

P. Weidelt

1D-Konsistenzbereiche für Übertragungsfunktionen mit Fehlern

1. Einleitung

In der Magnetotellurik macht man bei der Interpretation von scheinbarem Widerstand und Phase sehr schnell die Erfahrung, daß zwischen Daten benachbarter Frequenzen starke interne Bindungen bestehen müssen, um durch eindimensionale Widerstandsmodelle interpretierbar zu sein. Für einen Satz von M *exakten* komplexen Übertragungsfunktionen c_j für die M Frequenzen ω_j , $j = 1, \dots, M$ haben Weidelt (1986) und Yee & Paulson (1988) auf unterschiedlichem Wege notwendige und hinreichende Bedingungen für die 1D-Interpretierbarkeit abgeleitet (s.a. Weidelt, 1987). Die Prüfung eines Datensatzes läuft hinaus auf die Bestimmung des Vorzeichens von $2M$ Determinanten, die aus den Daten abgeleitet werden. Da die Bedingungen hinreichend sind, existiert ein 1D-Modell nur, wenn alle $2M$ Vorzeichen richtig sind; umgekehrt existiert wegen der Notwendigkeit der Bedingungen sicherlich kein Modell, wenn zumindest eine Bedingung verletzt ist. Da in der Praxis die c_j mit Fehlern behaftet sind, kann im letzten Fall ein 1D-Modell existieren, wenn der Konsistenztest anstelle der Meßdaten \hat{c}_j ein c_j aus dem Fehlerkreis $|c_j - \hat{c}_j| \leq \Delta_j$ benutzt. Hier ist Δ_j der Radius des Fehlerkreises in der komplexen c -Ebene. Es wird die vereinfachende Annahme gemacht, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte für c_j innerhalb des Fehlerkreises konstant ist und außerhalb desselben verschwindet. Theoretisch gerechtfertigter wäre die Annahme einer rotationssymmetrischen Gaußverteilung.

Für den bescheidenen Datensatz von $M=2$ Frequenzen betrachten wir im folgenden die Form der Konsistenzbeziehungen bei Berücksichtigung der Datenfehler. Es stellt sich dabei heraus, daß zwar notwendige Bedingungen einfach formulierbar sind, zugleich notwendige und hinreichende Bedingungen aber so kompliziert sind, daß sie kaum eine praktische Bedeutung haben.

2. Erweiterte Konsistenzbedingungen für $M=2$ Frequenzen

Wir benutzen die Schmuckersche Übertragungsfunktion $c(\omega)$, die mit dem scheinbaren Widerstand $\varrho_a(\omega)$ und der Phase $\varphi(\omega)$ durch

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{\varrho_a(\omega)}{\omega\mu_0}} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi(\omega) \right) \right] \quad (1)$$

zusammenhängt. Ferner sei

$$c_j := c(\omega_j) =: g_j - ih_j \quad , \quad j = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Es bezeichne c_j die wahren, aber unbekanntenen Werte und \hat{c}_j die Meßwerte, so daß gilt

$$|c_j - \hat{c}_j| \leq \Delta_j, \quad (3)$$

wobei Δ_j der Radius des Fehlerkreises ist. Die Konsistenzbedingungen für $M=1$ sind

$$h_1 \geq 0, \quad g_1 \geq 0. \quad (4)$$

Sie können dann erfüllt werden, wenn der Fehlerkreis um \hat{c}_1 einen Punkt enthält, der (4) erfüllt, d.h. wenn gilt

$$(|\hat{g}_1| - g_1)^2 + (|\hat{h}_1| - h_1)^2 \leq 4\Delta_1^2. \quad (5)$$

Für $M=2$ hat man zusätzlich zu (4) die beiden Konsistenzbedingungen (s.a. Weidelt 1986,1987, Yee & Paulson 1988)

$$\left| \frac{c_2 - c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right|^2 \leq \frac{h_1 h_2}{\omega_1 \omega_2}, \quad \left| \frac{\omega_2 c_2 - \omega_1 c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right|^2 \leq g_1 g_2. \quad (6)$$

Wenn etwa c_1 gegeben ist, zeigt die alternative Form von Gl.(6),

$$|c_2 - c_{21}| \leq r_{21}, \quad |c_2 - c_{22}| \leq r_{22} \quad (7)$$

mit

$$c_{21} = g_1 - i h_1 \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2}, \quad r_{21} = h_1 \frac{|\omega_2^2 - \omega_1^2|}{2\omega_1 \omega_2},$$

$$c_{22} = g_1 \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_2^2} - i h_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad r_{22} = g_1 \frac{|\omega_2^2 - \omega_1^2|}{2\omega_2^2},$$

daß der Konsistenzbereich für c_2 in der c_2 -Ebene durch die linsenförmige Schnittmenge der beiden Kreise um c_{21} und c_{22} mit den Radien r_{21} und r_{22} gegeben ist ("Konsistenzlinse"). Wegen $|c_{21} - c_{22}| \leq r_{21} + r_{22}$ existiert immer eine Schnittmenge.

Die Abb. 1 gibt ein Beispiel. Als Frequenzen ω_1 und ω_2 angenommen sind die erste bzw. zweite Sq-Harmonische. Die Meßdaten \hat{c}_j sind willkürlich gewählt; auch sind die Fehler zur Verdeutlichung unrealistisch groß angesetzt worden. Wenn c_1 fehlerfrei wäre, $c_1 = \hat{c}_1$, würde der Konsistenzbereich für c_2 durch das linsenförmige Gebilde beschrieben sein. Der tatsächliche Meßwert \hat{c}_2 liegt deutlich außerhalb und auch sein Fehlerkreis schneidet nirgends das Konsistenzgebiet. Wir wollen nun untersuchen, ob der Fehlerkreis um \hat{c}_2 eine Schnittmenge mit dem erweiterten Konsistenzgebiet besitzt, das man durch die Betrachtung des Fehlers von \hat{c}_1 erhält.

Zu jedem c_1 aus dem Kreis $|c_1 - \hat{c}_1| \leq \Delta_1$ gehört ein anderes Konsistenzgebiet für c_2 . Wir nehmen an - und beweisen dies im folgenden - daß die Punkte auf dem Kreisrand $|c_1 - \hat{c}_1| = \Delta_1$ das neue Konsistenzgebiet für c_2 festlegen. Deshalb bestimmen wir in der c_2 -Ebene die Enveloppen der beiden Kreisscharen (7), die zu Werten von c_1 auf dem Rand des Fehlerkreises gehören. (Die Enveloppe ist die Kurve, die alle Kreise der Schar berührt und umgekehrt in jedem ihrer Punkte von einem Kreis der Schar berührt wird.) Es sei also

$$g_1 = \hat{g}_1 + \Delta_1 \cos \alpha, \quad h_1 = \hat{h}_1 + \Delta_1 \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (8)$$

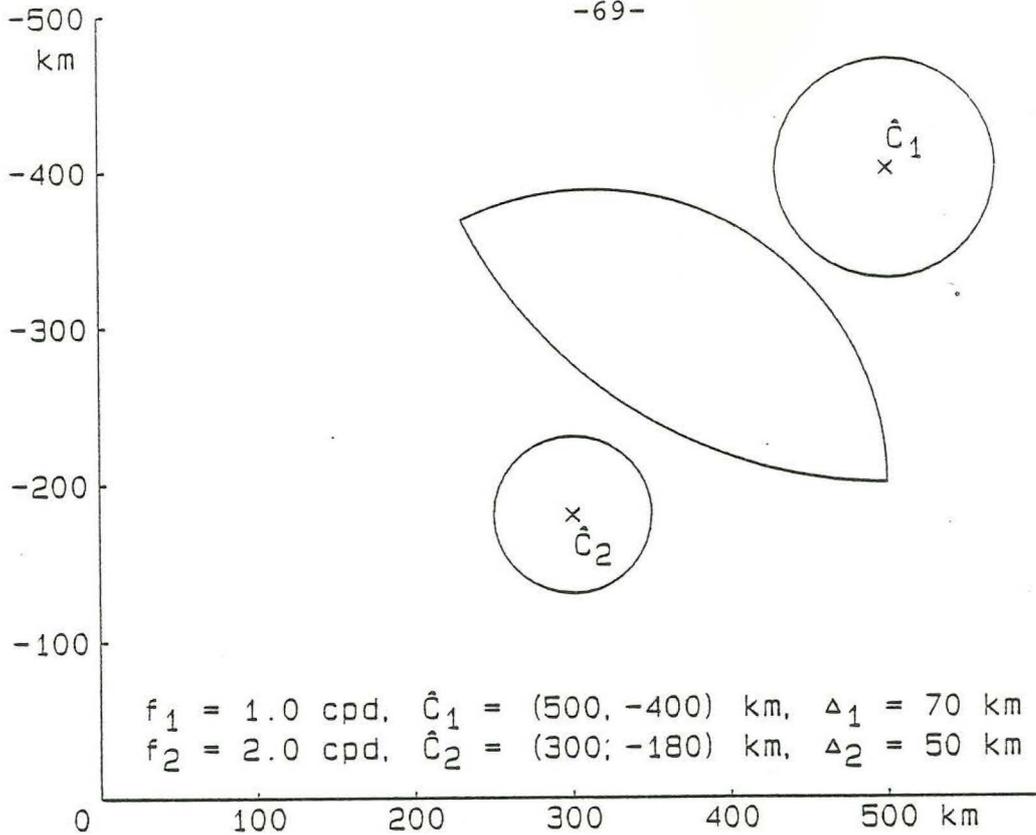


Abb. 1: Meßdaten \hat{c}_j mit Fehlerkreisen sowie Konsistenzlinse für c_2 bei fehlerfreien Daten

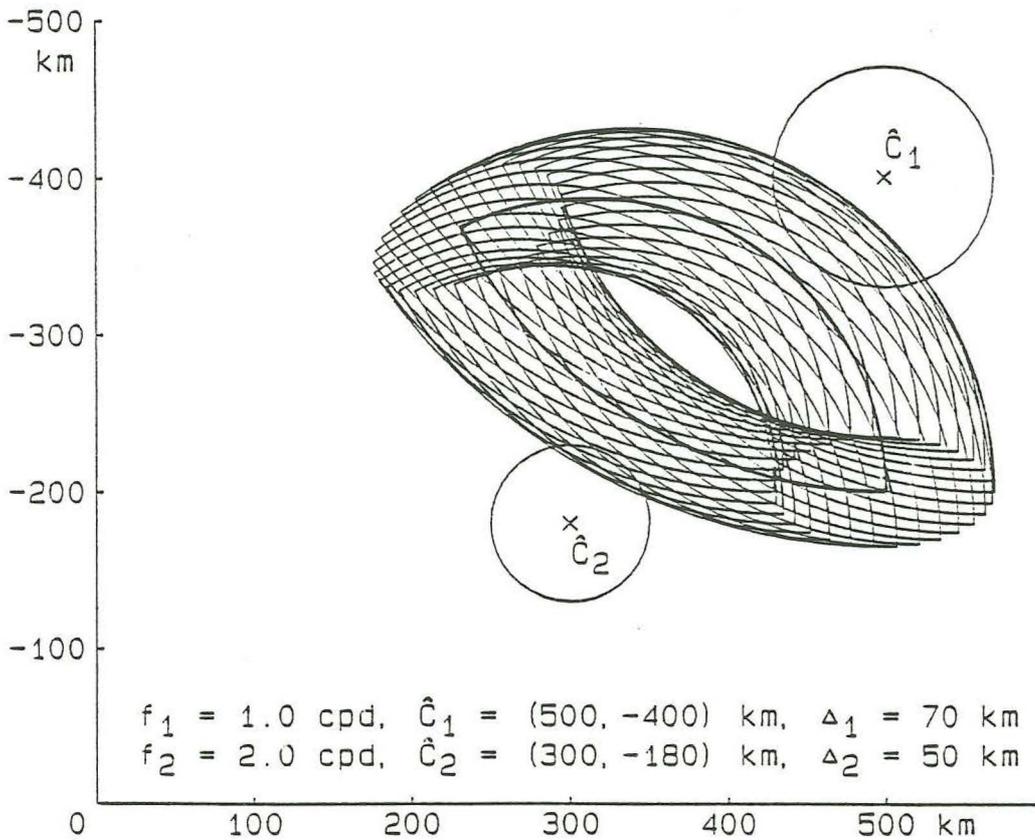


Abb. 2: Geometrische Konstruktion des Konsistenzgebiets für c_2 durch Überlagerung der Konsistenzlinsen des Fehlerkreisrandes von \hat{c}_1 . (Das weiße Innere des Konsistenzbereichs wird durch die inneren Enveloppen gebildet, die sich aus (9) formal durch die Ersetzung von Δ_1 durch $-\Delta_1$ ergeben.)

Die Enveloppe für die Kreisschar (7) gewinnt man durch Einsetzen von (8) in (7) oder (6) und nachfolgende Differentiation nach α . Die Elimination von α aus der differenzierten und undifferenzierten Gleichung liefert dann die Enveloppe (z.B. v. Mangoldt-Knopp, 1957, p.519). Eine längere Rechnung ergibt als Enveloppen die beiden *Kreise*

$$|c_2 - \check{c}_{21}| \leq \check{r}_{21}, \quad |c_2 - \check{c}_{22}| \leq \check{r}_{22} \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned} \check{c}_{21} &= \hat{g}_1 - i[(\omega_1^2 + \omega_2^2)\hat{h}_1 + |\omega_2^2 - \omega_1^2|\Delta_1]/(2\omega_1\omega_2), \\ \check{r}_{21} &= [|\omega_2^2 - \omega_1^2|\hat{h}_1 + (\omega_2^2 + \omega_1^2)\Delta_1]/(2\omega_1\omega_2), \\ \check{c}_{22} &= [(\omega_1^2 + \omega_2^2)\hat{g}_1 + |\omega_2^2 - \omega_1^2|\Delta_1]/(2\omega_2^2) - i\hat{h}_1\omega_1/\omega_2, \\ \check{r}_{22} &= [|\omega_2^2 - \omega_1^2|\hat{g}_1 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\Delta_1]/(2\omega_2^2). \end{aligned}$$

Für $\Delta_1 = 0$ stimmt (9) mit (7) überein. Wenn Δ_1 anwächst, vergrößern sich die Radien der einhüllenden Kreise stärker als sich ihre Mittelpunkte verschieben. Deshalb schließt die Enveloppe für ein vorgegebenes Δ_1 die zu kleinerem Δ_1 gehörenden Enveloppen ein und der Rand des Fehlerkreises bestimmt das Konsistenzgebiet.

Die Schnittmenge der Enveloppen (9) würde nur dann mit dem erweiterten Konsistenzbereich übereinstimmen, wenn jeder der beiden Schnittpunkte der Enveloppen auch eine Ecke der Konsistenzlinse eines auf dem Fehlerkreis gelegenen Punktes c_1 wäre. Die abgerundeten Ecken des Konsistenzbereichs in Abb. 2 weisen aber darauf hin, daß seine Berandung nur zum Teil durch die Enveloppen (9) gebildet wird. In Abb. 3 sind dies die Kreisbögen $B'C'$ vom Kreis $(\check{c}_{22}, \check{r}_{22})$ und $D'A'$ vom Kreis $(\check{c}_{21}, \check{r}_{21})$; die beiden übrigen Abschnitte $A'B'$ und $C'D'$ werden durch Abschnitte derjenigen Enveloppen gebildet, die die Ecken der Konsistenzlinsen als Schnittpunkte der Kreise (7) einhüllen. Dies ist in Abb. 2 deutlich erkennbar. Unter Benutzung der Abkürzung

$$a := \omega_1/\omega_2$$

sind die Koordinaten der Schnittpunkte gegeben durch

$$g_2 = g_1, \quad h_2 = ah_1 \quad (10)$$

bzw.

$$g_2 = \frac{g_1^2 + h_1^2}{g_1^2 + h_1^2/a^2}g_1, \quad h_2 = \frac{g_1^2 + h_1^2}{g_1^2 + h_1^2/a^2} \cdot \frac{h_1}{a}. \quad (11)$$

Als Enveloppe dieser Schnittpunkte für die Schar der Punkte (8) findet man

$$(g_2 - \hat{g}_1)^2 + (h_2/a - \hat{h}_1)^2 = \Delta_1^2 \quad (12)$$

bzw.

$$(g_2^2 + h_2^2)^2 + (g_2^2 + a^2h_2^2) \cdot (\hat{g}_1^2 + \hat{h}_1^2 - \Delta_1^2) - 2(g_2^2 + h_2^2) \cdot (\hat{g}_1g_2 + a\hat{h}_1h_2) = 0. \quad (13)$$

Die Enveloppe (12) ist eine Ellipse (Abb. 2, rechts unten), die Enveloppe (13) ist ebenfalls ellipsenförmig, aber von komplizierterer mathematischer Struktur (Abb. 2,

links oben). Abb. 3 zeigt auch die Punkte A, B, C und D , deren Konsistenzkreise den erweiterten Konsistenzbereich in den kritischen Punkten A', B', C' und D' berühren. Die ersteren sind mit (8) und der Abkürzung

$$\epsilon := \operatorname{sgn}(a - 1) = \begin{cases} -1, \omega_1 < \omega_2 \\ +1, \omega_1 > \omega_2 \end{cases}$$

gegeben durch

$$\alpha_A = \epsilon \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_B = (1 + \epsilon) \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_C = (1 + \epsilon) \frac{\pi}{2} + 2 \arctan \left(\frac{\hat{h}_1}{\hat{g}_1 + \epsilon \Delta_1} \right), \quad \alpha_D = (2 + \epsilon) \frac{\pi}{2} + 2 \arctan \left(\frac{\hat{h}_1 - \epsilon \Delta_1}{\hat{g}_1} \right).$$

A' und B' erhält man dann mit (10) und C' und D' mit (11).

Abb. 3 zeigt, daß die von (9) gebildete approximative Konsistenzlinse zwei kleine Zwickel (gestrichelt) enthält, die außerhalb des wahren Konsistenzbereichs liegen, der durch Abschnitte der Enveloppen (12) und (13) gebildet wird. Dies bedeutet aber, daß für den Fall der Lage des Punktes c_2 in einem der Zwickel *kein* 1D-Modell mehr existiert. Als Folge davon liefert die approximative Konsistenzlinse nur *notwendige* Bedingungen. Übertragen auf den Meßwert \hat{c}_2 erfordern sie, daß \hat{c}_2 bei einer Lage *außerhalb* der Konsistenzlinse vom Rand keinen größeren Abstand als Δ_2 haben darf. Dies ist sicher erfüllt, wenn gilt

$$|\hat{c}_2 - \tilde{c}_{21}| \leq \tilde{r}_{21} + \Delta_2, \quad |\hat{c}_2 - \tilde{c}_{22}| \leq \tilde{r}_{22} + \Delta_2. \quad (14)$$

Nach Umformung liefert (14) die beiden endgültigen *notwendigen* Konsistenzbedingungen

$$\omega_1 \omega_2 |\hat{c}_2 - \hat{c}_1|^2 \leq (\omega_2 - \omega_1)^2 (\hat{h}_1 \hat{h}_2 + \Delta_1 \Delta_2) + |\omega_2^2 - \omega_1^2| (\hat{h}_1 \Delta_2 + \hat{h}_2 \Delta_1) + \omega_1 \omega_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^2 \quad (15)$$

$$|\omega_2 \hat{c}_2 - \omega_1 \hat{c}_1|^2 \leq (\omega_2 - \omega_1)^2 (\hat{g}_1 \hat{g}_2 + \Delta_1 \Delta_2) + |\omega_2^2 - \omega_1^2| (\hat{g}_1 \Delta_2 + \hat{g}_2 \Delta_1) + (\omega_1 \Delta_1 + \omega_2 \Delta_2)^2, \quad (16)$$

die trotz unserer bezüglich der Frequenzen ω_1 und ω_2 unsymmetrischen Argumentation in den Indizes vollkommen symmetrisch sind. Für $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ reduzieren sich (15) und (16) auf (6). Gl (15) und (16) können ergänzt werden durch die Bedingung (5) für $j = 1, 2$, d.h. durch

$$(|\hat{g}_j| - \hat{g}_j)^2 + (|\hat{h}_j| - \hat{h}_j)^2 \leq 4\Delta_j^2. \quad (17)$$

Abb. 4 zeigt das wahre Konsistenzgebiet von \hat{c}_2 , das das betreffende Gebiet von c_2 (Abb. 3) im Abstand Δ_2 umgibt sowie die zugehörige approximative Konsistenzlinse mit den gestrichelten Zwickeln. Wie auch schon die Abb. 2 und 3 zeigten, sind im Rahmen der Fehler \hat{c}_1 und \hat{c}_2 durch ein 1D-Modell interpretierbar.

Die Bedingungen (15), (16) und (17) sichern als nur notwendige Bedingungen noch nicht die Existenz eines 1D-Modells. Notwendige und hinreichende Bedingungen müssen gewährleisten, daß in den Fehlerkreisen um \hat{c}_1 und \hat{c}_2 Punkte c_1 und c_2 existieren, die (4) und (6) befriedigen. Die erste Bedingung wird durch (5) erfüllt.

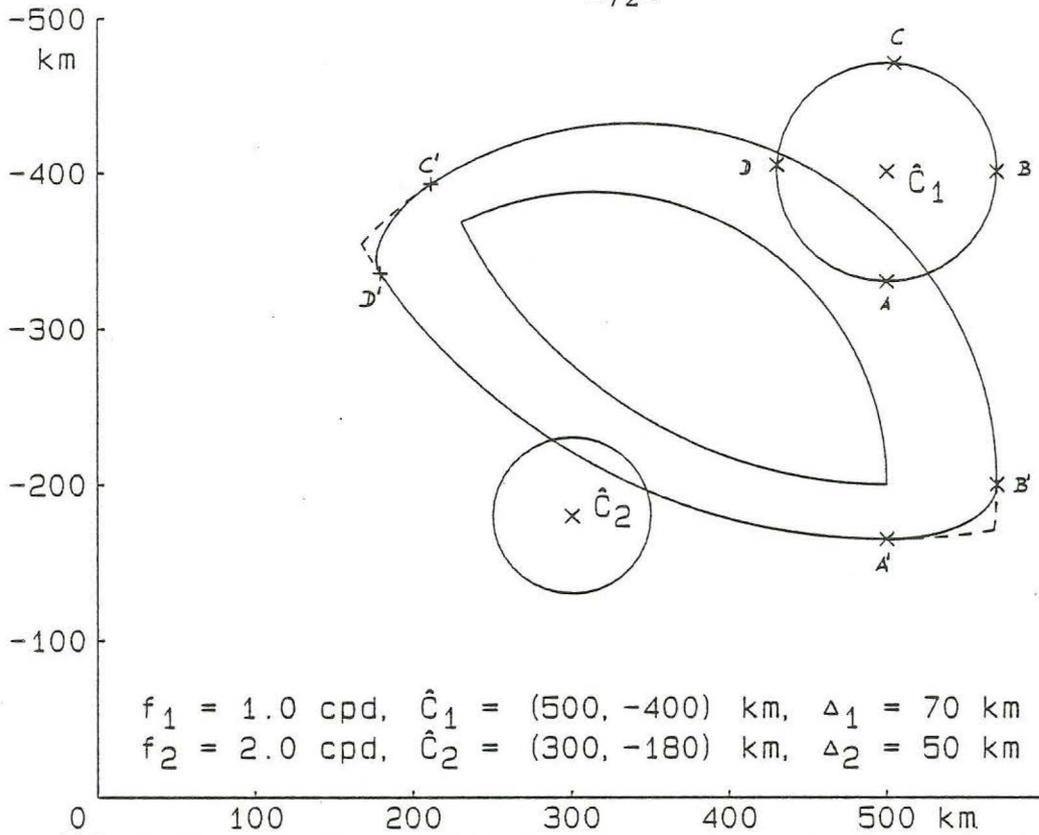


Abb. 3: Konsistenzlinse für fehlerfreie Daten sowie wahres Konsistenzgebiet für c_2 und seine Approximation durch die Konsistenzlinse (9) (gestrichelt). Dargestellt sind auch die Punkte A, B, C, D , des Fehlerkreisrandes, die in die Randpunkte A', B', C', D' des Konsistenzgebietes abgebildet werden.

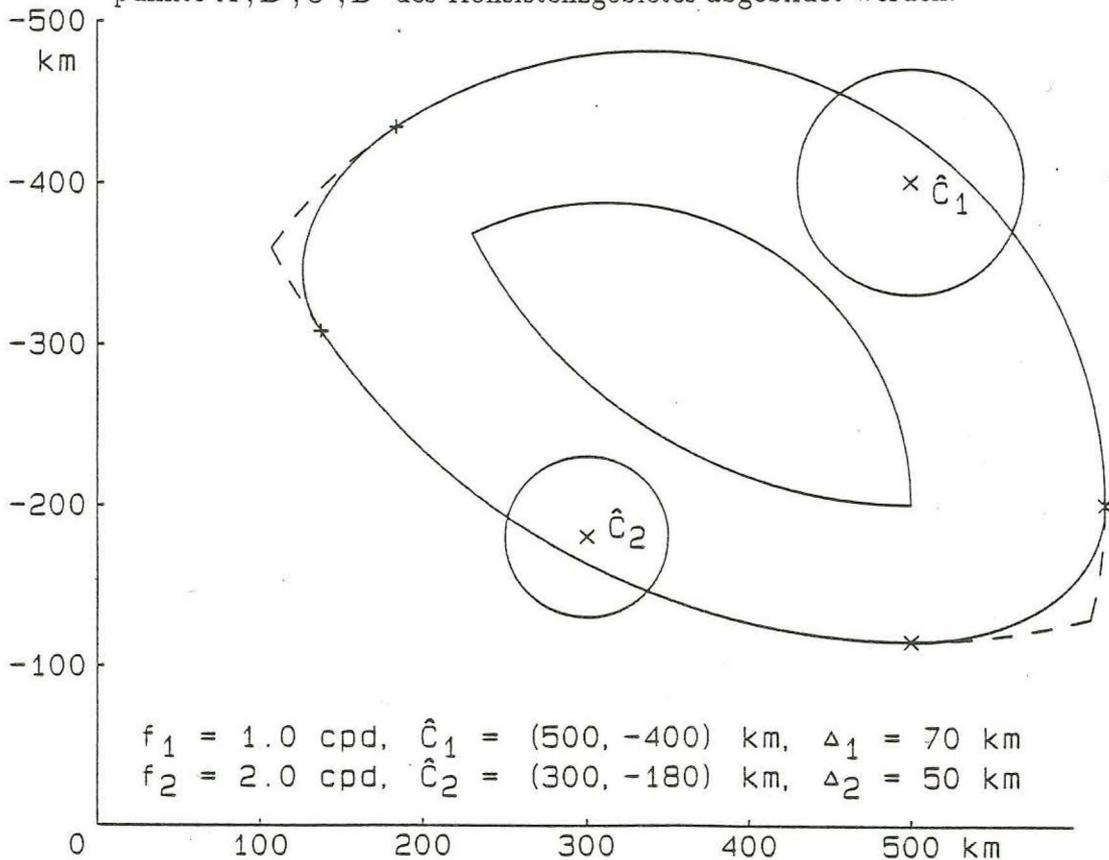


Abb. 4: Konsistenzlinse von c_2 oder \hat{c}_2 für fehlerfreie Daten sowie wahres und approximatives Konsistenzgebiet von \hat{c}_2 für fehlerhafte Daten. Das wahre Konsistenzgebiet ergibt sich durch Umrandung des entsprechenden Gebietes von Abb. 3 im Abstand Δ_2 . \hat{c}_2 muß im Inneren dieses Gebiets liegen.

Wenn der Fehlerkreis um \hat{c}_1 Punkte mit $h_1 < 0$ und/oder $g_1 < 0$ enthält, wird auch der Konsistenzbereich für c_2 durch Abschnitte auf der Achse $h_2 = 0$ und/oder $g_2 = 0$ begrenzt. Und zwar wird eine Sehne des Fehlerkreises auf der g_1 -Achse zwischen g_1' und g_1'' auf den Abschnitt $g_1' \leq g_2 \leq g_1''$ (idealer Leiter in der Tiefe g_1 , $c_2 = c_1$) und eine Sehne auf der h_1 -Achse zwischen h_1' und h_1'' auf den Abschnitt $ah_1' \leq h_2 \leq ah_1''$ (dünne Schicht an der Erdoberfläche, $c_2 = ac_1$) abgebildet. Notwendig und hinreichend für die Existenz eines 1D-Modells ist, daß der Fehlerkreis um \hat{c}_2 eine Schnittmenge mit dem komplizierten Gebilde besitzt, das durch Abschnitte auf (9), (12), (13) und möglicherweise auf den Achsen $g_2 = 0$ und $h_2 = 0$ begrenzt wird. Diese Prüfung ist zwar ohne weiteres analytisch oder durch Plotten graphisch durchzuführen, aber nicht von der Einfachheit der Bedingungen (4) und (6) für exakte Daten.

Literatur

- v. Mangoldt, H. & Knopp, K., 1957. Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 2, S. Hirzel Verlag Leipzig.
- Weidelt, P., 1986. Discrete frequency inequalities for magnetotelluric impedances of one-dimensional conductors. J. Geophys., 57, 171-176.
- Weidelt, P., 1987. Charakterisierung von MT-Impedanzen für eindimensionale Leiter. Protokoll über das 11. Kolloquium "Elektromagnetische Tiefenforschung", Schloß Lerbach bei Köln vom 11.3-13.3.1986. Hrsg.: Haak, V. & Homilius, J., NLFH Hannover, p. 75-82.
- Yee, E. & Paulson, K.V., 1988. Necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the one-dimensional magnetotelluric inverse problem. Geophys. J., 93, 279-293.