

K. BAHR

Zur Zusammenlegung der Zerlegungen

1. Einleitung

In diesem Bericht wird eine Synthese der beiden Dekompositionsmethoden des magnetotellurischen Impedanzensors von GROOM und BAILEY (1989) und BAHR (1988) vorgestellt.

Dabei sollen nicht nur, wie in einer früheren Arbeit (BAHR, 1990) die Zerlegungsparameter der beiden Methoden in einander umgerechnet werden, sondern es soll darüberhinaus das verallgemeinerte Modell, das beiden Zerlegungsmethoden gemeinsam zugrunde liegt, erweitert werden. Dieses Modell besteht aus einer Überlagerung von einer regionalen 2D-Leitfähigkeitsanomalie und einer lokalen dreidimensionalen Anomalie. Anlass für die Weiterentwicklung waren zwei Beobachtungen:

- 1) Bei Messungen in der Oberpfalz trat immer wieder der Fall auf, daß das induzierte tellurische Feld - von einem Vorzeichenwechsel abgesehen - nahezu unabhängig von der Richtung des anregenden Magnetfeldes in immer derselben Richtung polarisiert war.
- 2) Die die lokalen Strukturen beschreibenden Zerlegungsparameter sind genauer bestimmt als die uns eigentlich interessierenden Parameter der regionalen Struktur.

2. Methodische Vorbemerkung

Dieser Bericht setzt eine recht "längliche" Erörterung der verschiedenen bisher veröffentlichten Zerlegungsmethoden (BAHR, 1990) fort, die hier nicht wiederholt werden kann. Das wichtigste Ergebnis dieser Erörterung war eine Einteilung der magnetotellurischen Verzerrung in sieben Klassen, die in Abb. 1 im Überblick dargestellt sind. Nur die wichtigsten Definitionen werden im folgenden Abschnitt wiederholt.

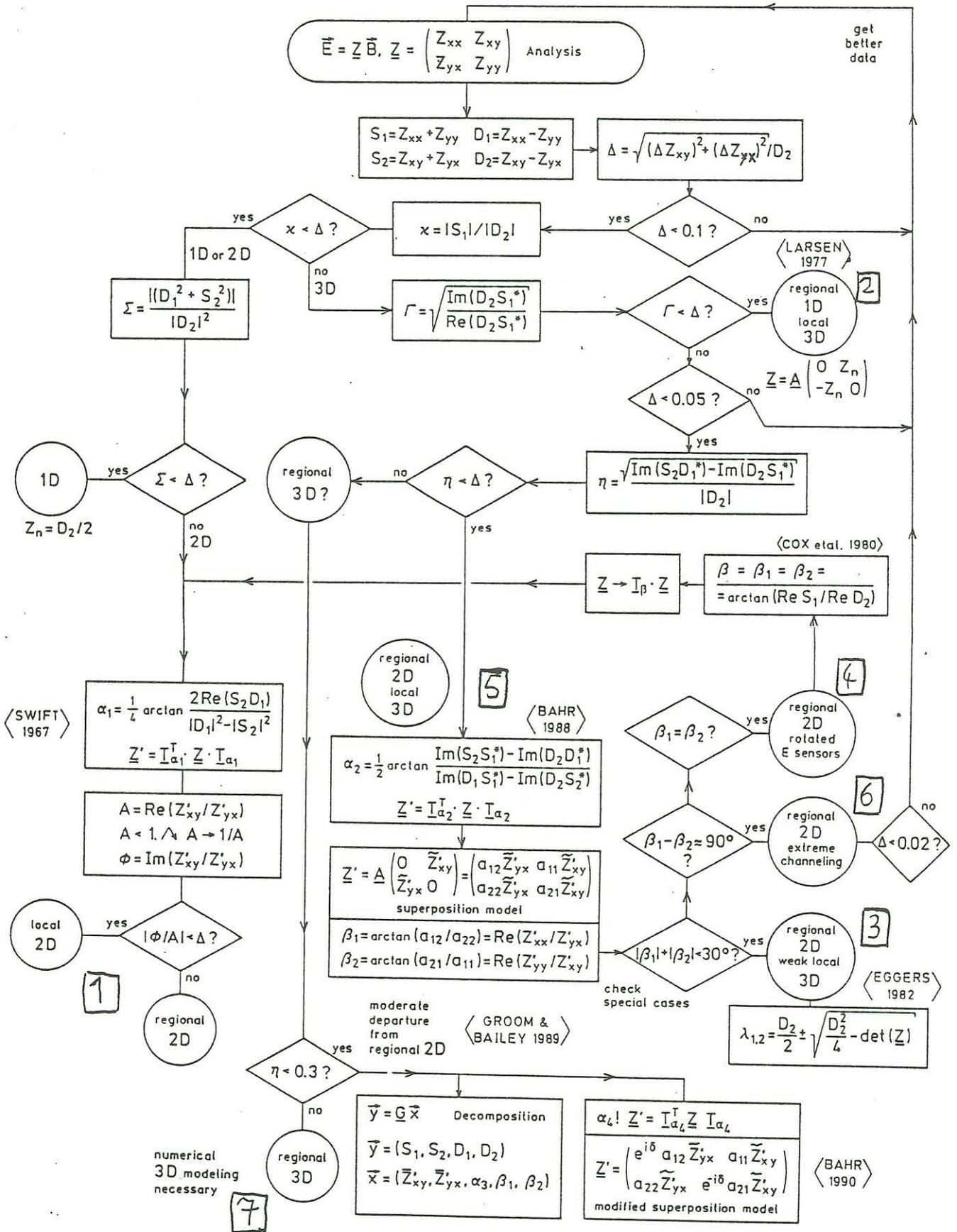


Abb. 1. Gang der Auswertung und Bestimmung der Verzerrungsklasse. Die Zahlen 1 bis 7 bezeichnen die Verzerrungsklasse nach Abschnitt 4 aus BAHR (1990).

3. Eine erweiterte Zerlegung des Impedanztensors

3.1. Notationen

Der Impedanztensor ist durch

$$\underline{E} = \underline{Z} \underline{B}, \quad \underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

definiert. Als "tellurische Vektoren" bezeichnen wir

$$\underline{e}_x = Z_{xx}\underline{x} + Z_{yx}\underline{y} \quad \text{und} \quad \underline{e}_y = Z_{xy}\underline{x} + Z_{yy}\underline{y} . \quad (3.2)$$

(\underline{x} und \underline{y} seien Einheitsvektoren in Nord- und Ostrichtung). Als modifizierte Impedanzen werden

$$S_1 = Z_{xx} + Z_{yy}, \quad S_2 = Z_{xy} + Z_{yx}, \quad D_1 = Z_{xx} - Z_{yy}, \quad D_2 = Z_{xy} - Z_{yx} \quad (3.3)$$

definiert. S_1, D_2 sind rotationsinvariant. SWIFTS (1967) skew ist

$$\chi = S_1 / D_2 . \quad (3.4)$$

Die Phasenunterschiede zwischen zwei komplexen Zahlen sollen durch die Kommutatoren

$$\begin{aligned} [Z_1, Z_2] &= \text{Im}(Z_2 Z_1^*) = \text{Re}Z_1 \text{Im}Z_2 - \text{Re}Z_2 \text{Im}Z_1 \quad \text{und} \\ \{Z_1, Z_2\} &= \text{Re}(Z_2 Z_1^*) = \text{Re}Z_1 \text{Re}Z_2 + \text{Im}Z_2 \text{Im}Z_1 . \end{aligned} \quad (3.5)$$

abgekürzt werden. Ein rotationsinvariantes Maß dafür, ob ein Impedanztensor in Klasse 2 (die nur lokale 3D Anomalie) gehört, ist

$$\mu = ([S_1, D_2] / \{S_1, D_2\})^{1/2} , \quad (3.6)$$

mit den Abkürzungen aus (3.5). Ein rotationsinvariantes Maß dafür, ob ein Tensor in Klasse 5 (die Überlagerung einer lokalen 3D Anomalie mit einer regionalen 2D Anomalie) gehört, ist

$$\eta = (|[D_1, S_2] - [S_1, D_2]|)^{1/2} / |D_2| . \quad (3.7)$$

Die regionale Streichrichtung wird für $\eta < 0.1$ mit

$$\tan(2\alpha) = ([S_1, S_2] - [D_1, D_2]) / ([S_1, D_1] + [S_2, D_2]) \quad (3.8)$$

gefunden. Die neuen, durch das regionale Streichen bestimmten Koordinaten seien im Folgenden mit x', y' bezeichnet. Dort gilt die Zerlegung

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Z_{nx'y'} \\ -Z_{ny'x'} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12}Z_{ny'x'} & a_{11}Z_{nx'y'} \\ -a_{22}Z_{ny'x'} & a_{21}Z_{nx'y'} \end{pmatrix} . \quad (3.9)$$

Es werden noch die "Auslenkwinkel" β_1 und β_2 durch

$$\tan(\beta_1) = -Z_{x'x'}/Z_{y'y'} = -a_{12}/a_{22}$$

und

$$\tan(\beta_2) = Z_{y'y'}/Z_{x'x'} = a_{21}/a_{11} \quad (3.10)$$

bestimmt, die als einzige Verzerrungsparameter direkt zugänglich sind. Nicht zugänglich sind dagegen die durch

$$\begin{aligned} Z_B &= (a_{12}^2 + a_{22}^2)^{1/2} Z_{nx'y'} = D' Z_{nx'y'}, \\ Z_B &= (a_{11}^2 + a_{21}^2)^{1/2} Z_{ny'x'} = D'' Z_{ny'x'}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

definierten Skalierungen oder "static shifts" D' und D'' .

Zusammengefaßt ist die Dekomposition eine Umrechnung der vier komplexen Impedanztensorelemente in zwei komplexe, regionale, skalierte Impedanzen Z_B , Z_B und vier reelle Größen α, β_1, β_2 und η .

3.2. Die Vertrauensbereiche der Schiefe

Um abzuschätzen, welche Grenzen den neuen Zerlegungsmethoden von der Datenqualität gesetzt werden, sollen mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetzes die Vertrauensbereiche der neuen 2D- bzw. 3D-Indikatoren aus den Vertrauensbereichen der Impedanzen selbst bestimmt werden.

Mit dS_1 , dD_1 etc. seien im Folgenden die Vertrauensbereiche der modifizierten Impedanzen (3.3) abgekürzt. SWIFTS Schiefe (3.4) hat den Vertrauensbereich

$$(d\chi)^2 = (dS_1/D_2)^2 + (S_1 dD_2/D_2^2)^2 = (\chi dS_1/S_1)^2 + (\chi dD_2/D_2)^2 \quad (3.12)$$

Unter der Annahme, daß der Realteil und der phasenverschobene Teil der Impedanz nur einen gemeinsamen Vertrauensbereich $dZ_1 =$

$d(\operatorname{Re} Z_1) = d(\operatorname{Im} Z_1)$ besitzen, ergibt sich der Vertrauensbereich des ersten Kommutators in (3.5) zu

$$d [Z_1, Z_2] = (dz_1^2 |Z_2|^2 + dz_2^2 |Z_1|^2)^{1/2} \quad (3.13)$$

Mit der Abkürzung

$$C = [D_1, S_2] - [S_1, D_2], \quad \eta = C^{1/2}/D_2 \quad (3.14)$$

kann der Vertrauensbereich der regionalen Schiefe η mit

$$\begin{aligned} d\eta^2 &= (dC / (2 C^{1/2} D_2))^2 + (dD_2 C^{1/2} / D_2^2)^2 = \\ &= (dC)^2 / (4 D_2^4 \eta^2) + \eta^2 (dD_2)^2 / D_2^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

abgeschätzt werden. Hierin ist

$$(dC)^2 = dD_1^2 |S_2|^2 + dS_2^2 |D_1|^2 + dS_1^2 |D_2|^2 + dD_2^2 |S_1|^2 \quad (3.16)$$

Im ungünstigsten Fall "dominiert" ein tellurischer Vektor, dh $D_1 \gg D_2$ und deshalb

$$S_1 \approx S_2 \approx D_1 \approx D_2 \approx Z_{xy} \quad (3.17)$$

Dann ist

$$(dC)^2 \approx 4 (dD_2)^2 D_2^2$$

und deshalb

$$d\eta^2 = (dD_2/D_2)^2 (\eta^2 + 1/\eta^2) \quad (3.18)$$

Wenn die Bedingung (3.17) nicht erfüllt ist, ist dieser Vertrauensbereich aber kleiner. Er sollte mit demjenigen von SWIFTS Schiefe (3.12) verglichen werden. Dann wird deutlich, daß die Dekomposition "besser" bestimmte Daten mit kleineren Vertrauensbereichen verlangt als die konventionelle 2D Auswertung. Insbesondere folgt aus (3.18), daß sich eine kleine regionale Schiefe nur sehr ungenau bestimmen läßt.

Schwache Dreidimensionalität

Wenn $\eta \approx 0$ ist, dann können die Phasen der beiden regionalen Impedanzen des Überlagerungsmodells mit

$$\theta_{x \cdot y} = \arg Z_{x \cdot y} \quad , \quad \theta_{y \cdot x} = \arg Z_{y \cdot x} \quad (3.19)$$

im mit Gl. (3.8) gefundenen Koordinatensystem bestimmt werden. Falls η nicht verschwindet, können diese Phasen angenähert aus den Phasen der tellurischen Vektoren

$$\begin{aligned} \tan(\theta_{\epsilon_x}) &= ((\text{Im } Z_{x \cdot x})^2 + (\text{Im } Z_{y \cdot x})^2) / ((\text{Re } Z_{x \cdot x})^2 + (\text{Re } Z_{y \cdot x})^2)^{1/2} \\ \tan(\theta_{\epsilon_y}) &= ((\text{Im } Z_{x \cdot y})^2 + (\text{Im } Z_{y \cdot y})^2) / ((\text{Re } Z_{x \cdot y})^2 + (\text{Re } Z_{y \cdot y})^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

bestimmt werden. Allerdings wird für $\eta \neq 0$ die regionale Streichrichtung mit Gl. (3.8) nur ungenau gefunden: In diesem Fall existiert überhaupt kein Koordinatensystem, in dem der Impedanztensor die einfache, zum Überlagerungsmodell gehörende, Form (3.9) hat. In dem mit (3.8) gefundenen Koordinatensystem stimmen dann u.U. die Phasen der beiden Impedanztensorelemente eines tellurischen Vektors gut überein, diejenigen des anderen Vektors dagegen überhaupt nicht.

Dies gilt ähnlich für das Koordinatensystem, das GROOM und BAILEY (1989) durch Minimierung eines Anpassungsfehlers

$$\text{eps} = \left(\sum_{i,j=x,y} |Z_{ij} - Z_{ij, \text{mod}}|^2 \right) / \left(\sum_{i,j=x,y} |Z_{ij}|^2 \right) \quad (3.21)$$

gefunden haben. Hierin sind die $Z_{ij, \text{mod}}$ die Impedanzen des auch von mir benutzten Superpositionsmodells und die Z_{ij} die Elemente des gemessenen Impedanztensors. Es läßt sich anhand von Abb. 2 leicht einsehen, daß der Zähler in (3.21) sich als

$$|e_x - e_{x \text{ mod}}|^2 + |e_y - e_{y \text{ mod}}|^2$$

schreiben läßt. Dies gibt den Abstand der gemessenen tellurischen Vektoren von denjenigen des Modells an. Im Fall starker Anisotropie, $(a_{12}^2 + a_{22}^2) \gg (a_{11} + a_{21}^2)$, wird mit (3.21) die Phase $\vartheta_{\neq x}$ des dem Betrage nach größeren tellurischen Vektors gut, die andere aber nur ungenau bestimmt.

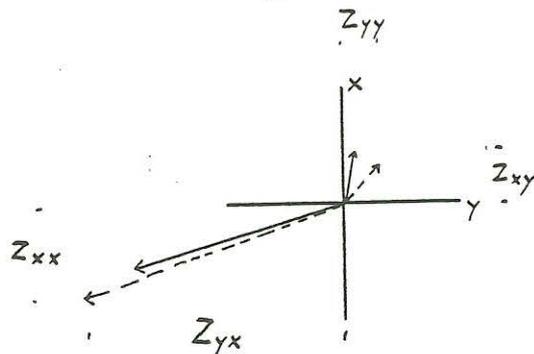


Abb. 2. Tellurische Vektoren (3.2) für moderate Abweichungen vom regionalen 2D Fall

3.4. Die schnelle δ Transformation

Deshalb soll das Superpositionsmodell (3.9) nun dahingehend abgewandelt werden, daß eine regionale Schiefe (3.7) eine "Phasenabweichung" δ in den Hauptdiagonalelementen des Impedanztensors erzeugt: Die Phasen der beiden Impedanztensorelemente eines tellurischen Vektors, die für $\eta = 0$ genau übereinstimmen sollten, unterscheiden sich jetzt um den Winkel δ . Um keinen der beiden tellurischen Vektoren bei der Bestimmung ihrer Phasen zu "bevorzugen", benutzen wir die ad hoc Bedingung, daß dieselbe Phasenabweichung für beide tellurischen Vektoren gelten muß: Der Impedanztensor im Koordinatensystem des regionalen Streichens ist dann

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} -a_{12}Z_{ny'x'} e^{i\delta} & a_{11}Z_{nx'y'} \\ -a_{22}Z_{ny'x'} & a_{21}Z_{nx'y'} e^{-i\delta} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

In (3.22) kann der Winkel δ der Phasenabweichung als zusätzlicher (achter) Modellparameter aufgefaßt werden, der die

regionale Schiefe η ersetzt: Die regionale Streichrichtung α fällt mit einer der Achsen eines Koordinatensystems zusammen, in dem der Impedanztensor die Form (3.22) hat. Es wird mit dem zwei Bedingungen für die beiden Spalten von (3.22) gefunden, und dabei werden zwei Variable, α und δ , gefunden. Die folgende mathematische Behandlung kann als Verallgemeinerung der Algebra von BAHR (1988) aufgefaßt werden, in der a priori $\delta = 0$ angenommen wurde.

Die Bedingung, daß im durch das regionale Streichen α festgelegten Koordinatensystem die Phasen der beiden Elemente der linken Spalte des Impedanztensors um δ differieren ist

$$(\arg Z_{x \cdot x \cdot}) - (\arg Z_{y \cdot x \cdot}) = \delta \quad \text{oder}$$

$$\frac{\operatorname{Re}(Z_{x \cdot x \cdot}) \cos \delta + \operatorname{Im}(Z_{x \cdot x \cdot}) \sin \delta}{\operatorname{Re}(Z_{y \cdot x \cdot})} = \frac{-\operatorname{Re}(Z_{x \cdot x \cdot}) \sin \delta + \operatorname{Im}(Z_{x \cdot x \cdot}) \cos \delta}{\operatorname{Im}(Z_{y \cdot x \cdot})} \quad (3.23)$$

Diese Bedingung soll durch die modifizierten Impedanzen (3.3) ausgedrückt werden. Nach einer Koordinatentransformation um den Winkel α werden diese modifizierten Impedanzen

$$\begin{aligned} D_1' &= D_1 \cos(2\alpha) + S_2 \sin(2\alpha), & D_2' &= D_2 \\ S_2' &= S_2 \cos(2\alpha) - D_1 \sin(2\alpha), & S_1' &= S_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

und deshalb

$$Z_{x \cdot x \cdot} = S_1' + D_1' = S_1 + D_1 \cos(2\alpha) + S_2 \sin(2\alpha)$$

und

$$Z_{y \cdot x \cdot} = -D_2' + S_2' = -D_2 + S_2 \cos(2\alpha) - D_1 \sin(2\alpha), \quad (3.25)$$

Mit (3.25) wird Gl. (3.23)

$$-A \sin(2\alpha) + B \cos(2\alpha) + C + E \cos(2\alpha)\sin(2\alpha) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = ([S_1, D_1] + [S_2, D_2]) \cos \delta + (\{S_1, D_1\} + \{S_2, D_2\}) \sin \delta \\ B &= B_1 + B_2 = ([S_1, S_2] - [D_1, D_2]) \cos \delta + (\{S_1, S_2\} - \{D_1, D_2\}) \sin \delta \\ C &= C_1 + C_2 = ([D_1, S_2] - [S_1, D_2]) \cos \delta + (\{D_1, S_2\} - \{S_1, D_2\}) \sin \delta \\ E &= E_2 = (\{S_1, S_1\} - \{D_2, D_2\}) \sin \delta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Hierin sind die 'Kommutatoren' $[\]$, $\{ \}$ durch (3.5) definiert.

Für $\delta = 0$ wird (3.26) die Bedingung von BAHN (1988) zur Bestimmung des regionalen Steichens.

Die zweite Bedingung ist, daß im Koordinatensystem des regionalen Streichens die Phasen der beiden Elemente in der rechten Spalte des Impedanztensors um $-\delta$ von einander abweichen. Diese Bedingung lautet analog zu (3.26)

$$-A'' \sin(2\alpha) + B'' \cos(2\alpha) + C'' + E'' \cos(2\alpha)\sin(2\alpha) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} A'' &= A_1 - A_2 \\ B'' &= B_1 - B_2 \\ C'' &= -C_1 + C_2 \\ E'' &= E_2 = E, \end{aligned} \quad (3.27)$$

darin sind die Terme A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2, E_2 in (3.26) definiert. Mit den Gleichungen (3.26) und (3.27) können die Unbekannten α und δ gefunden werden. Ihre Kombination führt auf

$$\begin{aligned} \frac{(-A_1 \sin(2\alpha) + B_1 \cos(2\alpha))}{(-C_2 - E_2 \sin(2\alpha)\cos(2\alpha))} &= \frac{C_1}{(-A_2 \sin(2\alpha) + B_2 \cos(2\alpha))} \\ &= \tan \delta \end{aligned} \quad (3.28)$$

Unter der Annahme, daß

$$(B_1 A_2 + A_1 B_2 + C_1 E_2)^2 < 4 (B_1 B_2 - C_1 C_2) (A_1 A_2 - C_1 C_2), \quad (3.29)$$

ist die Lösung für α

$$\tan(2\alpha_{1,2}) = \frac{1}{2} \frac{(B_1 A_2 + A_1 B_2 + C_1 E_2)}{(A_1 A_2 - C_1 C_2)} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{(B_1 A_2 + A_1 B_2 + C_1 E_2)^2}{(A_1 A_2 - C_1 C_2)^2} - \frac{(B_1 B_2 - C_1 C_2)}{(A_1 A_2 - C_1 C_2)}} \quad (3.30)$$

δ kann dann durch Einsetzen von α in (3.28) gefunden werden. Die beiden Subskripte 1,2 beziehen sich auf die unterschiedlichen Vorzeichen der Wurzel in (3.30) und führen auf zwei Koordinatensysteme, in denen die regionale Schiefe η entweder in eine minimale oder eine maximale Phasenabweichung überführt wird. Obwohl beide Koordinatensysteme mathematisch äquivalent sind, bevorzugen wir dasjenige mit der minimalen Phasenabweichung. In diesem Koordinatensystem können schließlich die Phasen der regionalen Impedanzen nach (3.19) berechnet werden.

Es muß noch beachtet werden, daß (3.30) unstabil wird, wenn der Impedanztensor in die Verzerrungsklasse 2 (die nur lokale 3D Anomalie) fällt: Dann ist $A_1 = B_1 = C_1 = 0$, dh. es treten überhaupt keine Phasenunterschiede auf, die Anwendung der Dekomposition ist dann nicht notwendig.

Ebenso führt (3.30) auf ein unstabiles Ergebnis, wenn $\eta = 0$ ist: Dann ist auch $C_1 = 0$, und (3.28) führt auf eine Phasenabweichung $\delta = 0$. In diesem Fall ist aber die einfachere Dekomposition von BÄHR (1988) eine stabile Lösung. Nur für noch kompliziertere Verzerrungstypen sollte die δ -Transformation benutzt werden.

3.5. Erweiterung von GROOMs Methode

Wenn die Bedingung (3.29) nicht erfüllt ist, existiert die Lösung (3.30) nicht.

Es ist aber möglich, nach GROOM und BAILEY (1989) den Zusammenhang zwischen den Parametern der Dekomposition und den Eingangsgrößen, den modifizierten Impedanzen (3.3), durch ein Gleichungssystem darzustellen. GROOM und BAILEY bestimmen aus den 4 komplexen Impedanzen nur 7 Zahlen, nämlich neben den

komplexen regionalen Impedanzen noch die regionale Streichrichtung α und zwei den Auslenkwinkeln β_1, β_2 entsprechende Verzerrungsparameter, ihr Gleichungssystem ist also leicht überbestimmt. Hier soll nun als achter Parameter die Phasenabweichung δ hinzugefügt werden. Das sich ergebene komplexe Gleichungssystem

$$S_1 = -\sin\beta_1 Z_B e^{i\delta} + \sin\beta_2 Z_B e^{-i\delta}$$

$$D_2 = -\cos\beta_1 Z_B + \cos\beta_2 Z_B$$

$$D_1 = (-\sin\beta_1 \cos 2\alpha e^{i\delta} + \cos\beta_1 \sin 2\alpha) Z_B + (-\sin\beta_2 \cos 2\alpha e^{-i\delta} + \cos\beta_2 \sin 2\alpha) Z_B$$

$$S_2 = (\cos\beta_1 \cos 2\alpha + \sin\beta_1 \sin 2\alpha e^{i\delta}) Z_B + (\cos\beta_2 \cos 2\alpha + \sin\beta_2 \sin 2\alpha e^{-i\delta}) Z_B$$

(3.31)

kann in 8 reelle Gleichungen aufgespalten werden, wobei noch

$$e^{i\delta} = \cos\delta + i \sin\delta \quad (3.31a)$$

zu setzen ist. Das Gleichungssystem ist nichtlinear. Es wird durch Minimierung eines (3.21) entsprechenden Anpassungsfehlers

$$\epsilon = \frac{|D_1 - D_{1m}|^2 + |S_2 - S_{2m}|^2 + |D_2 - D_{2m}|^2 + |S_1 - S_{1m}|^2}{|D_1|^2 + |S_2|^2 + |D_2|^2 + |S_1|^2} \quad (3.32)$$

gelöst. Dabei sind D_1, S_2 etc. die gemessenen modifizierten Impedanzen und D_{1m}, S_{2m} etc. die nach (3.31) aus den acht Parametern der Dekomposition errechneten modifizierten Impedanzen. Die Linearisierung von (3.31) ist im folgenden Abschnitt beschrieben. Es sei aber vorweggenommen, daß in denjenigen Fällen, in denen die Lösung (3.30) existiert, der Anpassungsfehler

(3.32) Null wird und die Lösung von (3.31) auf dasselbe Koordinatensystem führt, das auch mit (3.30) gefunden wird.

Für $\delta = 0$ geht (3.32) in das von GROOM und BAILEY (1989) benutzte Gleichungssystem über. Der Anpassungsfehler verschwindet nur dann, wenn die regionale Schiefe η verschwindet. Hier wird deutlich, daß jeder der drei Parameter η , δ und ϵ alternativ als Maß für Abweichungen von der Zwei-dimensionalität der regionalen Struktur gelten kann.

3.6. Lösung durch Linearisierung und Matrixinversion

Die hier beschriebene Lösung eines Systems von 8 nichtlinearen Gleichungen mit 8 Unbekannten kann als Spezialfall der von MARQUARDT (1963) beschriebenen Linearisierungsaufgabe aufgefaßt werden. GROOM und BAILEY (1989) sind einen ähnlichen Weg gegangen, haben aber die numerischen Methoden nicht veröffentlicht.

Gegeben seien ein Modellvektor

$$\underline{x} = (\text{Re } Z_B, \text{Im } Z_B, \text{Re } Z_B, \text{Im } Z_B, \beta_1, \beta_2, \alpha, \delta) \quad (3.33)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

und ein Datenvektor

$$\underline{y} = (\text{Re } S_1, \text{Im } S_1, \text{Re } D_2, \text{Im } D_2, \text{Re } D_1, \text{Im } D_1, \text{Re } S_2, \text{Im } S_2)$$

Der Zusammenhang zwischen ihnen wird durch 8 reelle Gleichungen, die sich aus (3.31) ergeben, hergestellt:

$$\underline{y} = \underline{F}(\underline{x}) \quad (3.34)$$

Das Funktional \underline{F} , welches auf den Modellvektor \underline{x} anzuwenden ist, wird in der Nähe der Lösung in eine Reihe entwickelt, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Wenn eine vorläufige Lösung \underline{x}^{n-1} bekannt ist, kann (3.34) als

$$\underline{y} = \underline{F}(\underline{x}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{F}(x_1^n - x_1^{n-1}) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_8} \underline{F}(x_8^n - x_8^{n-1})$$

oder

$$\underline{y} - \underline{F}(\underline{x}^{n-1}) = \underline{G}(\underline{x}^n - \underline{x}^{n-1}) \quad (3.35)$$

geschrieben werden. \underline{G} ist eine 8x8 Matrix, die die Ableitungen der 8 Zeilen von \underline{F} nach den 8 Modellparametern enthält. Sie wird hier aus Platzgründen nicht aufgeführt. (RITTER (1988) hat das entsprechende Gleichungssystem für $\delta = 0$ angegeben.) Die Auflösung von (3.35)

$$\underline{x}^n = \underline{x}^{n-1} + \underline{G}^{-1}(\underline{y} - \underline{F}(\underline{x}^{n-1})) \quad (3.36)$$

liefert eine Iterationsformel, mit der eine verbesserte Lösung gefunden wird. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß \underline{G}^{-1} eine echte inverse Matrix ist, weil \underline{x} und \underline{y} dieselbe Dimension haben - dies ist bei den allgemein als "MARQUARDTverfahren" bezeichneten Inversionsmethoden nicht der Fall.

(3.35) kann nur angewandt werden, wenn die partiellen Ableitungen von \underline{F} im Gebiet zwischen \underline{x}^{n-1} und der Lösung monoton sind, oder anschaulich: Wenn zwischen der gesuchten Lösung, für die der Anpassungsfehler (3.32) ein absolutes Minimum hat, und der Start - Lösung keine relativen Maxima dieses Anpassungsfehlers auftreten.

Abb. 3 zeigt diesen Anpassungsfehler in Abhängigkeit von zwei Modellparametern, während die übrigen sechs festgehalten werden. Als Startmodell \underline{x}^0 können die Parameter der Dekomposition (3.8) benutzt werden, dabei ist der Startwert von δ , $\delta_0 = x_8^0$ gleich Null zu setzen.

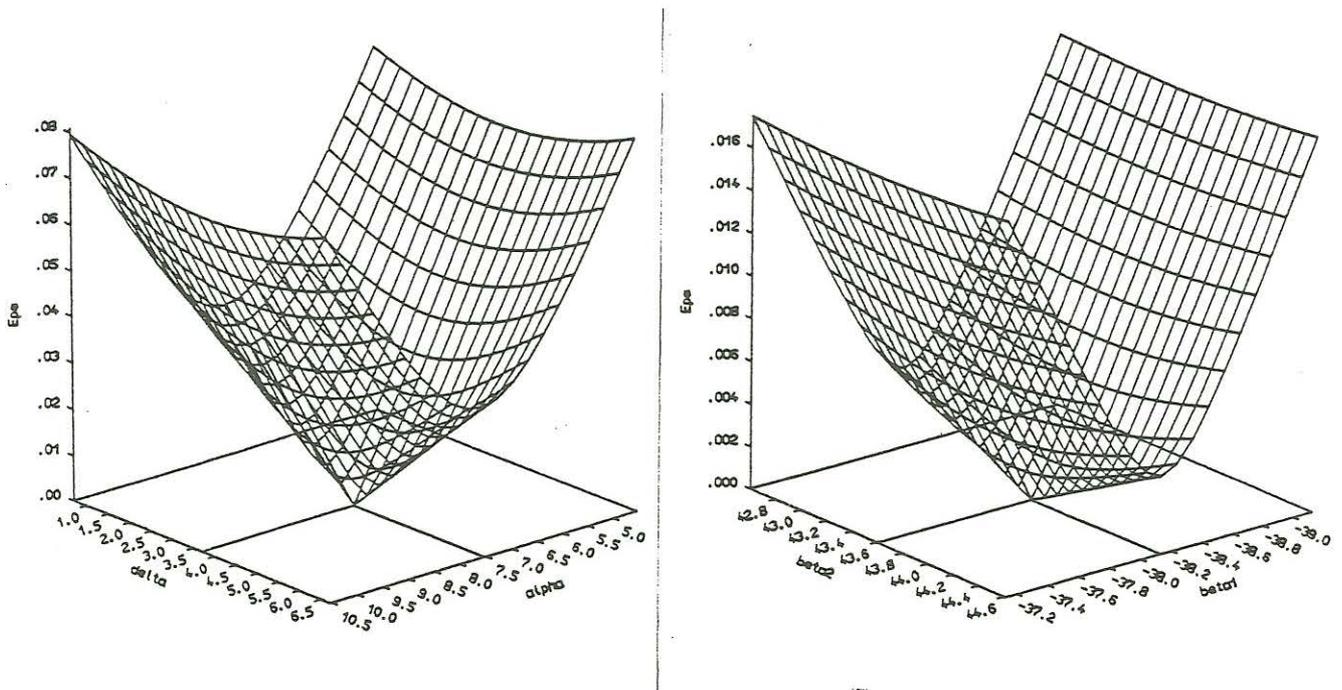


Abb.3. Anpassungsfehler (3.32) der Dekomposition durch Matrixinversion für den Impedanztensor der Station 002 an der KTB Vorbohrung, bei der Periode 512 sec. Links: in Abhängigkeit von den Modellparametern α und δ . Rechts: in Abhängigkeit von β_1 und β_2 , den "Auslenkwinkeln" nach (3.10)

3.7. Lösung durch Evolutionsstrategie

Die einfache Form des Minimums des Anpassungsfehlers in Abb. 3 soll nicht darüber hinwegtäuschen, daß der achtdimensionale Parameterraum mehrere relative Minima des Anpassungsfehlers haben kann (insbesondere existieren in allen Fällen, in denen die Bedingung (3.29) erfüllt ist, zwei Minima mit $\epsilon = 0$). Wenn der Startwert zu weit weg vom gesuchten absoluten Minimum liegt, sind u.U. die im letzten Kapitel genannten Voraussetzungen für die Anwendung des "MARQUARDTVerfahrens" nicht erfüllt.

An dieser Stelle wird ein Optimierungsverfahren gesucht, das nicht von den partiellen Ableitungen des Funktionals F in (3.34) abhängig ist. Man wird sofort an das Monte-Carlo Verfahren denken: Wenn der Parameterraum in allen acht Dimensionen innerhalb genügend großer Intervallgrenzen und mit ausreichend

kleiner Schrittweite abgetastet wird, kann sicher das absolute Minimum gefunden werden. Leider ist das Verfahren viel zu langsam: Wenn z.B. jeder der acht Parameter in nur 100 Schritten variiert wird, müssen $100^8 = 10^{16}$ Modelle ausprobiert werden. Schneller als das Monte-Carlo Verfahren ist eine Kombination von Zufallssuche und Evolutionsstrategie, die PRICE (1973) entwickelt hat, und die MARTINEZ (1988) zur 1D-Interpretation magnetotellurischer Sondierungen benutzt hat. MARTINEZ (1988) gab der Methode den Namen "gezielte Zufallssuche". Sie soll hier nicht noch einmal grundsätzlich, sondern nur in ihrer speziellen Anwendung auf die Dekomposition des Impedanztensors erklärt werden.

- 1) Zunächst wird wie bei der Lösung durch Matrixinversion ein Startmodell \underline{x}^0 durch die vereinfachte Dekomposition (3.8) und die Zusatzbedingung $x_8^0 = 0$ gefunden.
- 2) Das Modell wird mit einem Rauschgenerator innerhalb gewisser Grenzen \underline{x}_g variiert:

$$x_i^1 = x_i^0 + x_{g_i} (-1 + 2*ZV), \quad i = 1,8 \quad (3.37)$$

Hierin ist ZV eine normierte Zufallsvariable, die Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Die Intervallgrenzen x_{g_i} werden in Abhängigkeit von der regionalen Schiefe η festgesetzt, weil für kleine Werte von η die Dekomposition (3.8) bereits eine gute Näherung darstellt. Außerdem ist zu beachten, daß die ersten vier Modellparameter Beträge von Impedanzen und die anderen vier Winkel sind (vgl. (3.33)):

$$x_{g_i} = \eta \text{ cabs}(D_2), \quad i = 1,4 \text{ und } x_{g_i} = \eta 90^\circ, \quad i = 5,8 \quad (3.38)$$

- 3) Schritt 2) wird 500 mal wiederholt, alle Modelle sowie die für sie berechneten Anpassungsfehler (3.32) werden gespeichert.
- 4) Schritt 2) wird 5000 mal wiederholt, aber ein Modell wird nur noch dann aufgehoben, wenn sein Anpassungsfehler ϵ kleiner ist als der maximale in den 500 gespeicherten Modellen auftretende Anpassungsfehler. Das Modell nimmt dann den Platz des "alten" Modells mit dem maximalen ϵ ein. Dagegen werden alle neuen Modelle mit noch größerem ϵ verworfen. Von diesem "Überleben" der Modelle mit kleinem Anpassungsfehler rührt der Name "Evolutionsstrategie" her.
- 5) Als neues Startmodell \underline{x}_0 wird aus den 500 überlebenden Modellen dasjenige mit minimalem Anpassungsfehler gewählt.

6) Schritt 2) bis 4) wird etwa vier mal wiederholt, wobei jedesmal die Intervallgrenzen x_{g_i} , $i=1,8$ auf 30% des vorherigen Wertes reduziert werden. Beim letzten Durchlauf sind diese Intervallgrenzen also um den Faktor $(0.3)^4 \approx 0.01$ kleiner als die in (3.38) angegebenen.

Insgesamt werden also $5 * 5000 = 25000$ Modelle durch Ausrechnen der Impedanzen S_1 , D_2 , D_1 , S_2 nach (3.31) und des Anpassungsfehlers ϵ nach (3.32) ausprobiert. Das dauert auf einem IBM AT (286/287) etwa zwei Minuten.

Jetzt soll die verbesserte Dekomposition noch einmal im Überblick dargestellt werden: Zunächst wird mit Berechnung der regionalen Schiefe, (3.7), getestet, ob nicht die alte Dekomposition (3.8)..(3.10) und (3.19) das regionale Streichen und die regionalen Phasen genügend genau bestimmt. Für $\eta < 0.05$ ist dies wahrscheinlich der Fall. Wenn $\eta > 0.05$ und außerdem die Bedingung (3.29) erfüllt ist, werden mit (3.30) eine verbesserte regionale Streichrichtung und dann mit (3.9) und (3.20) verbesserte regionale Phasen gefunden. Wenn die Bedingung (3.29) nicht erfüllt ist, kann die Matrixinversion (3.33) bis (3.36) versucht werden. Nur, wenn diese Methode nicht konvergiert, wird die Evolutionstrategie, (3.37), (3.38) benutzt. In Abschnitt 4 geben wir ein Beispiel mit Felddaten.

4. Bestimmung der Streichrichtung der Induktionsanomalie unter der Oberpfalz

EISEL (1990) hat bei der Auswertung langperiodischer magnetischer Registrierungen längs eines Nord-Süd Profils in der Oberpfalz sehr große und genau nach Süden weisende Induktionspfeile gefunden, die die Vermutung von JENSEN et al (1988) stützen, daß unter der Oberpfalz eine genau ost-west streichende Leitfähigkeitsanomalie liegt. EISEL hat diese Struktur mit zweidimensionalen Modellrechnungen (vgl. Abb. 4) untersucht und als elektrisch guten Leiter in etwa 10 km Tiefe interpretiert, wobei die "Anomalie" durch eine regionale Verstärkung der integrierten Leitfähigkeit entsteht. Wegen ihrer Lage und Streichrichtung ist diese Anomalie mit der Grenze zwischen den tektonischen Großschollen Saxothuringikum und Moldanubikum identifiziert worden. Während sie mit Induktionspfeilen, also durch die Methode der erdmagnetischen Tiefensondierung, sehr gut identifiziert wurde, war sie in den stark verzerrten magnetotellurischen Übertragungsfunktionen zunächst gar nicht zu erkennen. Mit Tab. 1 soll über den Versuch berichtet werden, die Streichrichtung der Anomalie direkt als Parameter $x_7 = \alpha$ der stabilisierten Dekomposition zu finden.

Die verbesserte Zerlegung wird auf die Station 002 in der Oberpfalz (JENSEN et al., 1988) angewandt. Diese Station gehört schon fast in die Verzerrungsklasse 6, da die Summe der Auslenkwinkel $\beta_1 + \beta_2 \approx 90^\circ$ ist, deshalb ist die alte (BAHR, 1988) Bestimmung der Streichrichtung α_2 noch unbefriedigend. SWIFTS (1967) Streichrichtung α_1 gibt nur das Streichen lokaler Strukturen wieder. Die mit der neuen Dekomposition gefundene Streichrichtung α_3 schwankt mit nur wenigen Grad Abweichung um -3° . In Tab. 2 ist derselbe Test für eine Periode und sechs verschiedene Stationen in der Oberpfalz wiederholt. Damit ist das West-Ost Streichen der magnetotellurischen Anomalie gefunden. Die Aufspaltung der Phasen, die zu den beiden Polarisierungen dieser 2D Anomalie gehören, ist bereits vorgestellt worden (BAHR, 1990).

Tab. 1. Anwendung der stabilisierten Dekomposition auf die Station 002 im KTB Kerngebiet. T: Periode. α_1 : Streichrichtung nach SWIFT. α_2 : regionale Streichrichtung nach (3.8). α_3 : stabilisierte regionale Streichrichtung nach (3.30). Methode: S: Lösung nach (3.30) M: Lösung durch Matrixinversion, E: Lösung durch Evolutionsstrategie. ϵ : Anpassungsfehler nach (3.32). $\phi_{\epsilon x}, \phi_{\epsilon y}$: Phasen der tellurischen Vektoren (3.20). χ : Schiefe nach SWIFT (3.4). η : regionale Schiefe (3.7). δ : Phasenabweichung innerhalb der tellurischen Vektoren (3.22), $\beta_1 + \beta_2$: Summe der Auslenkwinkel (3.10).

T[sec]	α_1	α_2	α_3	Metho	ϵ	$\phi_{\epsilon x}$	$\phi_{\epsilon y}$	χ	η	δ	$\beta_1 + \beta_2$
1024	57	24	3	M	8%	40	-	.64	.24	3	102
784	63	30	1	S	0	48	-	.90	.33	4	
512	58	16	-7	M	<1%	45	64	.53	.28	4	82
342	61	19	-1	S	0	41	65	.75	.33	4	81
256	46	3	-7	M	<1%	38	31	.21	.22	2	85
171	55	10	-7	E	2%	47	43	.54	.30	4	81
128	51	14	-4	S	0	51	60	.45	.29	4	83
85	57	15	-4	E	2%	48	49	.68	.34	6	78
64	59	18	-2	S	0	45	75	.78	.32	4	
42	51	10	-15	M	<1%	45	64	.49	.35	7	
32	52	7	-26	M	3%	47	64	.56	.41	9	84
21	51	2	-9	E	5%	50	48	.58	.42	5	82
16	48	4	-10	E	4%	50	49	.49	.41	10	81

Tab. 2. Anwendung der stabilisierten Dekomposition auf sechs Stationen in der Oberpfalz, bei T = 171 sec. (α_1, α_2 und α_3 : vgl. Tab. 1)

Station		α_1	α_2	α_3	Methode
002	(JENSEN et al, 1988)	51	14	-4	E
006	"	46	20	10	E
013	"	-16	17	-8	M
015	"	16	17	-5	S
017	"	52	37	-8	S
TIG	(EISEL, 1990)	66	43	5	S

In Abb. 4 schließlich soll der derzeitige Kenntnisstand über die Leitfähigkeitsverteilung unter dem KTB-Bohrplatz zusammengefaßt werden: "Überregional" wirksam ist die von EISEL (1990) gefundene ost-west streichende Struktur in 10 km Tiefe. "Regional" überlagert sich ihr die NW-SE streichende ZEV, die zu SW-NE polarisierten tellurischen Feldern führt. "Lokale", durch Graphite innerhalb der ZEV entstandene zusätzliche Leitfähigkeitsanomalien (HAAK et al, 1990) verursachen zusätzlich noch lokale Verstärkungen der tellurischen Felder.

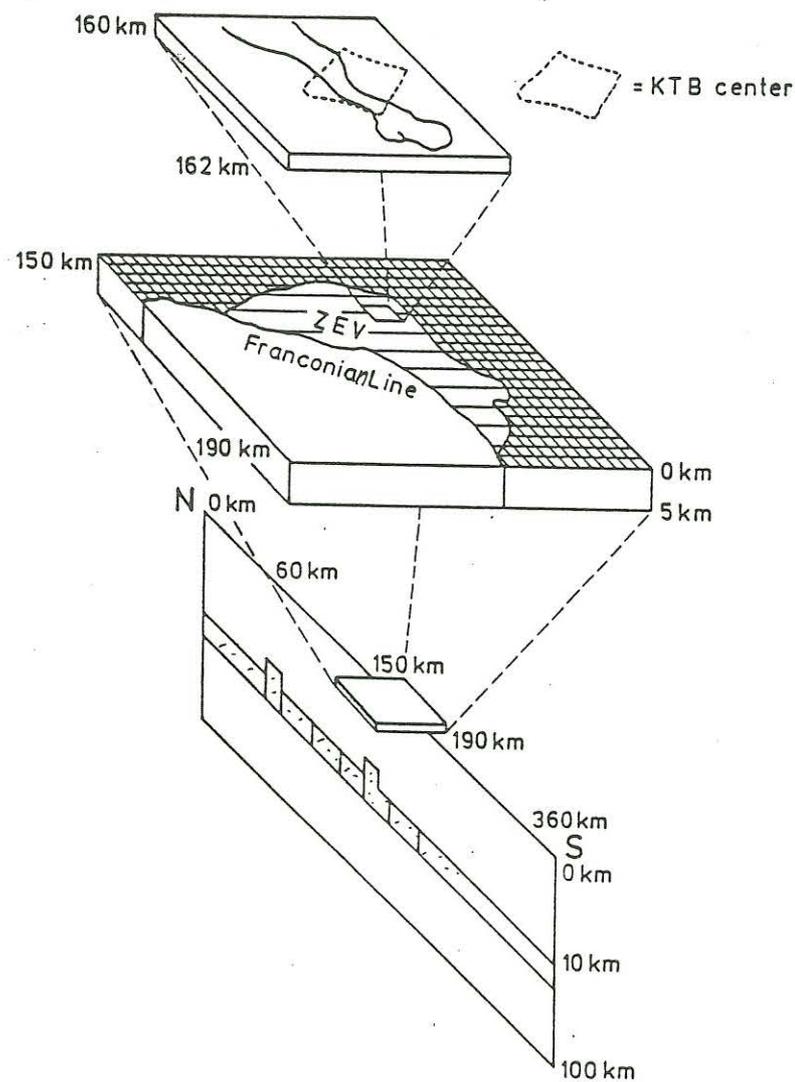


Abb. 4. Das Superpositionsmodell für die Oberpfalz. Erklärung im Text.

Literatur

- Bahr, K., 1988. Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: regional induction and local telluric distortion. *J. Geophys.*, 62, 119-127.
- Bahr, K., 1990. Die Dekomposition des magnetotellurischen Impedanztensors von Stationen im Umfeld der KTB-Lokation. KTB-Report 90-3, ed. K. Bram, Projektleitung KTB in NLfB, Hannover.
- Eisel, M., 1990. Über die Superposition von lokalen und regionalen Leitfähigkeitsstrukturen, untersucht anhand magnetotellurischer Messungen entlang eines Nord-Süd-Profiles im Nordosten der Oberpfalz. Diplomarbeit, Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Frankfurt.
- Groom, R.W. and Bailey, R.C., 1989. Decomposition of the magnetotelluric impedance tensor in the presence of local three-dimensional galvanic distortion. *J. Geophys. Res.*, 94 (B2), 1913-1925.
- Haak, V., Stoll, J. and Winter, H., 1990. Why is the electrical resistivity around the KTB hole so low? submitted to *Phys. Earth Planet. Int.*
- Jensen, U, Karmann, R and Scharberth, J., 1988. Elektromagnetische Tiefensondierung KTB. KTB-Report 88-3, ed. K. Bram, NLfB, Hannover.
- Marquardt, D.W., 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 11, 431-441.
- Martinez, M.M.: 1988. Grundlagen neuerer Inversionsmethoden und ihre Anwendung auf die 1D-Inversion in der Magnetotellurik. Diss. Fachb. Geowissenschaften, FU Berlin
- Price, W.L., 1977. A controlled random search procedure for global optimization. *The Computer Journal*, 20, 367-370
- Ritter, P., 1988: Magnetotellurik auf der Insel Milos: Registrierung, Auswertung und Entzerrung des Impedanztensors. Diplomarbeit, Institut für Geophysikalische Wissenschaften, Frei Universität Berlin.
- Swift, C.M., 1967. A magnetotelluric investigation of an electrical conductivity anomaly in the south western United States. Ph. D. thesis, M.I.T., Cambridge, Mass.