

A. Junge

Erweiterte Auswerteverfahren in Göttingen

1 Einleitung

Die in Göttingen angewendete Methode zur Auswertung von Zeitreihen erdmagnetischer und magnetotellurischer Zeitreihen wurde ausführlich schon an mehreren Stellen beschrieben (Schmucker, 1978; Schmucker, 1988). In diesem Beitrag werden einige Ergänzungen angeführt, die die robuste und automatische Datenauswahl einbeziehen.

Während im ursprünglichen Verfahren einzelne Effekte variabler Länge nach Kriterien maximaler Anregungsenergie und minimalen Rauschens visuell ausgewählt wurden, wird im erweiterten Verfahren die gesamte Zeitreihe in aufeinanderfolgende Abschnitte gleicher Länge unterteilt. Die Effekte werden für jede analysierte Mittenfrequenz (s.u.) unterschiedlich nach Kriterien bewichtet, wie sie von (Junge, 1990) beschrieben wurden. Neben der erheblichen Einsparung an Bearbeitungszeit bieten automatische (robuste) Verfahren im Gegensatz zu der rein visuellen Selektion klar formulierbare, statistisch begründbare Auswahlkriterien mit der damit einhergehenden Angabe realistischer Vertrauensbereiche der Übertragungsfunktionen (Junge, 1992).

Es kann jedoch nicht oft genug wiederholt werden, daß gerade die Anwendung automatischer Prozeduren zum einen die genaue Kenntnis der Verfahrensschritte und zum anderen eine sorgfältige Sichtung des vorliegenden Datenmaterials im Zeitbereich erfordert, da nur dann falsche Anwendungen mit katastrophalen Folgen ausgeschlossen werden!

2 Gang der Analyse

Die Analyse besteht im wesentlichen aus der bivariaten linearen Ausgleichsrechnung im Frequenzbereich nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Es wird davon ausgegangen, daß L Intervalle à drei simultanen Zeitreihen $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $\{z_i\}$ vorliegen mit jeweils $N+1$ Daten und dem Zeitinkrement Δt . Jedes Zeitintervall hat somit die Länge $N\Delta t$. Weiter wird angenommen, daß x und y gegenüber z vernachlässigbare relative Fehler besitzen. Die Transformation in den Frequenzbereich erfolgt mit Hilfe der Schnellen FOURIER-Transformation¹. Der Ansatz lautet dann

$$Z_k = T_x(f)X_k + T_y(f)Y_k + \delta Z_k \quad (1)$$

¹Es werden die Routinen RFFTI und RFFTF aus (Dongarra et al., 1979) verwendet, die nicht die Bedingung $N = 2^n$ (n natürliche Zahl) erfordern.

mit X_k, Y_k, Z_k als $k = 1, \dots, N/2$ komplexen FOURIER-Koeffizienten (N wird als gerade angenommen), T_x, T_y als komplexen, frequenzabhängigen Übertragungsfunktionen und δZ_k als nicht durch den Ansatz erklärbares Residuum. Der Frequenzabstand der FOURIER-Koeffizienten beträgt $\Delta f = 1/(N\Delta t)$, die höchste Frequenz (=NYQUIST-Frequenz) ist $f_{Ny} = 1/(2\Delta t)$.

2.1 Analysefrequenzen und Intervallängen

Angesichts der nur langsam mit der Frequenz variierenden magnetotellurischen und erdmagnetischen Übertragungsfunktionen werden im allgemeinen $M = 5$ Frequenzen f_j pro Dekade (= Ziel- oder Mittenfrequenzen) als ausreichende Darstellung ihrer Frequenzabhängigkeit erachtet. N wird in der Regel derart gewählt, daß gerade eine Dekade des Frequenzganges durch die Analyse erfaßt werden kann (s.u.). Die Zielfrequenzen werden in logarithmisch äquidistantem Abstand angeordnet, was die mit ansteigender Zielfrequenz wachsende äquivalente Bandbreite b_j des Spektralfensters zur Glättung impliziert. Zwischen aufeinanderfolgenden Mittenfrequenzen und Bandbreiten herrschen dann die Beziehungen

$$f_{j+1} = 10^{\frac{1}{M-1}} \cdot f_j \quad (2a) \qquad b_{j+1} = 10^{\frac{1}{M-1}} \cdot b_j \quad (2b)$$

Bei Annahme statistischer Unabhängigkeit der Real- und Imaginärteile der δZ_k ergibt sich als Anzahl der Freiheitsgrade ν_j für die Frequenzbandbreite b_j (Jenkins and Watts, 1968.S.257)

$$\nu_j = 2b_j N \Delta t \quad (3)$$

Wird - im Hinblick auf die nachfolgende statistische Behandlung - als minimale Anzahl von Freiheitsgraden $\nu_{\min} = 12$ festgelegt, folgt mit (3)

$$b_1 \geq \frac{\nu_{\min}}{2N\Delta t} = \frac{6}{N\Delta t} \quad (4)$$

Benachbarte Frequenzbänder sollen möglichst nahtlos aufeinanderfolgen, um weder Information zu verlieren noch statistische Abhängigkeiten untereinander zu erzeugen, und es soll die höchste Frequenz, f_M , derart bestimmt werden, daß

$$f_M + b_M/2 = f_{Ny} \quad (5)$$

Für $M = 5$ führt Tab.1 die auf f_{Ny} normierten Frequenzen, Bandbreiten und, um den Anschluß der Frequenzbänder zu verdeutlichen, die unteren (b_j^-) und oberen (b_j^+) Bandgrenzen auf. Um die Bedingungen (2b), (4) und (5) zu erfüllen, darf die Anzahl N der Daten eine untere Grenze nicht unterschreiten. Tab.2 listet für verschiedene N die Freiheitsgrade ν_1 bzgl. des ersten Frequenzbandes aus Tab.1 auf. Über (3)

Tabelle 1: Auf die NYQUIST-Frequenz f_{Ny} normierte, logarithmisch äquidistante Mittenfrequenzen f_j und äquivalente Bandbreiten b_j sowie die unteren (b_j^-) und oberen (b_j^+) Bandgrenzen.

j	f_j	b_j	b_j^-	b_j^+
		[1000/ f_{Ny}]		
1	78.2	43.5	56.5	100.0
2	139.1	77.3	100.0	177.7
3	247.3	137.4	178.3	315.7
4	439.8	244.2	316.9	561.1
5	782.0	435.0	564.5	999.5

N	288	300	360	400
ν_1	12.5	13.1	15.7	17.4

Tabelle 2: Anzahl der Freiheitsgrade ν_1 bzgl. b_1 (Tab.1) für verschiedene Intervallängen $N\Delta t$ (siehe auch Tab.3).

und Tab.1 oder (2b) kann die Anzahl der Freiheitsgrade für die restlichen Bänder berechnet werden.

2.2 Behandlung der Daten im Zeitbereich

Zur Entfernung des Einflusses langperiodischer Trends werden die Daten mit einem Trapezfilter (Schmucker, 1978, Anhang), hochpaßgefiltert (Steilheit $q=2$). Die Abschneidefrequenz f_h sollte dabei kleiner als b_1^- aus Tab.1 sein, d.h.

$$f_h \leq 0.056 f_{Ny} \quad (6)$$

Zur Minimierung eines möglichen Bias bei der Spektralschätzung werden die Randdaten ($\approx N/10$) mit einer zu den Rändern hin abfallenden Kosinusfunktion bewichtet. Gegenüber den häufig verwendeten „Pi-prolate-windows“ (Egbert and Booker, 1986) besitzt das Kosinusfenster optimale Eigenschaften bezüglich der Bias-Minimierung (Papoulis, 1987, S.385).

2.3 Datenbehandlung im Frequenzbereich

Die Minimierung von $|\delta Z|^2$ in (1) erfordert die Schätzung von geglätteten Auto- und Kreuzspektren, aus denen dann die Übertragungsfunktionen T_x und T_y bestimmt werden (siehe dazu Schmucker, 1978). Die Glättung erfolgt mit Hilfe eines PARZEN-Fensters $W_{b_j}(f)$ mit der äquivalenten Bandbreite b_j (Jenkins and Watts, 1968, S.252) für die Zielfrequenz f_j . Für das kontinuierliche Spektrum $S(f)$ gilt

$$\bar{S}(f_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f_j - f) W_{b_j}(f) df \quad (7)$$

\bar{S}_j ist das geglättete Spektrum mit der Mittenfrequenz f_j . Die Rohspektralwerte liegen als endliche diskrete Zahlenfolge zu den Frequenzen $f_k = k\Delta f$, $k = 1, \dots, N/2$ (für N gerade) vor. Die Zielfrequenzen f_j sind nicht notwendig in der Folge $\{f_k\}$ enthalten (Tab.1), so daß nicht wie in (Schmucker, 1978) die Symmetrie von $W(f)$ ausgenutzt werden kann. Stattdessen wird (7) umgeformt zu

$$\bar{S}(f_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} S(f_k) \int_{f_k - \frac{\Delta f}{2}}^{f_k + \frac{\Delta f}{2}} W_{b_j}(f_j - f) df \quad (8)$$

Bezeichnet f_0 die erste Nullstelle von $W(f)$, so ist der Anteil des Integrals außerhalb von $[-.75f_0, +.75f_0]$ vernachlässigbar klein, und wird in der numerischen Berechnung von (8) gleich null gesetzt. Die Formel für das PARZEN-Fenster lautet mit der äquivalenten Bandbreite als Skalengröße

$$W_{b_j}(f) = \frac{1.395}{b_j} \left(\frac{\sin(\pi f \frac{0.93}{b_j})}{\pi f \frac{0.93}{b_j}} \right)^4 \quad (9)$$

Für jedes Fenster W_{b_j} muß demnach das Integral über $W(f)$ für (8) nur $0.81(b/f_{Ny})N$ mal am Anfang einer Analyse berechnet werden; die Summe in (8) besteht z.B. für b_1 und $N = 300$ aus nur 11 Summanden.

2.4 Bewichtung der Einzeleffektspektren

Die geglätteten Einzeleffektspektren, z.B. das Kreuzspektrum von Z und X , werden mit $\bar{S}_{ZX,l}$ bezeichnet, wobei $l = 1, \dots, L$ der Effektindex ist. Der Zielfrequenzindex j wird der Übersicht halber im Folgenden fortgelassen. Die Einzeleffektspektren werden bewichtet aufsummiert

$$\bar{S}_{ZX} = \sum_{l=1}^L q_l \bar{S}_{ZX,l} \quad (10)$$

Die Gewichte q_l variieren zwischen null und eins und werden aus dem Vergleich der Residuen $S_{\varepsilon Z \varepsilon Z,l}$ mit einer χ^2 -Verteilung abgeleitet. Das Verfahren ist ausführlich bei (Junge, 1990) beschrieben und im wesentlichen um zwei Punkte ergänzt worden:

a) Die Anzahl der Freiheitsgrade ν der χ^2 -Verteilung wird nicht aus der äquivalenten Bandbreite b des PARZEN-Fensters sondern aus den Residuen abgeleitet, was eine mögliche statistische Abhängigkeit der Residuen untereinander berücksichtigt (Junge, 1992).

b) Die Bestimmung der Gewichte erfolgt nicht mehr iterativ, sondern in einem 3-Schritt Verfahren, das kurz erläutert werden soll. Aus den Residuen wird als erstes der Median $\text{med}\{S_{\delta Z \delta Z, l}\}$ und eine obere Grenze

$$c^H = (1 + 1.5\sqrt{2/\nu})\text{med}\{S_{\delta Z \delta Z, l}\} \quad (11)$$

bestimmt².

Im 2. Schritt werden HUBER-Gewichte q_l^H (Huber, 1981)

$$q_l^H = \begin{cases} 1 & \text{für } S_{\delta Z \delta Z, l} \leq c^H \\ \frac{c^H}{S_{\delta Z \delta Z, l}} & \text{für } S_{\delta Z \delta Z, l} > c^H \end{cases} \quad (12)$$

und gemäß (10) das bewichtete arithmetische Mittel berechnet. In (11) wird anstelle des Medians der neue Mittelwert eingesetzt und eine neue obere Grenze c^T (mit dem Faktor 6 anstelle von 1.5) festgelegt.

Diese dient im 3. Schritt der Berechnung neuer Gewichte q_l^T nach TUKEY (Beaton and Tukey, 1974)

$$q_l^T = \begin{cases} \left(1 - (S_{\delta Z \delta Z, l}/c^T)^2\right)^2 & \text{für } S_{\delta Z \delta Z, l} \leq c^T \\ 0 & \text{für } S_{\delta Z \delta Z, l} > c^T \end{cases} \quad (13)$$

die die endgültigen Gewichte zur Berechnung der Spektren in (10) darstellen.

Entscheidend bei der Berechnung der Gewichte ist die Qualität des Mittelwertschätzers (Lokationsschätzer) von $S_{\delta Z \delta Z, l}$. Der Median stellt eine erste grobe Näherung dar, der HUBER-Schätzer hat sehr gute Konvergenzeigenschaften, eliminiert aber nicht den Einfluß extremer Ausreißer in den Residuen. Dies geschieht durch den TUKEY-Schätzer, bei dem die Gefahr der Konvergenz zu einem falschen Schätzwert durch die Anwendung der ersten beiden Schritte minimiert wird.

Die Bewichtung der Einzeleffekte führt dazu, daß singuläre „Ausreißer“ im Zeitbereich die Ablehnung des gesamten Intervalls verursachen können. Bei ungünstiger Anordnung der „Ausreißer“ kann es zu einem unverhältnismäßig hohen Informationsverlust kommen. Verfahren zur Behandlung solcher Fälle im Zeitbereich sind sehr effektiv aber auch sehr rechenzeitaufwendig (Larsen, 1989; Clemens, 1992). Eine Erhöhung der Effektivität der hier beschriebenen Auswertemethode kann durch die Überlappung aufeinanderfolgender Zeitintervalle erreicht werden, um ungestörte

²Es wird davon Gebrauch gemacht, daß die χ_ν^2 -Verteilung eine Einparameter-Verteilung ist, für die $\mu = \nu$ und $\sigma^2 = 2\nu$ ist. Demnach ist $c^H = \mu + 1.5\sigma = \mu(1 + 1.5\sigma/\mu)$; der Faktor 1.5 ist ein von (Hampel et al., 1986) vorgeschlagener Richtwert.

Bereiche der Zeitreihe besser zu erfassen. Für die Ermittlung der Anzahl der Freiheitsgrade müßte die Autokovarianzfunktion der geglätteten Einzelintervallspektren gebildet werden. Vergleiche zwischen Anwendungen mit verschiedenen Überlappungsgraden (0-66%) zeigten jedoch, daß es ausreicht, die Gesamtzahl der Freiheitsgrade um den relativen Betrag der Überlappung zu reduzieren.

2.5 Zusammenfassung verschiedener Analysebereiche

Zur Datenerfassung standen für die Messung von Variationen (VMT) und Pulsationen (PMT) die Göttinger Kassettenaufzeichnungsapparatur (Richards et al., 1981) und für den höherfrequenten Bereich (AMT) zeitweilig die Apparatur der TU-Berlin (Brasse, 1992) zur Verfügung. Tab.3 zeigt für verschiedenen Frequenzbereiche die Gerätetaktzeit Δt_0 , und die für die Analysen verwendeten Diskretisierungsabstände Δt , die Intervalllängen $N\Delta t$, die Eckfrequenz f_t des - sofern aufgrund einer Datendekompression notwendigen - Anti-Alias-Tiefpasses, die Abschneidefrequenz f_h des Hochpasses und die erste (f_1) und letzte (f_5) Zielfrequenz. Als Tiefpaßfilter wurde ein Trapezfilter mit der Steilheit $q = 6$ gewählt (Schmucker, 1978, Anhang).

Tabelle 3: Übersicht des Göttinger Analyseverfahrens.

Die Frequenzbereiche sind - gemäß den unterschiedlichen Gerätetypen und Frequenzbereichen - mit VMT (Variationen), PMT (Pulsationen) und AMT (Audiomagnetotellurik) bezeichnet. Δt_0 ist die Gerätetaktzeit, Δt die Analysetaktzeit, N die Intervalllänge (normiert auf Δt), f_h und f_t die Eckfrequenzen der Hoch- und Tiefpässe und f_1 und f_5 niedrigste und höchste Mittenfrequenz (1 Hz = 60 CPM = 3600 CPH).

Freq.Bereich	Δt_0	Δt	N	f_h	f_t	f_1	f_5
VMT-1	60 s	600 s	288	.0833 CPH	3.00 CPH	.234 CPH	2.34 CPH
VMT-2	60 s	120 s	360	.5000 CPH	15.0 CPH	1.17 CPH	11.7 CPH
PMT-1	2 s	20 s	300	.0833 CPM	1.50 CPM	.117 CPM	1.17 CPM
PMT-2	2 s	4 s	300	.4170 CPM	7.50 CPM	.586 CPM	5.86 CPM
AMT-1	50 ms	250 ms	300	.100 Hz	2.00 Hz	.156 Hz	1.56 Hz
AMT-2	50 ms	50 ms	300	.500 Hz	—	.782 Hz	7.82 Hz
AMT-3	.5 ms	2.5 ms	400	10 Hz	200 Hz	15.6 Hz	156 Hz
AMT-4	.5 ms	.5 ms	400	50 Hz	—	78.2 Hz	782 Hz

Das automatische Verfahren bietet sich nicht für den Bereich der Sq-Harmonischen an, da dort die Spektren von den Sq-Linien dominiert werden und wegen des oft geringen Datenumfangs die visuelle Auswahl von Vorteil ist. Es werden, sofern das Datenmaterial es erlaubt, $N\Delta t = 5$ Tage, $f_j = 1.5, \dots, 5.5$ CPD (=cycles per day)

und $b_j = 1$ CPD vorgegeben. Ein flacher Hochpaß ($q=2$) mit $f_h = 2$ CPD erwies sich als akzeptabler Kompromiß zwischen nicht zu langer Filterlänge (12 h) und ausreichender Energie im Frequenzband zwischen 1 und 2 CPD.

Harmonische Anteile der Spektren in den Frequenzbändern AMT-3 und AMT-4 (Tab.3) bei $16 \frac{2}{3}$ und 50 Hz sowie den Oberwellen wurden zum Teil ($16 \frac{2}{3}$ - 200 Hz) im Analogteil der Aufzeichnungsgeräte durch Notch-Filter unterdrückt; im hochfrequenten AMT-Bereich können sie mitunter als Fernfeldsignale benützt werden (Brasse, 1992).

3 Beispiel einer Auswertung

Im Sommer 1990 wurden an der Station BRA im Bramwald bei Göttingen Messungen über den gesamten zugänglichen Frequenzbereich durchgeführt (siehe auch Brasse and Junge, 1992). Die Übertragungsfunktion T_x aus (1) ist in Form von scheinbarem Widerstand ρ_a und Phase ϕ für die Ostkomponente des tellurischen Feldes über der Periode aufgetragen (T_x entspricht dem Impedanztensorelement Z_{yx}). Für den Frequenzbereich AMT-4 wurden die elektrischen anstelle der magnetischen Felder als fehlerfrei angenommen (Fehlerminimierung in B), der Admittanztensor \underline{A} berechnet und Z_{yx} aus \underline{A}^{-1} bestimmt (Brasse, 1992). Die Überlappung der Kurven aus den verschiedenen Frequenzbereichen ist gut.

Zwischen den Bereichen AMT-3 und AMT-2 gibt es einen kleinen Versatz in den ρ_a Werten, der möglicherweise auf einer Eichungenauigkeit der Induktionsspulen beruht (Brasse, pers. Mitteil.).

Für die Bereiche AMT-1 und PMT-2, die sowohl unterschiedlichen Anregungsmechanismen unterliegen als auch verschiedene Aufzeichnungsgeräte und Sensoren beinhalten, passen die ρ_a Werte gut zueinander. Im Bereich schwacher Anregung nimmt die Phase sehr kleine Werte an, die durch ein Leitfähigkeitsmodell nicht erklärt werden können. Offenbar dominiert hier der Einfluß von Subharmonischen der Netzfrequenz (Wehmeier, 1992).

Auch für die Bereiche PMT-1 und VMT-2, in denen Induktions- und Fluxgatemagnetometer verglichen werden, herrscht gute Übereinstimmung. Der etwas niedrige ρ_a Wert aus PMT-1 bei 512 s dürfte ein Bias-Effekt auf Grund der geringen Empfindlichkeit der Induktionsspulen bei den längeren Perioden sein.

Erwartungsgemäß streuen die Werte aus dem Kontinuum zwischen den Sq-Harmonischen, da die Länge der Zeitreihe auf nur 22 Tage begrenzt war. Dennoch ist sowohl der Abfall der ρ_a Werte als auch der Anstieg der Phase (Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit für größere Tiefen im oberen Erdmantel) klar zu erkennen.

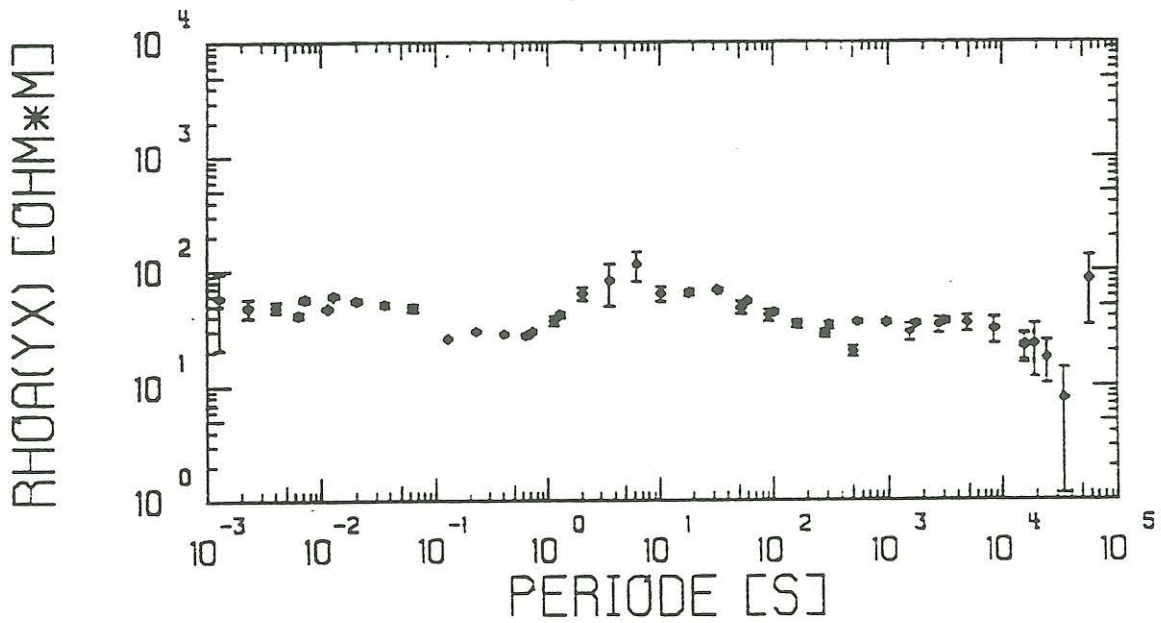
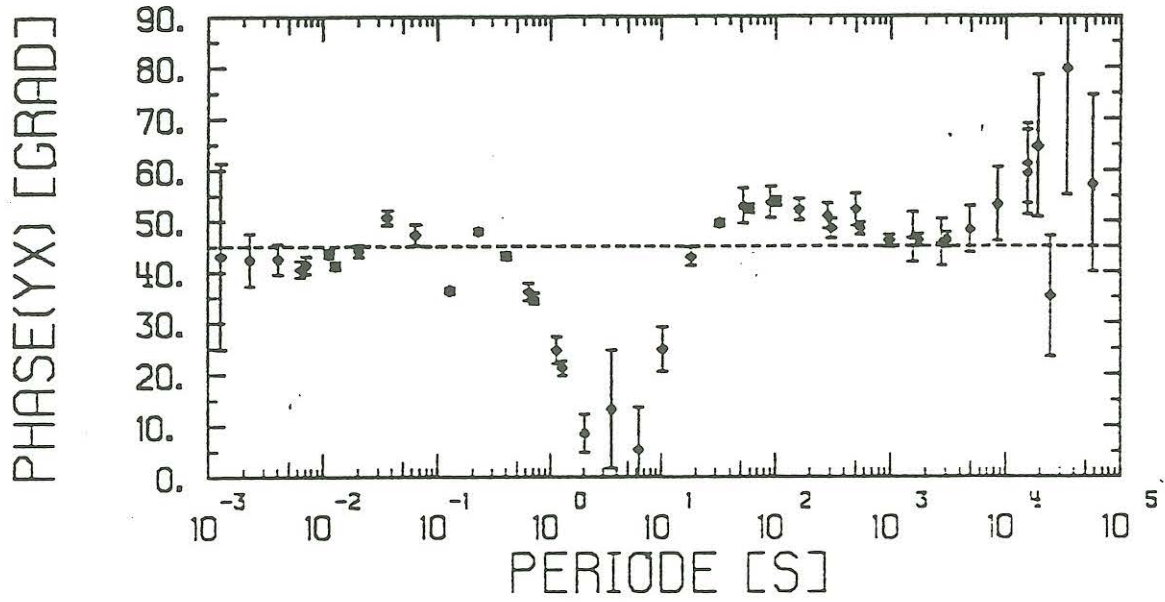


Abbildung 1: Scheinbare Widerstände ρ_a und Phasen ϕ berechnet aus der Z_{yx} -Komponente an der Station BRA (Bramwald) bei Göttingen für den Periodenbereich von 10^{-3} - 10^5 s.

References

- Beaton, A. and Tukey, J. (1974). The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data. *Technometrics*, 16:147-185.
- Brasse, H. (1992). Audiomagnetotellurische Tiefensondierungen in Nordost-Afrika. Diss. Fachb. Bergb. u. Geowiss. TU Berlin.
- Brasse, H. and Junge, A. (1992). Untersuchungen zur Anregungsmode im AMT-Frequenzbereich. In Haak, V. and Homilius, J., editors, *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Borkheide*, page dieser Band.
- Clemens, M. (1992). Entstörung magnetotellurischer Zeitreihen. In Haak, V. and Homilius, J., editors, *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Borkheide*, page dieser Band.
- Dongarra, J., Moler, C., Bunch, J., and Stewart, G. (1979). *LINPACK Users' Guide*. Philadelphia: SIAM.
- Egbert, G. D. and Booker, J. R. (1986). Robust estimation of geomagnetic transfer functions. *Geophys.J.R.astr.Soc.*, 87:173-191.
- Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., and Stahel, W. J. (1986). *Robust Statistics*. Wiley, New York.
- Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*. Wiley, New York.
- Jenkins, G. and Watts, P. (1968). *Spectral Analysis and its Application*. Holden Day San Francisco.
- Junge, A. (1990). Robuste Schätzung bivariater Übertragungsfunktionen. In Haak, V. and Homilius, J., editors, *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Hornburg*, pages 75-86.
- Junge, A. (1992). Zur Schätzung der effektiven Anzahl der Freiheitsgrade bei der Bestimmung magnetotellurischer Übertragungsfunktionen. In Haak, V. and Homilius, J., editors, *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Borkheide*, page dieser Band.
- Larsen, J. (1989). Transfer functions: smooth robust estimates by least-squares and remote reference methods. *Geophys.J.Int.*, 99:645-663.
- Papoulis, A. (1987). *Signal Analysis*. McGraw Hill, 3rd edition.

- Richards, M., Schmucker, U., Steveling, E., and Watermann, J. (1981). Erdmagnetische und magnetotellurische Sondierungen im Gebiet des mitteleuropäischen Riftsystems. Technical report, BMFT-FB-T.
- Schmucker, U. (1978). Auswertungsverfahren Göttingen. In Haak, V. and Homilius, J., editors, *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Neustadt/Weinstraße*.
- Schmucker, U. (1988). Neue Fassung älterer Programme. In Haak, V. and Homilius, J., editors, *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Königsstein im Taunus*.
- Wehmeier, M. (1992). Entwicklung eines geländetauglichen Registriergerätes für elektrische und magnetische Felder mit Frequenzen zwischen 0.1 und 10 Hz. Dipl.Arb. Inst. f. Geoph. Univ. Göttingen.