

A. Junge

Zur Schätzung der effektiven Anzahl der Freiheitsgrade bei der Bestimmung magnetotellurischer Übertragungsfunktionen

Einleitung

Die zu interpretierenden Daten in der Magnetotellurik und erdmagnetischen Tiefsondierung sind mit statistischen Verfahren geschätzte Größen, die die frequenzabhängigen Beziehungen zwischen den elektromagnetischen Feldkomponenten wiedergeben, z.B. als Real- und Imaginärteil von Übertragungsfunktionen oder scheinbarem Widerstand und Phase. Wegen der endlichen Anzahl fehlerbehafteter Meßwerte sind jedoch nur Vertrauensbereiche dieser Größen mit beschränkter Frequenzauflösung angebbbar.

Die Auflösbarkeit einer Leitfähigkeitsstruktur hängt deshalb nicht zuletzt von der genauen Schätzung der Größe der Vertrauensbereiche ab: Überschätzte Vertrauensbereiche können vorhandene Strukturen verdecken, unterschätzte Vertrauensbereiche nicht existierende Strukturen vortäuschen. Die Anzahl der Freiheitsgrade, d.h. die Zahl der voneinander unabhängigen Meßgrößen ist maßgeblich an der Bestimmung der Vertrauensbereiche beteiligt. Oft wird die Unabhängigkeit a priori angenommen, was zu einer zu großen Anzahl von Freiheitsgraden und demzufolge viel zu kleinen Fehlerbalken führen kann.

In diesem Beitrag wird ein Weg zur realistischen Schätzung der Anzahl der Freiheitsgrade diskutiert. Dabei wird eine parametrische Verteilung zur Beschreibung der Datenfehler, die Normalverteilung bzw. die χ^2 -Verteilung benützt. Auf nichtparametrische Ansätze, wie z.B. die jack-knife-Methode (Thomson and Chave, 1991), die eine in den letzten Jahren entwickelte Alternative zur Bestimmung von Vertrauensbereichen darstellen, wird an anderer Stelle eingegangen.

Beschreibung des statistischen Ensembles

Es seien X, Y, Z stellvertretend die FOURIER-Koeffizienten einer harmonischen Analyse der beobachteten Zeitreihen der Komponenten des erdmagnetischen Feldes, B_x, B_y, B_z und der des horizontalen tellurischen Feldes, E_x, E_y , wobei X und Y als fehlerfreie und Z als fehlerbehaftete Größen betrachtet werden.

In dem linearen bivariaten Ansatz

$$Z = \underbrace{T_x X + T_y Y}_{Z_p} + \epsilon \quad (1)$$

sei Z_p der aus X und Y vorhergesagte (predicted) Anteil von Z und ϵ das Residuum.

Durch Minimierung von $\langle |\epsilon|^2 \rangle$ werden Schätzwerte \hat{T}_x und \hat{T}_y bestimmt. $\langle \ \rangle$ bedeutet dabei die Glättung des Spektrums, z.B. mit einem PARZEN-Fenster, über einen gewissen Frequenzbereich, für den \hat{T}_x und \hat{T}_y näherungsweise als frequenzunabhängig angenommen werden.

Im Idealfall sind Real- und Imaginärteil von ϵ unabhängig voneinander und normalverteilt, so daß $\langle |\epsilon|^2 \rangle$ eine χ^2_ν -verteilte Größe mit $\nu = \nu_b = 2bT$ Freiheitsgraden ist. T gibt die Länge der Zeitreihe an, b ist als äquivalente Bandbreite vom verwendeten Spektralfenster abhängig (siehe z.B. (Jenkins and Watts, 1968, S.252) und der Faktor 2 berücksichtigt die komplexe Dimension von ϵ . ν_b ist demnach die in die Glättung eingehende Anzahl unabhängiger Größen.

Wird die gesamte Zeitreihe in $i = 1, \dots, N$ Abschnitte gleicher Länge unterteilt, so ergeben sich für jedes Frequenzband N χ^2 -verteilte Zufallsgrößen $\langle |\epsilon|^2 \rangle_i$ mit dem Erwartungswert und Varianz

$$E\{\langle |\epsilon|^2 \rangle\} = \nu \sigma_\epsilon^2 \quad (2a)$$

$$\text{var}\{\langle |\epsilon|^2 \rangle\} = 2\nu (\sigma_\epsilon^2)^2 \quad (2b)$$

wobei σ_ϵ^2 als Skalierungsgröße der als gleich angenommenen Varianz von Real- bzw. Imaginärteil von ϵ entspricht.

Die Anzahl der Freiheitsgrade kann aus (2a) und (2b) berechnet werden, da die χ^2 -Verteilung eine Einparameter-Verteilung ist:

$$\nu = \frac{2 (E\{\langle |\epsilon|^2 \rangle\})^2}{\text{var}\{\langle |\epsilon|^2 \rangle\}} \quad (3)$$

Sind die Residuen innerhalb des Frequenzbandes nicht unabhängig voneinander, folgt $\nu < \nu_b$.

Es ist also zu überprüfen, ob $\langle |\epsilon|^2 \rangle$ tatsächlich einer χ^2 -Verteilung genügt, und, falls dies der Fall ist, wie groß ν ist.

Beispiele mit Zufallszahlen

Einige numerische Beispiele mit Zufallszahlen sollen den Einfluß von Abweichungen von der Normalverteilung auf die Schätzung der Freiheitsgrade vermitteln. Als graphische Darstellung wurde der Q-Q Plot gewählt, in dem die Quantile der beobachteten Stichprobenverteilung gegenüber den Quantilen der theoretischen Verteilung aufgetragen werden (Fowlkes, 1979).

Werden die Elemente $\{\langle |\epsilon|^2 \rangle_i\}$ der Größe nach aufsteigend angeordnet, gilt

$$\frac{\langle |\epsilon|^2 \rangle_i}{\sigma_\epsilon^2} \approx F^{-1}\left(\frac{i - \frac{1}{2}}{N}\right) \quad (4)$$

mit

$$F(x) = \int_0^x \chi_\nu^2(x') dx' \quad (4a)$$

Für die Berechnung der Inversion von $F(x)$ wurde (Zelen and Severo, 1965, S.941, [26.4.17])¹⁾ als Näherungsformel verwendet.

Nach (4) stellt im Idealfall der Q-Q Plot eine Gerade dar, deren Steigung durch σ_ϵ bestimmt wird. Nach (2a,b) lassen sich ν und σ_ϵ jedoch schätzen, so daß der Vergleich mit der zugehörigen χ_ν^2 -Verteilung möglich ist und die Steigung der Geraden nach der Normierung mit σ_ϵ^2 gleich eins ist.

Zur Erzeugung der normalverteilten Zufallsvariablen wurde die FORTRAN-Routine GASDEV aus (Press et al., 1989) benutzt. Es wurden zunächst 200 Stichproben vom Umfang 50 normalverteilter Daten x_{ij} , $i = 1, \dots, 50$, $j = 1, \dots, 200$ mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ erzeugt. Die quadrierten Zufallszahlen jeder Stichprobe wurden aufsummiert, so daß die Summen $S_j = \sum_i (x_{ij})^2$ χ^2 -verteilte Größen mit $\nu = 50$ Freiheitsgraden waren. Die S_j wurden über den Quantilen einer χ_{50}^2 -Verteilung aufgetragen und liegen - (siehe Abb.1a) - auf einer Geraden mit der Steigung eins. Die geringen Abweichungen am unteren Ende der Geraden können nicht erklärt werden und sind möglicherweise in der numerischen Realisierung des Zufallszahlengenerators begründet.

Als nächstes wurde eine Mischverteilung erzeugt mit 180 (90%) der Stichprobendaten aus einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ und 20 Daten (10%) mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 2$. Die S_j wurden wieder über den Quantilen einer χ_{50}^2 -Verteilung aufgetragen (Abb.1b). Während der Großteil der Daten nach wie vor auf der 45° Geraden liegt, weichen die „gestörten“ - Daten signifikant nach oben ab, bedingt durch die größere Varianz der Störungen.

Als drittes wurde eine quasikontinuierliche Mischverteilung simuliert, indem die Varianz der Zufallszahlen für jede Stichprobe schrittweise um 9/199 erhöht wurde. Auf diese Weise wurden 200 Stichproben mit im Intervall $[1, 10]$ gleichverteilter Varianz erzeugt. Als Ergebnis erhält man eine leicht s-förmig gekrümmte Kurve, die weit unterhalb der für eine χ_{50}^2 -verteilten Zufallsgröße gültigen, gestrichelten Gerade liegt (Abb.1c). Die Verschiebung zu kleineren Ordinatenwerten rührt von der Tatsache, daß durch die Mischverteilung die Varianzen stärker anwachsen als die Quadrate der Erwartungswerte und deshalb nach (3) sich eine geringere mittlere Anzahl von

¹⁾Für die Inversion der χ^2 -Verteilung nach (26.4.17) in (Zelen and Severo, 1965) wird $\nu > 30$ angegeben, für die Darstellung der Q-Q Plots reicht aber eine geringere Genauigkeit aus, so daß die Formel ohne Bedenken für $\nu > 10$ angewendet werden darf.

Freiheitsgraden ergibt: Für den Fall a) beträgt die nach (3) berechnete Anzahl von Freiheitsgraden $\hat{\nu} = 49$, für b) war $\hat{\nu} = 16$ und für c) $\hat{\nu} = 7.5$.

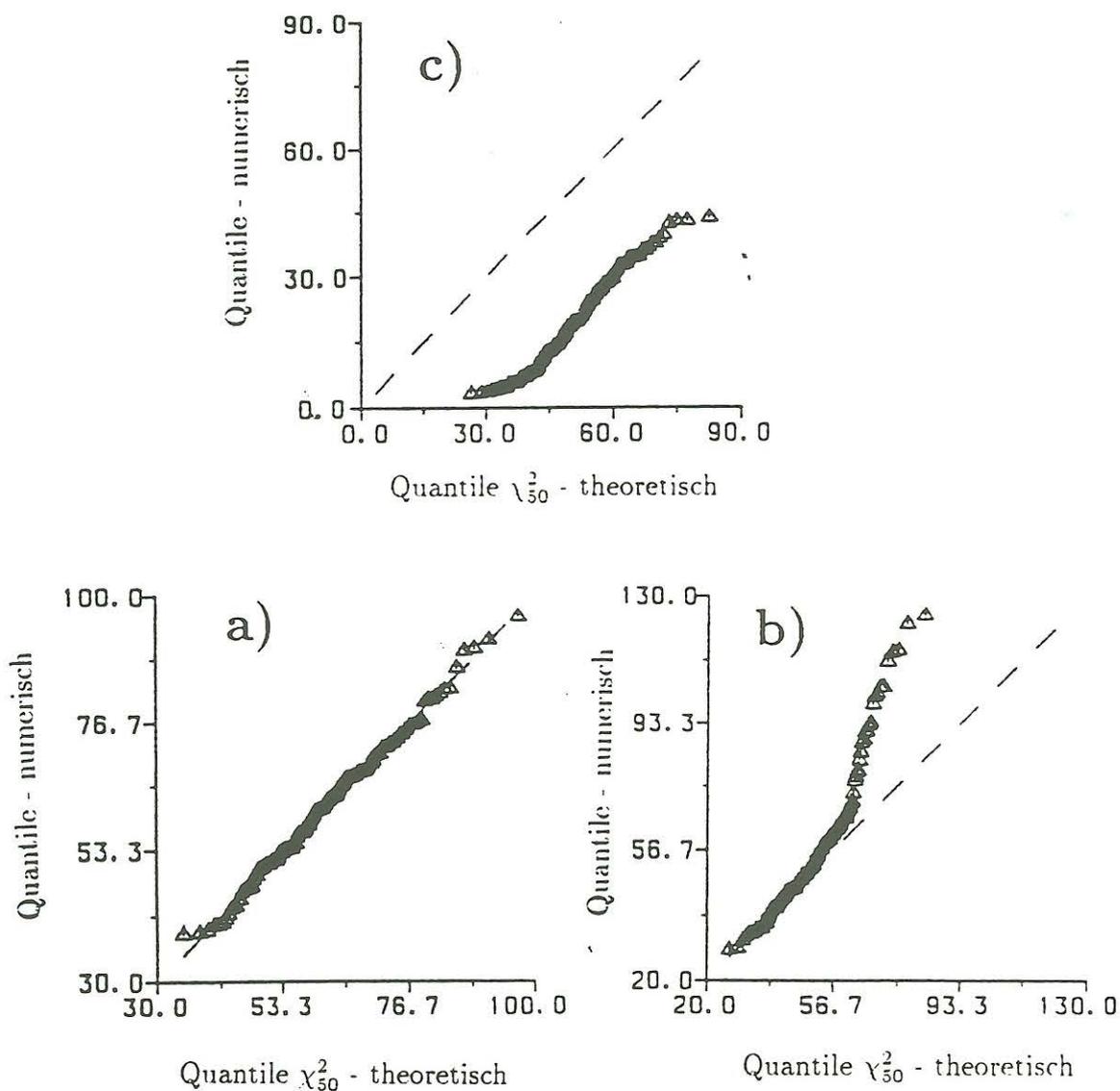


Abbildung 1: Q-Q Plots von 200 χ_{50}^2 -verteilten Zufallszahlen, entstanden aus

- je 50 quadrierten normalverteilten Zufallszahlen mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\phi(x; \mu = 0, \sigma^2 = 1)$,
- 2 überlagerten Verteilungen, wobei 10 % der Daten aus a) aus quadrierten Zufallszahlen mit $\sigma^2 = 2$ berechnet wurden,
- einer quasi-kontinuierlichen Mischverteilung mit σ^2 gleichverteilt in $[1, 10]$.

In b) und c) wird der Einfluß der Mischverteilung deutlich sichtbar in der Abweichung von der gestrichelten Geraden.

Beispiele mit Meßdaten

Am Beispiel eines bei Bad Segeberg gemessenen Datensatzes (Junge, 1986) werden im folgenden beobachtete Verteilungen der Residuen diskutiert. Die simultanen Zeitreihen der drei magnetischen und zwei tellurischen Komponenten wurden mit einem Trapezfilter nach (Schmucker, 1978) ($f_0 = 0.5$ cph, Steilheit $q=2$) hochpaßgefiltert und anschließend 426 Zeitintervalle à 12 Stunden Länge (Diskretisierungsrate $\Delta t = 2$ m) gebildet. Aufeinanderfolgende Intervalle überlappten sich zu $2/3$, um eine höhere zeitliche Auflösung zu erhalten. Die in den Abbildungen dargestellten geglätteten Residuen sind deshalb untereinander nicht mehr statistisch unabhängig voneinander! Dies hat jedoch auf die Form der Verteilung, die die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt, keinen Einfluß.

Gemäß (1) wurden für 5 verschiedene Frequenzen bivariate Ausgleichsrechnungen mit verschiedenen Glättungsbandbreiten durchgeführt. Als fehlerfreie Größen wurden B_x und B_y angenommen im Vergleich zu den fehlerbehafteten Größen B_z , E_x und E_y , so daß sich insgesamt 15 Ausgleichsrechnungen ergaben.

Für die Frequenz 2.16 cph betrug die äquivalente Bandbreite 1.16 cph, es ergaben sich daher für jeden Effekt $\nu_b = 28$ Freiheitsgrade, von denen vier Freiheitsgrade zur Bestimmung der zwei komplexen Übertragungsfunktionen abgezogen werden müssen. Das Residuum eines jeden Effekts wird deshalb als χ_{24}^2 -verteilte Größe angenommen. In Abb.2a sind die Residuen $\hat{S}_\epsilon = \langle |\epsilon|^2 \rangle$ von B_z für 2.16 cph nach der Größe geordnet in einem Q-Q-Plot über den theoretischen Quantilen einer χ_{24}^2 -Verteilung aufgetragen. Es wurden dabei die Spektren der einzelnen Zeitintervalle ähnlich dem robusten Kriterium von (Junge, 1990) bewichtet. Die nach (3) geschätzte Anzahl der Freiheitsgrade liegt mit $\hat{\nu} = 8$ noch deutlich unterhalb der vorhergesagten Anzahl.

Das Verhalten der Kurve in Abb.2a ähnelt dem Beispiel in Abb.1c, so daß möglicherweise die Verteilung der Residuen nicht stationär ist. Gelänge es, die Varianz der Residuen in Abhängigkeit von einer physikalischen Größe vorherzusagen, so ließe sich die Nichtstationarität beheben.

Versuchsweise wurde eine Abhängigkeit der Energiedichte der geschätzten Residuen \hat{S}_ϵ von Potenzen der Energiedichte der horizontalen Magnetfeldvariationen S_B für jedes Frequenzband mit einem loglinearen Ansatz überprüft

$$\log \hat{S}_\epsilon = b \log S_B + a \quad (5)$$

Eine derartige Abhängigkeit wurde schon von (Egbert and Booker, 1986) für die Residuen der magnetischen Vertikalkomponente B_z in mittleren Breiten beobachtet und auf den Einfluß nichtlinearer Prozesse durch besonders energiereiche Effekte

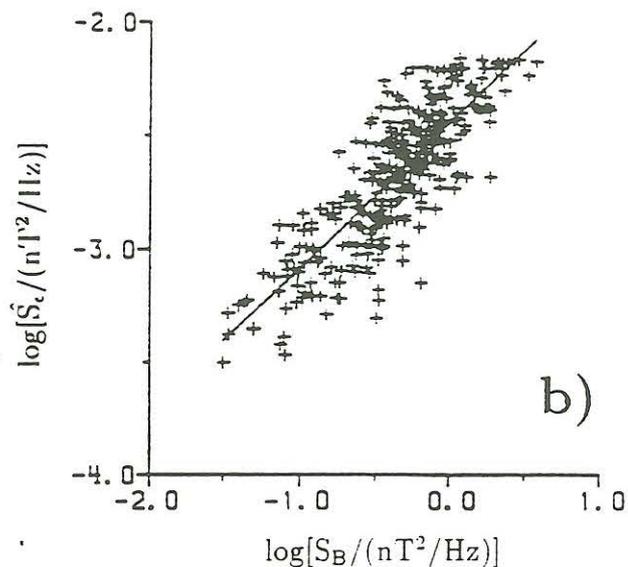
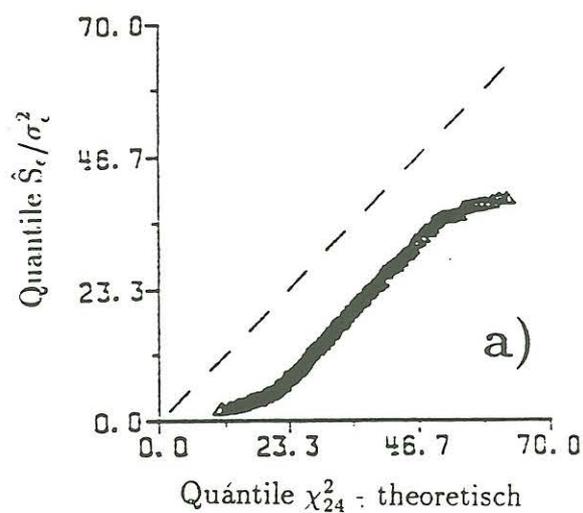
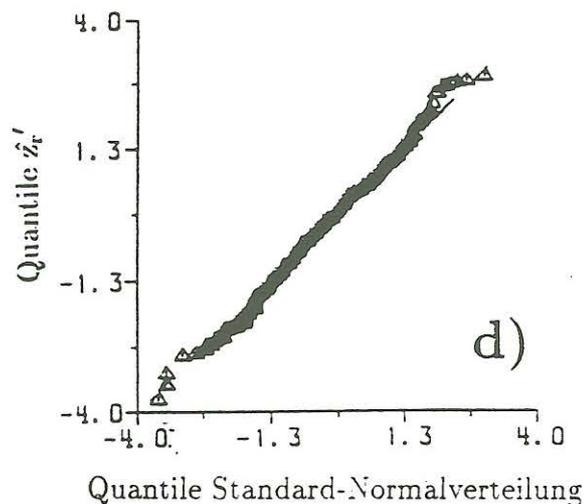
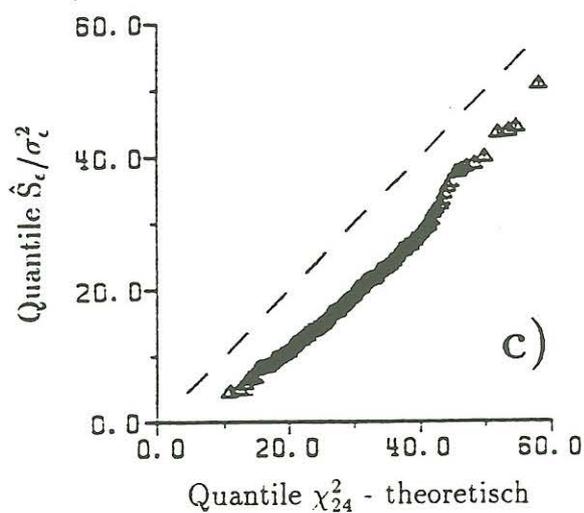


Abbildung 2: Bivariate Analyse B_z vs. B_x und B_y von 426 Zeitintervallen für 2.16 cph.

a) Q-Q Plot über Quantilen einer χ_{24}^2 -Verteilung. Neben den niedrigen Ordinatenwerten ist deutlich der leicht s-förmige Verlauf zu erkennen.

b) Residuen von B_z vs. Energiedichte des horizontalen Magnetfeldes. Gestrichelt eingezeichnet ist die Ausgleichsgerade nach (5).

c) Nach (6) korrigierter Q-Q Plot - deutliche Verbesserung gegenüber a).

d) Q-Q Plot der normierten z-transformierten Kohärenz über Quantilen einer Standard-Normalverteilung - gute Übereinstimmung.

zurückgeführt. Für das elektrische Feld sollte dieser Einfluß jedoch eine Größe 2. Ordnung sein.

In Abb.2b ist \hat{S}_ϵ von B_z in Abhängigkeit von S_B in doppeltlogarithmischem Maßstab aufgetragen und eine Ausgleichsgerade nach (5) eingezeichnet. Zweifellos besteht ein signifikanter Zusammenhang zwischen Residuum und Anregungsenergie. Ein ähnlicher Zusammenhang wurde auch für andere Frequenzen beobachtet, allerdings ist der lineare Ansatz in (5) als erste lineare Näherung für die Beschreibung eines Prozesses zu verstehen, der an dieser Stelle nicht weiter untersucht werden soll.

Mit dem linearen Ansatz läßt sich eine Korrektur an dem Q-Q-Plot in Abb.2a anbringen, indem die Residuen \hat{S}_{ϵ_i} mit den Energiedichten S_{B_i} und \hat{b} bewichtet werden

$$\hat{S}'_{\epsilon_i} = \hat{S}_{\epsilon_i} \cdot (S_{B_i})^{\hat{b}} \quad (6)$$

wobei ϵ stellvertretend für die Residuen von B_z , E_x und E_y steht und i der Effektindex ist.

Eine Normierung der Gewichte ist nicht nötig, da für die Darstellung in Q-Q-Plots die Daten auf die Varianz normiert werden und für die Berechnung von ν die absoluten Größen der Residuen nicht gebraucht werden.

Das Ergebnis in Abb.2c rechtfertigt den Ansatz in (5) und (6) zumindest für die magnetische Vertikalkomponente:

Die Residuen liegen dort auf einer Geraden, die annähernd parallel zu der gestrichelten verläuft. Wie schon an den niedrigen Ordinatenwerten zu erkennen ist, beträgt die Anzahl der Freiheitsgrade nur $\hat{\nu} = 15$, hat sich aber gegenüber der Zahl vor der Korrektur verdoppelt. Offenbar können die Residuen S_{B_z} näherungsweise durch eine χ^2_{15} -Verteilung beschrieben werden. Für die (hier nicht gezeigten) Residuen des tellurischen Feldes wird zwar die s-Form der Kurve abgeschwächt, jedoch stellt die Beschreibung durch eine χ^2 -Verteilung nur eine grobe Näherung an die Messung dar. Dies drückt sich in der niedrigen Anzahl der Freiheitsgrade aus - $\hat{\nu} = 7$ für beide Komponenten -, der Mangel an genauer statistischer Beschreibung führt nach (3) zu einem vergrößerten statistischen Fehler. Tab.1 stellt die Ergebnisse für alle Frequenzen und Ausgleichsrechnungen zusammen.

Bestimmung der Freiheitsgrade aus der z-transformierten Kohärenz

Die multiple quadratische Kohärenz ist das Verhältnis aus vorhergesagter zu gemessener Ausgangssignalenergie (Gl.1)

$$\hat{r}^2 = \frac{\langle \hat{Z}_p \hat{Z}_p \rangle}{\langle Z Z \rangle} \quad (7)$$

Tabelle 1: Ergebnisse der Bestimmung der Freiheitsgrade für 3 bivariate Analysen mit B_x, B_y als unabhängigen und B_z, E_x, E_y als abhängigen Komponenten für 5 verschiedene Zielfrequenzen f und unterschiedlicher äquivalenter Bandbreite b zur Glättung im Frequenzbereich (PARZEN-Fenster).

ν_b sind die vorhergesagten Freiheitsgrade, $\hat{\nu}$ die nach (3), $\hat{\nu}'$ die nach der Korrektur (6) geschätzten, $\hat{\nu}'_{ztr}$ die aus der Varianz der z-transformierten Kohärenz berechneten Freiheitsgrade (10).

f	b	ν_b	B_z			E_x			E_y		
[cph]			$\hat{\nu}$	$\hat{\nu}'$	$\hat{\nu}'_{ztr}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\nu}'$	$\hat{\nu}'_{ztr}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\nu}'$	$\hat{\nu}'_{ztr}$
1.15	0.65	16.3	6.3	9.1	11.3	5.6	6.0	7.5	5.4	6.1	7.4
2.06	1.16	27.8	6.5	15.3	19.2	5.7	6.8	9.1	5.5	6.7	8.5
3.71	2.06	49.5	7.9	21.1	19.4	5.7	8.2	9.2	5.5	7.9	8.3
6.59	3.67	88.0	15.0	29.3	15.2	6.0	12.6	10.0	5.7	11.0	8.8
11.60	6.51	156.2	25.4	47.6	31.9	7.3	22.8	9.6	6.3	15.3	9.5

\hat{r}^2 ist in der Regel systematisch verzerrt, der Bias ist eine Funktion der Freiheitsgrade und der wahren quadratischen Kohärenz r^2 . Verschiedene Möglichkeiten der Biaskorrektur werden z.B. bei (Watermann, 1984, Anhang 7), beschrieben.

Nach (Stuart and Ord, 1987, S.532f.), ist die z-Transformierte des Korrelationskoeffizienten \hat{r}

$$\hat{z}_r = \operatorname{atanh}(\hat{r}) \quad (8)$$

näherungsweise normalverteilt mit

$$\operatorname{var}\{\hat{z}_r\} \approx \frac{1}{\nu - 3} \quad (9)$$

(8) gilt auch für die Varianz des Betrages der Kohärenz, nach (Otnes and Enochson, 1972, S.353, [9.86]) steht im Nenner auf Grund der bivariaten Analyse allerdings $\nu - 4$. Bei einer ausreichend großen Anzahl von Freiheitsgraden ist der Unterschied jedoch unerheblich.

Damit kann aus der Stichprobenverteilung der z-transformierten Kohärenz die Anzahl der Freiheitsgrade nach (9) abgeschätzt werden.

Zunächst läßt sich anhand von Q-Q Plots die Annahme einer Normalverteilung zur Darstellung gemessener z_r überprüfen. Die Schätzwerte z_{ri} wurden mit dem 1. und 2. Moment der Verteilung normiert, d.h. es ist

$$\hat{z}'_{ri} = \frac{\hat{z}_{ri} - \hat{\mu}_{z_r}}{\hat{\sigma}_{z_r}} \quad (10)$$

um einen besseren Vergleich mit der theoretischen Verteilungsfunktion zu ermöglichen.

Abb.2d zeigt das Ergebnis für den gleichen Datensatz und dieselbe Frequenz wie in den Abb.en 2a-c. Offenbar ist die Übereinstimmung mit einer Normalverteilung sehr gut. Die aus $\text{var}\{\hat{\sigma}_{z_r}\}$ nach (10) berechneten Freiheitsgrade ($\hat{\nu}_{z_{tr}} = 19$) stimmen in etwa mit den im vorangegangenen Abschnitt nach der Korrektur berechneten überein.

Die Übereinstimmung der Freiheitsgrade ist nicht selbstverständlich, da für die Anwendung von (10) vorausgesetzt wird, daß der Erwartungswert von z_r stationär ist. Bei stationärer Verteilung der Residuen und zeitlich variierender Signalstärke ist der Erwartungswert jedoch zeitabhängig. Die Varianz von \hat{r} setzt sich demzufolge zusammen aus der Varianz der Residuen und der Varianz der Signalenergie, wobei die Verteilung der Anregungsenergie nicht bekannt ist. Sind die Verteilung der Residuen und die der Anregung voneinander unabhängig, führt dies zu einer Vergrößerung der Varianz von \hat{z}_r und damit zu einer Verringerung der geschätzten Freiheitsgrade. Da dies für die Beobachtungen nicht zutrifft, liegt es nahe, die Verteilung der Kohärenz als stationär anzunehmen. Das hätte die Abhängigkeit der Energie der Residuen von der Energie der Anregung zur Folge. Abb.2b bestätigt diese These.

Diskussion

Die in Tab.1 vorgestellten Ergebnisse lassen eine Überschätzung der Anzahl der Freiheitsgrade um bis zu einen Faktor zehn erkennen in Bezug auf die vorhergesagte Anzahl unter der Annahme unabhängig verteilter Residuen. Für die Vertrauensbereiche entspricht das etwa dem Faktor drei.

Die Ursache für die Reduktion der geschätzten Freiheitsgrade ist noch unklar - sowohl die Abhängigkeit der Residuen untereinander als auch Abweichungen von einer als stationär angenommenen Normalverteilung der Residuen führt zu einer Verringerung des Schätzwertes. Im Fall der B_z -Analyse konnte der lineare Ansatz durch eine Korrelation der Residuen mit der Anregungsenergie korrigiert werden.

Parameterfreie Schätzungen der Vertrauensbereiche könnten als Alternative zu dem beschriebenen Ansatz dienen und einen interessanten Vergleich der Methoden ermöglichen.

References

- Egbert, G. D. and Booker, J. R. (1986). Robust estimation of geomagnetic transfer functions. *Geophys.J.R.astr.Soc.*, 87:173-194.
- Fowlkes, E. B. (1979). Some methods for studying the mixture of two Normal (Lognormal) distributions. *Journ. Am. Statist. Ass.*, 74(367):561-575.
- Jenkins, G. and Watts, P. (1968). *Spectral Analysis and its Application*. Holden Day San Francisco.
- Junge, A. (1986). Zur Messung und Deutung der halbmondentägigen Variation des erdelektrischen Feldes in Nord- und Westdeutschland. Diss. mat. nat. Fak. Geowiss. Univ. Göttingen.
- Junge, A. (1990). Robuste Schätzung bivariater Übertragungsfunktionen. In Haak, V. and Homilius, J., editors. *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Hornburg*. pages 75-86.
- Otnes, R. K. and Enochson, L. (1972). *Digital time series analysis*. Wiley.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T. (1989). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press.
- Schmucker, U. (1978). Auswertungsverfahren Göttingen. In Haak, V. and Homilius, J., editors, *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Neustadt/Weinstraße*.
- Stuart, A. and Ord, J. K. (1987). *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. I: Distribution Theory*. Charles Griffin & Co. LTD, London, 5th edition.
- Thomson, D. J. and Chave, A. D. (1991). Jackknifed error estimates for spectra, coherences, and transfer functions. In Haykin, S., editor, *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing, Vol. 1*, chapter 2. Prentice Hall.
- Watermann, J. (1984). Beobachtungen korrelierter ULF-Fluktuationen im erdmagnetischen Feld und im Phasenweg ionosphärischer HF-Sondierungen. Diss. mat. nat. Fak. Geowiss. Univ. Göttingen.
- Zelen, M. and Severo, N. C. (1965). Probability functions. In Abramovitz, M. and Stegun, I., editors, *Handbook of Mathematical Functions*, chapter 26. Dover Publications.