

Bestimmung der induktiven Skalenlänge C für 1 cpd - 10 cpd aus Stundenmittelwerten

Nils Olsen, Göttingen

Einleitung

Zur erwartungstreuen Bestimmung der Übertragungsfunktion C eines linearen Systems

$$Z = C\mathcal{Y} \quad (1)$$

aus L beobachteten Werten Z_i und \mathcal{Y}_i sind Annahmen über den Quotienten der Rausch/Signalverhältnisse von Z und \mathcal{Y} notwendig. Treffen diese Annahmen nicht zu, so ist der erhaltene Schätzwert i. allg. verzerrt (biased).

Um die Annahmen zu testen, bietet sich folgende Vorgehensweise an: Da nur die Amplitude der komplexen Größe C , nicht hingegen ihre Phase verzerrt ist und zwischen beiden bei einem linearen, kausalen System Dispersionsrelationen gelten, ist es möglich, die wahren Amplituden aus den Phasen zu bestimmen. Durch einen Vergleich der so rekonstruierten Amplituden mit denen der statistischen Schätzwerte lassen sich die gemachten Annahmen kontrollieren.

Im folgenden Beitrag soll dies anhand von Übertragungsfunktionen demonstriert werden, die aus Stundenmittelwerten weltweit verteilter Observatorien für den Frequenzbereich 1 cpd - 10 cpd hergeleitet wurden. Dabei wird eine eindimensionale Leitfähigkeitsverteilung angenommen. Als Übertragungsfunktion wird die *induktive Skalenlänge* C verwendet, die durch

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{\rho_a(\omega)}{\omega\mu_0}} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \phi(\omega) \right) \right]$$

mit dem scheinbaren Widerstand ρ_a und der Phase ϕ der Impedanz verknüpft ist.

1 Die $Z : \mathcal{Y}$ -Methode

Die Grundgleichung zur Bestimmung der induktiven Skalenlänge $C(\omega)$ allein aus Magnetfeldmessungen lautet

$$C(\omega) = \frac{-B_r(\omega)}{\nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}}(\omega)} = \frac{Z(\omega)}{\mathcal{Y}(\omega)}$$

mit $Z = -B_r$ sowie

$$\mathcal{Y} = \nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}} = \frac{1}{a \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_{\vartheta}) + \frac{\partial}{\partial \lambda} B_{\lambda} \right]$$

als Divergenz der Horizontalkomponenten $\mathbf{B}_{\mathbf{H}} = (B_{\vartheta}, B_{\lambda})$.

$B_{\vartheta} = -X$, $B_{\lambda} = Y$, $B_r = -Z$ sind die komplexen Fourierkoeffizienten der magnetischen Nord-, Ost- bzw. Vertikalkomponente zur Frequenz ω ; $a=6371$ km ist der Erdradius. Die

Berechnung von $\nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}}$ kann durch direkte Bestimmung der Ableitungen erfolgen („Gradientenmethode“), durch *a-priori*-Annahmen über die Quellenstruktur der Horizontalkomponenten („Z:H-Verfahren“) oder – wie hier – mittels Kugelfunktionsentwicklung unter Berücksichtigung der Erdkrümmung („Z:Y-Verfahren“). Ich habe diese Vorgehensweise bereits an anderer Stelle ausführlich beschrieben [OLSEN 1992], deshalb sei hier nur das Wichtigste erwähnt:

Als Daten dienten Stundenmittelwerte von etwa 100 weltweit verteilten Observatorien über 54 Monate (IGY/C: 1957.5-1960.0, 30 Monate; IQSY: 1964-1965, 24 Monate). Für jeden der insgesamt $L = 1645$ Tage, für jedes Observatorium und jede Komponente wurde eine harmonische Analyse durchgeführt und 10 komplexe Fourierkoeffizienten (1 cpd – 10 cpd) bestimmt. Kugelfunktionsanalyse der Horizontalkomponenten aller Observatorien und anschließende Synthese an den Observatoriumsorten ergab $\mathcal{Y}_l(\omega)$, $l = 1, \dots, L$ für jedes Observatorium und jede der 10 Frequenzen. $Z_l(\omega)$ sind die jeweiligen Fourierkoeffizienten der Vertikalkomponente.

Aus diesen L Realisierungen \mathcal{Y}_l und Z_l des linearen Systems (1) soll die induktive Skalenlänge C geschätzt werden.

2 Schätzmethoden zur Bestimmung der Übertragungsfunktion C

Da die L beobachteten Werte Z_l und \mathcal{Y}_l normalerweise mit Fehlern behaftet sind, werden sie in einen Signalanteil und einen Rauschanteil aufgeteilt: $Z_l = Z_{0,l} + \delta Z_l$, $\mathcal{Y}_l = \mathcal{Y}_{0,l} + \delta \mathcal{Y}_l$. Dabei seien $Z_{0,l} = C \cdot \mathcal{Y}_{0,l}$ exakt miteinander korreliert, die Rauschanteile δZ_l und $\delta \mathcal{Y}_l$ jedoch unkorreliert.

2.1 Downward biased Schätzwert \hat{C}_D durch Minimierung des Fehlers in Z

Da \mathcal{Y}_l durch Kugelfunktionsentwicklung der Daten von 100 Observatorien mit jeweils zwei Horizontalkomponenten gewonnen wurde, lag es nahe, \mathcal{Y} als fehlerfrei anzusehen (d.h. $\delta \mathcal{Y}_l = 0$) und C aus $Z_l = C \mathcal{Y}_{0,l} + \delta Z_l$ durch Minimierung von $\langle |\delta Z|^2 \rangle = \langle \delta Z^\dagger \delta Z \rangle$ zu bestimmen. δZ^\dagger ist dabei das konjugiert Komplexe von δZ , und $\langle \dots \rangle$ steht für die Mittelung über alle L Tage. Der so erhaltene Schätzwert¹

$$\hat{C} = \frac{\langle Z^\dagger \mathcal{Y} \rangle}{\langle \mathcal{Y}^\dagger \mathcal{Y} \rangle} = \frac{\langle Z_0^\dagger \mathcal{Y}_0 \rangle}{\langle \mathcal{Y}_0^\dagger \mathcal{Y}_0 \rangle} \quad \text{mit} \quad \delta \mathcal{Y}_l = 0 \quad (2)$$

ist jedoch nur dann erwartungstreu, wenn \mathcal{Y} tatsächlich fehlerfrei ist, denn nur dann gilt $\mathcal{Y}_l = \mathcal{Y}_{0,l}$. Trifft dies nicht zu und es liegt

$$Z_l = Z_{0,l} + \delta Z_l = C \cdot (\mathcal{Y}_{0,l} + \delta \mathcal{Y}_l) \quad (3)$$

vor, so erhält man einen *downward biased* Schätzwert

$$\hat{C}_D = \frac{\langle Z^\dagger \mathcal{Y} \rangle}{\langle \mathcal{Y}^\dagger \mathcal{Y} \rangle} = \frac{\langle Z_0^\dagger \mathcal{Y}_0 \rangle}{\langle \mathcal{Y}_0^\dagger \mathcal{Y}_0 \rangle + \langle \delta \mathcal{Y}^\dagger \delta \mathcal{Y} \rangle} = \hat{C} \cdot \frac{1}{1 + \langle \delta \mathcal{Y}^\dagger \delta \mathcal{Y} \rangle / \langle \mathcal{Y}_0^\dagger \mathcal{Y}_0 \rangle} \quad (4)$$

mit $|\hat{C}_D| \leq |\hat{C}|$ und $\arg\{\hat{C}_D\} = \arg\{\hat{C}\}$. (Auf den Zähler wirkt sich Rauschen in \mathcal{Y} nicht aus, wenn man annimmt, daß es nicht mit dem Rauschen in Z korreliert ist.)

¹ Statistische Schätzwerte werden mit einem „ $\hat{\cdot}$ “ gekennzeichnet.

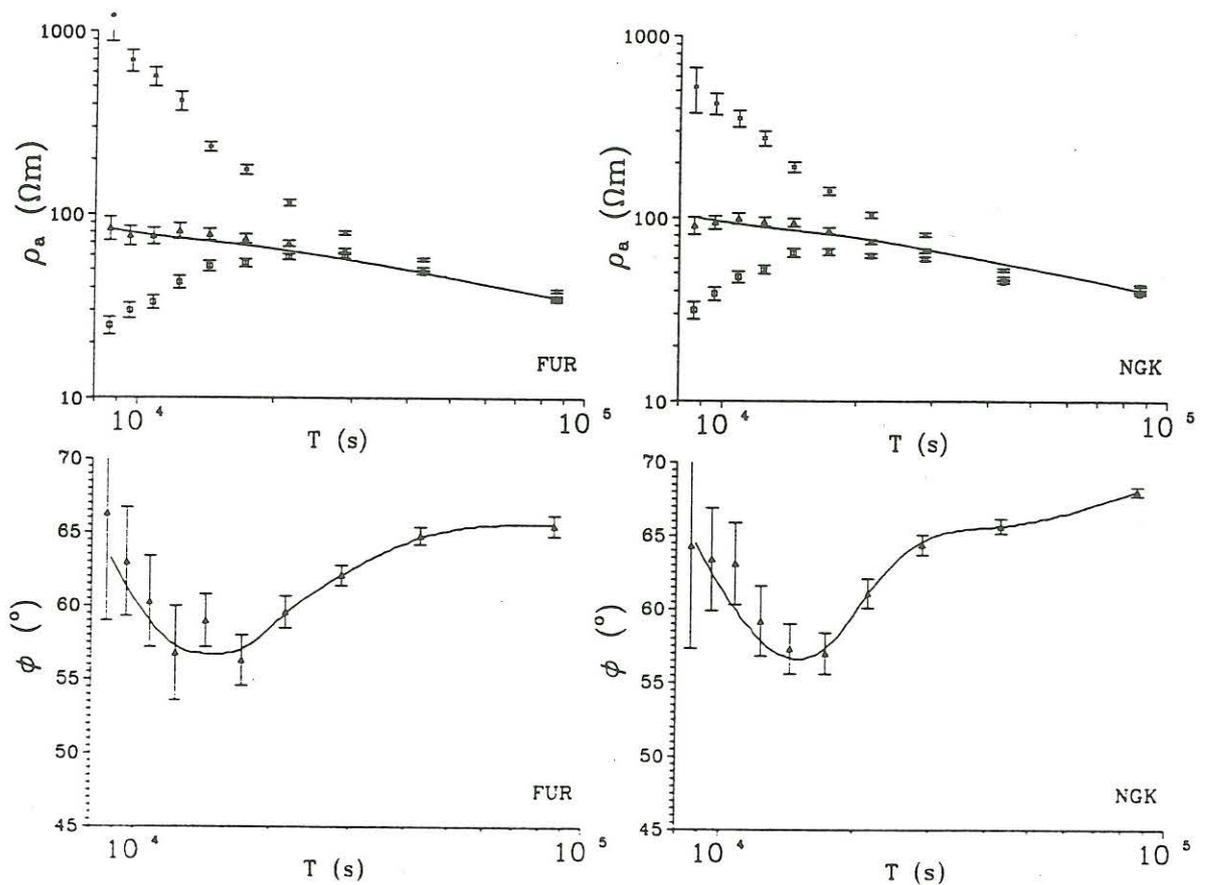


Abbildung 1: ρ_a und ϕ für Niemegek (NGK) und Fürstfeldbruck (FUR). $\rho_{a,D}$ ist ein *downward biased*, $\rho_{a,U}$ ein *upward biased* Schätzwert. Im unteren Teil der Abbildung stellt die durchgezogene Kurve einen mittels *smoothing splines* geglätteten Phasenverlauf dar; die daraus rekonstruierten scheinbaren Widerstände sind im oberen Teil der Abbildung mit durchgezogener Linie dargestellt. In der Nähe dieser Kurve liegende ρ_a -Werte wurden aus (9) mit $\eta = 0,4$ berechnet.

In *Abbildung 1* ist der *downward biased* scheinbare Widerstand $\rho_{a,D} = \omega \mu_0 |\hat{C}_D(\omega)|^2$ sowie die Phase der Impedanz $\phi(\omega) = \pi/2 + \arg\{\hat{C}(\omega)\}$, berechnet aus Daten der Observatorien Niemegek (NGK) und Fürstfeldbruck (FUR), über der Periodendauer T aufgetragen. Ich gehe davon aus, daß die elektrische Leitfähigkeit unter den Observatorien nur von der Tiefe abhängt, d.h. eine 1D-Struktur vorliegt. Die für 1D-Verhältnisse näherungsweise gültige Beziehung zwischen ρ_a und ϕ [WEIDELT 1972]

$$\phi(T) \approx \frac{\pi}{4} \left\{ 1 - \frac{d \ln \rho_a(T)}{d \ln T} \right\} \quad (5)$$

ist aber offensichtlich nicht erfüllt, da die über 45° liegende Phase nicht mit dem Abfall von $\rho_{a,D}$ zu kürzeren Perioden hin verträglich ist. Möchte man an der 1D-Interpretierbarkeit festhalten, so muß die Annahme, daß \mathcal{Y} fehlerfrei sei, verworfen werden.

2.2 Upward biased Schätzwert \hat{C}_U durch Minimierung des Fehlers in \mathcal{Y}

Minimieren von $\langle |\delta\mathcal{Y}|^2 \rangle$ in (3) führt auf einen *upward biased* Schätzwert

$$\hat{C}_U = \frac{\langle Z^\dagger Z \rangle}{\langle \mathcal{Y}^\dagger Z \rangle} = \frac{\langle Z_0^\dagger Z_0 \rangle + \langle \delta Z^\dagger \delta Z \rangle}{\langle \mathcal{Y}_0^\dagger Z_0 \rangle} = \hat{C} \cdot \left(1 + \frac{\langle \delta Z^\dagger \delta Z \rangle}{\langle Z_0^\dagger Z_0 \rangle} \right) \quad (6)$$

mit $|\hat{C}_U| \geq |\hat{C}|$ und $\arg\{\hat{C}_U\} = \arg\{\hat{C}\}$. Auch hier gilt $\hat{C}_U = \hat{C}$ nur, wenn Z tatsächlich fehlerfrei ist. Je kleiner die quadratische Kohärenz zwischen Z und \mathcal{Y} ist, umso stärker werden sich \hat{C}_D und \hat{C}_U unterscheiden, denn es gilt

$$\text{coh}^2 = \frac{\langle Z^\dagger \mathcal{Y} \rangle \langle \mathcal{Y}^\dagger Z \rangle}{\langle Z^\dagger Z \rangle \langle \mathcal{Y}^\dagger \mathcal{Y} \rangle} = \frac{\hat{C}_D}{\hat{C}_U}. \quad (7)$$

Da in den gewählten Beispielen die quadratische Kohärenz zu kürzeren Perioden hin abnimmt, wird die Differenz zwischen \hat{C}_U und \hat{C}_D und damit auch zwischen $\rho_{a,U}$ und $\rho_{a,D}$ größer: coh^2 liegt für 8 cpd bei 0,6 und somit ist $\rho_{a,U}$ fast dreimal so groß wie $\rho_{a,D}$.

2.3 Erwartungstreuer Schätzwert bei bekanntem Verhältnis der relativen Rauschenergie in Z und \mathcal{Y}

Im allgemeinen wird man es mit Fehlern sowohl in Z als auch in \mathcal{Y} zu tun haben. Dies kann folgendermaßen berücksichtigt werden: Aus (6) und (4) folgt

$$\eta = \frac{\text{Rauschenergie in } \mathcal{Y} / \text{Signalenergie in } \mathcal{Y}}{\text{Rauschenergie in } Z / \text{Signalenergie in } Z} = \frac{\langle \delta\mathcal{Y}^\dagger \delta\mathcal{Y} \rangle / \langle \mathcal{Y}_0^\dagger \mathcal{Y}_0 \rangle}{\langle \delta Z^\dagger \delta Z \rangle / \langle Z_0^\dagger Z_0 \rangle} = \frac{\hat{C} / \hat{C}_D - 1}{\hat{C}_U / \hat{C} - 1}. \quad (8)$$

Ist η bekannt, so läßt sich der erwartungstreue Schätzwert \hat{C} berechnen:

$$\hat{C} = \frac{\hat{C}_D}{2} \left\{ 1 - \eta + \sqrt{(1 - \eta)^2 + 4\eta \hat{C}_U / \hat{C}_D} \right\}. \quad (9)$$

Darin sind die Sonderfälle $\eta = 0$ („ \mathcal{Y} rauschfrei“) mit $\hat{C} = \hat{C}_D$; $\eta = \infty$ („ Z rauschfrei“) mit $\hat{C} = \hat{C}_U$ sowie $\eta = 1$ („gleiche relative Rauschenergie in \mathcal{Y} und Z “) mit $\hat{C} = \sqrt{\hat{C}_U \cdot \hat{C}_D}$, also dem geometrischen Mittel, enthalten.

Zur erwartungstreuen Schätzung der Übertragungsfunktion ist daher die Kenntnis von η notwendig. Meistens begnügt man sich mit mehr oder weniger gerechtfertigten Annahmen, wie z.B. $\eta = 0$. Und hat man Daten mit hoher quadratischer Kohärenz, so kann der entstehende Fehler bei falscher Wahl von η durchaus vernachlässigt werden.

In den hier vorgestellten Beispielen hat jedoch die Wahl von η großen Einfluß auf das Ergebnis. Deshalb soll nun gezeigt werden, wie unter der Annahme eindimensionaler Leitfähigkeitsverhältnisse η bestimmt werden und diese Information genutzt werden kann, um erwartungstreue Schätzwerte zu erhalten.

3 Bestimmung von $\rho_a(T)$ aus $\phi(T)$

Bei eindimensionaler Leitfähigkeitsstruktur sind ρ_a und ϕ durch folgende Gleichung miteinander gekoppelt [WEIDELT 1972]:

$$\begin{aligned}\phi(T) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left(\frac{\rho_a(T_0)}{\rho_0} \right) \frac{T T_0}{T_0^2 - T^2} d \ln T \\ \ln \rho_a(T_0)/\rho_0 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{4}{\pi} \phi(T) \right) \frac{T_0^2}{T_0^2 - T^2} d \ln T = \int_0^\infty f(T) \frac{T_0^2}{T_0^2 - T^2} d \ln T \quad (10)\end{aligned}$$

mit $f(T) = 1 - \frac{4}{\pi} \phi(T)$. In erster Näherung läßt sich der Kern $w(T_0, T) = T_0^2 / (T_0^2 - T^2)$ durch eine Sprungfunktion (1 für $T \leq T_0$; 0 sonst) darstellen und es ergibt sich

$$\ln \rho_a(T_0)/\rho_0 = \int_0^{T_0} f(T) d \ln T + \dots \quad (11)$$

was auch durch direkte Integration von (5) folgt. Um eine bessere Näherung zu erhalten, wird zunächst (10) identisch so umgeformt, daß die Näherung (11) separat in ihr hervortritt²:

$$\ln \rho_a(T_0)/\rho_0 = \int_0^{T_0} f(T) d \ln T + \int_0^{T_0} f(T) \frac{T^2}{T_0^2 - T^2} d \ln T + \int_{T_0}^\infty f(T) \frac{T_0^2}{T_0^2 - T^2} d \ln T .$$

Das zweite und dritte Integral rechts werden nun näherungsweise ausgewertet, indem für $f(T)$ die Taylorentwicklung $f(T) \approx f(T_0) + (T - T_0) f'(T_0)$ eingesetzt wird. So erhält man eine Verbesserung der Näherung (11) in der Gestalt $f(T_0) \cdot K_0(T_0) + f'(T_0) \cdot K_1(T_0)$ mit

$$\begin{aligned}K_0(T_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{T_0 - \epsilon} \frac{T}{T_0^2 - T^2} dT + \int_{T_0 + \epsilon}^\infty \frac{T_0^2}{(T_0^2 - T^2)T} dT \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T_0^2}{2T_0\epsilon - \epsilon^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(T_0 + \epsilon)^2}{2T_0\epsilon + \epsilon^2} \right) \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2T_0 + \epsilon}{2T_0 - \epsilon} \frac{T_0^2}{(T_0 + \epsilon)^2} \right) \\ &\equiv 0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}K_1(T_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{T_0 - \epsilon} \frac{T(T - T_0)}{T_0^2 - T^2} dT + \int_{T_0 + \epsilon}^\infty \frac{T_0^2(T - T_0)}{(T_0^2 - T^2)T} dT \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_0^{T_0 - \epsilon} \frac{T}{T + T_0} dT - \int_{T_0 + \epsilon}^\infty \frac{T_0^2}{(T + T_0^2)T} dT \right\} \\ &= -T_0 .\end{aligned}$$

Letztendlich ergibt sich für den Korrekturterm in dieser Approximation $-T_0 f'(T_0) = -\frac{d f(T)}{d \ln T} \Big|_{T_0} = +\frac{4}{\pi} \frac{d \phi(T)}{d \ln T} \Big|_{T_0}$ und somit

$$\begin{aligned}\ln \rho_a(T_0)/\rho_0 &= \int_0^{T_0} f(T) d \ln T - \frac{d f(t)}{d \ln T} \Big|_{T_0} + \dots \quad (12) \\ &= \int_0^{T_0} \left(1 - \frac{4}{\pi} \phi(T) \right) d \ln T + \frac{4}{\pi} \frac{d \phi(T)}{d \ln T} \Big|_{T_0} + \dots\end{aligned}$$

²Ich danke Dr. Peter Weidelt für seinen Vorschlag dieser Verbesserung und Hilfe bei den Rechnungen.

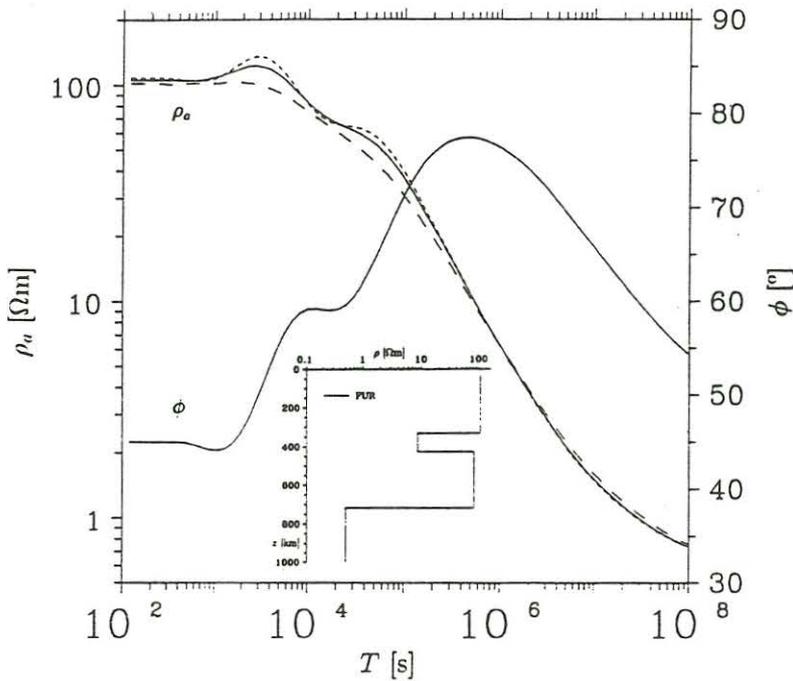


Abbildung 2:
Durchgezogen: Verlauf von scheinbarem Widerstand $\rho_a(T)$ und Phase $\phi(T)$ eines 4-Schicht Leitfähigkeitsmodells für FUR. Gestrichelt und punktiert die nach (11) bzw. (12) aus dem Phasenverlauf rekonstruierten scheinbaren Widerstände.

als bessere Näherung im Vergleich zu (11).

Diese Formel läßt sich zur Rekonstruktion von ρ_a aus dem Phasenverlauf $\phi(T)$ verwenden. Zur numerischen Behandlung wurde $f(T)$ in Abhängigkeit von $\ln T$ mittels kubischen *smoothing splines* [REINSCH 1967] dargestellt, wodurch sich $\int f d \ln T$ und $df/d \ln T$ und damit $\rho_a(T)$ nach (12) einfach berechnen läßt.

Abbildung 2 zeigt die Näherungen nach (11) bzw. (12) im Vergleich zur exakten Lösung anhand von synthetischen Daten aus einem Widerstandsmodell. Die Integrationskonstante ρ_0 wurde dabei durch Anpassung bei $T = 10^6$ s gewählt. Während die Näherung (11) die Oszillationen z.B. bei $2 \cdot 10^3$ s kaum wiedergibt, liefert Näherung (12) Oszillationen an den richtigen Stellen, die allerdings zu stark sind. Die Anpassung kann verbessert werden, wenn der Korrekturterm $\frac{4}{\pi} \frac{d\phi(T)}{d \ln T} \Big|_{T_0}$ mit einem Gewicht α versehen wird. Bei den hier untersuchten Modelldaten betrug die maximale relative Differenz zwischen ρ_a^{exakt} und ρ_a^{approx} etwa 25% bei $\alpha = 0$ (d.h. Näherung (11)); 12% bei $\alpha = 1$ (Näherung (12)) und unter 5% bei $\alpha = 0,7$.

Für die Anwendung der Näherung (12) wird $\phi(T)$ und $\phi'(T)$ nur in einem begrenzten Zeitintervall benötigt, bei den Daten in Abbildung 1 lediglich von $T_{\min} = 8640$ s bis $T_{\max} = 86400$ s. Dies ist kein Widerspruch zur Wahl der unteren Integrationsgrenze $T = 0$, da der Beitrag des Integrals für Zeiten $< T_{\min}$ mit in die Integrationskonstante ρ_0 gezogen werden kann.

Zur Anwendung auf gemessene Daten wurde $\alpha = 0,7$ gewählt, doch sollte die spezielle Wahl von α im Vergleich zu anderen Fehlerquellen nur geringen Einfluß haben. Die Integrationskonstante ρ_0 wurde an den beobachteten Wert ρ_a für 1 cpd angepaßt, da bei dieser Frequenz die größte quadratische Kohärenz und damit der geringste Unterschied zwischen $\rho_{a,D}$ und $\rho_{a,U}$ vorliegt.

Die in Abbildung 1 dargestellten durchgezogenen Kurven sind die so bestimmten Werte. Mit einem frequenzunabhängigen Wert von $\eta \approx 0,4$ ergeben sich Schätzwerte, die relativ gut mit den aus den Phasen berechneten Werten übereinstimmen. Erstaunlicherweise variierte das bestangepaßte η von Observatorium zu Observatorium nur wenig. Die Annahme einer knapp halb so großen relativen Rauschenergie in \mathcal{Y} im Vergleich zu \mathcal{Z} liefert mithin scheinbare Widerstände, die sich durch eine eindimensionale Widerstandsverteilung erklären lassen.

Abschließend einige Bemerkungen zu den Ergebnissen: Mit Sicherheit wird es i.allg. nicht sinnvoll sein, Übertragungsfunktionen für Frequenzen bis zu 10 cpd aus Stundenmittelwerten für eine Leitfähigkeitssondierung zu verwenden. Doch scheint die bisherige Beschränkung auf lediglich die ersten vier Tagesharmonischen den Informationsgehalt der Stundenmittelwerte nicht vollständig auszuschöpfen. Zumindest Hinzunahme der 5. und 6. Tagesharmonische ist gerechtfertigt, wenn nicht der mittlere Tagesgang, sondern individuelle Tage analysiert werden [OLSEN 1992].

Dieser Beitrag möchte zeigen, daß darüberhinaus – zumindest bei mitteleuropäischen Observatorien – Übertragungsfunktionen von 1 cpd bis 10 cpd ein in sich konsistentes Bild der Leitfähigkeitsstruktur geben können. Ein Problem hierbei ist die geringe quadratische Kohärenz der Daten, die – je nach gemachter Annahme über die Größe η , dem Quotienten der Rausch/Signalanteile von Z (Vertikalkomponente) und \mathcal{Y} (Divergenz der Horizontalkomponenten) – zu stark verzerrten scheinbaren Widerständen führt.

Unter Berücksichtigung der für eindimensionale Verhältnisse gültigen Dispersionsrelationen läßt sich η aus den Daten bestimmen. Bei den betrachteten mitteleuropäischen Observatorien ergab sich ein frequenzunabhängiger Wert $\eta = 0,4$; d.h. knapp halb so große relative Rauschenergie in \mathcal{Y} im Vergleich zu Z .

Literatur

OLSEN, N. (1992): Day-to-Day C -Response Estimation for S_q from 1 cpd to 6 cpd Using the $Z : \mathcal{Y}$ -Method. *J. Geomagnet. Geoelectr.* **44**, 233-247.

REINSCH, C. (1967): Smoothing by spline functions. *Numer. Math.* **10**, 177-183.

WEIDELT, P. (1972): The inverse problem of geomagnetic induction. *Z. Geophys.* **38**, 257-289.