das elektrische Totalfeld entsteht jedoch nicht als *Addition*, sondern als *Subtraktion* von $E_e(\omega)$ und $E_i(\omega)$. Die praktische Identität der externen und internen Felder hat zur Folge, dass für die totalen Felder die Dispersions-Relationen erhalten bleiben.

Bei 2-D Strukturen unterliegt der Impedanztensor bekanntlich gewissen Symmetrie-Eigenschaften. Die Spur des Tensors verschwindet und in der Streichrichtung sind die Elemente der Diagonalen selbst null. Dazu kommt noch, dass diese zwei Elemente einzeln das gleiche Argument ($\pm\pi$) erhalten, wie die Summe der nicht-diagonalen Elemente (Fischer, 1975). Weiter zeigt sich, dass für 2-D Strukturen die elektromagnetische Anregung in zwei getrennte Probleme zerfällt, je nachdem ob das elektrische oder das magnetische Feld in der Streichrichtung liegt. Diese zwei Konfigurationen beschreibt man, respektive, als E- oder B-Polarisation und das allgemeine Problem ist immer eine Superposition der beiden.

Bei der B-Polarisation findet man, wie im 1-D Fall, dass an der Oberfläche der Struktur das externe und das interne Magnetfeld praktisch gleich sind. Es können wiederum die beiden elektrischen Felder $E_e(\omega)$ und $E_i(\omega)$ als Folgen gleicher Primärfelder betrachtet werden und die Dispersions-Relationen bleiben somit erhalten. Bei der E-Polarisation sind an der Oberfläche die beiden Magnetfelder jedoch nicht mehr identisch und es besteht dann die Frage, ob die Dispersions-Relationen noch allgemeine Gültigkeit behalten.

II Dispersion-Relationen im 1-D Fall der Magnetotellurik

Traditionsgemäss werden in der MT die Koeffizienten $Z_{ij}(\omega)$ des Impedanzensors mittels Hilfsgrössen ausgedrückt, dem scheinbaren spezifischen Widerstand $\rho_{ij}(\omega)$ und der Phase $\psi_{ij}(\omega)$, wobei $\rho_{ij}(\omega)$ aus dem Betrag des entsprechenden Tensorkoeffizientens abgeleitet wird, derweil $\psi_{ij}(\omega)$ dessen Argument darstellt. Auch die Bearbeitung der MT Messdaten liefert manchmal direkt $\rho_{ij}(\omega)$ und $\psi_{ij}(\omega)$, und nicht die Tensorkoeffizienten selbst. Es gibt sogar Verfahren wo nur scheinbare Widerstände abgeleitet werden und es besteht somit oft der Wunsch, die Phasen rechnerisch aus den Widerstandsdaten abzuleiten. Dieses Bedürfnis haben Weidelt (1972) und Fischer und Schnegg (1980) dazu bewogen, für den 1-D Fall die Dispersions-Relationen, welche Real- und Imaginärteil von $Z(\omega)$ verknüpfen, auf ein Verhältnis zwischen $\psi(\omega)$ und $\rho_a(\omega)$ umzuformen, und die letztgenannten Autoren haben dann auch die umgekehrte Relation abgeleitet.

In den Relationen, die Fischer und Schnegg (1980) abgeleitet haben, beschreibt die Phase $\phi(\omega)$ die Abweichung vom Fall des homogenen Halbraumes. Zwischen diesem ϕ und der üblichen MT-Phase ψ , besteht also die Beziehung

$$\psi(T) = \frac{\pi}{4} - \phi(T) \quad , \quad (2)$$

wo nun an Stelle der Kreisfrequenz ω , die in der Praxis üblichere Periode $T, = 2\pi/\omega$ eingeführt wurde.

Die Dispersions-Relationen können nun in der folgenden Form ausgedrückt werden :

$$\psi(T_o) = \frac{\pi}{4} + \frac{T_o}{\pi} p \int_{\infty}^{+\infty} d(\ln T) \frac{T \ln P(T)}{T_o^2 - T^2} \quad , \quad (3)$$

wo $P(T) = \rho_a(T)/\rho_1$ das Verhältnis zwischen dem scheinbaren spezifischen Widerstand und einer geeigneten Referenz ist, während p Cauchy-Hauptwert bezeichnet. Umgekehrt lässt sich $P(T)$ aus $\psi(T)$ mit der folgenden Formel (4) berechnen :

$$\ln P(T_0) = \frac{4 T_0^2}{\pi} p \int_{-\infty}^{+\infty} d(\ln T) \frac{\frac{\pi}{4} - \psi(T)}{T_0^2 - T^2} . \quad (4)$$

Die Integrale der Gleichungen (3) und (4) sind numerisch leicht auszuführen, bis auf den Integrationsschritt über die Pole der Integranden. Wenn im numerischen Verfahren Δ die Schrittlänge entlang der $\ln T$ Achse bedeutet, liefert das Intervall von $\ln T_0 - (\Delta/2)$ bis $\ln T_0 + (\Delta/2)$ für Gl. (3) den Beitrag

$$\Delta \psi(T_0) \cong - \frac{\log_{10} P(T_0 \cdot 10^{+\Delta/2}) - \log_{10} P(T_0 \cdot 10^{-\Delta/2})}{2 \pi M} , \quad (5)$$

wo $M = \log_{10} e$. Für Gl. (4) gibt das Gleiche Intervall den Beitrag

$$\Delta [\ln P(T_0)] \cong \frac{4\Delta}{\pi M} \left[\frac{\pi}{4} - \psi(T_0) + \frac{\psi(T_0 \cdot 10^{+\Delta/M}) - \psi(T_0 \cdot 10^{-\Delta/M})}{(\Delta / M)} \right] . \quad (6)$$

III MT Dispersions-Relationen im 2-D Fall

Wie wir in der Einleitung gesehen haben, darf laut Egbert (1990) im allgemeinen 3-D Fall nicht angenommen werden, dass die oben angegebenen Dispersions-Relationen ihre Gültigkeit bewahren, entgegen den Behauptungen von Yee und Paulson (1988, 1990). Im 2-D Fall, dagegen, sind bei B-Polarisation die Relationen noch erfüllt und es stellt sich die Frage ob dies auch für die E-Polarisation noch zutrifft.

Die synthetischen 3-D Modelle, die Egbert (1990) konstruieren musste um die Relationen zu verletzen, enthalten hochverzerrende stromkanalisierende Strukturen an der Oberfläche, wie z. B. diejenige der Figur 2 seiner Arbeit. Diese Struktur führt im Punkte (a) einen Strom, der entgegen dem allgemeinen elektrischen Feld und dem dort herrschenden lokalen Magnetfeld fließt. Das ist wie ein

künstlicher negativer Widerstand. Dort brechen Linearität und Passivität zusammen, wo doch üblicherweise bei MT Problemen die Erde als passives System angenommen wird. Hier liegt eigentlich der springende Punkt in Egbert's (1990) Argumenten : global betrachtet ist die Erde immer passiv, lokal jedoch im allgemeinen nicht, entgegen den impliziten Annahmen von Yee und Paulson (1988, 1990). Das heisst natürlich nicht, dass aktive lineare Systeme, wie z. B. Verstärker, den Dispersions-Relationen nicht gehorchen. Wichtig ist, dass solche Systeme linear sein müssen. Lokal betrachtet trifft dies für die 3-D Erde im allgemein nicht zu.

Etwas ähnliches passiert in der unmittelbaren Nähe einer komplizierten 3-D Antenne, wo lokale, nicht abstrahlende Felder, sog. "trapped Modes", für die Kontinuitätsbedingungen an der Antennenoberfläche sorgen. Als Folge dieser Störfelder gibt der Poyntingvektor im allgemeinen in Antennenähe nicht den korrekten Energiefluss. Erst eine Integration des Poyntingvektors um die ganze Antenne würde den gesamten Energiefluss richtig wiedergeben. Bei unendlich langgestreckten 2-D Antennen tritt dies nicht auf, denn der Poyntingvektor in der unmittelbaren Umgebung eines unendlich langen Drahtes gibt immer den korrekten Energiefluss. Da die 2-D Antenne immer als Kombination einzelner unendlich langer Drähte angesehen werden kann, gibt der Poyntingvektor auch hier die richtige Antwort.

Mit reinen 2-D Modellen ist es zwar immer noch möglich, stromkanalisierende Gefüge zu konstruieren, nicht aber Verzerrungen der Felder, die zu einer Verletzung der Dispersions-Relationen führen : rein mathematisch gesehen bliebe diese Möglichkeit nur dann offen, wenn man negative Widerstände zuliesse; dies entspricht jedoch einer Verletzung der Linearität und der implizit angenommenen Passivität, denn man könnte dann verschwindende Widerstände herstellen, d. h., endliche Ströme im feldlosen Zustand haben. Die Frage, ob für 2-D Strukturen die Dispersions-Relationen auch im Falle der E-Polarisation Ihre Gültigkeit bewahren, ist also wohlberechtigt. Trifft dies zu, so sind die Relationen auch im allgemeinen 2-D Fall erfüllt, denn dieser entsteht ja als lineare Superposition der zwei getrennten Hauptachsenfälle. Die in diesem Sinne etwas gewagte Behauptung von Fischer und Schnegg (1980), wäre also doch erfüllt.

Im folgenden bringen wir zwar keinen strengen Beweis, dass im allgemeinen 2-D Fall die Dispersions-Relationen immer noch gültig sind, zeigen jedoch das interessante Beispiel einer markanten 2-D Struktur, die Fischer und Schnegg (1992) kürzlich zu diesem Zweck untersucht haben und welches diese Behauptung stark unterstützt.

Die von Fischer und Schnegg (1992) ausgewählte Struktur ist das in Figur 1 skizzierte Viertelraum-Modell, das neuerdings eingehend untersucht wurde (Fischer et al., 1992). Dieses Modell ist für unsere Zwecke aus zwei Gründen besonders geeignet :

- (1) Mit einer bis an die Oberfläche reichenden Unstetigkeit der Leitfähigkeit, darf sie als recht markante 2-D Struktur betrachtet werden.
- (2) Auf einem Oberflächenprofil kann die Eindringtiefe in einem der Viertelräume als Längeneinheit benützt werden. Eine Änderung der Periode T ist dann äquivalent mit einer Distanz-Änderung. Die numerische Rechnung des Verhaltens der Struktur an den verschiedenen Netzpunkten liefert somit gleich die gewünschte Periodenabhängigkeit

Figur 2 ist eine Darstellung der MT Parameter auf einem Profil über das Modell der Figur 1. Die Rechnung wurde mit dem Programm von Wannamaker et al. (1987) bei der Periode $T = 1$ s ausgeführt. Es ist leicht einzusehen, dass das Verhalten im Abstand d von der Trennfläche (der Koordinaten-Ursprung), das gleiche ist wie im Abstand αd aber bei der Periode $T = 1/\alpha^2$.

IV Die MT Dispersions-Relationen über das Viertelraum-Modell

Figur 3 gibt das Phasenverhalten in der E-Polarisation über das gewählte Modell (Fig. 1), im Abstand von 1.5915 km von der Trennfläche (d. h. eine Skintiefe bei $T = 1$ s im $10 \Omega m$ linken Viertelraum). Die punktierten Kurven ergeben sich von der direkten numerischen Rechnung, die durchgezogenen sind über die Dispersions-Relationen gewonnen. Die zwei Kurvensätze beziehen sich auf die linke und rechte Seite der Trennfläche, bzw. den 10 und den

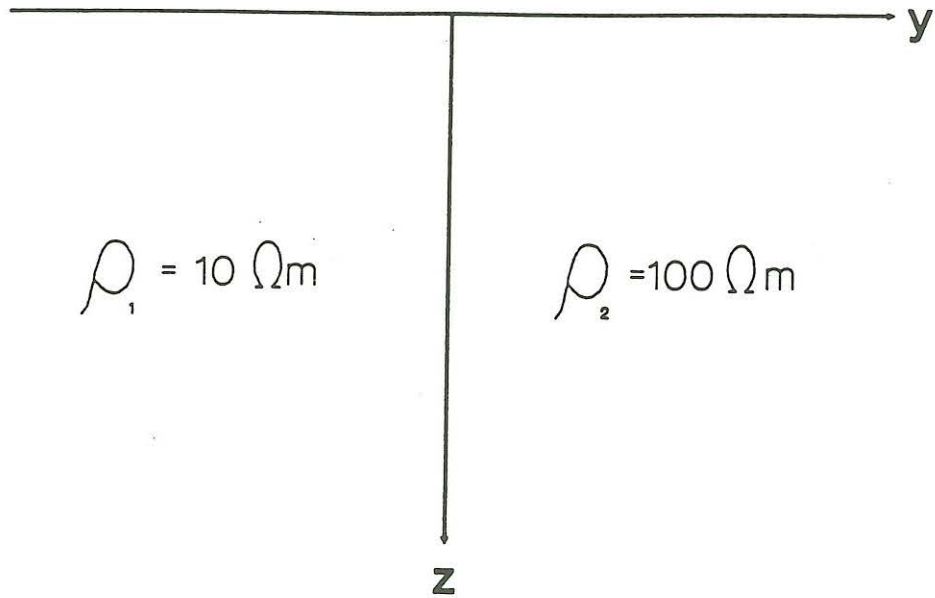


Fig. 1 Modell aus zwei Viertelräumen zur Prüfung der MT Dispersions-Relationen.

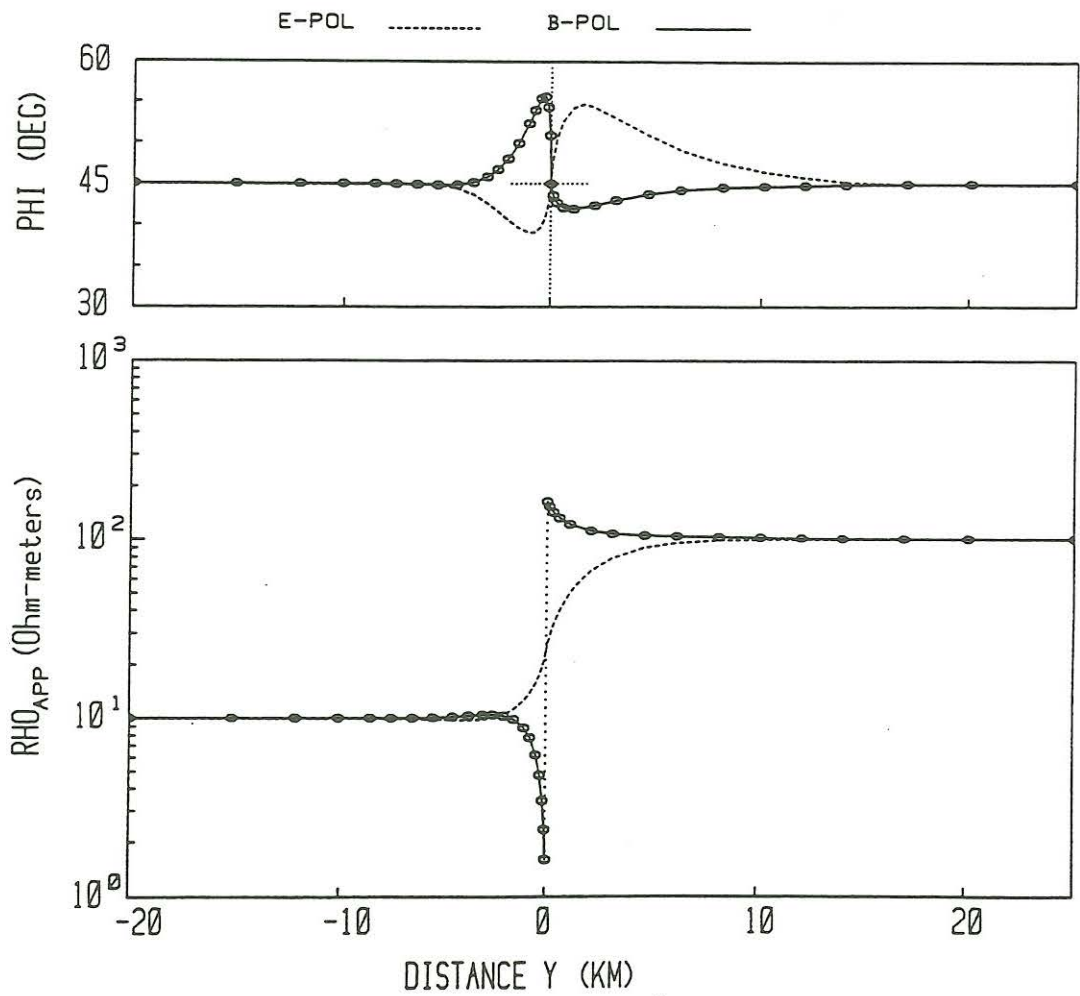


Fig. 2. MT Verhalten des Viertelraummodelles von Figur 1 bei einer Periode T von eine Sekunde (T = 1 s).

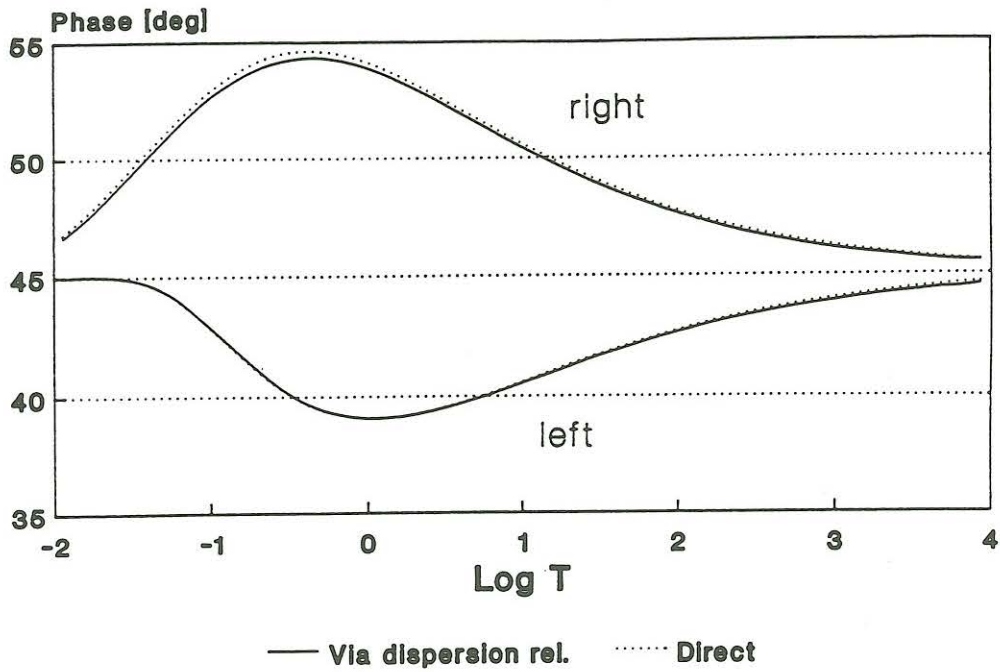


Fig. 3. MT Phase von $Z_{xy}(T)$ auf den linken und rechten Seiten des Modelles von Figur 1, als Funktion der Periode. Z_{xy} entspricht der E-Polarisation. Die Rechnungen beziehen sich auf Punkte im Abstand von 1.5915 km von der Trennfläche (eine Skintiefe im 10 Ω m linken Leiter, bei $T = 1$ s) und stammen von Fischer und Schnegg (1992).

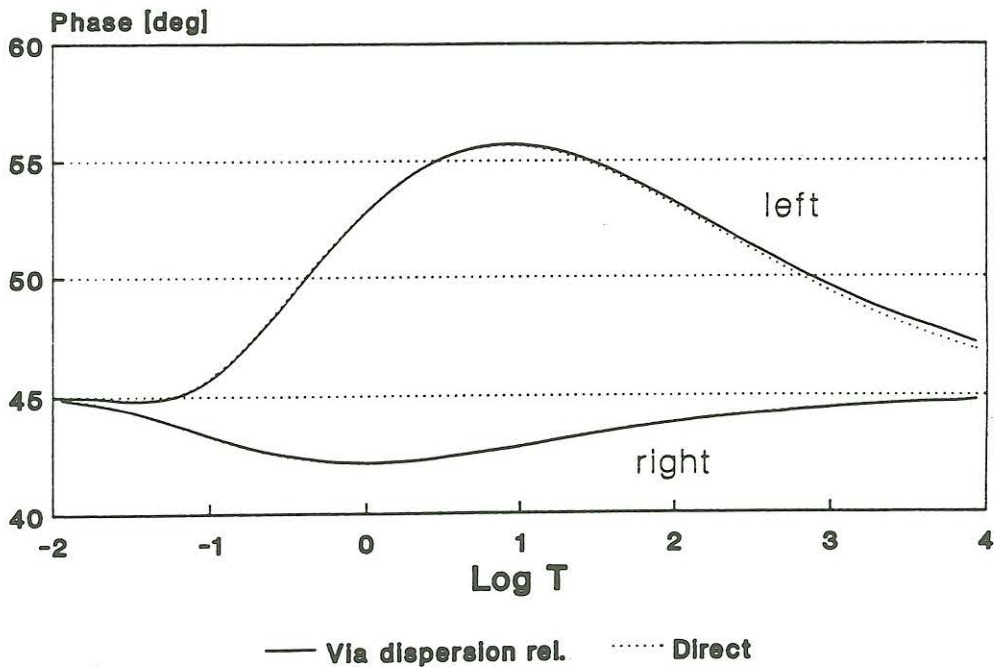


Fig. 4. MT Phase von $Z_{yx}(T)$ auf den linken und rechten Seiten des Modelles von Figur 1, als Funktion der Periode. Z_{yx} entspricht der B-Polarisation. Sonst wie Figur 3.

100 Ωm Raum. Die leicht grössere Diskrepanz der Resultate auf der hochohmigen rechten Seite sind numerischen Ursprungs, denn die Modellierung ist allgemein im hochohmigen Medium ungenauer.

Das Verhalten in der B-Polarisation ist in Figur 4 zu sehen. Hier ist die Uebereinstimmung besonders gut.

Die Graphik der Figur 5 zeigt, für beide Polarisationen und beide Seiten, durchgezogen die aus den Phasen berechneten scheinbaren Widerstände, während die punktierten Kurven wiederum das direkte Ergebnis der Modellrechnung darstellen. In der Figur kommt die Stetigkeit von Z_{xy} (E-Polarisation) an der Trennfläche und die Unstetigkeit von Z_{yx} (B-Polarisation) schön zum Ausdruck. Als Referenzwiderstände wurden natürlich 10 Ωm auf der linken Seite gewählt und rechts 100 Ωm . Man sieht wiederum, wie die numerische Rechnung im hochohmigen Viertelraum ungenauer ist. Bei der B-Polarisation hat dies besonders mit der grossen Unstetigkeit von ρ_a an der Trennfläche Mühe. Der flache Auslauf der scheinbaren Widerstände bei langen Perioden erklärt auch die zugehörigen Phasen von genau $\pi/4 = 45^\circ$ auf der Trennfläche, die sich etwas überraschend aus den numerischen Rechnungen von Fischer et al. (1992) ergaben.

V Schlussfolgerungen

Wie Egbert (1990) gezeigt hat, stehen die in der MT gemessenen magnetischen und elektrischen Felder nicht in einem einfachen Verhältnis von *Ursache* und *Wirkung*. Dies hat zur Folge, dass die Kramers-Kronig (1927, 1926) Dispersions-Relationen, die bei linearen Systemen aus der Kausalität ableitbar sind, im Fall von 3-D Strukturen im allgemein nicht mehr befolgt werden. Die Einschränkungen von Egbert (1990) sind jedoch im allgemeinen auf 2-D Strukturen nicht übertragbar, und im 2-D Fall scheinen die Kausalitäts-Relationen ihre Gültigkeit doch zu bewahren.

Der Autor ist Prof. P. Weidelt für seine Hilfe sehr dankbar.

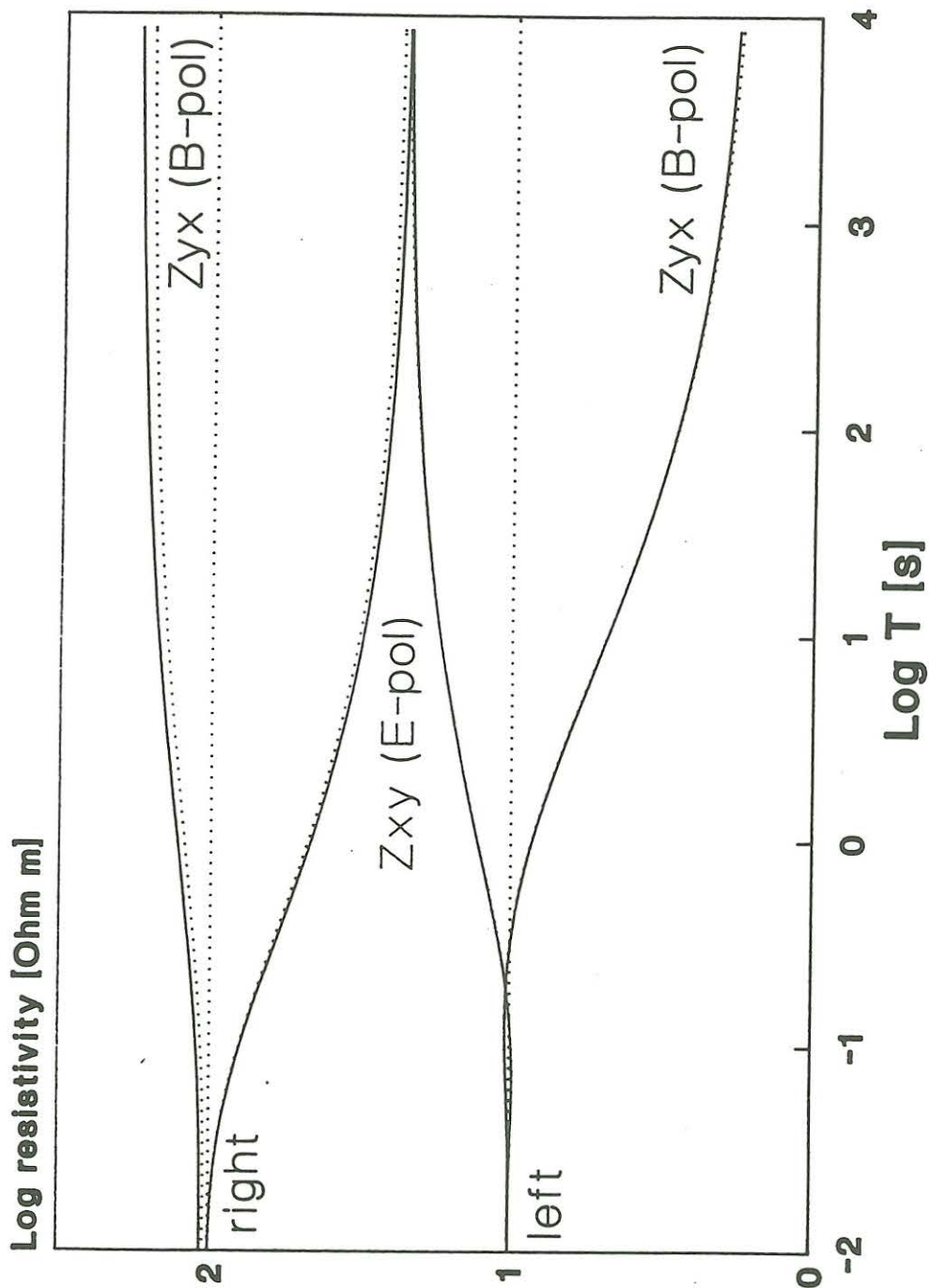


Fig. 5. MT scheinbarer Widerstand als Funktion der Periode. Die Modellrechnung liefert die punktierte Kurve. Durchgezogen ist das Ableitung aus den Dispersions-Relationen. Z_{xy} entspricht der E-Polarisation und Z_{yx} der B-Polarisation. Man beachte die kleinen Oszillationen bei kurzen Perioden, ähnlich wie bei geschichteten Strukturen. Die Uebereinstimmung ist, trotz numerischer Ungenauigkeiten im hochohmigen Leiter, sehr gut. Bei langen Perioden konvergieren die scheinbaren Widerstände in der E-Polarisation und divergieren in der B-Polarisation, dem Verhalten der Figur 2 entsprechend. Sonst wie Figur 3.

REFERENZEN

- Egbert, G. D. , 1990. Comments on 'Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor' by Yee and Paulson, *Geophys. J. Int.*, 102, 1-8.
- Fischer, G., 1975. Symmetry properties of the surface impedance tensor for structures with a vertical plane of symmetry, *Geophysics*, 52, 1046-1050.
- Fischer, G. & Schnegg, P.-A., 1980. The dispersion relations of the magnetotelluric response and their incidence on the inversion problem, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 62, 661-673.
- Fischer, G., Szarka, L., Adam, A. & Weaver, J. T., 1992. The magnetotelluric phase over 2-D structures. *Geophys. J. Int.*, 108, 778-786.
- Fischer, G. und Schnegg, P.-A., 1992. The MT dispersion relations over 2-D structures. *To be published*.
- Kramers, J. A., 1927. La diffusion de la lumière par les atomes, *Atti Congr. Intern. Fisica, Como 2*, 545-557.
- Kronig, R., 1926. On the theory of dispersion of X-rays, *J. Opt. Soc. Am.*, 12, 547-557.
- Wannamaker, P. E., Stodt, J. A. & Rijo, L., 1987. A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modeling, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 88, 277-296.
- Weidelt, P., 1972. The inverse problem of geomagnetic induction, *Z. Geophys.*, 38, 257-289.
- Yee, E. & Paulson, K. V., 1988. Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor, *Geophys. J.*, 95, 549-559.
- Yee, E. & Paulson, K. V., 1990. Reply to 'Comments on : Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor' by G. D. Egbert, *Geophys. J. Int.*, 102, 9-13.