

T. Hanstein

## Iterative und parametrisierte Dekonvolution für (LO)TEM Daten

### 1. Einleitung

Die Übertragungseigenschaften der Meßapparatur beeinflussen die transient elektromagnetischen (TEM) Tiefensondierungen. Die Veränderung des Signals, die bei LOTEM durch die Verwendung von analogen Sperrfiltern besonders stark ist, muß bei der Interpretation berücksichtigt werden (Strack 1984, 1992).

Die Faltung der apparativen Systemantwortfunktion mit der anzupassenden Modellfunktion ist ein sehr stabiles Verfahren und wurde bisher für die LOTEM Interpretation erfolgreich angewendet. Neuentwickelte Interpretationsverfahren, wie das 'Imaging' oder die Verwendung einer 'all time' scheinbaren Widerstandsdefinition (Karlik & Strack 1990), benötigen aber Daten, die keine Übertragungseigenschaften des Systems enthalten.

In diesem Beitrag werde ich als erstes zwei verschiedene Dekonvolutionsverfahren vorstellen. Die iterative Dekonvolution, quasi ein direktes Umkehrproblem, basiert auf der iterativen Lösung großer Gleichungssysteme. Die parametrisierte Dekonvolution, mehr ein indirektes Umkehrverfahren, ist besonders auf TEM Daten zugeschnitten und daher vielseitig anwendbar.

In der abschließenden Diskussion werde ich die Verfahren an synthetischen Transienten testen.

### 2. Iterative Dekonvolution

Die iterative Dekonvolution wurde erstmals entwickelt und angewendet, um die apparativ bedingte Verbreiterung optischer Spektrallinien rückgängig zu machen (van Cittert 1936).

Ich möchte hier die van Cittert Iteration unter dem Aspekt der iterativen Lösung großer Gleichungssysteme betrachten.

Die Faltung eines äquidistant abgetasteten Signals  $x(t)$  mit einer kausalen Übertragungsfunktion  $f_+(t)$

$$f_+ * x = \int_{-\infty}^{\infty} f_+(t - \tau) x(\tau) d\tau = y(t)$$

kann in Matrizenform geschrieben werden

$$\mathbf{F}x = \begin{pmatrix} f_{+1} & 0 & & & \dots & 0 \\ f_{+2} & f_{+1} & 0 & & & 0 \\ f_{+3} & f_{+2} & f_{+1} & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & f_{+m} & \dots & f_{+1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & f_{+m} & \dots & f_{+2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & f_{+m} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+m-1} \end{pmatrix}$$

Die Unterteilung der Gleichungen kann zusammengefaßt werden

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_{II} \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem  $\mathbf{F}x = y$  beschreibt den vollständigen Faltungsprozess zweier Zeitreihen, einschließlich des Randeffektes mit den zusätzlichen unbekanntenen Daten  $y_{II}$ , die durch die Faltungsoperation nach dem letzten gemessenen Datenpunkt  $y_n$  entstehen. Das Gleichungssystem  $\mathbf{F}_I = y_I$  beschreibt den Faltungsprozess des Meßvorganges

$$\int_0^t f_+(t-\tau) x(\tau) d\tau = y(t)$$

und enthält nur die gemessenen Datenpunkte.

Die Matrix  $\mathbf{F}_I$  besitzt schon eine Dreieckgestalt und braucht theoretisch nur noch rekursiv nach  $x$  aufgelöst werden. Aber für die meisten kausalen Übertragungsfunktionen ist dies nicht möglich, da die Werte der Systemfunktion zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf der Hauptdiagonalen viel kleiner sind als auf den benachbarten Nebendiagonalelementen. Bei der ursprünglichen Anwendung der Dekonvolution in der Spektroskopie handelte es sich um eine symmetrische Übertragungsfunktion, d.h. keine Phasenverschiebung, mit den größten Beiträgen auf der Hauptdiagonalen und ist somit kein Problem. In unserem Fall empfiehlt La Coste (1980) eine zusätzliche Faltung mit der zeitinversen Übertragungsfunktion,  $f_{-1} \dots f_{-m}$ , d.h. die Übertragungsfunktion wird um den Zeitnullpunkt gespiegelt. Hierdurch wird die Phasenverschiebung einer kausalen Systemantwort rückgängig gemacht. Die Faltung  $f_- * f_+$  entspricht einer Autokorrelation und  $f_- * y$  einer Kreuzkorrelation, und man erhält sie durch die Multiplikation mit der transponierten Matrix.

Schwierigkeiten machen die Daten  $y_{II}$  nach dem letzten Zeitpunkt, da sie nicht als Messung vorhanden sind. Je nachdem wie man dieses Problem, was ich als Randeffekt bezeichnen möchte, angeht, hat man folgende Gleichungssysteme zu lösen

$$\mathbf{F}_I^T \mathbf{F}_I x = \mathbf{F}_I^T y_I \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F}^T \mathbf{F} x = \mathbf{F}^T y$$

Das Produkt der Matrix mit seiner Transponierten führt zu einer symmetrischen positiv definiten Matrix mit einer gewissen diagonalen Dominanz.

Die hier auftretenden  $n \times n$  Matrizen können sehr groß sein, bei LOTEM ist  $n = 820$ , die Anzahl der gemessenen Datenpunkte. Es werden Lösungswege gesucht, die nicht die ganze Matrix als Eingabe benötigen. Die folgenden Iterationsverfahren brauchen quasi nur eine Zeile der Matrix als Arbeitsspeicher.

### 2.1 van Cittert Iteration

Allgemein haben Iterationsverfahren die Form

$$x^{k+1} = \Phi(x^k)$$

Ausgehend von der Gleichung

$$A x = b \quad \text{mit} \quad A = F_I^T F_I \quad \text{und} \quad b = F_I^T y_I$$

und der Addition und Subtraktion der Gleichung

$$C x + (A - C) x = b$$

mit einer beliebigen  $n \times n$  Matrix  $C$ , konstruiert man sich eine Iterationsfolge

$$C x^{k+1} + (A - C) x^k = b.$$

Auflösung nach  $x^{k+1}$  ergibt

$$x^{k+1} = (I - C^{-1}) x^k + C^{-1} b.$$

Die Brauchbarkeit des Verfahrens hängt entscheidend von der Wahl der Matrix  $C$  ab. Bei der van Cittert Iteration wurde  $C = I$  gesetzt, mit der Einheitsmatrix  $I$ , daraus ergibt sich folgende Iterationvorschrift

$$x^{k+1} = b + x^k - A x^k$$

Als Startwert kann man  $x^0 = 0$  setzen oder besser noch den ersten Iterationsschritt  $x^0 = b$ . Iteriert wird solange bis eine Änderung des Lösungsvektors eine vorgegebene Schranke unterschreitet.

Andere bekannte Iterationsverfahren sind das Jacobi Gesamtschrittverfahren mit  $C = D$  und das Gauss-Seidel Einzelschrittverfahren mit  $C = D - J$ . Dabei ist  $D$  eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen  $a_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $J$  ist eine untere Dreiecksmatrix mit den Elementen  $a_{ij}$ , wobei  $i < j$ ,  $i = 1, \dots, j$ ,  $j = 2, \dots, n$  ist.

Hinreichende Konvergenzkriterien, wie z.B. das starke Zeilen- oder Spaltensummenkriterium sind hier nicht erfüllt (Jordan-Engeln & Reuter 1981). Das Gesamtschrittverfahren konvergiert auch mit diesen Übertragungsfunktionen nicht. Ist die Matrix, wie in unserem Fall, symmetrisch und positiv definit, so ist dies ein hinreichendes Kriterium für das Einzelschrittverfahren.

Das hinreichende Konvergenzkriterium für die van Cittert Iteration kann für symmetrische Übertragungsfunktionen, hier erzeugt durch  $f_- * f_+$ , durch eine Fourier-Transformation der Iterationvorschrift hergeleitet werden. Man erhält eine geometrische Reihe, die konvergiert, wenn das Spektrum der Übertragungsfunktion die Bedingung  $1 - \tilde{f}(\omega) < 1$  erfüllt. Das ist für kausale Übertragungsfunktionen, deren Fläche im Zeitbereich auf 1 normiert ist, stets der Fall.

Die Konvergenz kann mit einem Relaxationsverfahren etwas beschleunigt werden. Die Iterationsvorschrift wird aufgeteilt in die alte Näherung  $x^k$  plus einer Korrektur  $d^k$ .

$$x^k + d^k = y + x^k - A x^k \quad | - x^k, * \vartheta$$

Die Korrektur  $d^k$  wird mit einem Relaxationsparameter  $0 < \vartheta < 2$  versehen, der den Schritt in die Korrekturrichtung verstärkt  $\vartheta > 1$  (Überrelaxation) oder abschwächt  $\vartheta < 1$  (Unterrelaxation). Für die van Cittert Iteration erhält man

$$x^{k+1} = x^k + \vartheta d^k = x^k + \vartheta (y - A x^k)$$

Der Relaxationsparameter kann auch als eine Zwangsbedingung benutzt werden, um den Wertebereich des Ergebnisses  $x(t)$  einzuschränken (Frieden 1975, p.228). Die folgende Definition eines zeitabhängigen Relaxationsparameters

$$\vartheta(t_i) := \vartheta_0 \left( 1 - \frac{2}{(\beta - \alpha)} \left| x^k(t_i) - \frac{(\alpha + \beta)}{2} \right| \right) \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta_0 < 2$$

beschränkt das Ergebnis auf das vorgegebene Intervall  $[\alpha, \beta]$ , so daß  $\alpha \leq x(t) \leq \beta$  stets erfüllt ist.

## 2.2 Levinson - Algorithmus

Hier möchte ich nun das vollständige Gleichungssystem

$$A x = b \quad \text{mit} \quad A = F^T F \quad \text{und} \quad b = F^T y$$

betrachten, einschließlich des Randeffektes mit unbekanntenen Werten  $y_{n+1}, \dots, y_{n+m-1}$ . Das Produkt  $F^T F$  ergibt eine Toeplitz Matrix, eine symmetrische Matrix mit den gleichen Elementen auf den Diagonalen. Die besondere Struktur dieser Matrix ermöglicht die

Anwendung eines anderen iterativen Verfahrens, den Levinson-Algorithmus (Silvia und Robinson 1979, mit Programm). Als Eingabe benötigt man von der Matrix nur die erste Zeile, dadurch können sehr große Gleichungssysteme bearbeitet werden.

In vielen Fällen muß die Matrix stabilisiert werden, da sonst die Lösung oszilliert oder die Iteration sogar divergiert. Etwa 1 – 10% des Wertes von  $a_{11}$ , muß auf das erste Element dazu addiert werden. Ist die Regularisierung zu schwach, so kann man eine kleine hochfrequente Oszillation in der Lösung beobachten.

Die unbekanntenen Daten  $y_{II}$  können in einer ersten Näherung durch eine Fortführung der Faltungsoperation mit dem letzten gemessenen Datenpunkt  $y_n$  extrapoliert werden

$$y_{n+i} = \sum_{j=i+1}^m f_{+j} * y_n \quad , \quad i = 1, \dots, m-1 \quad .$$

Diese etwas grobe Schätzung ist manchmal nicht ausreichend, und es können mehr oder weniger starke Abweichungen in den letzten Punkten auftreten. Das Ergebnis kann verbessert werden, indem man die fehlenden Daten  $y_{II}$  mit der ersten Lösung, u.U. etwas überarbeitet, neu extrapoliert.

### 3 Parametrisierte Dekonvolution

Die Grundidee für diese Dekonvolution ist sehr einfach, das transiente elektromagnetische Feld, hier  $\dot{h}_z(t)$ , läßt sich durch eine endliche Anzahl von Exponentialfunktionen darstellen (Zhdanov pers. Mitt.)

$$\dot{h}_z(t) = \sum_{k=1}^m a_k e^{-b_k t} \quad .$$

Die Parametrisierung des Signals durch eine Exponentialfunktion mit den Parametern  $a_k$ ,  $b_k$  ist wesentlich einfacher zu handhaben als die exakte mathematische Darstellung. Physikalisch kann die Zerlegung in Exponentialfunktionen als Zerfallsmoden des transient elektromagnetischen Feldes gedeutet werden. Ich möchte darauf nicht weiter eingehen und die Parametrisierung hier nur zur Lösung der Dekonvolution benutzen.

Die gemessenen Daten  $y(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entstehen durch die Faltung des Signals  $\dot{h}_z(t)$  mit unserer kausalen Übertragungsfunktion  $f_+(t)$ .

$$y(t_i) = f_+ * \dot{h}_z = \int_0^{t_i} f_+(\tau) \dot{h}_z(t_i - \tau) d\tau$$

Das Einsetzen der Parametrisierung und das Herausziehen des linearen Anteils vor das Integral ergibt

$$y(t_i) = \sum_{k=1}^m a_k \int_0^{t_i} f_+(\tau) e^{-b_k(t_i - \tau)} d\tau \quad .$$

Die Gültigkeit dieser Darstellung hängt sehr von der Wahl der Parameter ab. Die  $a_k$  beschreiben nur eine Linearkombination der Exponentialfunktionen bzw. der Faltungsintegrale und werden mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Die  $b_k$  im Exponenten und damit im nichtlinearen Teil der Exponentialfunktion können als reziproke Zeitkonstanten interpretiert werden.

$$b_1 = \frac{1}{T_1} \quad , \quad \dots \quad , \quad b_m = \frac{1}{T_m}$$

Diese Zeitkonstanten werden durch Ausprobieren empirisch ermittelt und festgelegt. Sie sollten unabhängig vom zugrundeliegenden Erdmodell sein, zumindest sollten sie für verschiedene Erdmodelle gültig sein.

Eine gute Wahl ist eine logarithmische äquidistante Verteilung der Zeitkonstanten

$$T_1 < T_2 < \dots < T_m \quad \text{mit} \quad T_1 \ll t_1 \quad \text{und} \quad t_n \leq T_m \quad .$$

Zur Bestimmung der  $a_k$  muß ein überbestimmtes ( $m < n$ ) lineares Gleichungssystem gelöst werden

$$y = G x \quad \text{mit} \quad g_{ik} = \int_0^{t_i} f_+(\tau) e^{-b_k(t_i - \tau)} d\tau \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, m \quad .$$

Die Elemente der  $n \times m$  Matrix  $G$  werden analytisch integriert, indem die digitalisierte Übertragungsfunktion  $f_+$  linear interpoliert wird.

Das überbestimmte Gleichungssystem wird gelöst nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate durch die verallgemeinerte Matrixinversion.

Noch einige wichtige technische Hinweise zur Lösung, es ist vorteilhaft die Matrix  $G$  durch die Multiplikation zweier Diagonalmatrizen zu skalieren.

$$\bar{G} = W G D^{-1} \quad \text{mit} \quad w_{ii} = \frac{1}{|y_i|} \quad \text{und} \quad d_{jj} = \sqrt{\sum_{i=1}^m g_{ij}^2}$$

Die Multiplikation von rechts mit  $D^{-1}$  entspricht einer Spaltenskalierung und verbessert die Kondition der Matrix. Die Multiplikation von links mit  $W$  entspricht einer Zeilenskalierung und sorgt dafür, daß die Daten alle gleich gewichtet werden. Dies ist unbedingt notwendig, da die Amplituden eines Datensatzes über mehrere Dekaden variieren können. Zusätzlich wird das skalierte Gleichungssystem mit einem optimierten Dämpfungsparameter stabilisiert. Die Lösung des skalierten Gleichungssystems muß wieder zurückskaliert werden mit  $x = D^{-1} \bar{x}$ .

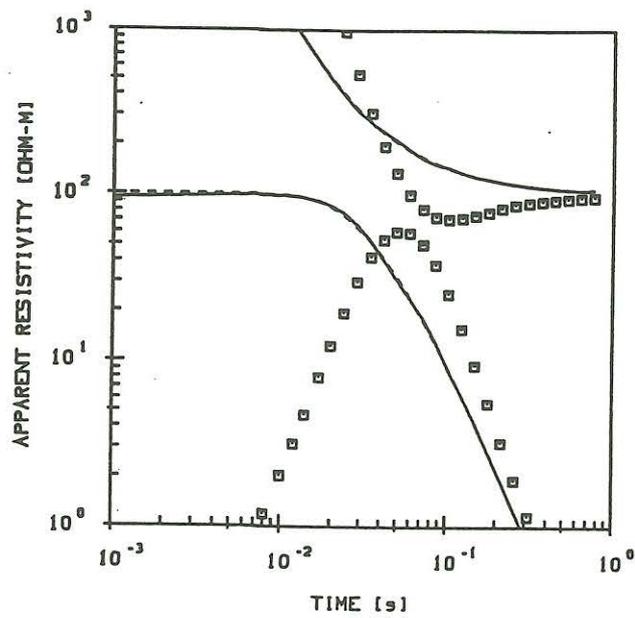


Abb. 1: Anwendung der van Cittert Iteration. Erläuterung siehe Text

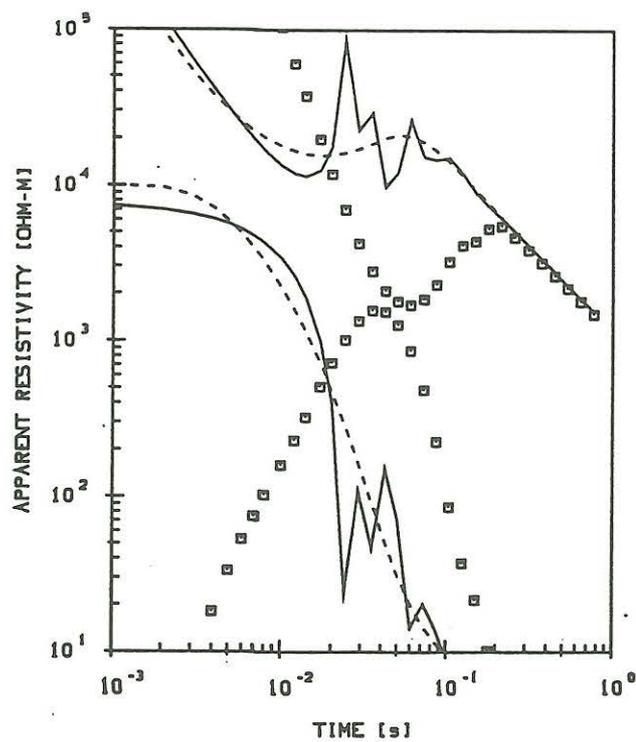


Abb. 2: Anwendung der van Cittert Iteration bzw. des Levinson Algorithmuses, beide Verfahren weisen ähnliche Oszillationen auf.

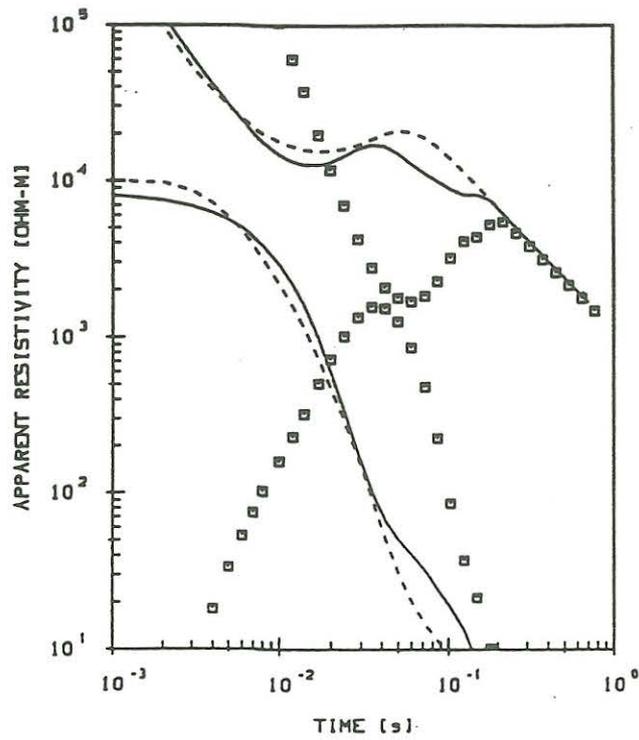


Abb. 3: Anwendung der van Cittert Iteration mit einem zeitabhängigen Relaxationsparameter  $\vartheta(t, \alpha, \beta)$ .

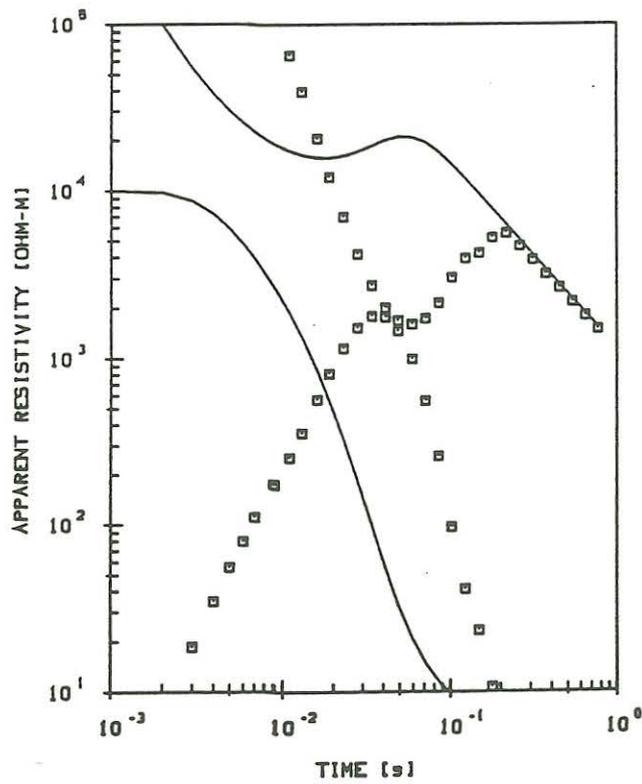


Abb. 4: Anwendung der parametrisierten Dekonvolution

#### 4 Diskussion

Ich möchte nun die Anwendung der besprochenen Verfahren an zwei synthetisch erzeugten Datensätze demonstrieren. Der erste Datensatz, ein Transient über einem  $100 \Omega m$  Halbraum,  $5 km$  entfernt vom Sender, wurde mit einer gemessenen Übertragungsfunktion gefaltet.

Während für die iterativen Dekonvolutionsverfahren die Daten im linearen Zeitbereich äquidistant abgetastet vorliegen müssen - dies ist bei LOTEM realisiert - habe ich für die parametrisierte Dekonvolution nur logarithmisch äquidistante Zeitwerte benutzt, was für die meisten TEM Verfahren zutrifft.

In allen Abbildungen kennzeichnen die Symbole den "gemessenen" Transienten, deformiert durch die Übertragungseigenschaften der Meßapparatur, die gestrichelte Linie, die wahre zugrunde liegende Modellfunktion und die durchgezogene Linie, das Ergebnis der Dekonvolution.

Dargestellt ist jeweils die "early-" und die "late-time" scheinbare Widerstands-Transformation des Transienten, nähere Erläuterungen dazu siehe z.B. Strack (1984 oder 1992). Hier nur soviel: Die "early-time" Kurve (untere) der ungefalteten Transienten gibt in den frühen Zeiten den Widerstand der obersten Schicht wieder, außerdem ist diese Kurve direkt proportional zu  $\dot{h}_z(t)$ , während die "late-time" Kurve (obere) in den späten Zeiten den Widerstand des Basements anzeigt (Abb. 1).

Alle Dekonvolutionsverfahren können die Deformation in dem ersten Datensatz wieder rückgängig machen. Das Ergebnis der van Cittert Iteration ist in Abbildung 1 dargestellt und zeigt nur geringe Abweichungen zum wahren Transienten. Beim Levinson-Algorithmus und der parametrisierten Dekonvolution sind gar keine Differenzen mehr zu beobachten (keine Abbildung).

Der zweite Datensatz geht von einem Zweischichtfall aus, Deckschicht  $10000 \Omega m$ , ein guter Leiter  $50 \Omega m$  in einer Tiefe von  $20 km$  und der Sender-Empfängerabstand beträgt  $20 km$ . Dieser Transient klingt zeitlich sehr schnell ab und beide iterativen Dekonvolutionsverfahren produzieren ganz offensichtlich unsinnige Ergebnisse (Abb. 2). Erst die Einführung einer Zwangsbedingung mit einem zeitabhängigen Relaxationsparameter stabilisiert die Iteration (Abb. 3). Die untere Intervallgrenze,  $\alpha$ , habe ich gleich Null gesetzt und die Obere,  $\beta$ , gleich dem dreifachen der entfaltenen Werte in den frühen Zeiten aus Abbildung 2. Hier wird nochmal deutlich, warum die Dekonvolution sehr kritisch betrachtet werden muß, da die Ergebnisse zwar vernünftig aussehen, aber doch erheblich vom wahren Transienten abweichen.

Die parametrisierte Dekonvolution gibt eine exzellente Rekonstruktion des wahren Signals wieder (Abb. 4). Dieses Verfahren habe ich auch erfolgreich auf andere TEM

Messungen angewendet.

## 5 Literatur

- van Cittert, P. H., 1931. Zum Einfluss der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien, *Z. Physik*, 69, 298-308.
- Frieden, B. R., 1975. Image Enhancement and Restoration, in *Picture processing and digital filtering*, p. 177-248, ed. Huang, T. S., Springer-Verlag, Berlin.
- Ioup, G.E. & Ioup, J.W., 1983. Iterative Deconvolution, *Geophysics*, 48, 1287-1290.
- Jordan-Engeln, G. & Reuter, F., 1981. *Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit Standard FORTRAN Programmen*, BI Hochschultaschenbuch, Mannheim.
- LaCoste, L. J. B., 1982. Deconvolution by successive approximations, *Geophysics*, 47, 1724 - 1730.
- Karlik, G. & Strack, K.-M., 'ALL-TIME' scheinbare Widerstandskurven für LOTEM , in *Protokoll über das 13. Kolloquium "Elektromagnetische Tiefenforschung"*, pp. 135-144, ed. Haak, V. & Homilius J., Hornburg.
- Silvia, M. T. & Robinson E. A., 1979. *Deconvolution of geophysical time series in the exploration for oil and natural gas*, Elsevier, Amsterdam.
- Strack, K.-M., 1984. Transient Elektromagnetische Tiefensondierung mit Anwendungsbeispielen der Kohlenwasserstoffexploration, in *Protokoll über das 10. Kolloquium "Elektromagnetische Tiefenforschung"*, pp. 269-282, ed. Haak, V. & Homilius J., Grafrath.
- Strack, K.-M., 1992. *Exploration with Deep Transient Electromagnetics*, Elsevier, Amsterdam.