

Normale und fraktale Widerstandsnetzwerke

Dies ist ein Beitrag über Mischungsgesetze, die ich hier speziell auf die elektrische Leitfähigkeit anwende. Die Anregung dazu kam aus Beiträgen von MADDEN (1976) und HJELT (1991). Betrachtet wird ein Medium, das sich aus zwei physikalisch (flüssig - fest) oder chemisch verschiedenen Komponenten zusammensetzt. Die "effektive" Leitfähigkeit, d.h. die des Gemisches, hängt dann vom Verhältnis der Leitfähigkeiten der beiden Komponenten, vom Mischungsverhältnis β und insbesondere von der Geometrie der Anordnung (Abb. 2) ab. Nach dem Variationsprinzip von HASHIN und SHTRIKMAN (1962) ergeben sich die Extremalwerte der Leitfähigkeit

$$\sigma_m + (1-\beta) (1/(\sigma_m - \sigma_s) + \beta/3\sigma_m)^{-1} > \sigma_{EFF} > \sigma_m + \beta (1/(\sigma_m - \sigma_s) - (1-\beta)/3\sigma_m)^{-1} \quad (1)$$

In der Nähe des oberen Grenzwertes liegt die Leitfähigkeit

$$\sigma_{EFF} \approx (2/3) \beta \sigma_m \quad (2)$$

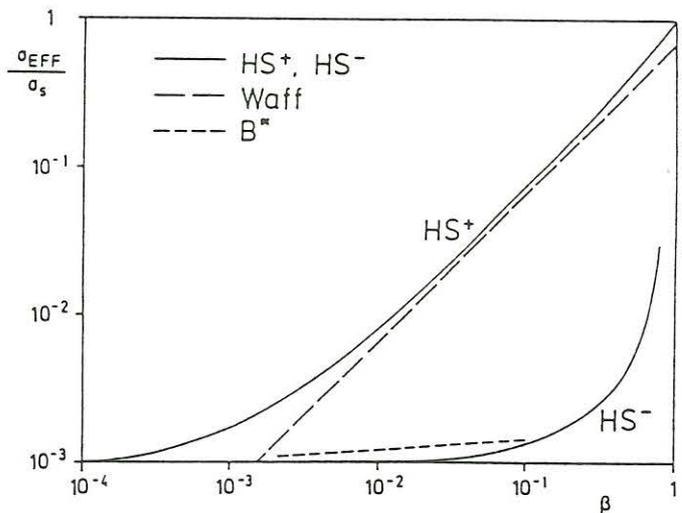
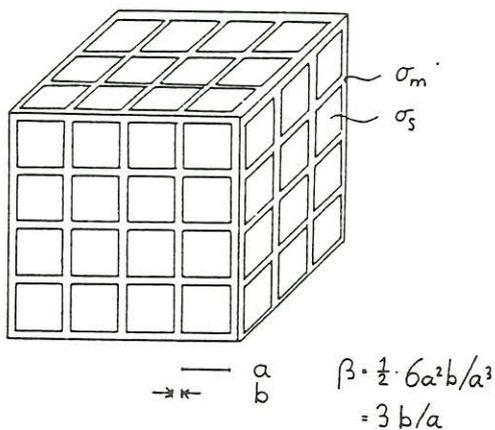


Abb. 1: Idealisiertes Modell eines Zwei-Phasen-Gemisches mit den elektrischen Leitfähigkeiten σ_s und σ_m .

Abb. 2: Mischungsgesetze von Hashin und Shtrikman (1962), Waff (1974). B^* bezeichnet das Ergebnis nach Gl. 3.

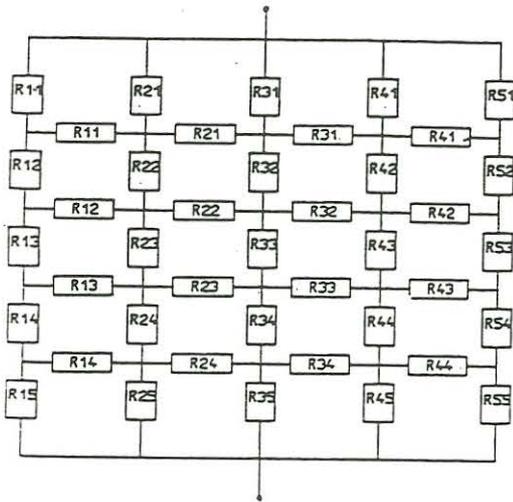


Abb. 3: Netzwerkmodell eines Zwei-Phasen-Gemisches.

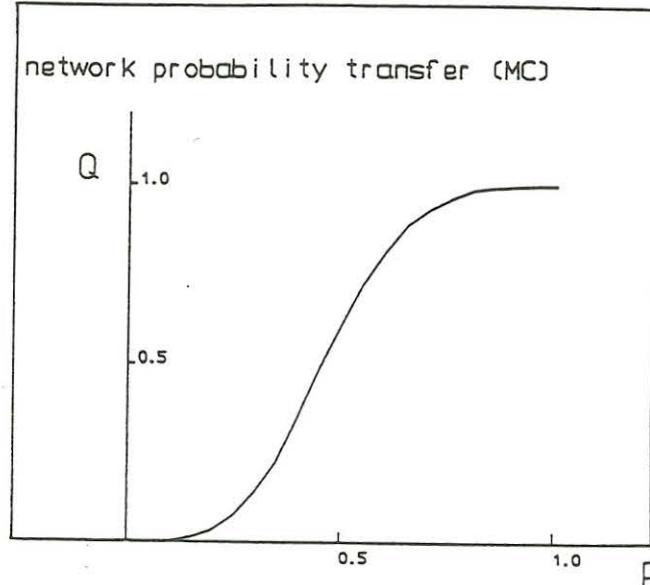


Abb. 4: Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion für das in Abb.3 gezeigte Netzwerk. p bezeichnet die Wahr-

scheinlichkeit, daß ein einzelner Widerstand "offen" ist: $R_{ij} = 0$, oder alternativ den relativen Anteil dieser offenen Widerstände im Netzwerk. Q bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß das gesamte Netzwerk wenigstens einen offenen Pfad hat. $Q(p)$ wurde hier durch numerische Simulation berechnet.

nach WAFF (1974). Sie ergibt sich für das in Abb. 1 gezeigte Modell von gering - leitenden ($\sigma_s \ll \sigma_m$) Blöcken, die mit starkleitenden "Filmen" überzogen sind, wobei alle Filme miteinander verbunden sind (SCHMELING 1986). Umgekehrt erhält man für das Modell gut leitender, nicht miteinander verbundener Einlagerungen in einem gering leitenden Medium

$$\sigma_{eff} = \sigma_m / (1 - (1 - v - d^2 v) / ((1 + d)(1 - 2dv))); \quad d = \beta^{-1/3}, \quad v = \sigma_s / \sigma_m \quad (3)$$

in der Nähe des unteren Grenzwertes. Weit wichtiger als das Mischungsverhältnis ist offenbar die Antwort auf die Frage, inwieweit die stark leitenden Komponenten miteinander verbunden sind. Dies führt auf die Idee, anstelle des gesamten Gemisches nur noch die gut leitende Komponente zu betrachten mit der Einschränkung, daß jetzt einige der Verbindungen zwischen den leitenden Teilen unterbrochen sein dürfen. Dies kann mit einem Widerstandsnetzwerk simuliert werden (Abb. 3), und ein Näherungswert für die effektive Leitfähigkeit ist

$$\sigma_{eff} \approx (2/3) \beta \sigma_m Q(p) \quad (4)$$

Die "Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion" $Q(p)$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich zwischen zwei bestimmten Klemmen des Netzwerkes mindestens ein nicht unterbrochener Leitungspfad befindet, wenn p den relativen Anteil der Film-Brücken mit $\sigma = \sigma_m$ angibt. Diese Funktion ist zunächst in Abb. 4 dargestellt, und zwar so, wie sie durch numerische Simulation

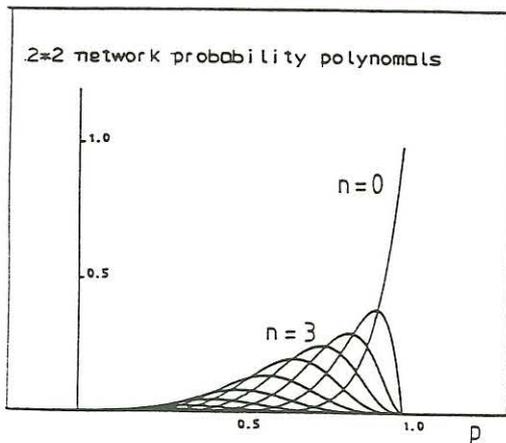


Abb. 5: Polynome $K_n p^{12-n} (1-p)^n$ nach Gl. 5 und Tab. 1, im Interval [0,1].

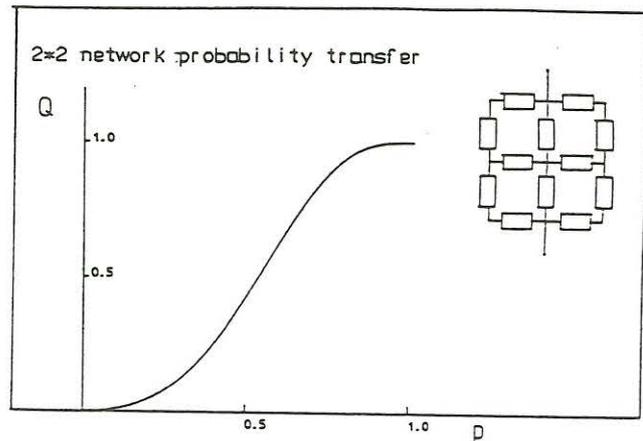


Abb. 6: Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion $Q(p)$ (vgl. Abb.4) für ein 2x2 Netzwerk. $Q(p)$ wurde hier analytisch nach Gl 5 berechnet.

mit einem MONTE-CARLO Experiment gewonnen wurde: Dazu habe ich das Interval [0,1] in 20 gleiche Teile geteilt und für jedes $p = 0.05, p = 0.10$ etc jeweils 2000 individuelle und zufällig erzeugte Konfiguration des in Abb. gezeigten Netzwerkes ausprobiert, bei denen jeweils ein Anteil $(1-p)$ aller Widerstände keinen Durchgang hatte. Q ist dann der Anteil derjenigen Testläufe, bei denen mindestens ein durchgehender Leitungspfad entsteht.

Wenn das Netzwerk sehr klein ist, kann $Q(p)$ auch analytisch bestimmt werden: Das in Abb. 6 rechts gezeigte Netzwerk hat nur 12 einzelne Widerstände, es kann also in $2^{12} = 4096$ Konfigurationen realisiert werden. Die Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion (WUT) ergibt sich für dieses Netzwerk zu

$$Q(p) = \sum_{n=0}^{12} K_n p^{12-n} (1-p)^n \quad (5)$$

worin die K_n die in Tab. 1 aufgetragenen modifizierten BERNOULLI-Koeffizienten sind. So ist z.B. $K_3 = 212$, weil es 220 Möglichkeiten gibt, 3 "nichtleitende" und 9 "leitende" Widerstände auf das spezielle Netzwerk zu verteilen. Von diesen führen aber 8 nicht auf durchgehende Leitungspfade. Die Polynome unter dem Summenzeichen in Gl. 5 sind in Abb. 5 und die Summe selbst in Abb. 6 aufgetragen.

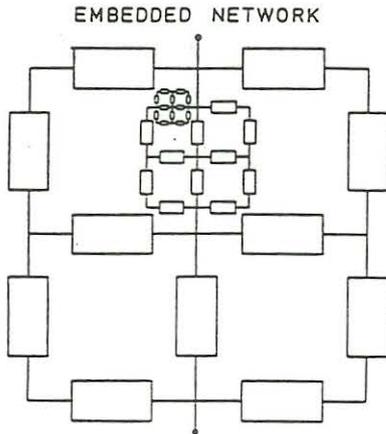


Abb. 7: 3-fach eingebettetes Netzwerk (Madden, 1976).

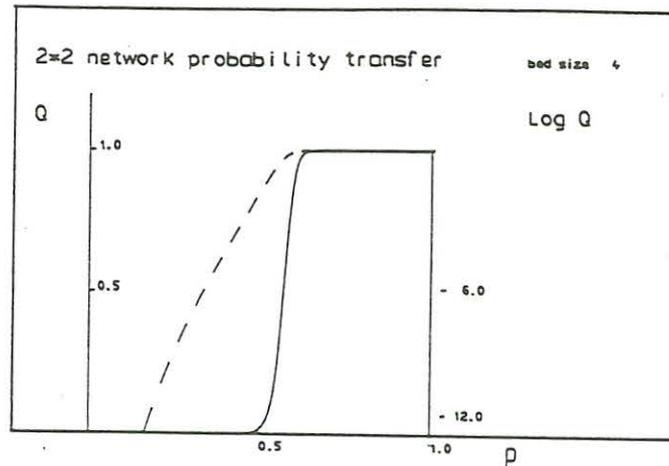


Abb. 8: Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion des 4-fach eingebetteten 2*2Netzwerkes. Gestrichelt: log Q(p).

n	$\binom{12}{n}$	K_n
0	1	1
1	12	12
2	66	66
3	220	212
4	495	415
5	792	478
6	924	346
7	792	164
8	495	51
9	220	10
10	66	1
11	12	0
12	1	0

Tab. 1

Die Theorie einfacher Netzwerke macht noch keine Aussage über die Dimension des Mediums. Dies führte MADDEN (1976) auf die Idee, in einen "Übernetzwerk" die einzelnen Widerstände ihrerseits wieder durch Netzwerke zu realisieren (Abb. 7). Die WUT der sich ergebenen "eingebetteten" Netzwerke ist in Abb. 8 dargestellt. Dort fällt insbesondere die starke Nichtlinearität der Funktion $Q(p)$ auf, anschaulich: Eine kleine Erhöhung des Anteils p der stark leitenden Komponente erhöht Q und schließlich auch σ nach Gl.4 um Größenordnungen. Dagegen ist $\log Q$ für einen gewissen Bereich von p eine näherungsweise lineare Funktion von p .

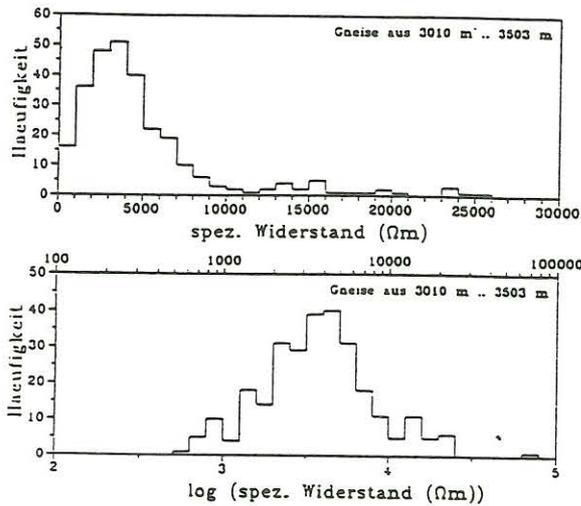


Abb. 9: Häufigkeitsverteilung des spezifischen elektrischen Widerstandes in Bohrkernen aus der KTB-VB, hier: Gneise aus dem Bereich 3010m bis 3503 (Rauen et al, 1990; Rauen, 1991).

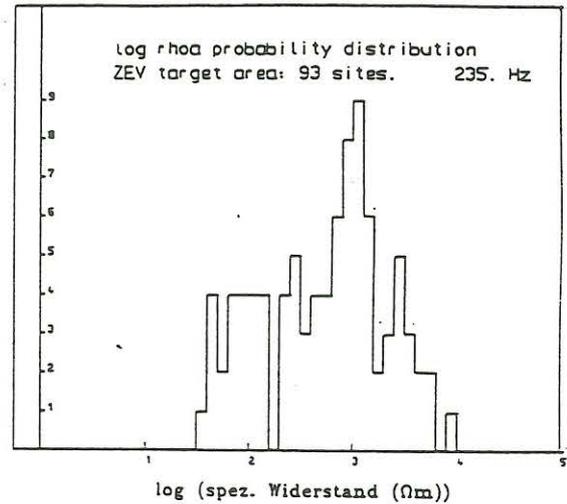


Abb.10: Häufigkeitsverteilung des scheinbaren spezifischen Widerstandes, bestimmt aus 93 Stationen in der ZEV, bei der Frequenz 240 Hz.

Dieser Zusammenhang soll im folgenden zur Erklärung von Labor- und Feldmessungen aus dem KTB bzw. aus dem Umfeld des KTB herangezogen werden: In Abb. 9 ist die von RAUEN et al (1990) aus ca 1500 Bohrkernproben bestimmte Häufigkeitsverteilung des elektrischen Widerstandes dargestellt. Nicht die Widerstände selbst, sondern ihre Logarithmen sind etwa normal verteilt. Nach dem Netzwerkmodell kann dies aber mit einer Normalverteilung des Anteils p der stark leitenden Teile des Netzwerks erklärt werden (σ_m steht jetzt für die Leitfähigkeit von Graphit und σ_s für die von Gneis) Aus (5) folgt

$$\log \rho / \rho_0 = -\log(\sigma_{eff} / \sigma_0) = -\log(2/3) - \log(\sigma_m / \sigma_0) - \log B - \log Q(p) \quad (6)$$

und in dieser Gleichung überwiegt der Term $-\log Q(p)$: Wenn p etwa normalverteilt ist, dann auch $Q(p)$ und schließlich $\log \sigma_{eff}$. Hier wird natürlich angenommen, daß in einer einzelnen Probe über mikroskopische Netzwerke gemittelt wird.

Abb. 10 zeigt, daß diese "logarithmische Normalverteilung" (RAUEN 1991) auch für makroskopische Strukturen innerhalb der Zone Erbdorf - Vohenstrauß (ZEV) gilt: Hier ist die Häufigkeitsverteilung des scheinbaren Widerstandes des Audiomagnetotellurik dargestellt. (Datenquellen: EISEL (1992),

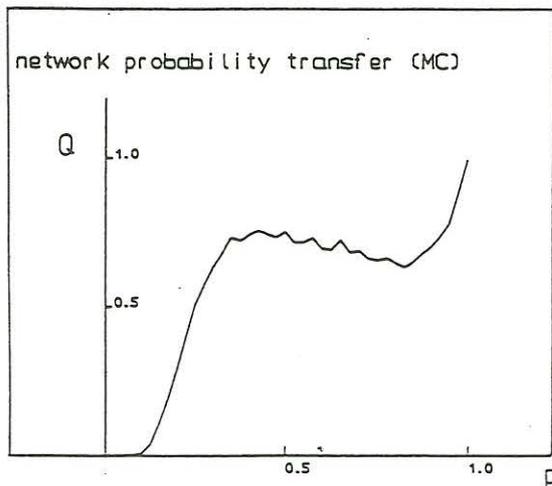


Abb.11: Durch numerische Simulation bestimmte Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion für das in Abb. 3 gezeigte Netzwerk mit zusätzlicher Simulation des Effektes von Druck. Weitere Erklärung im Text.

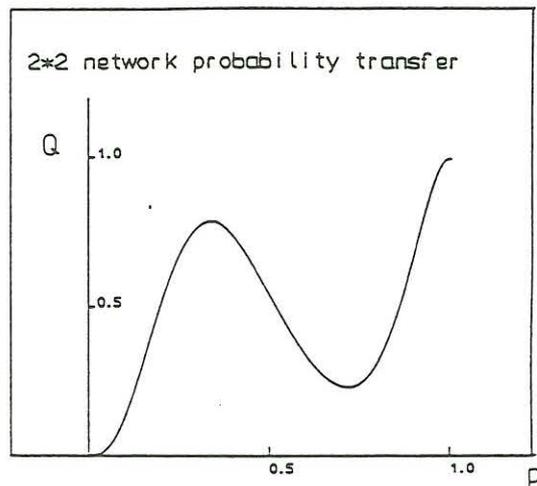


Abb.12: Analytisch bestimmte Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion des 4-fach eingebetteten 2*2 Netzwerkes mit modifizierten Koeffizienten $K_4 = 0$ und $K_8 = 1000$.

JENSEN et al (1988), LEONHARDT (1987)). Die Gegenprobe mit 30 AMT Stationen aus ARROYOS Profil außerhalb der ZEV ergab keine Gaußverteilung, sondern eine Variation der scheinbaren Widerstände um weniger als eine Dekade.

Obwohl bei jeder der Einzelmessungen in den beiden Stichproben in Abb. 9 (Labor) und Abb. 10 (AMT) über völlig verschiedene Volumina (einige ccm bzw. 10^{15} ccm) gemittelt wurde, unterscheiden sich die beiden Mittelwerte von $\log \sigma$ nur um 0.3, und diese Differenz ist kleiner als die Varianz der beiden Kurven. Dies ist vielleicht ein Hinweis darauf, daß die ZEV auch makroskopisch als Gemisch von zwei Komponenten mit σ_m und σ_s betrachtet werden. Ein weiteren Hinweis gibt das Experiment von STOLL (1992).

Der Schluß dieses Beitrags ist spekulativer Art: Was passiert, wenn das Netzwerk unter (horizontalen oder vertikalen) Druck gesetzt wird? Hierzu müssen neben elektrischen auch mechanische Eigenschaften beider Komponenten betrachtet werden. Graphit ist "weicher" als Gneis. Allgemein ist das Problem der Ausbreitung von Druck, gekoppelt an die Ausbreitung von Mikrorissen im Gestein, ein Spezialfall der Percolationstheorie (ZANG und STÖCKL, 1991). In Abb. 11 ist das Ergebnis der numerischen Simulation der WUT von Abb. 4 wiederholt, wobei diesmal zusätzlich der Effekt von Druck unter vereinfachenden Annahmen simuliert wurde: 1) mehrere sehr kleine Anteile p werden zu einem zusammengedrückt und erzeugen so mehr durchgehende Leitungspfade; 2) sehr große Anteile der weicheren Komponente werden zerstört, so daß existierende Pfade unterbrochen werden können. In der analytischen Behandlung kann dies durch eine Variation der K_n von Tab. 1 simuliert werden (Abb. 12). Wird jetzt schließlich noch zusätzlich das Prinzip

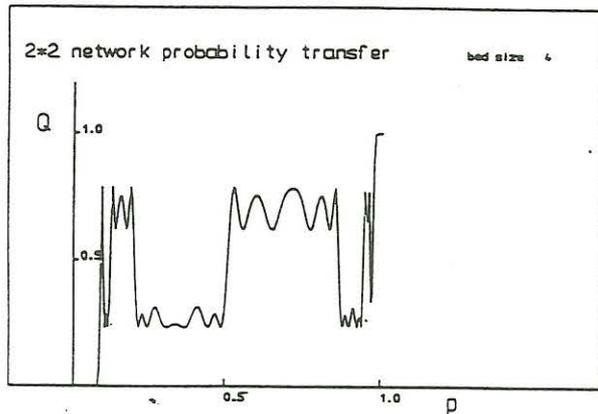


Abb.13: Analytisch bestimmte Wahrscheinlichkeitsübertragungsfunktion des 2*2 Netzwerkes mit modifizierten Koeffizienten $K_4 = 0$ und $K_8 = 1000$.

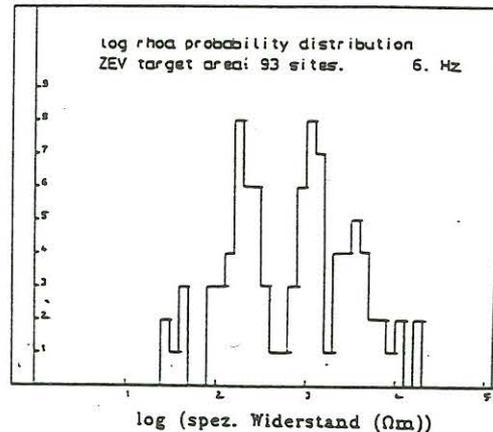


Abb.14: Häufigkeitsverteilung des scheinbaren spezifischen Widerstandes, bestimmt aus 93 Stationen in der ZEV, bei der Frequenz 6 Hz.

des eingebetteten Netzwerkes angewandt, so entsteht eine Art Bifurkation (Abb. 13): Für alle Werte von p im Intervall $[0,1]$ ergeben sich zwei Gruppen von nahe bei einander liegenden WUT $Q(p)$ und also auch zwei Gruppen von $\log \sigma$ nach Gl 6. Die Häufigkeitsverteilung der scheinbaren Widerstände der AMT bei 6 Hz in Abb. 14 (Vergrößerung der Eindringtiefe und deshalb des Mittlungsvolumens gegenüber Abb. 10) zeigt, dass die Feldmessungen dieser Hypothese zumindest nicht widersprechen.

Es ist klar, daß neben weitere Messungen, im Labor wie im Gelände, weitere numerische Simulationen notwendig sind. Der Zusammenhang zwischen der Anisotropie bei Labormessungen (LASTOVICKOVA, 1992) und AMT Feldmessungen (EISEL 1992) könnte ebenfalls mit Netzwerken untersucht werden.

Literatur

- Eisel, M., 1992. Effekte lateral anisotroper Leitfähigkeitsstrukturen in der MT. In: V. Haak (Hrsg.): Protokoll Koll. "Elektromagnetische Tiefenforschung" in Borkheide, 25.-29.4.1992.
- Hashin, Z., Shtrikman, S., 1962. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. J.Appl. Phys., 33, 3125-3131.
- Hjelt, S.E., 1991. Geoelectromagnetism, chaos and fractals. XV Geofysiikan Päivät. Oulussa, 14.-15.5.91

- Jensen, U., Karmann, R. und Scharberth, J., 1988. Elektromagnetische Tiefensondierung KTB, in: K. Bram (Hrsg.): KTB Report 88-3, NLFb Hannover.
- Lastovickova, M., 1992. Laboratory Measurements of electrical conductivity and its anisotropy of the KTB rocks, comparison of these results with results from the Kola and Krivý Rog superdeep boreholes. subm. to KTB report.
- Leonhardt, F., 1987. Audiomagnetotellurische Untersuchungen in der Oberpfalz. Diplomarbeit, Inst. f. Angew. Geophysik, Petrologie und Lagerstättenkunde der TU Berlin.
- Madden, T.R., 1976. Random networks and mixing laws. Geophysics, 41, 1104-1125.
- Rauen, A., Huenges, E., Lippmann, E., und Soffel, H.C., 1990. Elektrische Widerstandsmessungen an KTB Bohrkernen. In: V. Haak und J. Homilius (Hrsg.): Protokoll Koll. "Elektromagnetische Tiefenforschung" in Hornburg, 19-23.3.1990. NLFb Hannover.
- Rauen, A., 1991. Untersuchungen des komplexen elektrischen Widerstandes, insbesondere dessen Anisotropie und Frequenzabhängigkeit, von Proben des Kontinentalen Tiefbohrprogramms der Bundesrepublik Deutschland (KTB). Diss. Fak. Geowiss. München.
- Schmeling, H., 1986. Numerical models on the influence of partial melt on elastic, anelastic and electrical properties of rocks. Part II: electrical conductivity. Phys. Earth Planet. Int., 43, 123-136.
- Stoll, J., 1992. A mise-à-la-masse experiment for detecting an electronic network of cataclastic zones around the KTB-site. In: V. Haak (Hrsg.): Protokoll Koll. "Elektromagnetische Tiefenforschung" in Borkheide, 25.-29.4.1992.
- Waff, H.S., 1974. Theoretical considerations on electrical conductivity in a partially molten mantle and implications for geothermometry. J. Geophys. Res., 79, 4003-4010.
- Zang, A., and Stöckl, H., 1991. Numerical study on crack evolution in diagenetically consolidated sandstones. J. Geophys. Res., 96, 10039-10048.